VIENNA
ACADEMY

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN
AKADEMIE
DER
WISSENSCHAFTEN




115 2 A Abt
1906
UNIV.
OF
MICH.
Digitized by Google





SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

HUNDERTFÜNFZEHNTER BAND.

WIEN, 1906.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN KLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CXV. BAND. ABTEILUNG II a.

JAHRGANG 1906. — HEFT I BIS X.

(MIT 10 TAFELN UND 206 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1906.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

INHALT.

Seite

Aigner F., Einfluß des Lichtes auf elektrostatisch geladene Konduktoren. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 75 h — 75 pf] 1485

Ball L., de, Die Radau'sche Theorie der Refraktion. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis 1 K 65 h — 1 M 65 pf] 1363

Benndorf H., Über die Störung des homogenen elektrischen Feldes durch ein leitendes dreiachsiges Ellipsoid. [Preis: 95 h — 95 pf] 391

— Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIII. Über gewisse Störungen des Erdfeldes mit Rücksicht auf die Praxis luftelektrischer Messungen. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 95 h — 95 pf] 425

— Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinneren (II. Mitteilung). (Mit 9 Textfiguren.) [Preis: 1 K 50 h — 1 M 50 pf] 941

Börnstein R., Die halbtägigen Schwankungen der Temperatur und des Luftdruckes. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 75 h — 75 pf] 881

Bunzl L., Über die Occlusion der Radiumemanation durch feste Körper. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 55 h — 55 pf] 21

Conrad V., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIV. Messungen des Ionengehaltes der Luft auf dem Säntis im Sommer 1905. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 80 h — 80 pf] 1055

Daublebsky v. Sterneck R., Über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes und die scheinbare Größe der Gestirne. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 1 K 15 h — 1 M 15 pf] 547

Doležal E., Das Problem der sechs Strahlen oder der sieben Punkte in der Photogrammetrie. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K — 1 M] . . . 1691

Ehrenfest T. und **P.**, Bemerkung zur Theorie der Entropiezunahme in der »Statistischen Mechanik« von W. Gibbs. [Preis: 35 h — 35 pf] . 89

Exner F. und **Haschek E.**, Über Linienverschiebungen in den Spektren von Ca, Sn und Zn. [Preis: 65 h — 65 pf] 523

Exner F. M., Grundzüge einer Theorie der synoptischen Luftdruckveränderungen. (Mit 25 Textfiguren.) [Preis: 3 K 20 h — 3 M 20 pf] . . 1171

Geitler J., v., Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertz'sche Wellen. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 1031

Grau A. und **Russ F.**, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (Mit 4 Tafeln und 8 Textfiguren.) [Preis: 2 K 80 h — 2 M 80 pf] 1571

Hasenöhrl F., Zur Ableitung des mathematischen Ausdruckes des zweiten Hauptsatzes. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 25 h — 25 pf] 1005

Hasslinger R., v., Über das Wesen metallischer und elektrolytischer Leitung. (Mit 4 Texfiguren.) [Preis: 1 K 10 h — 1 M 10 pf] . . . 1521

Hauser F., Nr. VIII der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Ein Apparat zur

Seite

Kopierung phonographischer Schrift von Edison-Walzen auf die Platten des Archivphonographen. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 779

Hepperger J., v., Bestimmung der Masse des Biela'schen Kometen. [Preis: 1 K 50 h — 1 M 50 pf] 785

Hess V. F., Über eine Modifikation der Pulfrich'schen Formel, betreffend das Brechungsvermögen von Mischungen zweier Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der beim Mischen eintretenden Volumänderung. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 80 h — 80 pf] 459

Holetschek J., Über die mutmaßliche Zeit der Wiederauffindung des Halley'schen Kometen bei seiner nächsten Erscheinung. [Preis: 50 h — 50 pf] 683

— Über die scheinbare Verlängerung eines Kometenschweifes beim Durchgange der Erde durch die Ebene der Kometenbahn. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 70 h — 70 pf] 1451

Jäger G., Über die Gestalt eines schwerelosen flüssigen Leiters der Elektrizität im homogenen elektrostatischen Felde. (Mit 8 Textfiguren.) [Preis: 85 h — 85 pf] 923

Jaumann G., Elektromagnetische Vorgänge in bewegten Medien. (II. Mitteilung.) [Preis: 1 K 50 h — 1 M 50 pf] 337

Kielhauser E., Notiz über das Leuchten von Aluminiumelektroden in verschiedenen Elektrolyten. [Preis: 20 h — 20 pf] 1335

Klingatsch A., Über photographische Azimutbestimmung. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 101

— Die Fehlerkurven der photographischen Punktbestimmung. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 1009

Knoll H., Über langsame Ionen in atmosphärischer Luft. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 161

Kohlrausch K. W. F., Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 673

— Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVII. Über Radiuminduktion in der atmosphärischen Luft und eine Methode zur absoluten Messung derselben. [Preis: 30 h — 30 pf] 1321

Lampa A., Über einen Reibungsversuch. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 40 h — 40 pf] 871

— Über Rotationen im elektrostastischen Drehfelde. Ein Beitrag zur Frage der dielektrischen Hysteresis. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 95 h — 95 pf] 1659

Landau E., Über den Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie. [Preis: 1 K 20 h — 1 M 20 pf] 589

Lang V., v., Versuche im elektrostatischen Drehfelde. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 50 h — 50 pf] 211

Lecher E., Zur Theorie der Thermoelektrizität. (Mit 11 Textfiguren.) [Preis: 1 K — 1 M] 173

Seite

Lecher E., Elementare Darstellung zweier elektrischer Fundamentalsätze vom Standpunkte der Elektronentheorie. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 35 h — 35 pf] 1327

— Bestimmung des Peltiereffektes Konstantan-Eisen bei 20° C. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 60 h — 60 pf] 1505

Leon A., Über das elastische Gleichgewicht einer Hohlkugel, beziehungsweise eines Hohlzylinders, wenn auf die äußere und innere Oberfläche ein gleichmäßiger Druck p_a, beziehungsweise p_i wirksam ist, unter Berücksichtigung von Gliedern in den Spannungen, die bezüglich der Deformationselemente von zweiter Ordnung sind. [Preis: 80 h — 80 pf] 309

— Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind. I. und II. (Mit 13 Textfiguren.) [Preis: 70 h — 70 pf] 1423

— Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind. III. [Preis: 35 h — 35 pf) 1441

Lerch F., v., Trennungen des Radiums *C* vom Radium *B*. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 50 h — 50 pf] 197

Mach E., Über den Einfluß räumlich und zeitlich variierender Lichtreize auf die Gesichtswahrnehmung. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 70 h — 70 pf] 633

Mache H., Ein einfacher Beweis für das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung. [Preis: 30 h — 30 pf] 1435

Meißner F., Über eine Fehlerquelle bei thermoelektrischen Messungen. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 35 h — 35 pf] 847

Meitner L., Wärmeleitung in inhomogenen Körpern. [Preis: 50 h — 50 pf] 125

— Über einige Folgerungen, die sich aus den Fresnel'schen Reflexionsformeln ergeben. [Preis: 40 h — 40 pf] 859

Mertens F., Über die Gestalt der Wurzeln einer Klasse auflösbarer Gleichungen, deren Grad eine ungerade Primzahl ist. [Preis: 35 h — 35 pf] 3

— Über komplexe Einheiten. [Preis: 20 h — 20 pf] 481

— Über die Darstellung der Legendre'schen Symbole der biquadratischen, kubischen und bikubischen Reste durch Thetareihen. [Preis: 70 h — 70 pf] 1339

Meyer St. und **Schweidler E., R. v.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (VI. Mitteilung.) Über Radium *F* (Polonium). (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 95 h — 95 pf] 63

— — Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (VII. Mitteilung.) Über die aktiven Bestandteile des Radiobleis. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 60 h — 60 pf] 697

— — Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (IX. Mitteilung.) Einige Versuche über die Absorption der α-Strahlung in Aluminium. (Mit 9 Textfiguren.) [Preis: 1 K 05 h — 1 M 05 pf] 713

Seite

Pfaundler L., Über eine neue Konstruktion einer Leydenerbatterie mit Umschaltungsvorrichtung von Parallelanordnung auf Kaskadenanordnung. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 25 h — 25 pf] 479

Pick G., Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen [Preis: 70 h — 70 pf] 139

— Über nirgends singuläre lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. [Preis: 35 h — 35 pf] 1475

Prey A., Konvergenzuntersuchungen zum Gesetze der Amplitudenabnahme bei Pendelbeobachtungen. [Preis: 70 h — 70 pf] 649

Przibram K., Über die Kondensation von Dämpfen in ionisierter Luft. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 25 h — 25 pf] 33

Rožič J., Beitrag zur Theorie der Linde'schen Luftverflüssigungsmaschine. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 50 h — 50 pf] 1559

Schell A., Die stereophotogrammetrische Ballonaufnahme für topographische Zwecke. (Mit 12 Textfiguren.) [Preis: 1 K 50 h — 1 M 50 pf] 485

Schmid Th., Über kubische Aufgaben und die konstruktive Behandlung des Achsenkomplexes. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 65 h — 65 pf] 905

Schrott P., v., Das elektrische Verhalten der allotropen Selenmodifikationen unter dem Einflusse von Wärme und Licht. (Mit 23 Textfiguren.) [Preis: 3 K — 3 M] 1081

Schrutka v. Rechtenstamm L., Über die Auflösung linearer Quaternionengleichungen. [Preis: 1 K 10 h — 1 M 10 pf] 739

Schweidler E., v., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXV. Luftelektrische Beobachtungen am Ossiachersee im Sommer 1906. [Preis: 70 h — 70 pf] 1263

Steindler O., Die Farbenempfindlichkeit des normalen und farbenblinden Auges. (Mit 2 Tafeln und 4 Textfiguren.) [Preis: 1 K 20 h — 1 M 20 pf] 39

Stibitz K., Ein zum Normalenproblem der Ellipse gehöriger Satz und dessen konstruktive Verwendung. [Preis: 30 h — 30 pf] 13

Tietze H., Zur Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. [Preis: 25 h — 25 pf] 841

Wächter F., Über das Verhalten der radioaktiven Uran- und Thoriumverbindungen im elektrischen Lichtbogen. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 1 K 25 h — 1 M 25 pf] 1247

Waßmuth A., Über die Bestimmung der thermischen Änderungen des Elastizitätsmoduls von Metallen aus den Temperaturänderungen bei der gleichförmigen Biegung von Stäben. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 2 K 25 h — 2 M 25 pf] 223

— Über die Leitfähigkeit gewisser wässeriger Lösungen von Kochsalz und Natriumcarbonat. [Preis: 60 h — 60 pf] 985

Weiss E., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVI. Beobachtungen über Niederschlagselektrizität. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 35 h — 1 M 35 pf] 1285

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. I. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über die Gestalt der Wurzeln einer Klasse auflösbarer Gleichungen, deren Grad eine ungerade Primzahl ist

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1906.)

1.

Es sei p eine ungerade Primzahl, t ein Teiler von $p-1$ und a eine nach dem Modul p zu dem Exponenten t gehörende Zahl. Bezeichnet

$$q = (s, s+1)$$

die zyklische Permutation der Stellenzeiger $0, 1, \dots p-1$,

$$r = (s, as)$$

die Permutation, welche alle diese Stellenzeiger mit a (nach dem Modul p) multipliziert, so bilden die pt Permutationen

$$q^\alpha r^\beta \qquad \begin{array}{l} \alpha = 0, 1, \dots p-1 \\ \beta = 0, 1, \dots t-1 \end{array}$$

eine in der linearen oder metazyklischen Gruppe der p Elemente $0, 1, \dots p-1$ enthaltene Gruppe Γ.

Es ist von Interesse, alle Gleichungen p^{ten} Grades mit nicht verschwindender Diskriminante aufzustellen, welche folgenden Bedingungen genügen:

Ihre Koeffizienten gehören einem gegebenen Rationalitätsbereiche R an.

Alle rationalen Funktionen ihrer Wurzeln

$$x_0, x_1, \dots x_{p-1}$$

welche die — an den Stellenzeigern von $x_0, x_1, \ldots$ zu vollziehenden — Permutationen der Gruppe Γ vertragen, sind rational in R bestimmbar.

Es genügt, die notwendige und hinreichende Gestalt der Wurzeln $x_0, x_1, \ldots$ anzugeben. In den Fällen $t = 1$ und $t = p-1$ sind die betreffenden Formeln von Kronecker[1] aufgestellt worden.

2.

Es sei α eine primitive p^{te} Einheitswurzel und

$$L(x) = x_0 + x^{p-1}x_1 + x^{p-2}x_2 + \ldots + x x_{p-1}.$$

Man kann eine ganze ganzzahlige Funktion von x

$$\psi = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{p-1} x^{p-1}$$

von der Art ermitteln, daß alle Lagrange'schen Resolventen

$$L_1(\alpha),\ L_1(\alpha^2), \ldots L_1(\alpha^{p-1})$$

von Null verschieden ausfallen, wo

$$L_1(x) = \psi(x_0) + x^{p-1}\psi(x_1) + \ldots + x\psi(x_{p-1})$$

ist. Sind schon die Resolventen

$$L(\alpha),\ L(\alpha^2), \ldots L(\alpha^{p-1})$$

von Null verschieden, so genügt es, $\psi = x$ zu setzen.

Man ermittle ferner eine ganze ganzzahlige Funktion y von $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$, welche die zyklischen Permutationen $1, q, \ldots q^{\nu-1}$ und keine andern verträgt. Dieselbe nimmt bei den Permutationen $1, r, \ldots r^{t-1}$ t verschiedene Werte

$$y_0,\ y_1, \ldots y_{t-1}$$

an, welche Wurzeln einer zyklischen Gleichung

$$(z-y_0)(z-y_1)\ldots(z-y_{t-1}) = 0$$

t^{ten} Grades mit Koeffizienten in R sind, da jede ganze zyklische rationale Funktion von $y_0, y_1, \ldots y_{t-1}$ eine ganze rationale

[1] Monatsberichte der königl. preuß. Akademie der Wissenschaften in Berlin, 1853.

Funktion von $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$ ist, welche alle Permutationen der Gruppe Γ verträgt. Man darf y überdies so gewählt voraussetzen, daß die Wurzelsumme und die Lagrange'schen Resolventen dieser Gleichung oder, was dasselbe ist, die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_0 & , y_1, \ldots y_{t-1} \\ y_1 & , y_2, \ldots y_0 \\ \cdots & \cdots \\ y_{t-1}, & y_0, \ldots y_{t-2} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sind.

Das Produkt jeder ganzen zyklischen Funktion v von $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$ in Δ^2 ist als linear-homogene Funktion von $y_0, y_1, \ldots y_{t-1}$ darstellbar, deren Koeffizienten in $x_0, x_1, \ldots$ ganz sind und alle Permutationen von Γ vertragen. Denn es seien $v_0, v_1, \ldots v_{t-1}$ die Werte, welche v bei den Permutationen $1, r, \ldots r^{t-1}$ annimmt, und $u, u_0, u_1, \ldots$ Unbestimmte. Das Produkt

$$\Delta \begin{vmatrix} u & , u_0 & , u_1, \ldots u_{t-1} \\ v & , y_0 & , y_1, \ldots y_{t-1} \\ v_1 & , y_1 & , y_2, \ldots y_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{t-1}, & y_{t-1}, & y_0, \ldots y_{t-2} \end{vmatrix}$$

verträgt alle Permutationen der Gruppe Γ, hat die Gestalt

$$\Delta^2 u - C_0 u_0 - C_1 u_1 - \ldots - C_{t-1} u_{t-1}$$

und verschwindet nach Ersetzung von $u, u_0, \ldots$ durch $v, y_0, \ldots$, so daß

$$\Delta^2 v = C_0 y_0 + C_1 y_1 + \ldots + C_{t-1} y_{t-1}$$

ist.

3.

Man fasse $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$ als Unbestimmte auf und es sei $P(x)$ ein Potenzprodukt der Ausdrücke

$$L(x),\ L(x^2), \ldots\ L(x^{p-1})$$
$$L_1(x),\ L_1(x^2), \ldots\ L_1(x^{p-1})$$

welches sich bei der Permutation q nur um einen durch x^p-1 teilbaren Bestandteil ändert. Da der Rest von P in Bezug auf den Teiler x^p-1 ganze zyklische Funktionen von $x_0, x_1, \ldots$ zu Koeffizienten hat, so kann

$$P \equiv y_0 g_0(x) + y_1 g_1(x) + \ldots + y_{l-1} g_{l-1}(x) \pmod{x^p-1}$$

gesetzt werden, wo $\Delta^2 g_0$, $\Delta^2 g_1, \ldots$ ganze Funktionen von $x, x_0, x_1, \ldots$ sind und die Permutationen von Γ vertragen.

Führt man die Permutation r aus und ersetzt zugleich x durch x^a, wodurch alle Ausdrücke $L(x^k)$, $L_1(x^k)$ und daher auch P nach dem Modul x^p-1 ungeändert bleiben, so ergibt sich

$$P \equiv y_1 g_0(x^a) + y_2 g_1(x^a) + \ldots + y_0 g_{l-1}(x^a) \pmod{x^p-1}.$$

Hieraus folgt

$$y_0(g_{l-1}(x^a) - g_0(x)) + y_1(g_0(x^a) - g_1(x)) + \ldots \equiv 0 \pmod{x^p-1}$$

und nach wiederholter Ausführung der Permutation r

$$y_1(g_{l-1}(x^a) - g_0(x)) + y_2(g_0(x^a) - g_1(x)) + \ldots \equiv 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{l-1}(g_{l-1}(x^a) - g_0(x)) + y_0(g_0(x^a) - g_1(x)) + \ldots \equiv 0$$
$$\pmod{x^p-1}.$$

Es muß daher

$$g_0(x^a) - g_1(x) \equiv 0 \quad g_1(x) \equiv g_0(x^a) \qquad \pmod{x^p-1}$$
$$g_1(x^a) - g_2(x) \equiv 0 \quad g_2(x) \equiv g_1(x^a) \equiv g_0(x^{a^2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sein. Somit ist

$$P \equiv y_0 g_0(x) + y_1 g_0(x^a) + \ldots + y_{l-1} g_0(x^{a^{l-1}}) \pmod{x^p-1}.$$

Denkt man sich nun unter $x_0, x_1, \ldots$ die Wurzeln der gesuchten Gleichung und setzt $x = \alpha^m$, so folgt

$$P(\alpha^m) = y_0 g_0(\alpha^m) + y_1 g_0(\alpha^{ma}) + \ldots + y_{l-1} g_0(\alpha^{ma^{l-1}}),$$

wo jetzt $g_0(x)$ eine ganze Funktion von x mit Koeffizienten in R ist.

4.

Setzt man

$$M(x) = L_1(x^2)L_1(x^3)\dots L_1(x^{p-1})$$
$$N = L_1(\alpha)L_1(\alpha^2)\dots L_1(\alpha^{p-1}),$$

so genügen die Potenzprodukte

$$L_1(x)^p \qquad L(x)\Pi M(x^{p-s})^{s'}$$

der bei P gemachten Annahme, wo das Produktzeichen auf die Werte $1, 2, \dots p-1$ von s zu beziehen und

$$ss' \equiv 1 \pmod p \qquad 0 < s' < p$$

ist. Man kann daher

$$L_1(\alpha^m)^p = y_0 f(\alpha^m) + y_1 f(\alpha^{ma}) + \dots + y_{t-1} f(\alpha^{m a^{t-1}})$$
$$L(\alpha^m)\Pi M(\alpha^{-ms})^{s'} = y_0 f_1(\alpha^m) + y_1 f_1(\alpha^{ma}) + \dots$$

setzen, wo f, f_1 ganze Funktionen mit Koeffizienten in R bezeichnen. Da aber

$$\Pi M(\alpha^{-ms})^{s'} = \frac{N^{\frac{1}{2}p(p-1)}}{\Pi L_1(\alpha^{-ms})^{s'}}$$

ist und N als ganze ganzzahlige Funktion von $x_0, x_1, \dots$, welche alle Permutationen von Γ verträgt, zu R gehört, so gehören auch die Koeffizienten der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}p(p-1)}} f_1(x)$$

zu R und man hat

$$\frac{L(\alpha^m)}{\Pi L_1(\alpha^{-ms})^{s'}} = y_0 g(\alpha^m) + y_1 g(\alpha^{ma}) + \dots + y_{t-1} g(\alpha^{m a^{t-1}}).$$

Wird daher zur Abkürzung

$$F(x) = y_0 f(x) + y_1 f(x^a) + \dots + y_{t-1} f(x^{a^{t-1}})$$
$$G(x) = y_0 g(x) + y_1 g(x^a) + \dots + y_{t-1} g(x^{a^{t-1}})$$

gesetzt, so ist

$$L_1(\alpha^m) = F(\alpha^m)^{\frac{1}{p}}$$

und man hat zur Bestimmung der Größen $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$ die Gleichungen

$$L(1) = C$$

$$L(\alpha^m) = G(\alpha^m)\,\Pi F(\alpha^{-ms})^{\frac{1}{p}s'}$$

$$m = 1, 2, \ldots p-1,$$

wo C zu R gehört.

Nimmt man umgekehrt für $y_0, y_1, \ldots y_{t-1}$ die Wurzeln einer beliebigen zyklischen Gleichung t^{ten} Grades, deren Koeffizienten zu R gehören, für f, g beliebige ganze Funktionen mit ebensolchen Koeffizienten, für C eine beliebige Größe aus R, so besitzen die aus der Auflösung der vorstehenden Gleichungen hervorgehenden Werte

$$x_i = \frac{1}{p}\left(C + \sum_m \alpha^{mi}\, G(\alpha^m)\,\Pi F(\alpha^{-ms})^{\frac{1}{p}s'}\right)$$

$$m = 1, 2, \ldots p-1$$
$$i = 0, 1, \ldots p-1$$

die gewünschte Eigenschaft.

Denn es sei Θ irgend eine ganze rationale Funktion von p Unbestimmten $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$, welche bei allen Permutationen der Gruppe Γ ungeändert bleibt. Werden $x_0, x_1, \ldots$ durch

$$L(1),\ L(\alpha),\ L(\alpha^2), \ldots L(\alpha^{p-1})$$

ausgedrückt, so verwandelt sich Θ in eine Summe von Ausdrücken von der Form

$$\vartheta(\alpha)L(\alpha)^{a_1}L(\alpha^2)^{a_2}\ldots L(\alpha^{p-1})^{a_{p-1}},$$

in welchen $\vartheta(\alpha)$ eine ganze rationale Funktion von α und $L(1)$ bezeichnet. Die Ausführung der Permutationen $1, q, \ldots q^{t-1}$ und Addition der Resultate zeigt, daß in Θ nur Glieder $\vartheta(\alpha)\,Q(\alpha)$ vorkommen, in welchen

$$Q(\alpha) = L(\alpha)^{a_1}L(\alpha^2)^{a_2}\ldots L(\alpha^{p-1})^{a_{p-1}}$$

und

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1} \equiv 0 \pmod p)$$

ist. Führt man ferner die Permutationen $1, r, \ldots r^{t-1}$ aus, wodurch $Q(\alpha)$ in

$$Q_0(\alpha), Q_1(\alpha), \ldots Q_{t-1}(\alpha)$$

übergehen möge, und setzt

$$\frac{1}{t}(Q_0(\alpha)+Q_1(\alpha)+\ldots+Q_{t-1}(\alpha)) = S(\alpha),$$

so ergibt die Addition der Resultate

$$\Theta = \Sigma\vartheta(\alpha)S(\alpha).$$

Da die Wurzel α in Θ nicht vorkommt, so darf dieselbe durch $\alpha^2, \ldots \alpha^{p-1}$ ersetzt werden und es erhellt, daß Θ linear-homogen durch Ausdrücke von der Form

$$L(1)^h(\alpha^k S(\alpha)+\alpha^{2k}S(\alpha^2)+\ldots+\alpha^{(p-1)k}S(\alpha^{p-1}))$$

mit rationalen Koeffizienten darstellbar ist.

Werden nun unter $x_0, x_1, \ldots$ die oben genannten Werte verstanden, so ist

$$L(\alpha^m) = G(\alpha^m)\Pi F(\alpha^{-ms})^{\frac{1}{p}s'}$$

zu setzen und es wird

$$Q_i(\alpha) = \prod_k G(\alpha^{nk})^{a_k} . \prod_{k,s} F(\alpha^{-nks})^{\frac{1}{p}a_k s'}$$

$$k = 1, 2, \ldots p-1$$
$$s = 1, 2, \ldots p-1,$$

wo

$$n \equiv a^{t-i} \pmod p$$

ist. Es sei k' die Wurzel der Kongruenz

$$kk' \equiv 1 \pmod p,$$

$[b]$ der Rest von b in Bezug auf den Modul p und zur Abkürzung

$$\Sigma a_k[ks'] = \sigma \qquad k = 1, 2, \ldots p-1.$$

Da $[k's]$ bei festem k zugleich mit s die Werte $1, 2, \dots p-1$ durchläuft, so darf s durch $[k's]$, s' durch $[ks']$ ersetzt werden und man hat

$$\prod_s F(\alpha^{-nks})^{\frac{1}{p}s'} = \prod_s F(\alpha^{-ns})^{\frac{1}{p}[ks']}$$

$$\prod_{k,s} F(\alpha^{-nks})^{\frac{1}{p}a_k s'} = \prod_s F(\alpha^{-ns})^{\frac{1}{p}\sigma}.$$

Die Zahl σ ist auf Grund der Kongruenz

$$\sigma \equiv \Sigma a_k k s' \equiv s' \Sigma k a_k \equiv 0 \pmod p$$

durch p teilbar und es sei

$$\sigma = p e_s$$
$$H(\alpha) = \Pi G(\alpha^k)^{a_k} . \Pi F(\alpha^{-s})^{e_s}$$
$$k = 1, 2, \dots p-1$$
$$s = 1, 2, \dots p-1.$$

Es ist dann

$$Q_i(\alpha) = H(\alpha^n).$$

Bezeichnet aber π die Forderung, daß $y_0, y_1, \dots y_{t-1}$ zyklisch zu vertauschen sind, so ist

$$F(\alpha^{-ns}) = F(\alpha^{-s})_{\pi^i}$$
$$G(\alpha^{nk}) = G(\alpha^k)_{\pi^i}$$

und daher

$$H(\alpha^n) = H(\alpha)_{\pi^i}$$
$$Q_i(\alpha) = H(\alpha)_{\pi^i}.$$

Hieraus folgt

$$S(\alpha) = \frac{1}{t}(H(\alpha) + H(\alpha)_\pi + \dots + H(\alpha)_{\pi^{t-1}})$$

und es erhellt, daß $S(\alpha)$ eine ganze zyklische Funktion von $y_0, y_1, \dots y_{t-1}$ mit Koeffizienten in α und als solche eine ganze Funktion von α mit Koeffizienten in R ist. Alle Ausdrücke

$$L(1)^k(\alpha^k S(\alpha)+\alpha^{2k} S(\alpha^2)+\ldots)$$

sind demnach rational in R. Dasselbe gilt somit von Θ.

Die Kronecker'schen Formeln ergeben sich in dem Falle $t=1$, wenn $y_0=1$ gesetzt wird. In dem Falle $t=p-1$ sind bei passender Wahl von ψ die Größen $F(\alpha)$, $F(\alpha^a)$, ... Wurzeln einer zyklischen Gleichung $p-1^{\text{ten}}$ Grades, durch welche $G(\alpha)$, $G(\alpha^a)$, ... ohne Intervention von α ausdrückbar sind.

Ein zum Normalenproblem der Ellipse gehöriger Satz und dessen konstruktive Verwendung

von

Konrad Stibitz,

Gymnasialprofessor in Landskron.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1906.

1. Durch einen gegebenen Punkt gehen bekanntlich an eine Ellipse vier Normalen, deren Fußpunkte zugleich auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Asymptoten zu den Achsen der Ellipse parallel sind. Wenn als Bestimmungsstücke einer Ellipse die Achsen derselben gezeichnet vorliegen, nicht aber die Ellipse selbst, so ist es — wie nach der Beweisführung des Herrn Schoute[1] als feststehend geltend muß — bei allgemeiner Lage eines Punktes P unmöglich, die aus ihm an die Ellipse gehenden Normalen mit Zirkel und Lineal allein zu konstruieren.

Eine derartige Konstruktion, d. h. eine Zurückführung der Aufgabe vierten Grades auf zwei quadratische Aufgaben ist, wie aus den schönen, in diesen Sitzungsberichten veröffentlichten Arbeiten der Herren Pelz, Lauermann, Mertens, Schoute, Sobotka, Tesař (siehe auch Eduard Weyr, Sitzungsber. der kgl. böhm. Gesellsch. der Wiss. 1902) hervorgeht, nur bei gewissen speziellen Lagen des Punktes P ausführbar.

[1] Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. Diese Sitzungsberichte, Bd. XCVIII, Abt. IIa., Dezember 1889.

2. Auch wenn die Ellipse gezeichnet vorliegt, konnte bisher eine Konstruktion der vier Normalenfußpunkte mit Zirkel und Lineal allein nur in dem Fall ausgeführt werden, daß der Punkt P auf der Ellipse selbst liegt und das Mittel der Konstruktion war der Joachimsthal'sche Kreis.

3. Die nachfolgenden Zeilen haben den Zweck, zu zeigen, daß bei gezeichneter Ellipse die Konstruktion der Fußpunkte der Normalen aus P bei jeder Lage des Punktes P mit Zirkel und Lineal allein durchgeführt werden kann.

Wir machen Gebrauch von der Parameterdarstellung der Ellipsenpunkte durch die sogenannte exzentrische Anomalie, wonach unter Voraussetzung der Ellipsengleichung

$$E \equiv b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

die Koordinaten eines solchen Punktes durch die Ausdrücke

$$x=a\cos\alpha,\quad y=b\sin\alpha$$

darstellbar sind, und wollen im nachfolgenden die verschiedenen Ellipsenpunkte durch die ihnen zukommenden Parameterwerte bezeichnen. Die Punkte α und $\alpha+\frac{\pi}{2}$ sind Endpunkte von zwei konjugierten Durchmessern und so gelegen, daß man von α als dem Endpunkt eines Durchmessers im Sinne der üblichen Winkelzählung zu $\alpha+\frac{\pi}{2}$ als dem nächstliegenden Endpunkte des konjugierten Durchmessers gelangt. Im nachfolgenden wird ein Punkt $\alpha+\frac{\pi}{2}$ als konjugierter Punkt zum Punkt α bezeichnet. Ist nun P oder (ξ, η) der Schnittpunkt der Normalen in den Ellipsenpunkten α, β, so ist

$$\xi=\frac{e^2}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\eta=-\frac{e^2}{b}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\sin\alpha\sin\beta$$

und analog findet man für den Schnittpunkt P' oder (ξ', η') der Normalen in den konjugierten Punkten $\alpha+\frac{\pi}{2}$, $\beta+\frac{\pi}{2}$ die Ausdrücke

$$\xi' = -\frac{e^2}{a} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \sin\alpha \sin\beta,$$

$$\eta' = -\frac{e^2}{b} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \cos\alpha \cos\beta,$$

aus welchen vier Gleichungen durch Elimination der Winkel die Beziehungen

$$\xi' = \frac{b}{a}\eta, \quad \eta' = -\frac{a}{b}\xi \qquad 1)$$

sich ergeben, die bei gegebenem P eine einfache und direkte Konstruktion des Punktes P' (ohne daß es der Normalen bedürfte) ermöglichen. [Nebenbei bemerkt, lassen diese Beziehungen erkennen, daß P und P' Endpunkte konjugierter Durchmesser einer Ellipse sind, deren Achsen dasselbe Verhältnis haben wie diejenigen von E, zu denen von E jedoch normal stehen. Auf dieser Ellipse ist P im angegebenen Sinne der konjugierte Punkt zu P'].

4. Sind nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Fußpunkte der aus P an die Ellipse E gehenden Normalen, so erfüllen ihre Parameterwerte (siehe Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. der Kegelschnitte, 6. Aufl., § 236) die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha) &= 0, \\ \sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\delta)+\sin(\delta+\alpha) &= 0, \end{aligned} \qquad 2)$$

deren eine sich auch ersetzen läßt durch die Bedingung

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = (2k+1)\pi \qquad 3)$$

und deren Herleitung wir als bekannt voraussetzen dürfen. Ersetzt man in den Gleichungen 2) und 3) die Parameterwerte

durch einfach akzentuierte Buchstaben, wobei $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$ — und analog für die anderen Buchstaben — sein soll, so erscheinen diese Bedingungen wieder erfüllt, woraus man erkennt, daß die konjugierten Punkte zu jenen vier Fußpunkten gleichfalls Normalen besitzen, die sich in einem Punkte schneiden, welcher oben als P' bezeichnet wurde und dessen Koordinaten ξ', η' oben angegeben sind.

Ersetzt man dann in den Gleichungen 2) und 3) die Parameterwerte durch doppelt akzentuierte Buchstaben, wobei $\alpha'' = \alpha - \frac{\pi}{2}$ — und analog für die anderen Buchstaben — sein soll, so wird diesen Bedingungen abermals Genüge getan, d. h. die Normalen der Punkte α'', β'', γ'', δ'' — es sind die Gegenpunkte zu α', β', γ', δ' beziehungsweise — schneiden sich ebenfalls in einem Punkte P'', dessen Koordinaten, wie die Rechnung ergibt und auch aus Gründen der Symmetrie, $-\xi'$, $-\eta'$ sein müssen.

Sind dann α_1, β_1, γ_1, δ_1 diejenigen Ellipsenpunkte, deren Parameter beziehungsweise um $\frac{\pi}{4}$ größer sind als die der Normalenfußpunkte α, β, γ, δ und wenn ebenso α_2, β_2, γ_2, δ_2 diejenigen Ellipsenpunkte sind, deren Parameterwerte beziehungsweise um $\frac{\pi}{4}$ kleiner sind als die derselben Fußpunkte, so bestehen zufolge 3) offenbar die Beziehungen

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 2m\pi \qquad (m = k+1), \qquad 4)$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 2n\pi \qquad (n = k). \qquad 5)$$

Jede der Gleichungen 4) und 5) bringt zum Ausdrucke, daß das betreffende Punktequadrupel in einem Kreis liegt, der für das erstere Quadrupel K_1, für das letztere K_2 heißen möge. Sobald es nun gelingt, einen der Kreise K_1, K_2 nach Lage und Größe mit Zirkel und Lineal allein zu konstruieren, so ist die Aufgabe, das Quadrupel der Fußpunkte der Normalen aus P mit diesen Konstruktionsmitteln aufzufinden, sofort leicht lösbar. Durch jeden der Kreise ist nämlich

zunächst das Quadrupel seiner Schnittpunkte mit E und durch dieses weiterhin auch das Quadrupel der Fußpunkte der Normalen aus P bestimmt. Zu dem letztgenannten Quadrupel gelangt man nämlich, indem man entweder den Parameterwert eines jeden der vier Schnittpunkte von K_1 und E um $\frac{\pi}{4}$ vermindert oder den Parameterwert eines jeden der vier Schnittpunkte von K_2 und E um $\frac{\pi}{4}$ vergrößert. Die Konstruktionsdaten für jeden der Kreise K_1 und K_2 lassen sich nun in der Tat mit Zirkel und Lineal gewinnen, wie aus deren Gleichungen hervorgeht, die man wie folgt herleiten kann.

5. Ist (x, y) der Fußpunkt α einer der durch P gehenden Normalen der Ellipse E, so hat man

$$\frac{a^2\xi}{x} - \frac{b^2\eta}{y} = e^2; \qquad 6)$$

ist dann (X, Y) der Ellipsenpunkt $\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{4}$, so kann man setzen:

$$x = a\cos\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\cos\alpha_1 + a\sin\alpha_1) = = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + \frac{a}{b}Y\right),$$

$$y = b\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b\sin\alpha_1 - b\cos\alpha_1) = = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y - \frac{b}{a}X\right)$$

und erhält damit aus 6):

$$\frac{e^2}{2}\left(\frac{a}{b}Y^2 - \frac{b}{a}X^2\right) + \frac{b}{\sqrt{2}}(a\xi + b\eta)X - - \frac{a}{\sqrt{2}}(a\xi - b\eta)Y \equiv H_1 = 0, \qquad 7)$$

d. h. die Gleichung eines Kegelschnittes, nämlich einer Hyperbel, deren Achsen parallel sind zu den Achsen von E. Auf diesem

Kegelschnitt und somit auch auf jedem Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels

$$H_1+\lambda E = 0 \tag{8)}$$

liegt das Punktequadrupel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$.

Diesem Büschel gehört aber auch der Kreis K_1 an, dessen Gleichung man aus 8) gewinnt, wenn man darin

$$\lambda = -\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

setzt, wodurch diese Gleichung in die Form übergeht:

$$X^2+Y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{a}\eta+\xi\right)X+ \\ +\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{b}\xi-\eta\right)Y-\frac{a^2+b^2}{2}=0,$$

welche man weiter mit Benützung der Gleichungen 1) in die Form

$$X^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\xi')X+Y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta+\eta')Y-\frac{a^2+b^2}{2}=0$$

oder endlich in die Form

$$\left(X-\frac{\xi+\xi'}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(Y-\frac{\eta+\eta'}{2\sqrt{2}}\right)^2= \\ =\left(\frac{\xi+\xi'}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\eta+\eta'}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{9)}$$

als die Normalform der Gleichung des Kreises K_1 überführt. Die Gleichung 9) läßt sogleich erkennen, wie man sich das Zentrum C_1 und den Radius r_1 des Kreises K_1 verschaffen kann. Ist nämlich O das Zentrum der Ellipse E und D_1 der Halbierungspunkt der Strecke PP', so ist C_1 derjenige Punkt von OD_1, welcher OD_1 in dem Verhältnisse

$$OD_1 : OC_1 = \sqrt{2} : 1$$

(im Verhältnisse der Diagonale und Seite eines Quadrates) teilt. Wenn man dann zu OD_1 in O eine Normale OF_1 von der Länge $\sqrt{a^2+b^2}$ errichtet, D_1F_1 zieht und durch C_1 zu D_1F_1 eine Parallele zieht, welche OF_1 in J_1 schneidet, so ist die Strecke C_1J_1 der Radius r_1 von K_1.

6. Um dann die Gleichung des Kreises K_2 herzuleiten, braucht man nur X, Y die Koordinaten des Punktes $\alpha_2 = \alpha - \frac{\pi}{4}$ bedeuten zu lassen, dann in Gleichung 6)

$$x = a\cos\left(\alpha_2 + \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a\cos\alpha_2 - a\sin\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X - \frac{a}{b}Y\right),$$
$$y = b\sin\left(\alpha_2 + \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(b\sin\alpha_2 + b\cos\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y + \frac{b}{a}X\right)$$

zu setzen und im übrigen den gleichen Rechnungsvorgang zu befolgen wie vorhin.

Doch läßt sich die Gleichung des Kreises K_2 einfach unmittelbar aus derjenigen für K_1 herleiten auf Grund folgender Überlegung. Dieselbe Rolle, die der Kreis K_1 für das Quadrupel der Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einerseits und deren konjugierte Punkte $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ andrerseits spielt, spielt der Kreis K_2 für das Quadrupel der Punkte $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ $\left(\alpha'' = \alpha - \frac{\pi}{2}\right.$ u. s. w.$\left.\right)$ einerseits und deren konjugierte Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ andrerseits. Daher muß aus der Gleichung des Kreises K_1 diejenige für den Kreis K_2 hervorgehen, wenn man in ersterer an Stelle der Koordinaten von P und P' beziehungsweise diejenigen von P'' und P einführt.

Werden demnach in Gleichung 9) die Koordinatenpaare (ξ, η) und (ξ', η') beziehungsweise durch die Paare $(-\xi', -\eta')$ und (ξ, η) ersetzt, so erhält man die Gleichung des Kreises K_2 in der Form

$$\left(X-\frac{\xi-\xi'}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(Y-\frac{\eta-\eta'}{2\sqrt{2}}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{\xi-\xi'}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\eta-\eta'}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}\right)^2. \qquad 10)$$

Sein Zentrum C_2 und seinen Radius r_2 verschafft man sich, indem man mit dem Halbierungspunkte D_2 der Strecke $P''P$ analog verfährt, wie es für den Kreis K_1 mit dem Halbierungspunkte D_1 geschah.

Über die Occlusion der Radiumemanation durch feste Körper

von

Dr. L. Bunzl.

Aus dem II. physikalischen Institute der Universität Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1906.)

In einer älteren Arbeit von P. Curie und J. Danne[1] wird von einer Erscheinung gesprochen, die sich am ausgesprochensten bei Zelluloid und Kautschuk gezeigt habe, von der Erscheinung der mechanischen Occlusion der Emanation. Jeder Körper, der mit Radium aktiviert wurde, ist kurze Zeit, etwa 20 Minuten, im stande, Emanation auszusenden; Körper, die die Emanation occludieren, haben diese Fähigkeit stunden- und tagelang.

Mit Untersuchungen über diesen Gegenstand befaßte sich der Autor dieser Arbeit, ihre Ergebnisse sind im folgenden niedergelegt.

Die Versuchsanordnung war im Wesen die folgende: Auf den Hals eines Elster-Geitel'schen Elektroskopes, das mit einer einzigen Bernsteinisolierung versehen war, wurde eine Messingplatte von zirka 17 *cm* Durchmesser aufgesetzt, die einen Kupferkessel trug, der darauf gestülpt war, so daß der innere Raum vor starken Luftströmungen gesichert blieb; mit dem Blättchenträger in Verbindung war ein Tischchen, das, auf diesen aufgesetzt, die induzierte Substanz trug. Die Ladung des Elektroskopes wurde durch eine Zambonisäule besorgt vermittels eines Drahtes, der, an das Tischchen angelötet,

[1] P. Curie und J. Danne, C. r., 9. Febr. 1903.

durch ein kleines Loch in der Messingplatte hindurchgeleitet war. Der Abfall der Aktivität wurde durch die Zeit gemessen, die das Blättchen des Elektroskopes brauchte, um den Raum zwischen zwei benachbarten Teilstrichen zu durchlaufen. Diese Zeit wurde mit der Rennuhr bestimmt, die beobachtete Zeit nach der Formel

$$t = \frac{T \cdot \tau}{T - \tau}$$

korrigiert. In diesem Ausdrucke ist τ die beobachtete Zeit, T der Zerstreuungswert infolge der natürlichen Leitfähigkeit der Luft. Er betrug für dieses System nahezu konstant 2 Stunden.

Aktiviert wurde mit zwei Radiumpräparaten, Radiumbaryumchlorid von der Aktivität 240 und der Aktivität 40.000 in gelöstem Zustande. Dabei war das Radiumpräparat mit der Metallplatte, auf der es stand, und der darüber gestülpten Metallglocke an den positiven Pol des Straßenstromes gehängt, die zu induzierende Substanz befand sich, gegen den positiven Pol isoliert, mit dem Radiumpräparat unter derselben Glocke und war mit der Erde verbunden.

Die Versuche wurden vom Beginn der Untersuchungen an mit dem Radiumbaryumchlorid 240 durchgeführt. Es wurde eine Reihe von Metallen hergenommen, dann im Anschluß an die Curie'sche Arbeit Zelluloid und Kautschuk sowie eine Anzahl poröser Körper. Im Laufe der Untersuchungen ergab das Arbeiten mit dem schwachem Radiumpräparat mancherlei Schwierigkeiten, so daß es angezeigt schien, die ganzen Versuche mit einem stärkeren Radiumpräparat zu wiederholen. Dafür maßgebend waren folgende Gründe:

1. P. Curie und Danne können in ihrer Arbeit den Abfall 15 bis 20 Stunden verfolgen, während es bei Aktivierung mit Radiumbaryumchlorid 240 nur 8 bis 9 Stunden möglich war, ohne Fehler zu riskieren.

2. Trotz dieser schwachen Aktivierung zeigte sich auch bei Platin, Messing, Kupfer nach einigen Stunden der Knick in der Kurve, eine Erscheinung, die P. Curie und Danne nicht beschrieben haben. Durch die Aktivierung mit dem starken Radiumpräparat ließ sich dieses Phänomen klarstellen.

3. Es zeigte sich, daß bei Untersuchungen über die Occlusion der Emanation die Restaktivität zu berücksichtigen sei, weswegen ebenfalls möglichst starke Aktivierung sich empfahl.

Während nämlich in den Kurventafeln von Curie und Danne der Abfall bei den Metallen, der dort allerdings nur fünfstündige Beobachtung zeigt, dem Exponentialgesetz folgt, zeigte sich mir schon beim Aktivieren mit dem schwachen Radiumpräparat auch bei den Abfallkurven der Metalle häufig ein Knick in der Kurve, der Abfall begann sich zu verlangsamen. Diese Beobachtung gab dazu Veranlassung, zu erwägen, ob nicht eine andere Erscheinung hier mit im Spiele sein könne, nämlich die Erscheinung der Restaktivität. Für diese Annahme sprachen folgende Gründe: Erstens trat bei den Metallen der Knick in der Abfallskurve immer dann erst ein, wenn die Aktivität auf zirka $^1/_{20\cdot000}$ des Anfangswertes gesunken war, eine Wahrnehmung, die sich mit den Rutherford'schen Angaben bezüglich Eintrittes der Restaktivität vollständig deckt. Dann trat z. B. beim Messing der Knick in der Kurve erst ein, wenn das Metall längere Zeit der Emanation ausgesetzt war, während bei kurzer Aktivierungsdauer der normale Abfall zu beobachten war. Bei Blei finden P. Curie und J. Danne den Knick in der Kurve gar erst nach 33tägiger Aktivierung, Ergebnisse, die genaue Untersuchungen erforderten, um klarzustellen, ob sich ein durch das Elektroskop angezeigter verlangsamter Abfall auf Rechnung der occludierten Emanation setzen lasse oder ob man es bloß mit Restaktivität zu tun habe oder aber, ob beide Erscheinungen zu gleicher Zeit zusammenwirken.

Diese Anschauungen finden sich durch die Versuche, die im folgenden beschrieben werden, vollkommen bestätigt.

Die Aktivität sämtlicher mit Radiumbaryumchlorid 40.000 induzierter Körper läßt sich vollkommen übereinstimmend mit Rutherford's Theorien und Experimenten monatelang verfolgen. Nur aus dem Gange der Kurven ist zu entnehmen, ob man den Verlauf des Abfalls auf Rechnung des Sichzerstörens der Emanation oder auf Rechnung der Restaktivität setzen kann. Wie aus den Kurventafeln ersichtlich, zeigen die Metalle

beim Abfall in der Kurve eine ganz andere Gestalt als diejenige, die die Kurve eines der Körper, die stark occludieren, Zelluloid oder Kautschuk, annimmt. Einzelne charakteristische Kurven sind in den Fig. 1 und 2 verzeichnet, der Abfall der

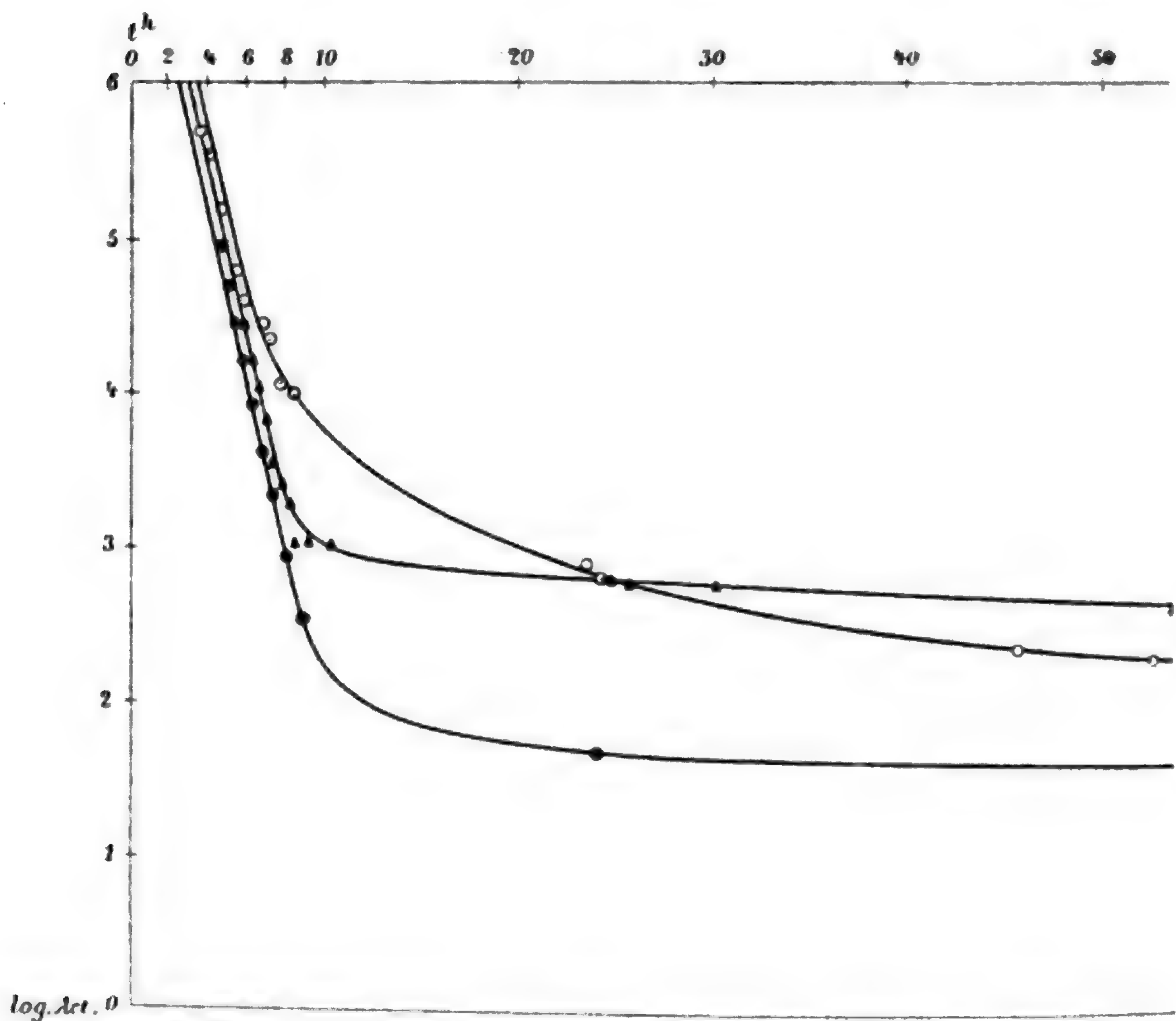


Fig. 1.[1]

Aktiviert mit Radiumbaryumchlorid 40.000.

○	Platin	1^d	aktiviert.
▼	Feuerschwamm	2^d	
●	Kautschuk	3^d	

[1] In den Kurvenfiguren sind nach Curie die Zeiten als Abszissen, die Logarithmen der Aktivitäten als Ordinaten aufgetragen.

Strahlung stellt sich folgendermaßen dar[1] (siehe p. 26). Betrachtet man die den Tabellen entsprechenden Kurven in den Figuren, so sieht man, daß Kautschuk bedeutend früher in die mehr horizontale Richtung übergeht, doch fällt die Strahlung

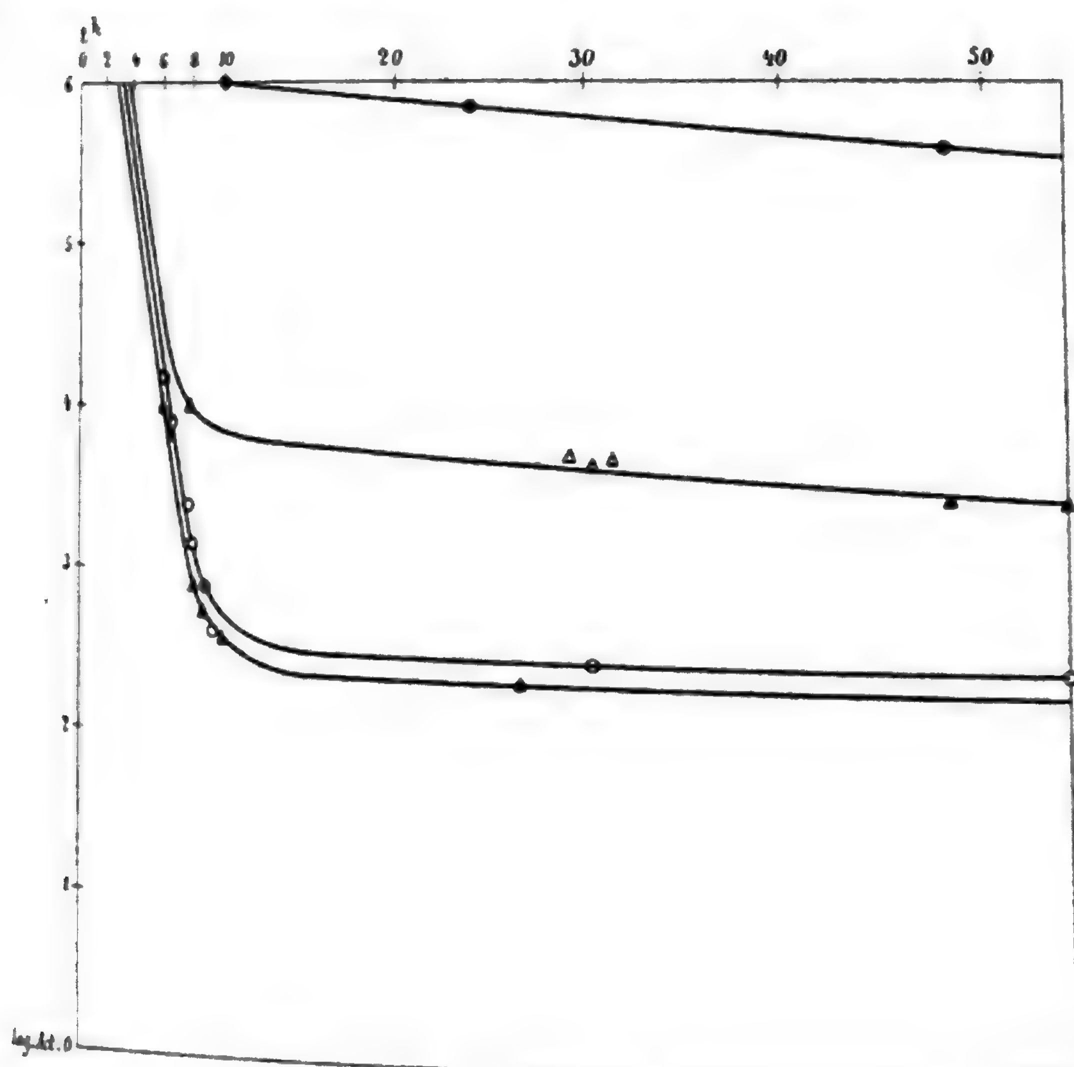


Fig. 2.

Aktiviert mit Radiumbaryumchlorid 40.000.

● Holzkohle 2^d } aktiviert.
▲ Platin 3^d }

○ Kupfer 3^d } aktiviert.
△ Zelluloid 3^d }

dann rascher ab als bei der Kupferplatte, deren Kurve, den Knick später erleidend, dann fast horizontal verläuft.

---

[1] Die Messungen konnten, wenn mit Radiumbaryumchlorid 40.000 aktiviert war, nicht sofort einsetzen, da die Blättchen des Elektroskopes zu rasch zusammenfielen, ein Umstand, der übrigens für vorliegende Untersuchungen nicht von Belang war.

Kupferplatte

3^d aktiviert mit Radiumbaryumchlorid 40.000.

Zeit nach Beginn des Abklingens	Zeit, die das Blättchen des Elektroskopes braucht
$2^1/_2{}^h$	Messung noch nicht möglich
$5^h\ 55^m$	$1^m\ 3^s$
$6^h\ 17^m$	$1^m\ 57^s$
$7^h\ 15^m$	6^m —
$7^h\ 34^m$	10^m —
$8^h\ 3^m$	18^m —
$8^h\ 55^m$	30^m —
—	—
29^h	42^m —
—	—
54^h	45^m —

Kautschukplatte

3^d aktiviert mit Radiumbaryumchlorid 40.000.

Zeit nach Beginn des Abklingens	Zeit, die das Blättchen des Elektroskopes braucht
$3^h\ 45^m$	2^s
$4^h\ 6^m$	3^s
$4^h\ 40^m$	7^s
$5^h\ 34^m$	18^s
$5^h\ 54^m$	25^s
$6^h\ 30^m$	36^s
$6^h\ 57^m$	47^s
$7^h\ 42^m$	$1^m\ 30^s$
$8^h\ 4^m$	$1^m\ 40^s$
$23^h\ 15^m$	18^m —
$23^h\ 54^m$	21^m —
$46^h\ 40^m$	46^m —
$52^h\ 8^m$	50^m —

Bei Kautschuk zerstört sich eben die Emanation so lange nach ihrem Abfallsgesetz, bis nur mehr ein geringer Teil derselben da ist, dann später tritt erst die Restaktivität in Kraft. Die Metalle dagegen klingen anscheinend ganz nach den Gesetzen der induzierten Aktivität ab, wie sie Rutherford gibt. Allerdings ist es nicht ausgeschlossen, daß auch die Metalle, wie wahrscheinlich alle Körper, die Emanation occludieren oder adsorbieren; mit Genauigkeit untersuchen läßt sich die geringe Occlusion aber schwer, da die Emanation dann den Körpern entzogen werden müßte, um zu sehen, ob sie dann anders abklingen. Wie später dargetan wird, ist das Entziehen, und zwar das vollständige Entziehen der Emanation, aber nicht leicht möglich, ohne auch die induzierte Aktivität zum mindesten zu schwächen.

Außer Zelluloid und Kautschuk wurden von porösen Körpern untersucht Meerschaum, Bimsstein, Feuerschwamm, dann Wattepfropfen und pulverisierter Braunstein sowie Holzkohle, von der ich später sprechen will; von den anderen wurde mit Ausnahme von Bimsstein die Radiumemanation occludiert, wobei Feuerschwamm nach Zelluloid und Kautschuk an erste Stelle zu setzen ist. Von den untersuchten Metallen scheinen jedenfalls Platin, Blei, Kupfer und Messing die Emanation, wenn auch nur in geringem Maße zu occludieren; wie schon erwähnt, spielt aber die Aktivierungsdauer dabei eine große Rolle. Bei sämtlichen vorerwähnten Substanzen war der Knick in der Kurve auch schon zu bemerken, wenn auch nur mit Radiumbaryumchlorid 240 aktiviert worden war.

Holzkohle zeigt ein diese Substanz von den anderen völlig trennendes Verhalten. Während bei allen anderen aktivierten Substanzen, insofern sie mit Radiumbaryumchlorid 240 aktiviert waren, sich die Phasen A, B und C der induzierten Aktivität vom Beginn an genau verfolgen ließen, ist dies bei der Holzkohle nicht gelungen. Um ihr Verhalten der Emanation gegenüber völlig zu kennzeichnen, will ich hier auch die Versuche mit Radiumbaryumchlorid 240 nebst denen mit Radiumbaryumchlorid 40.000 schildern.

Schon vom Beginn des Abklingens an zeigt die Holzkohle in der Abfallskurve Unregelmäßigkeiten. Wie aus den folgenden

Tabellen und der Fig. 3 ersichtlich, zeigen sich, auch wenn mit Radiumbaryumchlorid 240 aktiviert wurde, die Phasen *A* und *B* der induzierten Aktivität hier überhaupt nicht; in der ersten Stunde nach dem Herausnehmen aus dem Aktivierungsgefäß ist ja kaum

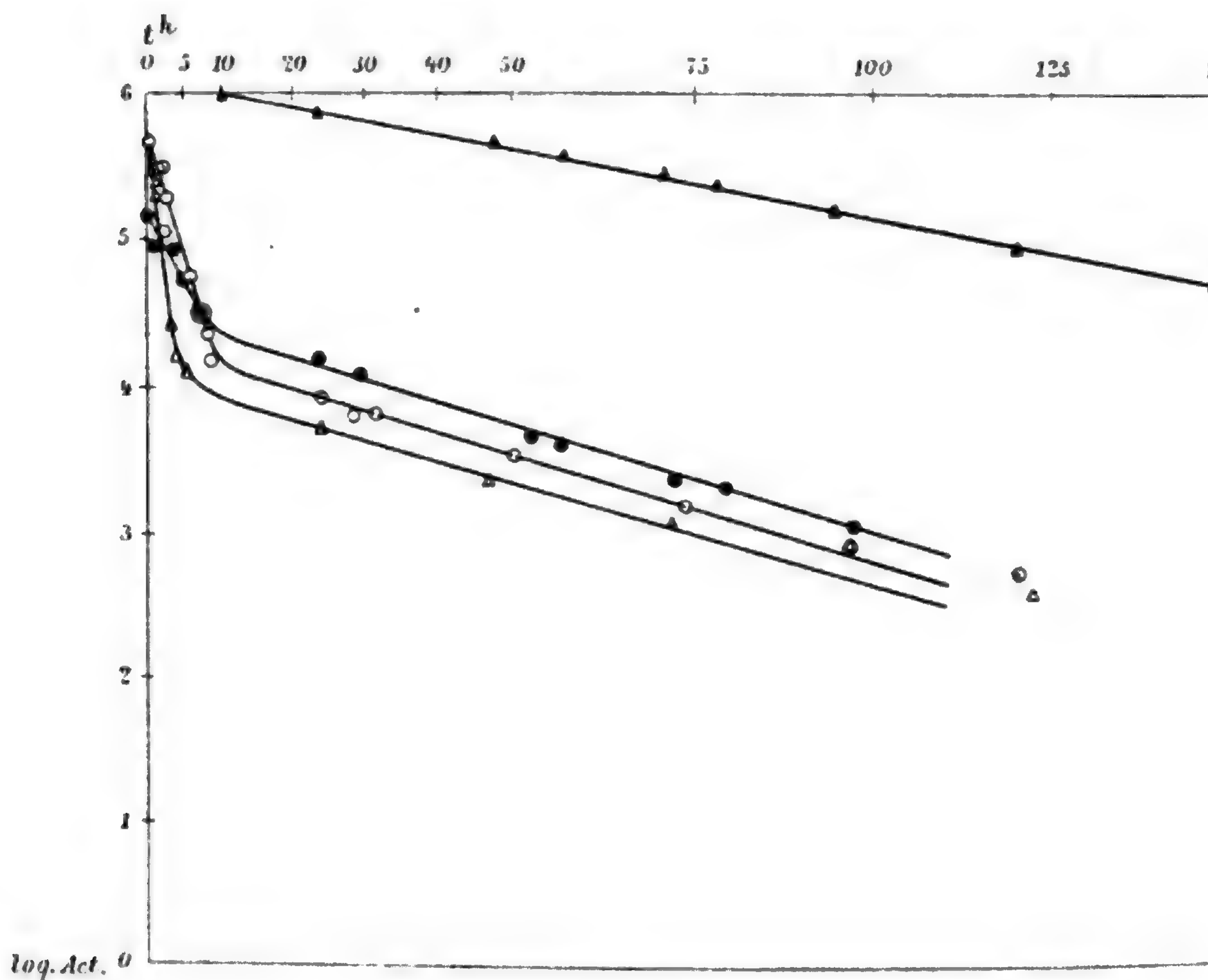


Fig. 3.

Aktivierte Holzkohle.

▲ 2^d aktiviert mit Radiumbaryumchlorid 40.000.

○ 1^d }
△ 2^d } aktiviert mit Radiumbaryumchlorid 240.
● 3^d }

überhaupt eine Verringerung der Strahlung zu konstatieren, nach 5 Tagen ist die Kohle noch so aktiv wie andere Körper nach einigen Stunden. Man muß die Erscheinung so erklären, daß sich die Holzkohle der Emanation gegenüber so verhält wie einem anderen Gase gegenüber; man kann die aktivierte

Holzkohle als Emanationsschwamm betrachten. So weit ließ sich diese enorme Occlusion der Radiumemanation nach Aktivierung mit 240 betrachten; war mit Radiumbaryumchlorid 40.000 aktiviert worden, so traten folgende Erscheinungen zu Tage. Wie aus der Tabelle ersichtlich, war am sechsten Tage

Holzkohle

2^d aktiviert mit Radiumbaryumchlorid **240**.

Zeit nach Beginn des Abklingens	Zeit, die das Blättchen des Elektroskopes braucht
2^m	3^s
5^m	3^s
10^m	3^s
19^m	3^s
26^m	4^s
33^m	4^s
45^m	$4 \cdot 5^s$
1^h —^{m}	5^s
$3^h\ 15^m$	35^s
$4^h\ 2^m$	60^s
$4^h\ 31^m$	70^s
23^h —	$3^m\ 25^s$
47^h —	$6^m\ 50^s$
72^h —	12^m —
96^h —	20^m —
120^h —	36^m —

des Abfalles die occludierte Emanationsmenge noch so groß, daß das Blättchen des Elektroskopes so rasch fiel wie bei anderen Substanzen, die gleich lange aktiviert wurden, nach einigen wenigen Stunden. Dabei war es nicht möglich, der Holzkohle die Emanation vollständig zu entziehen, selbst starkes Erhitzen konnte nie vollständig die Emanation aus der Holzkohle

herausstreiben. Wie stark diese Occlusion der Emanation war, ist auch daraus ersichtlich, daß die Holzkohle, die vor dem Aktivieren nicht einmal geglüht war, das Elektroskop nicht nur induzierte, sondern daß die Emanation auch durch den Hals des Elektroskopes in das Innere hineindiffundierte. Wurde dieselbe

Holzkohle

2[d] aktiviert mit Radiumbaryumchlorid **40.000**.

Zeit nach Beginn des Abklingens	Zeit, die das Blättchen des Elektroskopes braucht
$1^1/_2{}^h$	Messung nicht möglich
2^h	Messung nicht möglich
$5^1/_2{}^h$	Messung nicht möglich
6^h	Zirka $0\cdot4^s$
$6^1/_2{}^h$	» $0\cdot5^s$
$6^3/_4{}^h$	» $0\cdot6^s$
$7^1/_4{}^h$	» $0\cdot8^s$
24^h	$1\cdot5^s$
48^h	$2\cdot5^s$
56^h	3^s
72^h	4^s
78^h	$4\cdot5^s$
95^h	7^s
120^h	13^s
149^h	20^s

ausgesaugt, so erhielt man erst nach einigen Stunden, nachdem erst noch die induzierte Aktivität des Elektroskopes abgeklungen war, den Zerstreuungswert wieder. Bis jetzt gelang es mir noch nicht, die induzierte Aktivität bei der Holzkohle rein zu erhalten, trotz Erwärmens und Ausglühens hält sie nach Wochen die Emanation noch occludiert.

Die Messungen über Occlusion werden fortgesetzt, besonders mit Holzkohle wird noch eine Reihe von Versuchen gemacht werden.

Bis jetzt lassen sich folgende Resultate der Beobachtungen feststellen:

1. Ob ein Körper Emanation occludiert oder nicht, ist nur zu erkennen, wenn er stark aktiviert wurde, da sonst die Abfallskurven der Emanation und der Restaktivität nur schwer zu unterscheiden sind. Schwache Occlusion ist sehr schwer zu erkennen. Starke Occlusion zeigt sich dadurch an, daß die Abfallskurve schon nach wenigen Stunden vom gesetzmäßigen Gang in eine mehr horizontale Richtung übergeht.

2. Holzkohle zeigt eine diese Substanz vor allen anderen hervorhebende Fähigkeit, die Emanation zu absorbieren, eine Erscheinung, die ganz in Übereinstimmung steht mit der Absorptionsfähigkeit der Holzkohle anderen Gasen gegenüber.

Über die Kondensation von Dämpfen in ionisierter Luft

von

Dr. **Karl Przibram.**

(Mit 1 Textfigur.)

Aus dem Institute für theoretische Physik an der k. k. Universität in Wien.

Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1906.

C. T. R. Wilson[1] hat eine für quantitative Versuche sehr geeignete Methode angegeben, die Kondensation von Wasserdampf auf den Ionen eines ionisierten Gases zu beobachten. Das mit Dampf gesättigte Gasvolumen wird plötzlich expandiert, wodurch der Wasserdampf übersättigt wird und bei genügend großer Expansion sich auf die vorhandenen Kondensationskerne in Form feiner Tröpfchen niederschlägt. Das Verhältnis der Volumina nach und vor der Expansion $\frac{v_2}{v_1}$ ist gegeben durch den Ausdruck $\frac{b-\pi}{b-\pi-p}$, wo b den Barometerstand, π den Druck des bei Zimmertemperatur gesättigten Dampfes und p die durch Senkung eines Quecksilberreservoirs beliebig einstellbare Druckabnahme bei der Expansion bedeutet. Bei Steigerung der Expansion beobachtet man nach Wilson folgendes: Bei $\frac{v_2}{v_1} < 1\cdot25$ tritt keine Kondensation ein, auch nicht, wenn das Gas ionisiert wird; bei größeren Expansionen erscheinen einzelne Tröpfchen, bei Ionisierung starke Konden-

[1] Phil. Trans. A, 189, p. 265 (1897). Über die Literatur siehe den Bericht von H. Gerdien im Jahrb. d. Radiakt. u. Elektronik *1*, 24, 1904.

sation in Form von dichtem Regen oder Nebel, der bis $\frac{v_2}{v_1} = 1 \cdot 31$ ungefähr gleich dicht bleibt, über diesem Wert aber plötzlich merklich stärker wird. Die weiteren Untersuchungen Wilsons ergaben, daß bei $1 \cdot 25 < \frac{v_2}{v_1} < 1 \cdot 31$ der Wasserdampf sich nur auf die negativen Ionen und erst bei $\frac{v_2}{v_1} > 1 \cdot 31$ auch auf die positiven Ionen niederschlägt. Von Versuchen mit Dämpfen anderer Flüssigkeiten als Wasser ist mir nur die Beobachtung von J. Campanile und di Ciommo[1] bekannt, daß ein Alkoholdampfstrahl sich gegen Ionisatoren ebenso verhält wie ein Wasserdampfstrahl. Weitere Versuche der genannten Autoren über die Entladungsgeschwindigkeit einer geladenen, mit Alkohol gefüllten und mit Röntgenstrahlen bestrahlten Schale, aus denen die Folgerung gezogen wird, daß auch der Alkoholdampf sich leichter auf die negativen Ionen niederschlägt, scheinen mir nicht ganz einwandfrei. Ich habe daher eine Reihe von Flüssigkeiten auf ihr Verhalten im Expansionsapparat geprüft.

Der Apparat war dem von C. T. R. Wilson in Phil. Trans. A, 193, 291 (1900) beschriebenen nachgebildet. Das Wasser, das zur Dichtung des Expansionskolbens dient, wurde durch Paraffinöl ersetzt, um Feuchtigkeit aus dem Versuchsgefäße auszuschließen. Beobachtet wurde zunächst in einer Glaskugel von 5 *cm* Durchmesser, die mit einigen Tropfen der Versuchsflüssigkeit beschickt und an den Expansionsapparat angeschlossen wurde. Als Ionisator diente ein Radiumpräparat, das, in Aluminiumblech eingeschlossen, auf die Glaskugel aufgelegt wurde. Durch wiederholte kleine Expansionen wurde zunächst der suspendierte Staub niedergeschlagen, hierauf die Expansion allmählich gesteigert, bis das Auflegen des Radiums eine merkliche Vermehrung der anfangs sehr geringen Tröpfchenzahl bewirkte. Diese Expansion ist in der ersten Kolumne der Tabelle I angegeben. Sodann wurde die Expansion weiter gesteigert, bis der starke Regen, den die Ionisierung bewirkte,

[1] Phys. Zeit. 4, 648—651, 1903.

sich ziemlich plötzlich in dichten Nebel verwandelte. Diese Expansion gibt die zweite Kolumne.

Tabelle I.

Substanz	$\frac{v_2}{v_1}$	$\frac{v_2}{v_1}$
Wasser	1·265	1·310
Methylalkohol	1·261	1·304
Äthylalkohol	1·176	1·194
Propylalkohol	1·178	1·201
Isobutylalkohol	1·198	1·214
Isoamylalkohol	1·218	1·223
Chloroform	1·550	1·653

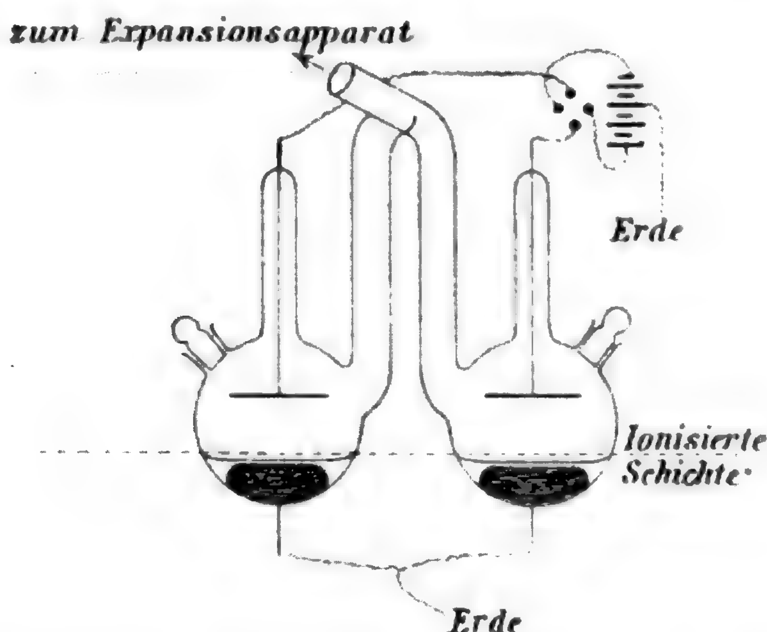
Die Übereinstimmung der Zahlen für Wasser mit den von Wilson gegebenen deutet darauf hin, daß die Zahlen der zweiten Kolumne die Expansion bezeichnen, bei der auch die Ionen des anderen Vorzeichens als Kerne dienen. Über das Vorzeichen der bevorzugten Ionen ist damit aber noch nichts ausgesagt.

Die Bestimmung des Vorzeichens der Ionen, auf denen zuerst Kondensation erfolgt, geschah ebenfalls nach einer von Wilson[1] angegebenen Methode, die darauf beruht, daß die in einer dünnen Schichte an einer geerdeten Platte erzeugten Ionen durch ein elektrisches Feld getrennt werden. Das Versuchsgefäß wurde, um Kitte zu vermeiden und der leichteren Reinigung halber, in eine andere als die von Wilson gebrauchte Form gebracht (siehe Figur).

Zwei Glaskugeln von 3 *cm* Durchmesser sind durch ein umgekehrtes U-Rohr mit einander und dem Expansionsapparate verbunden. Sie enthalten je einen Tropfen Quecksilber, der durch einen eingeschmolzenen Platindraht geerdet wird. Über dem Quecksilber befindet sich eine dünne Schichte der Versuchsflüssigkeit. Den beiden Quecksilbertropfen gegenüber,

[1] Phil. Trans. A, 193, 289, 1899.

in etwa 12 *mm* Abstand, stehen zwei kreisförmige Elektroden von 2 *cm* Durchmesser, die auf entgegengesetzt gleiches Potential von einigen Volt gebracht werden können.



Durch geeignet aufgestellte Bleischirme mit Spalten wird ein Bündel Röntgenstrahlen so auf das Gefäß geworfen, daß eine dünne horizontale Luftschichte über der Flüssigkeit in beiden Kugeln ionisiert wird. Wird das Feld angelegt, so werden in der Kugel, die die positive Elektrode enthält, die negativen Ionen überwiegen, in der anderen die positiven und bei vorsichtiger Steigerung der Expansion findet man bald einen Wert, bei dem in einer Kugel starke Kondensation eintritt, während in der anderen nur ein paar Tröpfchen erscheinen. Umkehrung des Effektes mit Umkehrung der Feldrichtung dient zur Kontrolle. Bei einer höheren Expansion verschwindet der Unterschied wieder, wenn der Dampf sich auf beide Ionenarten niederschlägt.

Es zeigte sich nun, daß die Dämpfe der Alkohole sich leichter auf die positiven Ionen niederschlagen und erst bei höherer Expansion auch auf die negativen, während Kontrollversuche mit Wasser das von Wilson gefundene entgegengesetzte Verhalten bestätigten. In der Tabelle II gibt die erste Kolumne das Vorzeichen der Ionen, auf denen zuerst Kondensation erfolgt, die zweite Kolumne die Expansion, bei der dies geschieht, die dritte die Expansion, bei der auch schon die anderen Ionen als Kerne dienen.

Tabelle II.

Substanz	Vorzeichen	$\frac{v_2}{v_1}$	$\frac{v_2}{v_1}$
Wasser	—	1·265	1·314
Methylalkohol	+	1·242	1·309
Äthylalkohol	+	1·184	1·221
Isoamylalkohol	+	1·226	1·249
Heptylalkohol	+	1·269	1·306
Chloroform	+	1·528	1·593
Jodäthyl	+ ?	1·484	1·530

Bei Jodäthyl ist der Effekt nicht ganz sicher nachweisbar, woran ungeladene Kondensationskerne schuld sein können. Bei Heptylalkohol ist der Dampfdruck π bei der Berechnung von $\frac{v_2}{v_1}$ vernachlässigt. Azeton kondensiert bei $\frac{v_2}{v_1} = 2{\cdot}009$, Benzol bei 1·642, ohne daß eine Ladung nachweisbar ist. Pentan, Ameisensäure, essigsaures Methyl konnten nicht zur Kondensation gebracht werden. Schwefelkohlenstoff gibt bei der geringsten Expansion (1·022) ohne Ionisierung einen Nebel, der durch Röntgenstrahlen nicht wesentlich verstärkt wird und keine Ladung zu haben scheint. Verdünnte Lösungen von H_2SO_4, KOH, NaCl in Wasser verhalten sich wie destilliertes Wasser. Spuren von Alkohol im Wasser bewirken dagegen, daß Kondensation schon bei geringeren Expansionen (1·22) eintritt, und zwar auf den positiven Ionen. Dies ist wohl so aufzufassen, daß die Spuren von Alkoholdampf sich auf die positiven Ionen niederschlagen und diese jetzt durch die Vergrößerung zu Kondensationskernen für den Wasserdampf geeigneter machen.

Die durch Mittelbildung aus sämtlichen Versuchen gewonnenen Werte von $\frac{v_2}{v_1}$ für die Alkohole, die einzigen Flüssigkeiten außer Wasser und Chloroform, für die unzweideutige Resultate erhalten wurden, sind die folgenden:

Tabelle III.

Substanz	$\frac{v_2}{v_1}$	$\frac{v_2}{v_1}$
Methylalkohol	1·251	1·306
Äthylalkohol	1·175	1·200
Propylalkohol	1·178	1·201
Isobutylalkohol	1·198	1·214
Isoamylalkohol	1·223	1·233
Heptylalkohol	1·269	1·306

Der Fehler dürfte kaum eine Einheit der zweiten Dezimale übersteigen. Als Funktion des Molekulargewichtes aufgefaßt, zeigen die Werte von $\frac{v_2}{v_1}$ einen ziemlich regelmäßigen Gang mit einem Minimum bei Äthylalkohol.

Das entgegengesetzte Verhalten von Wasser- und Alkoholdämpfen scheint darauf hinzuweisen, daß man bei der Erklärung der Kondensation nicht ausschließlich die physikalischen Eigenschaften (Beweglichkeit) der Gasionen zu berücksichtigen hat.

Die Farbenempfindlichkeit des normalen und farbenblinden Auges

von

Dr. **Olga Steindler.**

Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Tafeln und 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Februar 1906.)

Eine neuerliche Untersuchung der Empfindlichkeit des Auges für Farbennuancen schien mir um so mehr wünschenswert, als die bisher vorhandenen Messungen und Angaben mehr oder weniger den Charakter des Provisorischen tragen; die Mehrzahl ist auch nicht mit ausreichenden Mitteln vorgenommen worden. Andrerseits bieten die bestehenden Farbentheorien eine hinreichende Basis, diese bei allen Menschen im großen und ganzen gleichartige Empfindlichkeit zu erklären und sie als notwendige Konsequenz zu ergeben. Dies ist nicht bloß bei dem normalen Auge, mit dem sich der erste Teil der Untersuchung befaßt, der Fall, sondern auch bei gestörten Farbensystemen — Farbenblinden — wie im Anschluß daran klargelegt wird.

Daß im nachfolgenden besonders auf die Young-Helmholtz'sche Farbentheorie Rücksicht genommen wird, ist darauf zurückzuführen, daß sie bisher die einzige ist, der quantitative Angaben zu Grunde liegen. Auch wird sich dies aus nachfolgender Untersuchung rechtfertigen.

Helmholtz hat auch selbst darzustellen versucht, wie die Anteile der einzelnen Grundempfindungen an den einzelnen Spektralfarben verlaufen. König und Dieterici[1] haben durch

[1] Zeitschr. für Psych. und Phys., Bd. 4 (1892).

Farbenmischung die drei Grundempfindungskurven genauer bestimmt und den Maßstab für jede der Kurven so gewählt, daß die von diesen und der Abszissenachse eingeschlossenen Flächenräume gleich sind, und schließlich hat F. Exner[1] unter Anwendung des Bezold-Brücke'schen Phänomens die Durchschnittspunkte der einzelnen Grundempfindungskurven genau bestimmt und unter Beibehaltung der allgemeinen Gestalt an den König'schen Kurven Korrekturen vorgenommen. Da für die Diskussion im folgenden eine genaue Kenntnis der Gestalt der Grundempfindungskurven nötig ist, seien sie in Fig. 1, welche der Exner'schen Abhandlung[1] entnommen ist, nochmals wiedergegeben, um so mehr, als obige Werte den folgenden Berechnungen zu Grunde gelegt sind.

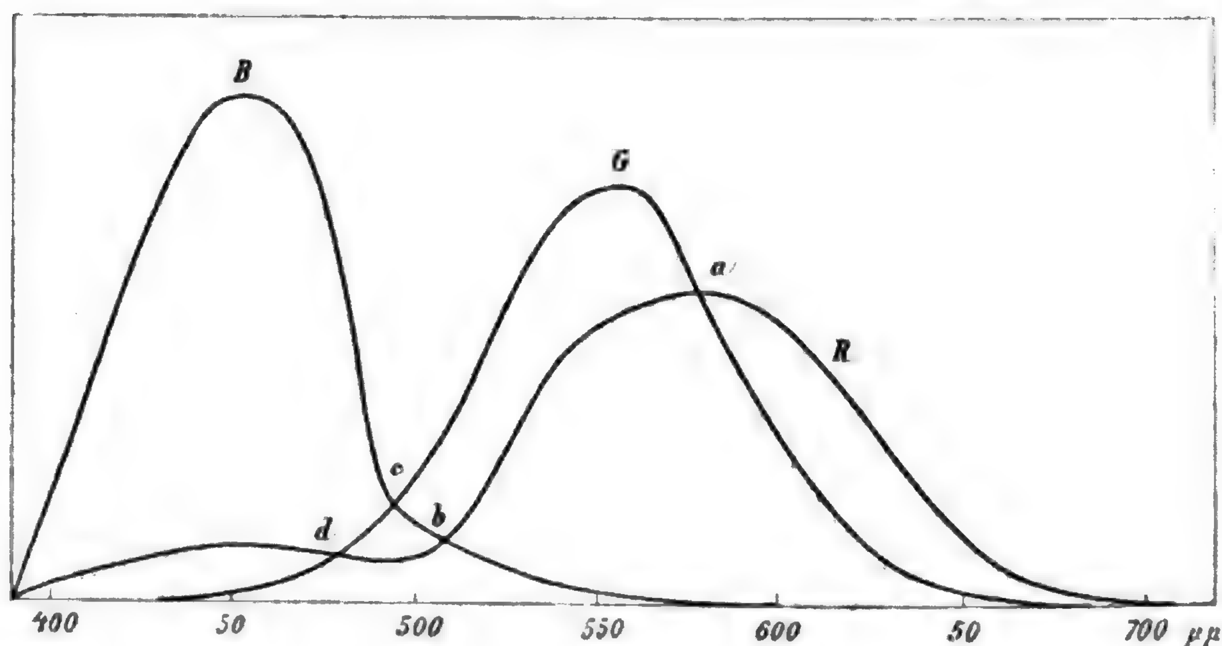


Fig. 1.

Die bestehenden Farbentheorien gestatten auch eine Erklärung der Erscheinung gestörter Farbensysteme, der Mono- und Dichromaten. Helmholtz unterscheidet Rot-, Grün- und Blaublinde, deren Farbensysteme sich von dem des normalen Trichromaten nur durch Wegfallen der entsprechenden Grundempfindung unterscheiden. So besitzt also der Rotblinde noch eine Grün- und Blauempfindung, der Grünblinde eine Rot- und Blauempfindung, der Blaublinde eine Rot- und Grünempfindung.

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXI. Abt. II a, Juni 1902, p. 857.

Der Monochromat hingegen besitzt nur eine einzige Grundempfindung, die Farbenunterschiede werden daher für ihn bloß Helligkeitsunterschiede ein und derselben Grundempfindung.

Nach Hering fällt bei den Dichromaten die Unterscheidung in Rot-, Grün- und Blaublinde fort, er kennt nur Rot-Grün- oder Gelb-Blauverwechsler und erklärt die Dichromasie durch Unfähigkeit des Auges, eine bestimmte Sehsubstanz zu dissimilieren und zu assimilieren. Tritt dies für beide farbige Empfindung erzeugende Bestandteile der Sehsubstanz ein, so bleibt nur die Weiß-Schwarzvalenz als wirksam zurück, der Fall der Monochromasie.

Mandelstamm[1] hat zuerst die Farbenempfindlichkeit des menschlichen Auges für Unterschiede der Wellenlänge untersucht. Durch Verschiebung der Platten eines Ophthalmometers stellte er auf eben merkliche Farbenverschiedenheit ein und erhält Maxima der Empfindlichkeit im Spektrum bei den Linien *D* und *F*. Dobrowolsky[2] gelangte auf dieselbe Weise zu denselben Resultaten. Peirce[3] bediente sich eines Diffraktionsgitters und beobachtete im Spektroskop Nuanceverschiedenheiten des Spektrums. Seine Resultate sind Mittelwerte aus Messungen verschiedener Beobachter, ein Umstand, der Ungenauigkeiten mit sich bringt, da die Farbenunterschiedsempfindlichkeit individuelle Abweichungen zeigt. Genauere Messungen haben zuerst König und Dieterici[4] mittels eines Spektralapparates vorgenommen. Bestimmt wurden die mittleren Fehler bei Einstellung auf Farbengleichheit für größere und mittlere Intensitäten. Uhthoff[5] untersucht die Wellenlängenunterschiede für eben merkliche Farbenverschiedenheit, Brodhun,[6] selbst farbenblind, gibt Messungsreihen an, die nach König's Methode für mittlere Intensitäten ausgeführt wurden. Ferner teilt noch F. Exner[7] eine einmalige Messungsreihe an

[1] Gräfe's Archiv, Bd. 13, p. 399.
[2] Ebenda, Bd. 18, p. 99.
[3] American Journal, Bd. 26 (1883), p. 299.
[4] Annalen der Physik und Chemie, Bd. 22, p. 579.
[5] Gräfe's Archiv, Bd. 34, 4, p. 1.
[6] Zeitschr. für Psych. und Phys., Bd. 3 (1892), p. 89.
[7] L. c. p. 875.

einem ausgedehnten Spektrum mit; an letztere schließen sich nachfolgende Untersuchungen an.

Mit einem Konkavgitter wurde ein reines Spektrum erster Ordnung einer Bogenlampe horizontal entworfen, dessen Ausdehnung an der beobachteten Stelle etwa 85 *cm* betrug. Das Licht dieses Spektrums fiel senkrecht auf zwei vertikal übereinander gestellte, total reflektierende Prismen und gelangte nach abermaliger Totalreflexion an einem größeren Prisma durch eine Lupe ins Auge, so daß zwei unmittelbar aneinanderstoßende Felder übereinander sichtbar wurden. Das obere der beiden kleineren Prismen war längs einer Skala horizontal verschiebbar, so daß bei einer Verschiebung Strahlen benachbarter Wellenlängen von jedem der beiden kleineren Prismen reflektiert wurden. Die seitlichen Strahlen waren durch eine Blende zwischen dem zweiten Prisma und der Lupe ferngehalten. Bei der Beobachtung wurde, von Gleichheit der Felder ausgehend, das eine Prisma so lange in einem Sinne verschoben, bis der jeweilige Beobachter einen eben merklichen, aber deutlichen Farbenunterschied konstatierte. Die Messungen fanden bei mittlerer Intensität längs des ganzen Spektrums in Intervallen von 3 bis 10 $\mu\mu$ statt. Die angeführten Werte sind Mittelwerte aus mindestens zehn Messungen desselben fast durchwegs geübten Beobachters an der betreffenden Stelle des Spektrums.

Nachfolgende Tabelle gibt die Resultate der Untersuchungen an zwölf Trichromaten an.

Tabelle 1.

λ	Dr. O. St.	Dr. E.	Prof. E.	Dr. Schw.	Dr. A. St.	Dr. Ma.	Dr. Me.	Dr. Bi.	Herr B.	Frl. M.	Dr. H.	Dr. G.
403 $\mu\mu$	—	—	—	31·6	—	—	—	—	—	—	—	—
405	—	—	—	—	—	—	48·0	—	—	—	—	—
407	—	—	30·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
410	—	—	—	24·0	—	—	—	—	—	—	—	—
412	—	—	—	—	—	—	36·8	—	—	—	—	—
415	—	—	20·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—

λ	Dr. O. St.	Dr. E.	Prof. E.	Dr. Schw.	Dr. A. St.	Dr. Ma.	Dr. Me.	Dr. Bi.	Herr B.	Frl. M.	Dr. H.	Dr. G.
417 μμ	—	—	—	21·2	—	—	—	—	—	—	—	—
419	—	—	—	—	—	—	28·0	—	—	—	—	—
420	39·6	40·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
422	—	36·5	15·4	—	—	—	—	—	—	40·0	—	—
424	32·0	—	—	18·8	—	—	—	—	—	—	—	—
426	—	—	15·0	—	—	—	20·0	—	—	—	84·0	—
428	27·2	—	—	—	42·0	—	—	—	—	24·0	—	—
430	—	26·2	14·4	—	—	—	—	—	—	—	—	—
431	24·8	—	—	16·4	—	—	—	—	—	—	—	—
432	—	—	—	—	38·0	68·0	—	—	—	—	—	—
433	—	—	—	—	—	—	14·0	30·8	52·4	—	—	—
434	—	25·7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
435	23·6	—	15·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
436	—	—	—	—	—	—	—	28·0	—	15·2	—	—
437	—	—	—	—	34·0	—	—	—	—	—	—	39·3
438	24·8	27·1	—	16·4	—	—	—	—	—	—	—	—
439	—	—	16·0	—	—	56·0	—	—	—	—	—	—
440	—	—	—	—	—	—	16·0	26·4	38·0	—	57·6	—
441	—	29·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	39·1
442	28·0	—	18·0	—	30·0	—	—	—	—	14·0	—	—
445	—	—	—	17·2	—	—	—	—	—	—	—	—
446	31·6	34·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
447	—	—	—	—	26·0	43·2	24·0	18·0	31·2	—	50·0	—
448	34·4	36·3	16·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
449	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	38·0
450	—	38·0	—	—	—	—	—	—	—	15·2	—	—
451	36·8	—	—	—	27·0	—	—	—	—	—	—	—
452	—	37·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
453	—	—	—	20·8	—	—	—	—	—	—	—	—
454	37·6	—	—	—	—	32·0	—	20·0	—	—	53·2	—
455	—	—	12·0	—	30·0	—	22·0	—	30·4	—	—	—
456	34·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
457	—	31·0	—	—	—	—	—	—	—	20·0	—	35·3

λ	Dr. O. St.	Dr. E.	Prof. E.	Dr. Schw.	Dr. A. St.	Dr. Ma.	Dr. Me.	Dr. Bi.	Herr B.	Frl. M.	Dr. H.	Dr. G.
459 μμ	—	28·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
460	29·2	—	—	21·6	33·0	—	—	—	—	—	—	31·5
462	—	—	7·8	—	—	—	11·2	24·0	36·0	—	54·8	—
463	—	24·4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
464	25·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
465	—	—	—	—	34·0	—	—	—	—	24·0	—	26·2
466	—	22·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
467	—	—	—	21·2	—	—	—	—	—	—	—	—
468	20·8	—	—	—	33·0	—	—	—	—	—	—	—
469	—	—	—	—	—	30·8	6·4	19·2	32·8	—	52·0	23·9
470	—	19·0	5·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—
471	18·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
472	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24·0	—	22·0
473	—	17·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
474	16·8	—	—	17·2	31·4	—	—	—	—	—	—	—
476	—	—	—	—	—	22·4	5·2	16·4	23·2	—	44·0	18·2
477	—	14·8	5·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
478	15·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
480	—	—	—	—	28·8	—	—	—	—	18·8	—	15·9
481	—	12·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
482	13·6	—	—	15·2	—	—	—	—	—	—	—	—
483	—	—	—	—	—	16·8	—	—	—	—	—	—
484	—	11·5	5·1	—	—	—	5·6	14·4	20·8	—	27·2	13·7
485	12·4	—	—	—	27·0	—	—	—	—	—	—	—
488	—	11·0	—	—	—	—	—	—	—	16·0	—	11·8
490	12·0	—	—	13·2	26·8	—	—	—	—	—	—	—
491	—	—	—	—	—	16·0	6·0	12·8	19·6	—	23·2	—
492	—	11·2	6·0	—	—	—	—	—	—	—	—	9·9
494	11·6	—	—	—	25·5	—	—	—	—	16·4	—	—
496	—	12·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8·7
497	11·6	—	—	12·0	—	—	—	—	—	—	—	—
498	—	—	—	—	—	18·0	—	—	—	—	—	—
499	—	—	—	—	—	—	9·6	12·4	20·0	—	22·4	—

λ	Dr. O. St.	Dr. E.	Prof. E.	Dr. Schw.	Dr. A. St.	Dr. Ma.	Dr. Me.	Dr. Bi.	Herr B.	Frl. M.	Dr. H.	Dr. G.
500 μμ	12·4	14·8	8·0	—	26·5	—	—	—	—	—	—	—
501	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17·6	—	7·6
504	12·8	17·3	—	12·8	—	—	—	—	—	—	—	—
506	—	—	24·4	—	29·5	20·0	13·6	12·0	26·0	—	27·2	8·7
508	14·0	20·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	11·4
510	—	—	—	—	33·3	—	—	—	—	19·2	—	—
512	16·2	—	—	14·8	—	—	—	—	—	—	—	14·0
513	—	—	—	—	—	21·6	—	—	—	—	—	—
514	—	25·7	26·0	—	36·5	—	21·2	13·0	31·2	—	32·8	—
516	17·6	26·6	—	—	—	—	—	—	—	20·8	—	15·2
520	21·6	30·0	—	15·2	40·0	22·0	—	—	—	—	—	17·8
521	—	—	—	—	—	—	28·0	14·4	—	—	42·4	—
522	—	—	34·0	—	—	—	—	—	39·2	—	—	—
523	25·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19·4
524	—	32·0	—	—	—	—	—	—	—	24·0	—	—
526	—	—	—	—	45·0	—	—	—	—	—	—	—
527	29·6	—	—	18·0	—	—	—	—	—	—	—	20·1
528	—	25·0	—	—	—	19·2	—	—	—	—	—	—
529	—	—	—	—	—	—	32·4	17·6	—	—	46·4	—
530	—	—	33·0	—	—	—	—	—	46·0	—	—	—
531	32·4	—	—	—	48·7	—	—	—	—	—	—	21·6
532	—	36·4	—	—	—	—	—	—	—	29·2	—	—
535	32·8	35·9	—	20·4	—	—	—	—	—	—	—	22·0
536	—	—	—	—	—	18·6	35·6	—	—	—	—	—
537	—	—	—	—	50·0	—	—	22·0	42·0	—	43·6	—
538	30·4	—	30·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
539	—	34·5	—	—	—	—	—	—	—	32·0	—	22·0
542	28·0	32·4	—	17·2	—	—	—	—	—	—	—	21·6
543	—	—	—	—	49·0	14·4	—	—	—	—	—	—
544	—	—	—	—	—	—	37·2	—	—	—	36·8	—
545	—	—	23·6	—	—	—	—	21·6	35·6	—	—	—
546	25·2	29·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20·5
548	—	—	—	—	45·5	—	—	—	—	28·0	—	—

λ	Dr. O. St.	Dr. E.	Prof. E.	Dr. Schw.	Dr. A. St.	Dr. Ma.	Dr. Me.	Dr. Bi.	Herr B.	Frl. M.	Dr. H.	Dr. G.
550 μμ	23·6	26·7	—	15·2	—	—	—	—	—	—	—	18·2
551	—	—	—	—	—	12·0	—	—	—	—	—	—
552	—	—	—	—	—	—	36·4	17·2	28·0	—	32·4	—
553	—	—	20·6	—	41·0	—	—	—	—	—	—	16·7
554	21·6	24·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
556	—	—	—	—	38·0	—	—	—	—	24·0	—	—
557	—	22·5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15·2
558	20·0	—	—	14·8	—	—	—	—	—	—	—	—
560	—	—	—	—	34·0	11·0	32·0	15·2	24·1	—	27·6	—
561	—	20·0	16·4	—	—	—	—	—	—	—	—	14·0
562	18·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
563	—	—	—	—	31·0	—	—	—	—	—	—	—
565	—	18·0	—	—	—	—	—	—	—	21·2	—	13·7
566	—	—	—	13·6	—	—	—	—	—	—	—	—
567	14·4	—	—	—	—	10·8	—	—	—	—	—	—
568	—	16·5	—	—	—	—	24·0	12·4	24·0	—	22·8	—
569	—	—	12·8	—	—	—	—	—	—	—	—	12·9
570	12·4	—	—	—	26·5	—	—	—	—	—	—	—
572	—	14·8	—	—	—	—	—	—	—	20·0	—	—
573	10·8	—	—	12·8	—	—	—	—	—	—	—	12·9
575	—	—	—	—	—	9·2	19·6	11·6	26·4	—	19·6	—
576	—	13·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14·0
577	9·6	—	10·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
578	—	—	—	—	23·0	—	—	—	—	—	—	—
580	—	10·4	—	—	—	—	—	—	—	20·8	—	15·2
581	8·4	—	—	12·4	—	—	—	—	—	—	—	—
583	—	—	—	—	—	12·0	16·0	11·2	30·8	—	19·2	—
584	—	9·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17·1
585	7·6	—	9·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
586	—	—	—	—	22·4	—	—	—	—	—	—	—
587	—	8·0	—	—	—	—	—	—	—	23·6	—	19·0
589	8·8	—	—	13·0	—	—	—	—	—	—	—	—
590	—	—	—	—	23·0	—	—	—	—	—	—	—

λ	Dr. O. St.	Dr. E.	Prof. E.	Dr. Sch.	Dr. A. St.	Dr. Ma.	Dr. Me.	Dr. Bi.	Herr B.	Frl. M.	Dr. H.	Dr. G.
591 μμ	—	8·6	—	—	—	14·0	12·0	11·6	36·0	—	19·6	—
592	—	—	9·6	—	—	—	—	—	—	—	—	20·5
593	10·4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
595	—	11·0	—	—	—	—	—	—	—	28·4	—	22·0
597	12·8	—	—	14·4	26·0	—	—	—	—	—	—	—
598	—	—	—	—	—	15·6	11·2	—	—	—	—	—
599	—	14·5	—	—	—	—	—	15·6	40·4	—	22·8	23·5
600	—	—	12·8	—	28·5	—	—	—	—	—	—	—
601	16·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
603	—	18·0	—	—	—	—	—	—	—	34·4	—	23·8
605	17·2	20·0	—	16·4	32·5	—	—	—	—	—	—	—
606	—	—	—	—	—	18·0	12·8	20·8	44·4	—	—	—
607	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28·3	24·9
608	20·0	—	19·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
610	—	25·0	—	—	35·0	—	—	—	—	42·4	—	26·2
612	24·0	—	—	26·0	—	—	—	—	—	—	—	—
614	—	30·0	—	—	36·5	20·0	16·0	19·2	42·8	—	31·2	27·4
616	29·6	—	28·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
618	—	38·0	—	—	—	—	—	—	—	52·0	—	32·3
620	36·8	—	—	22·8	38·0	—	—	—	—	—	—	—
622	—	45·0	—	—	—	24·0	25·2	24·8	45·2	—	36·8	39·9
624	40·8	—	34·2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
625	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	42·4
626	—	47·5	—	—	—	—	—	—	—	58·0	—	—
627	—	—	—	—	36·0	—	—	—	—	—	—	—
628	39·2	—	—	20·4	—	—	—	—	—	—	—	—
629	—	48·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
630	—	—	—	—	—	20·0	36·0	36·0	52·0	—	62·4	—
631	—	—	—	—	34·0	—	—	—	—	—	—	—
632	35·2	—	30·6	—	—	—	—	—	—	—	—	39·3
633	—	46·5	—	—	—	—	—	—	—	60·0	—	—
635	—	—	28·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—
636	31·2	—	—	21·2	—	—	—	—	—	—	—	—

λ	Dr. O. St.	Dr. E.	Prof. E.	Dr. Sch.	Dr. A. St.	Dr. Ma.	Dr. Mc.	Dr. Bl.	Herr B.	Frl. M.	Dr. H.	Dr. G.
637 μμ	—	45·5	—	—	32·0	—	—	—	—	—	—	—
638	31·0	—	—	—	—	17·2	28·0	—	64·4	—	72·0	—
639	—	—	28·8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
640	—	44·0	—	28·0	—	—	—	—	—	—	—	34·5
641	31·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
642	—	—	—	—	34·5	—	—	—	—	45·5	—	—
644	36·8	41·5	30·0	33·6	—	—	—	—	—	—	—	—
645	—	—	—	—	—	20·0	—	—	—	—	—	—
646	—	37·6	—	—	—	—	20·0	—	82·0	—	72·8	36·7
648	44·8	—	37·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
651	—	34·5	—	—	41·0	—	—	—	—	58·0	—	—
652	61·6	—	46·0	51·6	—	—	—	—	—	—	—	—
653	—	—	—	—	—	24·8	—	—	—	—	—	—
654	—	—	—	—	—	—	28·8	—	—	—	63·6	55·5
655	—	34·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
656	—	—	54·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
657	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	83·6
659	—	35·5	—	—	—	—	—	—	—	78·0	—	—
660	—	—	—	—	54·0	—	—	—	—	—	—	—
662	—	—	—	—	—	36·0	32·0	—	—	—	60·0	—
663	—	40·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
667	—	53·0	—	—	—	—	—	—	—	96·0	—	—
670	—	—	—	—	—	48·0	39·2	—	—	—	67·2	—
675	—	75·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
678	—	—	—	—	—	—	47·2	—	—	—	97·6	—
686	—	—	—	—	—	—	72·0	—	—	—	—	—

Wie aus den obigen Daten ersichtlich ist, zeigt die Nuancenempfindlichkeit im Spektrum für die verschiedenen Beobachter trotz individueller Verschiedenheiten, auf die im folgenden näher eingegangen wird, im allgemeinen denselben Verlauf. In Übereinstimmung mit den Resultaten der oben angeführten Arbeiten zeichnet sich zunächst eine Stelle im

Gelb und im Blaugrün durch größte Farbenunterschiedsempfindlichkeit aus. Darauf folgt im Übergang von Blau zu Violett ein etwas weniger empfindlicher Bereich und schließlich ein viertes, schwächeres Empfindlichkeitsmaximum im Rot. Zur besseren Übersicht sei in Fig. 2 der für mein rechtes Auge beobachtete Verlauf der Empfindlichkeit in einer Kurve aufgetragen, so zwar, daß den einzelnen Wellenlängen die Wellenlängenunterschiede eben merklicher Farbendifferenzen in $\mu\mu$ zugeordnet sind.

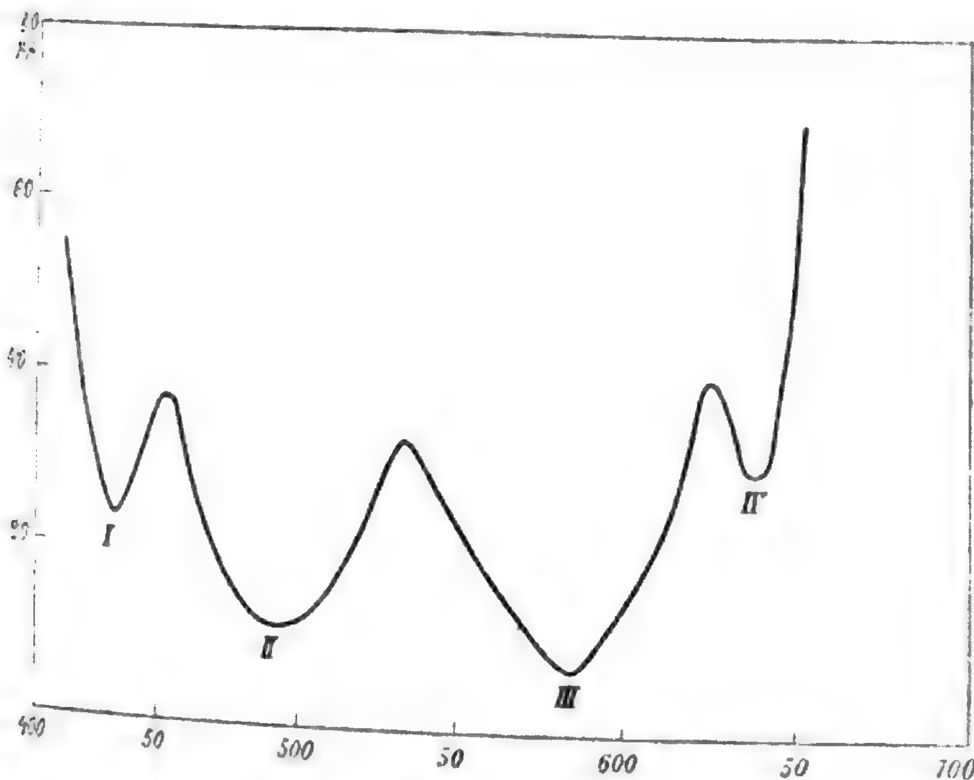


Fig. 2.

Man sieht demnach vier Stellen starker Empfindlichkeit, welche wir, gegen längere Wellenlängen fortschreitend, der Reihe nach mit I, II, III, IV bezeichnen wollen. Für mein Auge nimmt demnach die Empfindlichkeit, vom violetten Ende beginnend,

zu bis $\lambda = 435\,\mu\mu$, von da ab bis $\lambda = 454\,\mu\mu$,
dann wieder » $\lambda = 497\,\mu\mu$, » » » » $\lambda = 535\,\mu\mu$,
» » » $\lambda = 585\,\mu\mu$, » » » » $\lambda = 624\,\mu\mu$,
» » » $\lambda = 636\,\mu\mu$, » » » » zum roten Ende des Spektrums.

Am empfindlichsten ist mein Auge bei III, es folgt II, dann I und IV. Die Maxima II und III wurden schon bei den ziemlich ungenauen Kurven von Peirce[1] beobachtet, I findet sich zuerst ebenfalls dort schwach angedeutet. In der Kurve für Dieterici[2] fehlt dieses Maximum gänzlich, während die für König[2] dieses Maximum deutlich ausgeprägt enthält.

Anders jedoch steht es mit der Empfindlichkeitszunahme im Roten. Die erste Andeutung dessen findet sich in der Messungsreihe von F. Exner.[3] Bei $\lambda = 635 \mu\mu$ besitzt die Kurve eine Ausbiegung, die sich bei meinen späteren Messungen auch immer wieder zeigte. Da jedoch in diesem Spektralbezirke die Helligkeit bereits merklich abnimmt, hielt ich dieses Maximum zunächst nicht für reell. Es zeigte sich jedoch, daß tatsächlich Nuancenunterschiede bestehen, die sich weder durch Veränderung der Intensität der beobachteten Strahlen mit Nikol'schen Prismen, noch mit planparallelen Platten ausgleichen ließen. Es wurde nämlich in den Strahlengang vor dem Spalt ein Nikol'sches Prisma drehbar angebracht, ein zweites befand sich fix montiert unmittelbar vor dem unteren der beiden kleinen Prismen. Das obere wurde gegen das Ende des Spektrums zu verschoben. Es konnte demnach das hellere Feld durch Drehung des Nikols beliebig abgedunkelt werden, wobei sich jedoch Gleichheit der Felder nicht herstellen ließ. Dasselbe wurde mit planparallelen Platten versucht, welche, vor das untere Prisma gehalten, nur einen Teil der Strahlen ins Auge gelangen ließen; auch wurde mit einem Farbenfilter für rote Strahlen gearbeitet.

Das Ergebnis war stets das gleiche, so daß an der Realität einer nochmaligen Empfindlichkeitszunahme am roten Ende des Spektrums nicht gezweifelt werden kann. Das Empfindlichkeitsmaximum IV wiederholte sich überdies bei den Messungsreihen aller Beobachter, was nach den folgenden Erörterungen leicht erklärlich erscheint.

Die individuellen Schwankungen der Empfindlichkeit verschiedener Personen besteht zunächst darin, daß der Ort größter

[1] L. c.
[2] L. c.
[3] L. c.

Empfindlichkeit bei den einen II, bei anderen III ist. Hierauf folgt fast immer I, dann IV. Dr. G., ein Augenarzt, bei welchem das Maximum IV ziemlich ausgeprägt erscheint, ist bei I äußerst unempfindlich, was wohl mit der größeren Übung im Vergleichen roter Nuancen zusammenhängen mag. Auch liegen die Maxima nicht bei allen Beobachtern bei denselben Wellenlängen und dementsprechend auch nicht die Empfindlichkeits-

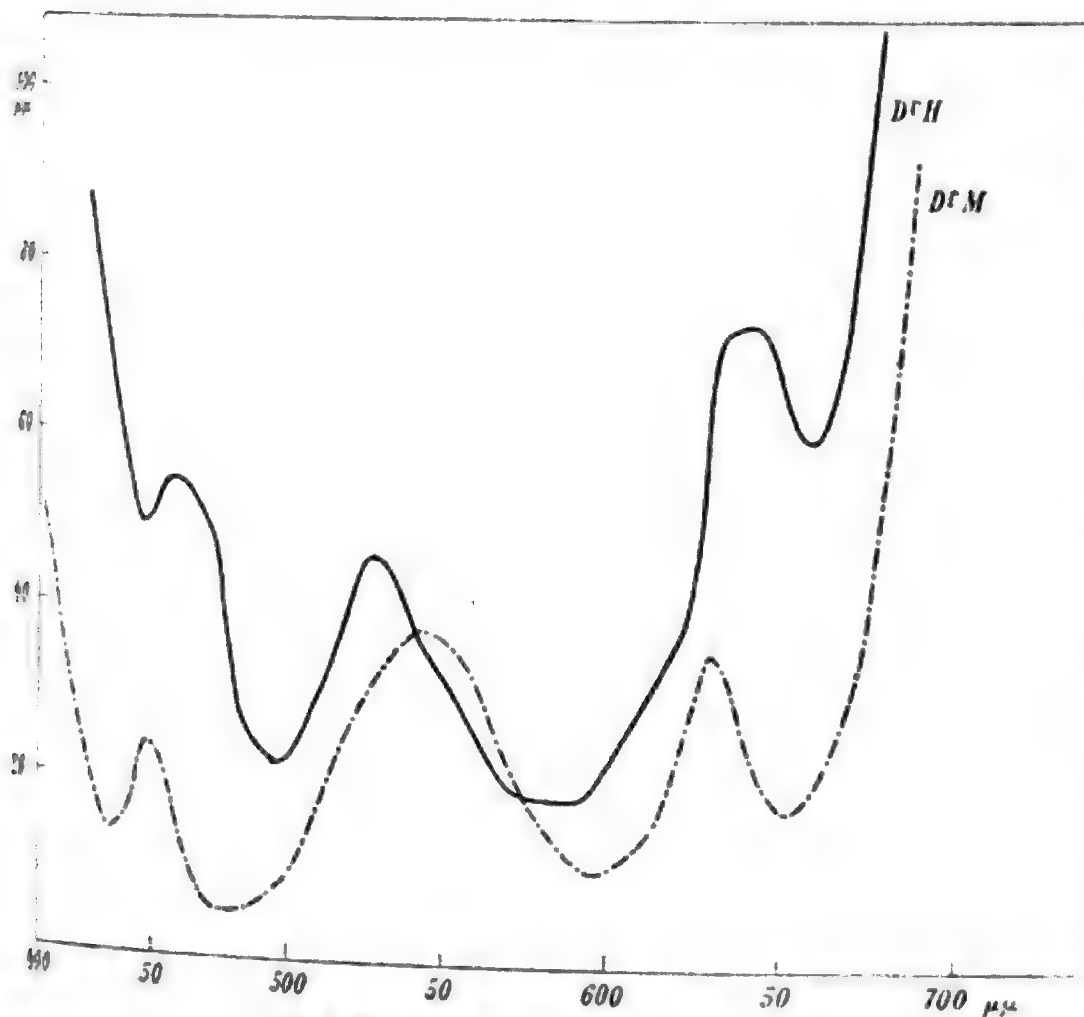


Fig. 3 (Kurve für Dr. M. und Dr. H.).

minima, was sich aus den nachfolgenden Überlegungen notwendig ergibt. Das Intervall von Schwankungen bei III beträgt für normale Trichromaten etwa 15 μμ, während es bei II innerhalb 30 μμ variiert. Ebenso liegen die Maxima I und IV um etwa 15 bis 20 μμ different. In Fig. 3 sind zwei Kurven angeführt, bei welchen die Extreme für II und III recht deutlich hervortreten.

Nach Hering's Theorie ist jede Farbenempfindung, wie oben erwähnt, abhängig von den ausgelösten Valenzen der

drei Paare von Urfarben, und zwar in der Weise, daß Rot und Grün nicht gleichzeitig empfunden werden können, sondern der Farbenton bedingt ist durch überwiegende positive oder negative Werte der entsprechenden Sehsubstanz.

Je mehr z. B. von der Rot-Grünsubstanz sich ersetzt, desto stärker ist die Grünempfindung. Da jedoch quantitative Angaben über jene Vorgänge gänzlich ausstehen, kann daraus für die Farbenempfindlichkeit des Auges für Wellenlängenunterschiede nichts gefolgert werden.

Hierin erweist sich die Young-Helmholtz'sche Theorie weit fruchtbarer. Jede Farbenempfindung setzt sich nach letzterer zusammen aus den drei Komponenten der Grundempfindungen, welche, in gleichen Intensitäten gemischt, Weiß ergeben. Der Farbenton ist bestimmt durch das Verhältnis der Ordinaten der Grundempfindungen an der betreffenden Stelle des Spektrums. Es läßt sich nun schließen, daß ein rascher Wechsel dieser Verhältnisse an benachbarten Stellen im Spektrum raschen Wechsel des Farbentons und somit auch eine Stelle starker Empfindlichkeit zur Folge haben müsse. Wachsen hingegen die Ordinaten der Grundempfindungskurven an zwei benachbarten Stellen annähernd proportional, so wird dieser Bereich seinen Farbenton wenig ändern, wir haben ein Minimum der Empfindlichkeit. Tatsächlich zeigt sich an den Grundempfindungskurven (Fig. 1) in den oben erwähnten Spektralbezirken ein rasch wechselndes Verhältnis der Anteile an den Grundempfindungen für die betreffenden Wellenlängen. Gleichzeitig erklärt sich auch hieraus, daß für verschiedene Beobachter die Wellenlängen der einzelnen Maxima so verschieden liegen. Denn auch die Wellenlängen der Durchschnittspunkte der einzelnen Grundempfindungskurven variieren, d. h. nicht für alle Beobachter sind die Rot-, Grün- und Blauwerte einer homogenen Farbenempfindung an derselben Stelle des Spektrums dieselben. Dementsprechend gehen die individuellen Schwankungen der Grundempfindungskurven Hand in Hand mit den individuellen Unterschieden der Farbenempfindlichkeit desselben Auges. Wie man sich an den obigen Grundempfindungskurven überzeugen kann, ist durch deren Verlauf auch der Verlauf der Empfindlichkeitskurve gegeben. So entspricht den

beiden großen Empfindlichkeitsmaximis II und III der rascheste Wechsel der Ordinatenverhältnisse; III fällt an die Stelle nahe dem Durchschnittspunkt *a*. Die Rotkurve hat bald ihr Maximum erreicht, die Grünkurve wächst steil an, die Blaukurve beginnt. Bei II fällt die Grünkurve langsam ab, die Rotordinaten bleiben nahezu gleich, während die Blaukurve rasch ansteigt. Bei I erfolgt ein langsames Abfallen der Rotkurve nach einem zweiten Maximum, die Blaukurve fällt steil ab, die Grünkurve verschwindet. Bei IV endlich fällt die Rotkurve fast linear ab, während die Grünkurve nach steilem Abfall und einer leichten Ausbiegung sich der Abszissenachse assymptotisch nähert.

Es wurde nun versucht, aus den Grundempfindungskurven den Verlauf der Empfindlichkeitskurve qualitativ darzustellen unter der einfachen Annahme, daß der Farbenton einer Mischfarbe abhängig ist von dem Verhältnisse der durch dieselben hervorgerufenen Grundempfindungen im Auge. Verändern sich für zwei benachbarte Wellenlängen diese Verhältnisse rasch, so haben wir, wie oben erwähnt, Stellen großer Empfindlichkeit und umgekehrt. Von gleichzeitiger Änderung der Sättigung der beiden Nachbarfarben soll abgesehen werden, da es sich hier bloß um die Farbenunterschiedsempfindlichkeit handelt.

Für den Trichromaten ist eine Farbenempfindung gewöhnlich aus allen drei Grundempfindungen zusammengesetzt; in gleichen Intensitäten liefern alle drei zusammen Weiß, so daß sowohl Farbenton als Sättigung durch jene drei Grundempfindungen direkt gegeben sind; der Farbenton selbst wird hingegen bestimmt durch das Verhältnis der Anteile jener beiden Grundempfindungen, welche bei Abzug der Weißempfindung der betreffenden Farbe noch übrig bleiben. Dementsprechend wurde die Empfindlichkeitskurve folgendermaßen berechnet:

Da die nach Abzug der Weißempfindung übrig bleibenden Grundempfindungen nur für jene Teile des Spektrums, welche zwischen zwei benachbarten Durchschnittspunkten der Grundempfindungskurven liegen, dieselben bleiben, zwischen anderen aber zwei andere überwiegen, mußten die einzelnen Teile des Spektrums zwischen je zwei Durchschnittspunkten gesondert berechnet werden, wobei der auf das Weiß entfallende Anteil

in Abzug gebracht wurde. So wurden für den Bereich vom roten Ende des Spektrums bis zum

Durchschnittpunkt *a* (Fig. 1)			das	Verhältnis		$R:G$,
von	*a*	bis *b*	»	»		$G:R$,
»	*b*	» *c*	»	»		$G:Bl$,
»	*c*	» *d*	»	»		$B:G$,
»	*d*	» zum violetten Ende				$B:R$

bestimmt, wobei obige Bezeichnung sowie die der Rechnung zu Grunde gelegten Ordinatenwerte den Grundempfindungskurven aus der Exner'schen Abhandlung[1] entnommen sind. Sodann wurde die Änderung jener Verhältnisse für benachbarte Wellenlängen bestimmt und in nachfolgender Kurve (Fig. 4)

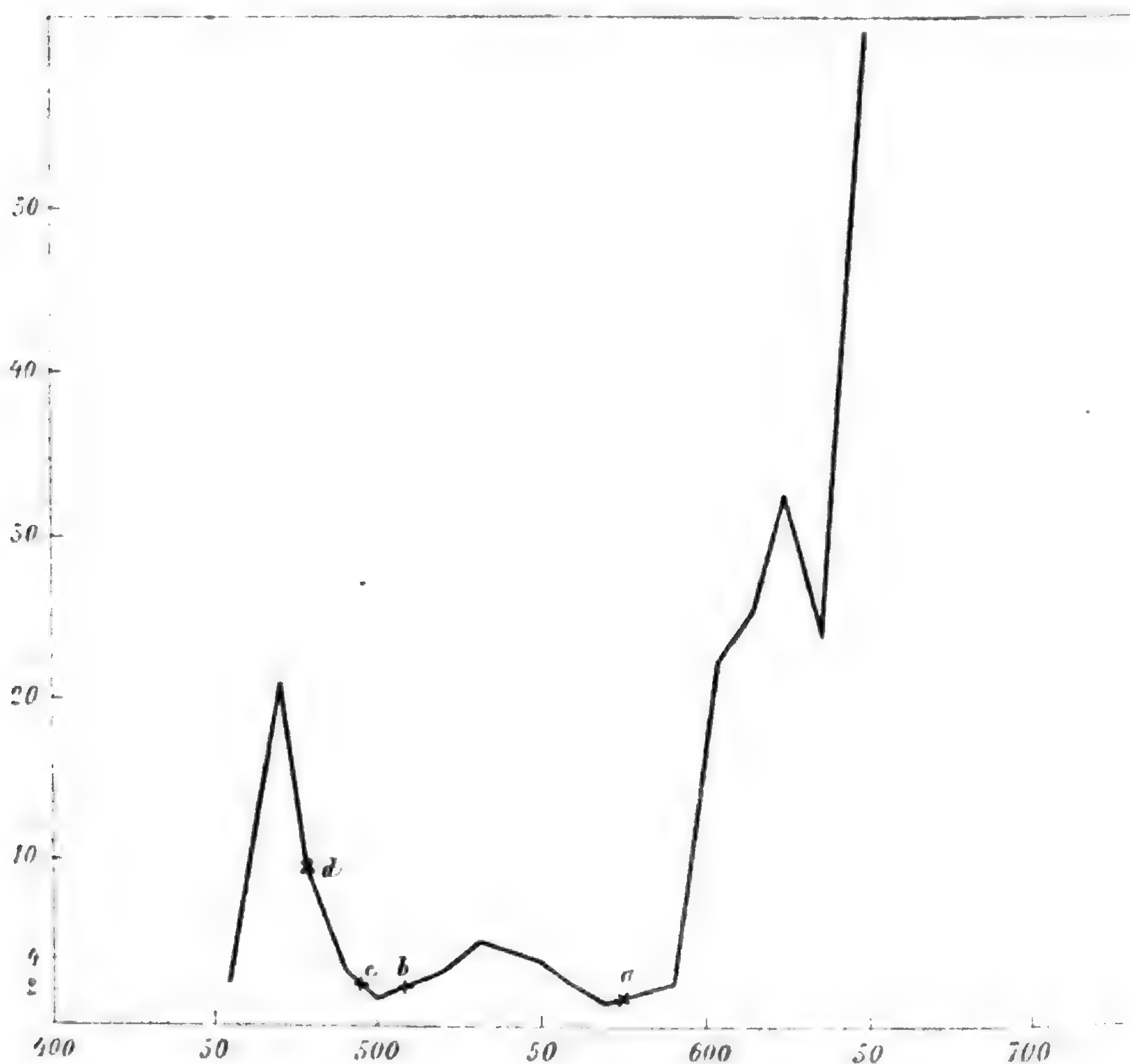


Fig. 4.

[1] L. c.

die auf 1 μμ entfallende Veränderung als Ordinate aufgetragen. Als Abszissen treten die Wellenlängen der betreffenden Spektralbezirke, als Ordinaten die auf obigem Wege gefundenen Zahlen in willkürlichem Maßstab ein, was völlig zulässig erscheint, da die so erhaltene Kurve bloß den Verlauf der Empfindlichkeitsverteilung im Spektrum qualitativ, nicht aber quantitativ zu geben Anspruch machen kann. Die Kurve konnte nach Obigem immer nur stückweise zwischen zwei Durchschnittspunkten mit Ausschluß dieser selbst berechnet werden.

Die so berechnete Farbenempfindlichkeitskurve steht in hinreichend guter Übereinstimmung mit der gemessenen, die Maxima und Minima der Empfindlichkeit decken sich, soweit es individuelle Verschiedenheiten gestatten. Es ergeben sich demnach in folgender Tabelle 2 zusammengestellte Werte.

Tabelle 2.

Beobachter	Maxima		
	II	III	IV
Dr. O. St.	495 μμ	585 μμ	638 μμ
Dr. E.	488	587	640
Prof. E.	477	585	635
Dr. Schw.	497	581	628
Dr. A. St.	494	586	637
Dr. Ma.	491	575	638
Dr. Me.	476	598	646
Dr. Bi.	506	583	614
Herr B.	491	568	614
Fräulein M.	488	572	642
Dr. H.	499	583	654
Dr. G.	501	570	640
Mittel beobachtet	492	581	635·5
Berechnet	500	570—590	635

Beobachter	Minima zwischen		
	I und II	II und III	III und IV
Dr. O. St.	454 μμ	535 μμ	624 μμ
Dr. E.	450	532	629
Prof. E.	442	522	624
Dr. Schw.	464	535	620
Dr. A. St.	465	537	620
Dr. Ma.	—	520	622
Dr. Me.	417	544	630
Dr. Bi.	462	537	630
Herr B.	462	530	622
Fräulein M.	470	539	633
Dr. H.	462	529	646
Dr. G.	—	537	625
Mittel beobachtet	458	533	627
Berechnet	470	530	625

Das Maximum im Blau konnte nicht weiter hinaus berechnet werden, es weist jedoch der abfallende Teil der Kurve auf ein solches hin.

Ein vollständiges Zusammenfallen der Extreme wäre vermutlich zu erzielen, wenn für jeden Beobachter der Berechnung der Kurve die Daten seiner eigenen Grundempfindungskurven zu Grunde gelegt werden könnten.

Für Dr. H. z. B. ist die Übereinstimmung besser, es folgt dies eben daraus, daß die Durchschnittspunkte der der Berechnung zu Grunde gelegten Grundempfindungskurven mit den von Dr. H. für sein Auge bestimmten fast vollständig zusammenfallen. Für mein Auge liegen die Durchschnittspunkte etwas anders,

a liegt bei $\lambda = 579$ μμ
b » » $\lambda = 506$ μμ
c » » $\lambda = 497$ μμ

demnach ist der Verlauf der Grundempfindungskurven auch ein etwas anderer, daher auch die Farbenempfindlichkeit. Im

allgemeinen ist dieselbe in der Nähe der Durchschnittspunkte ziemlich groß.

Nach der ursprünglich Helmholtz'schen Theorie entfällt für den Dichromaten eine der Grundempfindungen.[1] Es bleibt für ihn daher bloß das Verhältnis der beiden anderen Grundempfindungsanteile zu berücksichtigen. Sind diese gleich groß, so nennt der Dichromat die entsprechende Farbe Weiß. Unter dieser Annahme haben auch König und Dieterici[1] die Grundempfindungskurven bestimmt. Die Farbenunterschiedsempfindlichkeit hängt wieder ab von der Änderung der Anteilsverhältnisse seiner beiden Grundfarben. Von den acht untersuchten Farbenblinden waren nach Helmholtz' Bezeichnung drei rot- und fünf grünblind.

Ein erster Unterschied charakterisiert zunächst die beiden Typen dahin, daß der Grünblinde das rote Ende des Spektrums weiter hinaussieht als der Rotblinde.

Noch markanter ist die Verschiedenheit bei der Farbenempfindlichkeit, ein Umstand, auf den bisher, soviel mir bekannt, nicht hingewiesen wurde. Der Rotblinde hat zwei Stellen stärkster Empfindlichkeit etwa um $\lambda = 500\,\mu\mu$ und $\lambda = 600\,\mu\mu$, der Grünblinde dagegen nur eine ungefähr bei $500\,\mu\mu$.

Tabelle 3 gibt die Resultate der Messungen in derselben Weise wie früher für Trichromaten.

Tabelle 3.

λ	Dr. v. B.	Herr T.	Herr E. M.	Herr H. v. B.	Herr W. v. B.	Dr. H.	Herr O.	Herr W. M.
440 $\mu\mu$	48·0	—	—	—	—	—	100·0	—
442	—	—	—	—	—	156·8	—	—
445	—	—	—	—	—	—	80·0	—
450	36·0	—	—	—	—	—	65·0	—

---

[1] L. c.

λ	Dr. v. B.	Herr T.	Herr E. M.	Herr H. v. B.	Herr W. v. B.	Dr. H.	Herr O.	Herr W. M.
455 μμ	30·0	—	—	—	—	—	50·0	—
458	—	—	—	—	—	120·0	—	—
460	28·0	—	—	—	—	—	43·0	43·0
465	36·0	—	—	—	—	—	29·0	—
470	47·0	76·0	—	—	—	88·0	26·0	39·0
475	52·0	72·0	—	—	152·0	56·0	33·0	—
480	50·0	65·0	80·0	78·0	120·0	—	28·0	28·0
483	—	—	—	—	—	46·0	—	—
485	20·0	55·0	56·0	—	—	—	22·0	—
486	—	—	—	—	88·0	—	—	—
487	—	—	—	—	—	37·2	—	—
490	10·0	33·0	38·0	44·0	—	28·0	19·0	15·0
493	—	—	—	—	52·0	—	—	—
494	—	—	—	—	—	26·0	—	—
495	4·0	20·0	22·0	—	—	—	15·0	—
496	Wp.	—	—	—	—	—	—	—
497	—	—	Wp.	—	—	—	—	—
498	—	Wp.	—	—	47·2	—	—	—
499	—	—	—	—	46·8	—	—	—
500	3·0	12·0	18·0	11·0	—	—	13·0	11·0
501	—	—	—	—	Wp. 48·0	—	—	—
502	—	—	—	—	—	18·4	—	—
503	—	—	—	Wp.	—	—	—	—
504	—	—	—	—	—	—	Wp.	Wp. 9·0
505	3·0	11·0	20·0	9·0	—	Wp. 20·0	9·5	—
508	—	—	—	—	68·0	—	—	—
510	3·0	18·0	24·0	12·0	—	20·8	12·0	9·5
515	5·0	24·0	29·0	16·5	96·0	—	14·0	—
520	7·0	32·5	37·0	23·0	122·0	30·0	20·0	10·0
525	10·0	42·0	44·0	31·0	—	—	30·0	—
528	—	—	—	—	160·0	40·0	—	—
530	24·0	50·0	50·0	44·0	—	—	—	12·0

λ	Dr. v. B.	Herr T.	Herr E. M.	Herr H. v. B.	Herr W. v. B.	Dr. H.	Herr O.	Herr W. M.
535 μμ	50·0	58·0	57·0	56·0	—	48·0	100·0	—
540	64·0	64·0	66·0	78·0	—	—	—	14·0
543	—	—	—	—	—	78·0	—	—
545	—	70·0	80·0	—	—	—	—	16·0
548	—	—	—	—	—	116·0	—	—
550	—	75·0	—	—	—	—	—	19·0
552	—	—	—	—	—	152·0	—	—
555	—	110·0	—	—	—	—	—	27·0
560	—	100·0	—	—	—	—	—	28·5
565	—	57·0	—	—	—	—	—	—
570	100·0	46·0	—	—	—	—	—	29·0
575	63·0	43·0	—	—	—	—	—	—
580	50·0	40·0	—	—	—	—	—	28·0
585	35·0	33·0	80·0	—	—	—	—	—
590	20·0	26·0	54·0	—	—	—	—	27·0
595	16·0	22·0	28·0	—	—	—	—	—
600	16·0	23·0	20·5	—	—	—	—	28·0
605	18·0	27·0	20·0	—	—	—	—	—
610	24·0	36·0	22·5	—	—	—	—	—
615	—	53·0	26·0	—	—	—	—	—
620	56·0	70·0	34·0	—	—	—	—	—
625	—	—	42·0	—	—	—	—	—
630	—	—	76·0	—	—	—	—	—

Die Verschiebungen der Prismen im Meßapparat, welche nötig sind, um Farbenunterschiede zu erzielen, sind bei den Dichromaten viel größer als bei Trichromaten. Erstere sind, da sie eine größere Empfindlichkeit für Helligkeitsunterschiede besitzen, leicht geneigt, solche als Farbenunterschiede zu bezeichnen. Es wurde daher stets streng darauf geachtet, daß die Einstellung auf ganz deutliche Farbennuancen erfolgte. Die Werte für die nötigen Verschiebungen konnten an manchen

Stellen nicht bestimmt werden, da sie größer waren als die größtmögliche Distanz der beiden Prismen gegeneinander. In Fig. 5 bis 10 (Tafel I und II) seien abermals zur besseren Übersicht die Kurvenzüge für Dichromaten graphisch dargestellt, der Weißpunkt ist in den Kurven eingezeichnet (×). Die Figuren 5 bis 7 beziehen sich dabei auf Rotblinde, 8 bis 10 auf Grünblinde, wobei in den Figuren 8 und 9 die Kurven für je zwei Beobachter eingetragen sind.

Es wurde nun auch der Zusammenhang zwischen den Empfindlichkeitskurven und den beiden jeweilig in Betracht kommenden Grundempfindungskurven nach derselben Methode wie für Trichromaten bestimmt. Auf diese Weise ergaben sich drei Kurvenzüge (Tafel II) für die drei Arten von Dichromaten; Fig. 11 bezieht sich auf den Rotblinden, Fig. 12 auf den Grünblinden und Fig. 13 auf den Blaublinden.

Die Lage der Maxima und Minima, sowohl der beobachteten als der berechneten, ist in Tabelle 4 für Rotblinde, in Tabelle 5 für Grünblinde angegeben.

Tabelle 4.

Beobachter	Maxima		Minima	
	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
Dr. v. B.	495		575	
Herr T.	505	500	560	560—580
Herr E. M.	500		560—570	
Mittel...	500		567	
Dr. v. B.	595			
Herr T.	595	600		
Herr E. M.	605			
Mittel....	598			

Das Spektrum ist etwa bis $\lambda = 650$ sichtbar.

Tabelle 5.

Beobachter	Maximum	
	beobachtet λ =	berechnet λ =
H. v. B.	505	500
W. v. B.	499	
Dr. H.	502	
Herr O.	505	
Herr W. M.	504	
Mittel....	503	

Die zu erwartenden Minima konnten bei den meisten Dichromaten nicht bestimmt werden, weil die erforderlichen Distanzen der beiden Prismen nicht zu erzielen waren. Das zweite Maximum der Grünblinden, berechnet etwa für $\lambda = 635$, konnte wegen zu geringer Helligkeit nicht beobachtet werden.

Von zirka 600 μμ ab sind Farbennuancen nicht mehr zu unterscheiden, sondern bloß Helligkeitsunterschiede; das Spektrum ist im Roten ebensoweit sichtbar wie für Trichromaten.

Obwohl ein Fall von Blaublindheit der Untersuchung nicht zugänglich war, wurde nach den vorhergehenden Untersuchungen doch die Empfindlichkeitskurve auch für Blaublinde in ihrem Verlauf berechnet. Diese müßte ebenfalls zwei deutliche Maxima der Empfindlichkeit aufweisen, etwa um $\lambda = 540$ μμ und $\lambda = 620$ μμ, ein kleineres Maximum bei $\lambda = 480$ bis 490 μμ. Im Roten verläuft sie ganz ähnlich wie die Farbenempfindlichkeitskurve für normale Trichromaten, im violetten Teile erscheint sie verkürzt. Es wäre interessant, diese Vermutung bei einem so seltenen Falle der Blaublindheit bestätigt zu sehen.

Bereits Helmholtz[1] hat die Farbenempfindlichkeitskurve auf Grund des Fechner'schen Gesetzes unter Zugrundelegung

[1] Zeitschr. für Psych. und Phys., Bd. II, p. 1, und Bd. III, p. 1.

der Messungen für Helligkeitsunterschiede von Brodhun[1] und der Farbenempfindlichkeit von König und Dieterici[2] bestimmt. Seine Resultate geben qualitativ und quantitativ den Verlauf der Empfindlichkeit ziemlich genau und sie lassen unter Zugrundelegung gewisser Annahmen einen Schluß auf die Art der drei Grundempfindungen zu. Die von Helmholtz auf diese Weise ermittelten Grundempfindungen weichen aber zum Teile wesentlich von den nach König's Vorgang gewonnenen ab, so namentlich die Grundempfindung Grün, und Helmholtz hat selbst schon diese Abweichung auf die mangelhafte experimentelle Grundlage der Rechnungen zurückgeführt. Es war der ursprüngliche Zweck der vorliegenden Untersuchung, genauere Meßresultate bezüglich der Farbenempfindlichkeit zu erlangen, doch scheint diesbezüglich die Unempfindlichkeit des Auges eine Grenze zu setzen, die auch durch Anwendung besserer Apparate nicht zu überschreiten ist. Auch erschweren die individuellen Verschiedenheiten der Augen wesentlich die Ermittlung allgemein gültiger Zahlenwerte.

Wie jedoch die Resultate vorliegender Arbeit beweisen, genügt schon die einfache Annahme, daß die Farbenempfindlichkeit sich mit den Verhältnissen der Grundempfindungsanteile ändert, um auf Grund der Helmholtz'schen Theorie die empirisch gefundene Farbenempfindlichkeit qualitativ für normale und dichromatische Augen darzustellen.

---

[1] L. c.
[2] L. c.

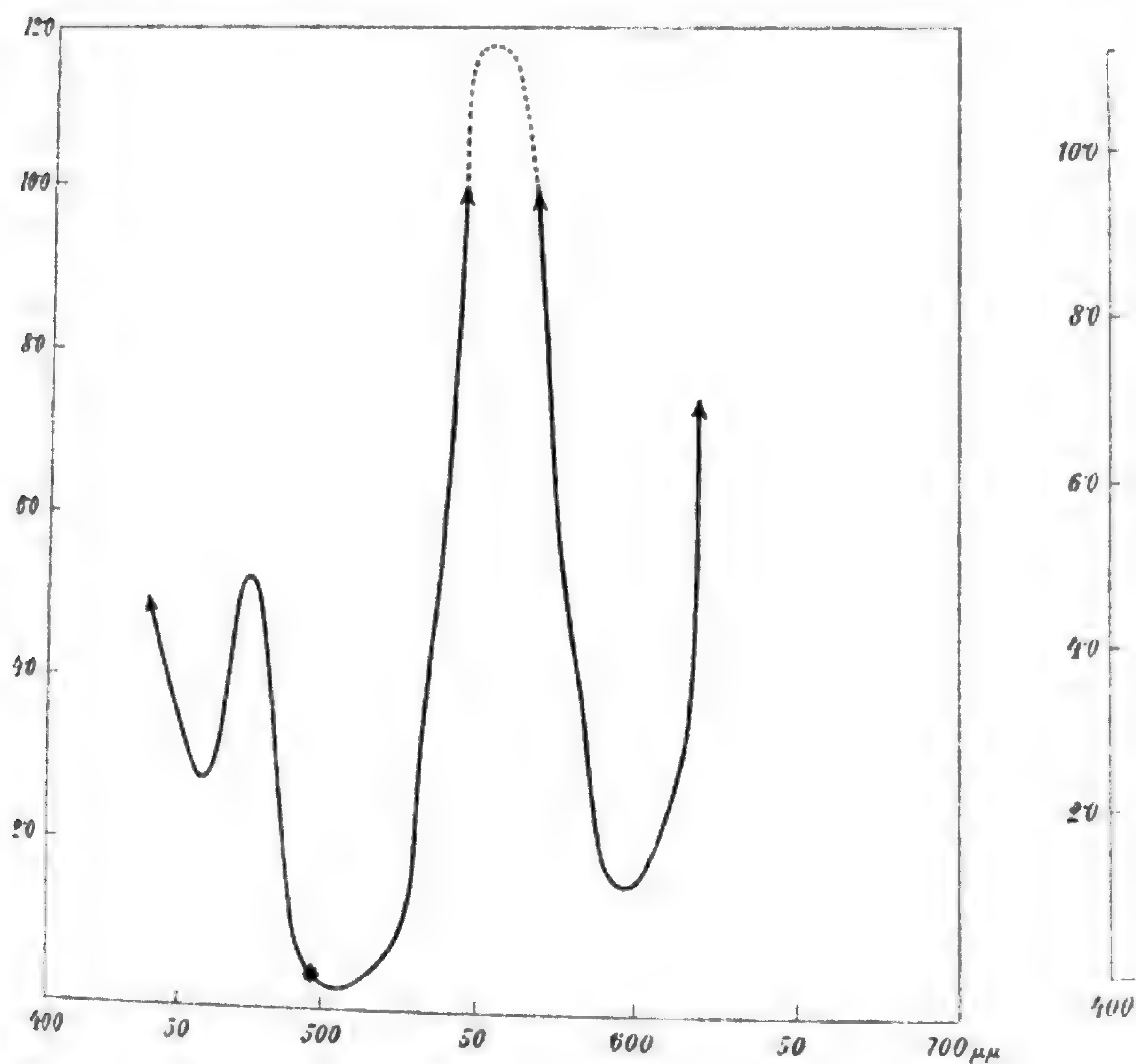
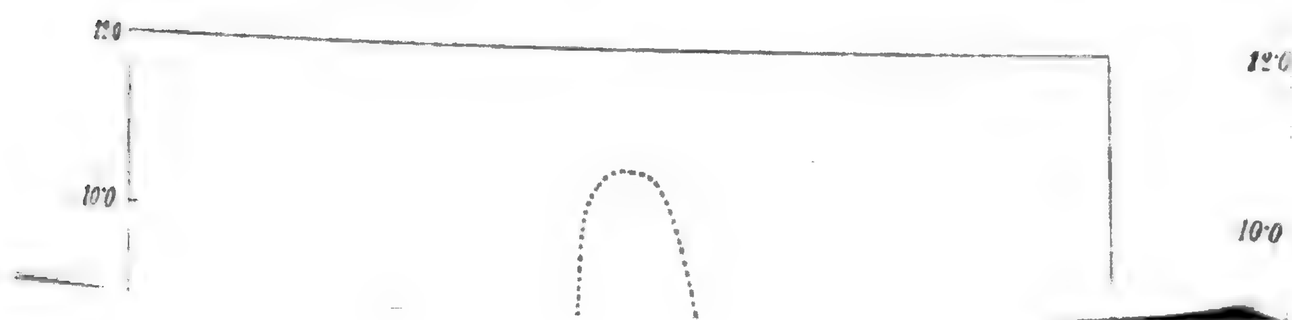

120
100
80
60
40
20
400
50
500
50
600
50
700 μμ
100
80
60
40
20
400

Fig. 5.


12·0
10·0
12·0
10·0

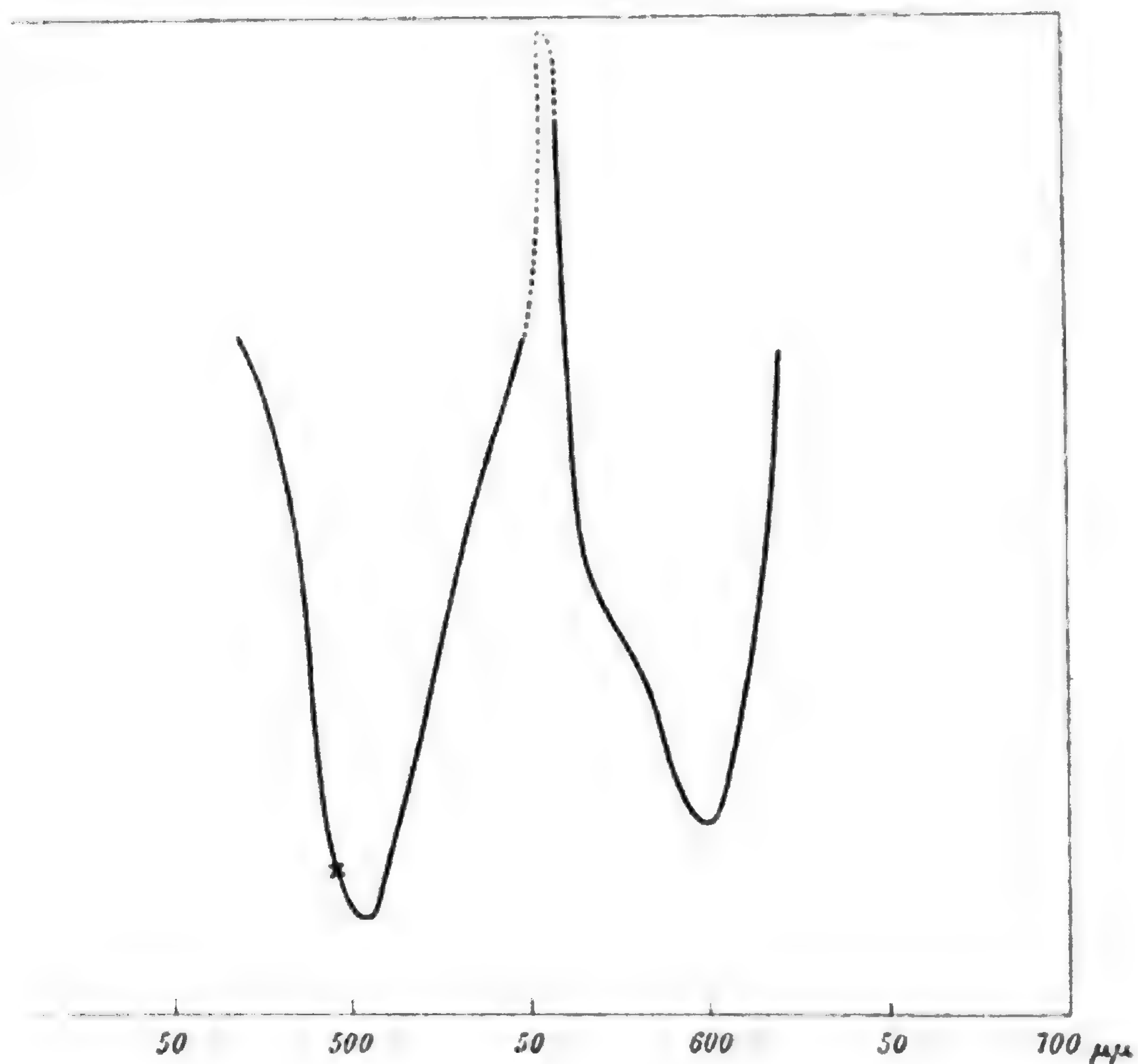
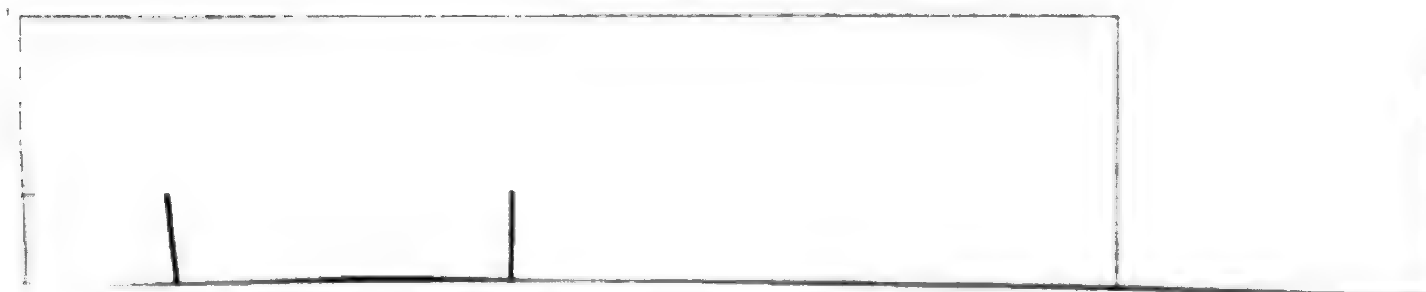


Fig. 6.





Untersuchungen über radioaktive Substanzen.

(VI. Mitteilung.)

Über Radium *F* (Polonium)

von

Dr. **Stefan Meyer** und Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem II. Physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1906.)

Nachdem wir zuerst[1] angegeben hatten, daß die Halbierungskonstanten von Radiotellur und dem α-strahlenden Bestandteil des Radiobleis den gemeinsamen Wert von 136 Tagen haben, hat W. Marckwald[2] seinerseits Beobachtungen an seinem Radiotellur mitgeteilt, welche die Halbierungskonstante $HC = 139 \cdot 8$ Tage lieferten, und E. Rutherford[3] seine ältesten Angaben (zirka ein Jahr) dahin modifiziert, daß für RaF (damals noch RaE genannt) $HC =$ zirka 150 Tage betrage. Wir haben dann gezeigt,[4] daß auch aus dem Ansteigen der Restaktivität des Radiums RaF (damals RaE genannt) die gleiche Halbierungskonstante von zirka 136 Tagen folge wie für die erstgenannten Präparate, und Rutherford hat zuletzt in seinen

---

[1] St. Meyer und E. R. v. Schweidler, Wiener akad. Anzeiger, 1. Dez. 1904 und später diese Sitzungsberichte, CXIV, p. 391 (1905).

[2] W. Marckwald, Ber. der Deutschen chem. Ges., XXXVIII, p. 591 (1905).

[3] E. Rutherford, Nature, 71, p. 341 (1905).

[4] St. Meyer und E. R. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, CXIV (IIa), p. 1206 (1905).

Untersuchungen [1] diesen Wert (als Mittel aus 50, 136 und 142) zu 143 Tagen bestimmt.

Im folgenden geben wir zunächst eine Reihe von Messungen wieder, die aus langem Anstiege (etwa 300 Tage) der Aktivität von RaF dessen Abklingungskonstante im Mittel genauer zu bestimmen ermöglichen. Es handelt sich dabei in den Versuchsreihen I bis X durchwegs um Gefäße oder Rohrstücke, die in der l. c. p. 1207 beschriebenen Weise aktiviert worden waren

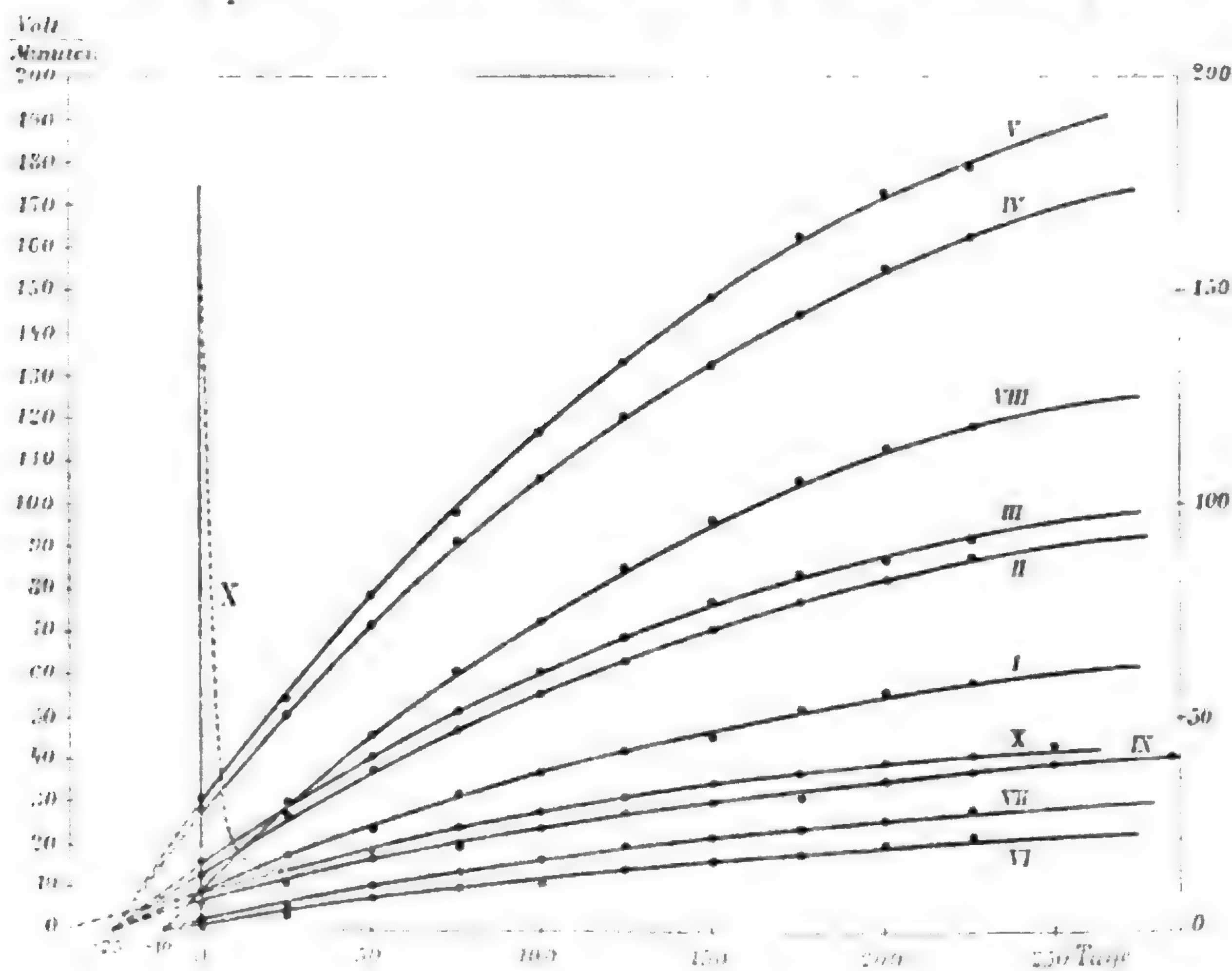


Fig. 1.

und nach der dort angegebenen Art gemessen wurden. Bei einigen zum Schlusse relativ stark aktiven Präparaten war bei der gewählten Anordnung der Sättigungsstrom nicht mehr vollkommen erreicht und mußte diesbezüglich eine leicht zu bewerkstelligende Korrektur angebracht werden.

Fig. 1 zeigt diese Anstiege graphisch. Die Zeit ist dabei vom Beginn der Beobachtung, d. i. nach Entfernung von der Emanation, gerechnet.

[1] E. Rutherford, Phil. mag., X, p. 296, Sept. 1905.

Nr. I bis V einerseits waren gleich lange (48 Tage) aktiviert worden, ebenso Nr. VI bis VIII (16 Tage); diese beiden Kurvengruppen müssen also nach je einem gemeinsamen Nullpunkt a zielen, als welcher aus dem Folgenden für die erste Gruppe $a = -25$ Tage, für die zweite -10 Tage ermittelt wurde.

Die Bestimmung der Halbierungskonstante, beziehungsweise von $\lambda = \frac{\log \text{nat } 2}{HC}$ hat nach der Gleichung

$$J = J_\infty \left(1 - e^{-\lambda(t+a)}\right]$$

zu erfolgen, in welcher J den Sättigungsstrom zur Zeit t (t gerechnet vom Augenblick der Entfernung des Präparates von der einwirkenden Emanation), J_∞ denjenigen nach sehr langer Zeit und a den Schnittpunkt des als rein logarithmische Kurve verlängerten Linienzuges mit der Abszissenachse bedeutet.

Die drei Konstanten J_∞, λ und a lassen sich aus je drei Punkten J_1, J_2, J_3 zur Zeit t_1, t_2, t_3 einfach bestimmen, wenn man $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$ wählt, indem dann

$$J_\infty = \frac{J_2^2 - J_1 J_3}{2J_2 - J_1 - J_3}$$

wird und sich hieraus

$$\lambda = \frac{1}{t_2 - t_1} \, \frac{\log (J_\infty - J_1) - \log (J_\infty - J_2)}{\log e}$$

und

$$-a = t_1 - \frac{1}{\lambda \log e} \left[\log J_\infty - \log (J_\infty - J_1)\right]$$

finden läßt.

Da man aber bei diesen Bestimmungen von λ und a durch die willkürliche Wahl dreier Punkte eine gewisse Unsicherheit hineinträgt, empfiehlt es sich mehr, J_∞ zuerst aus einer Reihe von Dreipunktgruppen als Mittelwert möglichst genau zu ermitteln, sodann die Werte $J_\infty - J = \Delta$ aus den Kurvenpunkten zu bilden und die Logarithmen von Δ graphisch aufzutragen. Handelt es sich um reine e-Kurven, so ergibt dies Punktfolgen, durch welche sich mit großer Sicherheit Gerade

ziehen lassen (Fig. 2). Aus diesen erhält man bequem und recht verläßlich nach der Gleichung

$$\frac{\log \Delta_1 - \log \Delta_2}{t_2 - t_2} = \lambda \log e = \frac{\log 2}{HC}$$

die Konstanten λ, beziehungsweise HC. Der Ordinate $\log J_\infty$ entspricht der Abszissenwert $-a$, der in den Kurven durch ein * markiert ist.

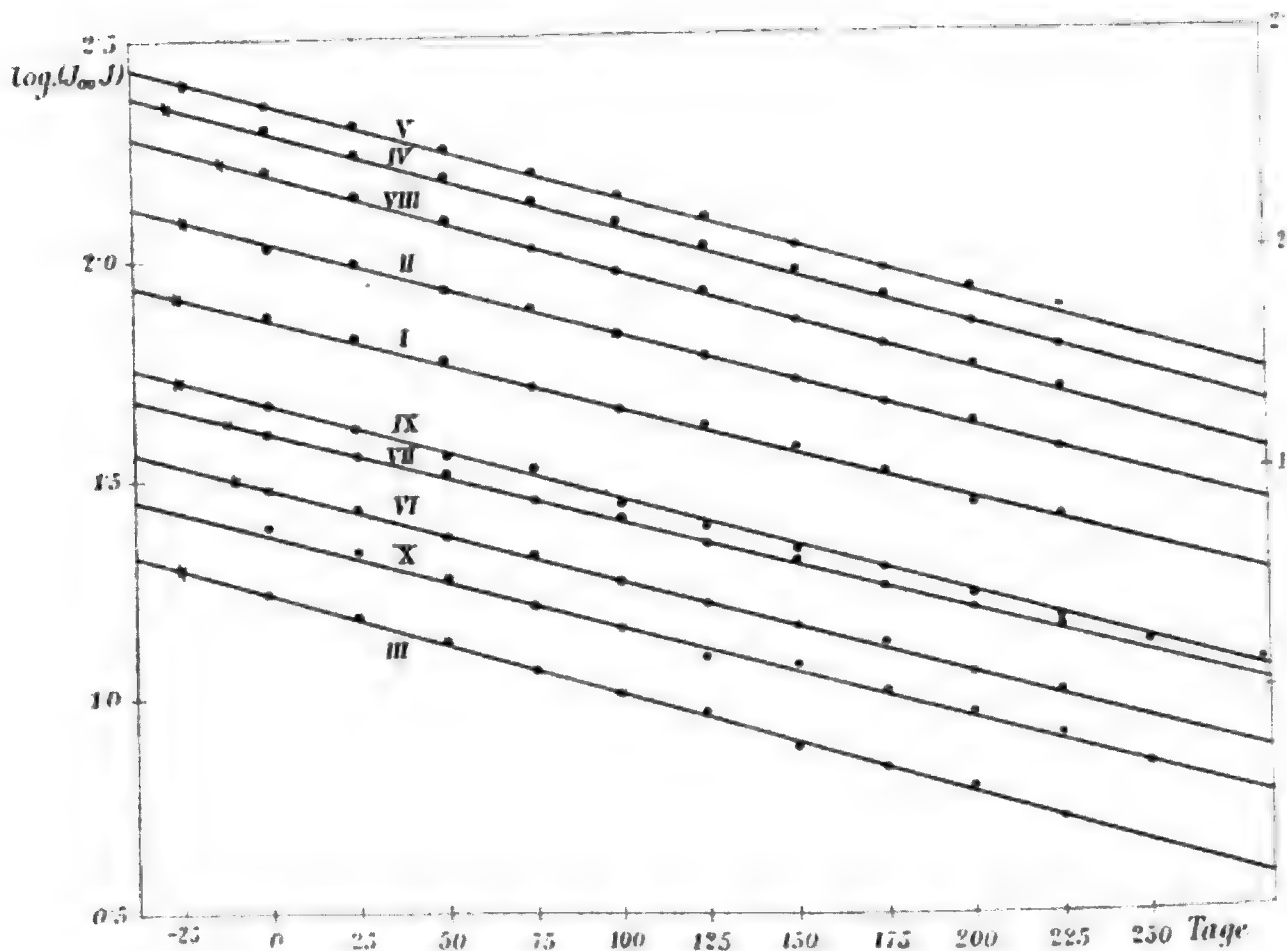


Fig. 2.

So ergibt sich der Wert von $-a$ für die Geraden

I	25 Tage	VI	9 Tage
II	24 »	VII	10 »
III	25 »	VIII	11 »
IV	27 »	Mittel	10 Tage
V	23 »		
Mittel	25 Tage		

In den folgenden Tabellen sind aus den zahlreichen Messungen bloß die Mittelwerte für Zeitintervalle von je 25 Tagen angeführt.[1]

I. Eisengefäß, 48 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log (J_\infty - J)$	Bestimmung von J_∞
0	9·5	73·7	1·867	
25	17·5	65·7	1·818	
50	24·5	58·7	1·769	
75	31·8	51·4	1·711	
100	37·8	45·4	1·657	
125	42·6	40·6	1·609	
150	47·0	36·2	1·559	
175	51·6	31·6	1·500	
200	55·4	27·8	1·444	
225	58·0	25·2	1·401	

Bestimmung von J_∞:

Aus $\left.\begin{matrix} t_3 = 225 \\ t_2 = 125 \\ t_1 = 25 \end{matrix}\right\}$ $J_\infty = 82·45$; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 125 \\ 50 \end{matrix}\right\}$ 86·3; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ 84·35; $\left.\begin{matrix} 150 \\ 75 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ 79·53

Mittelwert $J_\infty = 83·2$; $\log J_\infty$ 1·920.

$\lambda = 0·00481$ $^1/_{\text{Tage}}$.
$HC = 144·0$ Tage.
$-a = 25$ Tage.

[1] Über Veranlassung L. Haitinger's waren einige dieser Gefäße während der Aktivierung statt mit Luft mit Sauerstoff, Wasserstoff oder Helium gefüllt worden. Ein Unterschied in der Ablagerung der Restaktivitäten oder deren Abklingung war dabei nicht zu konstatieren.

II. Eisengefäß, 48 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log (J_\infty - J)$	Bestimmung von J_∞
0	13·5	109·7	2·040	
25	26·0	97·2	1·988	
50	37·2	86·0	1·934	
75	47·2	76·0	1·881	
100	56·0	67·2	1·827	
125	64·0	59·2	1·772	
150	71·0	52·2	1·718	
175	77·0	46·2	1·665	
200	82·0	41·2	1·615	
225	87·0	36·2	1·559	

Bestimmung von J_∞:

Aus $\left.\begin{matrix} t_3 = 225 \\ t_2 = 125 \\ t_1 = 25 \end{matrix}\right\}$ $J_\infty = 122·8$; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 175 \\ 50 \end{matrix}\right\}$ $118·8$; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ $122·9$; $\left.\begin{matrix} 150 \\ 75 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ $128·2$

Mittelwert $J_\infty = 123·2$; $\log J_\infty = 2·091$.

$\lambda = 0·00496$ 1/Tage.

$HC = 139·8$ Tage.

$-a = 24$ Tage.

III. Eisengefäß, 48 Tage aktiviert.[1]

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log(J_\infty - J)$	Bestimmung von J_∞
0	16·0	109·4	2·039	
25	29·4	96·0	1·982	
50	41·0	84·4	1·926	
75	52·0	73·4	1·866	
100	61·3	64·1	1·807	
125	69·0	56·4	1·751	
150	76·5	48·9	1·689	
175	82·5	42·9	1·632	
200	86·9	38·5	1·585	
225	92·4	33·0	1·519	

Bestimmung von J_∞:

Aus $\left.\begin{matrix} t_3 = 225 \\ t_2 = 125 \\ t_1 = 25 \end{matrix}\right\} J_\infty = 120·0$; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 125 \\ 50 \end{matrix}\right\} 128·1$; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{matrix}\right\} 124·9$; $\left.\begin{matrix} 150 \\ 75 \\ 0 \end{matrix}\right\} 128·7$

Mittelwert $J_\infty = 125·4$; $\log J_\infty = 2·098$.

$\lambda = 0·00530\ ^1/_{\text{Tage}}$.

$HC = 130·9$ Tage.

$-a = 25$ Tage.

[1] Da diese Kurve in Fig. 2 sehr nahe zu Kurve II liegt, ist der Wert von $\log(J_\infty - J)$ um 0·8 vermindert eingetragen.

IV. Eisenrohr, 48 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log (J_\infty - J)$	Bestimmung von J_∞
0	28·0	196·2	2·293	
25	51·2	173·0	2·238	
50	72·0	152·2	2·182	
75	90·4	133·8	2·126	
100	106·0	118·2	2·073	
125	120·0	104·2	2·018	
150	132·4	91·8	1·963	
175	143·5	80·7	1·907	
200	153·5	70·7	1·849	
225	162·0	62·2	1·794	

Bestimmung von J_∞:

Aus $\left.\begin{matrix} t_3 = 225 \\ t_2 = 125 \\ t_1 = 25 \end{matrix}\right\} J_\infty = 227 \cdot 8$; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 125 \\ 50 \end{matrix}\right\} 230 \cdot 9$; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{matrix}\right\} 227 \cdot 5$; $\left.\begin{matrix} 150 \\ 75 \\ 0 \end{matrix}\right\} 218 \cdot 5$

Mittelwert $J_\infty = 224 \cdot 2$; $\log J_\infty = 2 \cdot 351$.

$\lambda = 0 \cdot 00509$ $^1/_{\text{Tage}}$.

$HC = 136 \cdot 2$ Tage.

$-a = 27$ Tage.

V. Eisenrohr, 48 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log (J_\infty - J)$
0	30·0	225·3	2·353
25	55·5	199·8	2·301
50	79·0	176·3	2·246
75	100·0	155·3	2·191
100	118·0	137·3	2·138
125	134·5	120·8	2·082
150	149·5	105·8	2·024
175	162·0	93·3	1·970
200	172·0	83·3	1·921
225	180·0	75·3	1·877

Bestimmung von J_∞:

Aus $\left.\begin{array}{l} t_3 = 225 \\ t_2 = 125 \\ t_1 = 25 \end{array}\right\}$ $J_\infty = 238·8$; $\left.\begin{array}{l} 200 \\ 125 \\ 50 \end{array}\right\}$ 244·6; $\left.\begin{array}{l} 200 \\ 100 \\ 0 \end{array}\right\}$ 257·8; $\left.\begin{array}{l} 175 \\ 100 \\ 25 \end{array}\right\}$ 266·1; $\left.\begin{array}{l} 150 \\ 75 \\ 0 \end{array}\right\}$ 269·0

Mittelwert $J_\infty = 255·3$; $\log J_\infty = 2·407$.

$\lambda = 0·00502$ $^1/_{\text{Tage}}$.

$HC = 138·0$ Tage.

$-a = 23$ Tage.

VI. Glasgefäß, 16 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log(J_\infty - J)$	Bestimmung von J_∞
0	1·2	30·0	1·477	
25	4·5	26·7	1·427	
50	7·8	23·4	1·369	
75	10·3	20·9	1·320	
100	12·8	18·4	1·265	
125	15·1	16·1	1·207	
150	17·0	14·2	1·152	
175	18·6	12·6	1·100	
200	20·0	11·2	1·049	
225	21·2	10·0	1·000	

$\lambda = 0\cdot00491$ $^1/_{\text{Tage}}$.

$HC = 141\cdot1$ Tage.

$-a = 9$ Tage.

Aus $t_3 = 225$, $t_2 = 150$, $t_1 = 75$: $J_\infty = 28\cdot2$; 225, 125, 25: $31\cdot7$; 200, 125, 50: $32\cdot2$; 200, 100, 0: $33\cdot3$; 175, 100, 25: $30\cdot4$.

Mittelwert $J_\infty = 31\cdot2$; $\log J_\infty = 1\cdot494$.

VII. Eisengefäß, 16 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log (J_\infty - J)$	Bestimmung von J_∞
0	2·0	40·5	1·607	
25	6·6	35·9	1·555	
50	10·4	32·1	1·507	
75	13·7	28·8	1·459	
100	16·8	25·7	1·410	
125	20·0	22·5	1·352	
150	22·4	20·1	1·303	
175	24·6	17·9	1·253	
200	26·6	15·9	1·201	
225	28·0	14·5	1·161	

Bestimmung von J_∞:

Aus $t_3 = 225$, $t_2 = 150$, $t_1 = 75$ } $J_\infty = 38·1$; 225, 125, 25 } 42·3; 200, 125, 50 } 41·9; 200, 100, 0 } 45·8; 150, 75, 0 } 44·2.

Mittelwert $J_\infty = 42·5$; $\log J_\infty = 1·628$.

$\lambda = 0·00470$ $^1/_{\text{Tage}}$.

$HC = 147·3$ Tage.

$-a = 10$ Tage.

VIII. Eisengefäß, 16 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log (J_\infty - J)$	Bestimmung von J_∞
0	9·0	158·0	2·199	
25	29·0	138·0	2·140	
50	45·4	121·6	2·085	
75	60·2	106·8	2·029	
100	73·6	93·4	1·970	
125	84·8	82·2	1·915	
150	95·0	72·0	1·857	
175	104·2	62·8	1·798	
200	111·6	55·4	1·744	
225	118·0	49·0	1·690	

Aus $\left.\begin{matrix} t_3 = 225 \\ t_2 = 150 \\ t_1 = 75 \end{matrix}\right\} J_\infty = 162·8$; $\left.\begin{matrix} 225 \\ 125 \\ 25 \end{matrix}\right\}$ 166·8; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 175 \\ 50 \end{matrix}\right\}$ 168·6; $\left.\begin{matrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ 165·8; $\left.\begin{matrix} 175 \\ 100 \\ 25 \end{matrix}\right\}$ 171·1

Mittelwert $J_\infty = 167·0$; $\log J_\infty = 2·223$.

$\lambda = 0·00521$ $^1/_{\text{Tage}}$.

$HC = 133·0$ Tage.

$-a = 11$ Tage.

IX. Glasgefäß, 66 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log(J_\infty - J)$	Bestimmung von J_∞
0	6·2	46·2	1·665	
25	11·6	40·8	1·611	
50	16·4	36·0	1·556	
75	20·0	32·4	1·511	
100	24·4	28·0	1·447	
125	28·0	24·4	1·387	
150	31·0	21·4	1·330	
175	33·0	19·4	1·288	
200	35·5	16·9	1·228	
225	37·5	14·9	1·173	
250	39·5	12·9	1·111	
285	41·0	11·4	1·057	

Bestimmung von J_∞:

Aus $\left.\begin{matrix} t_3 = 275 \\ t_2 = 175 \\ t_1 = 75 \end{matrix}\right\}$ $J_\infty = 53·8$; $\left.\begin{matrix} 250 \\ 150 \\ 50 \end{matrix}\right\}$ $51·3$; $\left.\begin{matrix} 225 \\ 125 \\ 25 \end{matrix}\right\}$ $50·8$: $\left.\begin{matrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ $52·85$

Mittelwert $J_\infty = 52·4$; $\log J_\infty = 1·719$.

$\lambda = 0·00518$ $^1/_{\text{Tage}}$.

$HC = 133·7$ Tage.

$-a = 25$ Tage.

X. Messingrohr, 62 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$	$J_\infty - J$	$\log (J_\infty - J)$	Bemerkung über J_∞
0	160	—	Extrapol. 1·690	Die Punkte der Kurve liegen hier nicht verläßlich genug, um eine Berechnung vorzunehmen. Graphisch findet man als besten Wert J_∞ = 57 Tage; log J_∞ = 1·756; —a = 33 Tage.
5	43	—	—	
10	20	—	—	
15	15	—	—	
20	14	—	—	
25	14·4	42·6	1·629	
30	15·2	—	—	
40	17·6	—	—	
50	19·5	37·5	1·574	
75	24·4	32·6	1·513	
100	28·4	28·6	1·456	
125	32·0	25·0	1·398	
150	34·8	23·2	1·366	
175	37·0	20·0	1·301	
200	39·0	18·0	1·255	
225	41·0	16·0	1·204	
250	42·8	14·2	1·152	

$\lambda = 0{\cdot}00501$ 1/Tage.

$HC = 138{\cdot}0$ Tage.

$-a = 33$ Tage.

Die zuletzt angeführte Kurve X, die einen auffallenden Abfall in den ersten 20 Tagen gezeigt hat,[1] liefert keine ganz so gut übereinstimmenden Punkte als die übrigen; immerhin läßt sich für $J_\infty = 57$ Tage und $a = -33$ Tage eine Halbierungskonstante von 138 Tagen als besten Wert finden.

Aus diesen zehn Anstiegskurven erhalten wir sonach die Werte von HC in Tagen:

I	144·0	VI	141·1
II	139·8	VII	147·3
III	130·9	VIII	133·0
IV	136·2	IX	133·7
V	138·0	X	138·0,

deren Mittelwert **138·2 Tage** beträgt.

Der Mittelwert von λ ist demnach 0·00502 ($^1/_{\text{Tage}}$).

Im Anschluß an diese Messungsreihen, die aus dem Anstiege der Aktivität die Halbierungskonstante des RaF ermitteln, seien noch einige Untersuchungen mitgeteilt, die sich auf den Abfall der Aktivität beziehen; die dabei verwendeten radioaktiven Substanzen sind zum Teil identisch mit den schon in den früheren Mitteilungen (III. und IV. Mitteilung) besprochenen.

1. Radioblei. Ein von K. Hofmann stammendes Radiobleipräparat zeigte folgenden Abfall der Aktivität (von $t = 0$ bis $t = 302$ Tage bereits in Mitteilung III, p. 394, Tabelle 3, enthalten):

t (in Tagen)	$\log J$	$\frac{d}{dt}\log J$
0	2·638	
		0·00227
60	2·502	
		223
188	2·217	
		224
250	2·078	
		221
302	1·963	
		201
557	1·450	
		151
635	1·332	

[1] Vergl. St. Meyer und E. R. v. Schweidler, l. c., V. Mitteilung, p. 1211.

In der Zeit von $t = 0$ bis $t = 302$ ist die Größe $\frac{d \log J}{dt}$ innerhalb der Beobachtungsfehler konstant und führt zur Halbierungskonstante:

$$HC = 134 \cdot 7 \text{ Tage.}$$

Von $t = 302$ Tagen an verflacht sich die den Abfall darstellende Kurve; die Annahme, daß ein verhältnismäßig geringer Betrag von RaD vorhanden ist und daß somit RaF dauernd nacherzeugt wird, wäre im stande, diese Abweichung zu erklären.

2. Radiotellur. Die in der III. Mitteilung, p. 392, gegebene Tabelle (von $t = 0$ bis $t = 134$ Tage reichend) folgt hier, durch seitherige Messungen ergänzt (die untersuchten Präparate sind zwei mit Radiotellur nach Marckwald's Verfahren überzogene Kupferplatten A und B, deren Aktivität durch direkte galvanometrische Messung des Sättigungsstromes bestimmt wurde).

t (Tage)	$\log J_A$, beobachtet	$\log J_B$, beobachtet	$\log J_A$, berechnet	$\log J_B$, berechnet	Δ_A	Δ_B
0	2·146	2·130	2·146	2·130	0·000	0·000
9	2·130	2·107	2·126	2·110	+ 04	— 03
30	2·090	2·068	2·080	2·064	+ 10	+ 04
54	2·021	2·000	2·027	2·011	— 06	— 11
64	2·012	1·988	2·005	1·989	+ 07	— 01
85	1·962	1·941	1·968	1·952	— 06	— 11
103	1·914	1·892	1·919	1·903	— 05	— 11
116	1·886	1·871	1·889	1·873	— 03	— 02
133	1·857	1·834	1·853	1·837	+ 04	— 03
149	1·824	1.804	1·817	1·801	+ 07	+ 03
445	1·167	1·146	1·164	1·148	+ 03	— 02

Für das Intervall von $t = 0$ bis $t = 445$ ergibt sich im Mittel aus beiden Reihen:

$$\frac{d}{dt} \log J = 0 \cdot 002206 \quad \text{und} \quad HC = 136 \cdot 5 \text{ Tage.}$$

Die Abweichungen der direkt beobachteten Werte von den mittels dieser Konstante berechneten sind, wie die Tabelle zeigt, gering und unregelmäßig verteilt.

3. In Radiobleilösung aktivierte Metalle. Einige nach dem von K. Hofmann, L. Gonder und V. Wölfl[1] angegebenen Verfahren in heißer wässeriger Lösung von Radiobleichlorid aktivierte Metallstücke (Ag-Draht, Pd-Bleche) waren auf den zeitlichen Gang ihrer Aktivität geprüft worden; das Resultat (Mitteilung V, p. 1196 bis 1200) war, daß diese mit einer Halbierungskonstante abfiel, welche der Größenordnung nach mit der des Ra*F* übereinstimmte, in einzelnen Fällen aber doch um die möglichen Beobachtungsfehler übersteigende Beträge vom normalen Werte abwich, so z. B. $HC = 115$ Tage für Ag-Draht, 109 Tage für Pd-Blech I, 133 Tage für Pd-Blech II.

Die Resultate der Fortsetzung dieser Messungsreihen sind in den folgenden Tabellen angeführt:

Ag-Draht.

t	$\log J$	$\frac{d}{dt}\log J$
0	1·787	
3	765	0·00530
10	734	
17	716	0·00300
24	692	
31	679	
38	663	0·00225
44	650	
48	638	
166	375	0·00223
194	312	0·00225
218	295	0·00205
234	230	
259	185	0·00180

[1] K. Hofmann, L. Gonder und V. Wölfl, Ann. der Phys., 15, p. 615 (1904).

Der Abfall der Aktivität erfolgt also in der ersten Zeit (bis etwa $t = 24$ Tage) bedeutend rascher, als es dem normalen Werte der HC entspricht, hierauf durch eine längere Periode von zirka 170 Tagen (von $t = 24$ bis $t = 194$) in normaler Weise mit der $HC = 134 \cdot 4$ Tage; von da an zeigt sich eine zunehmende Verlangsamung des Abfalles, ähnlich wie bei der oben angeführten Messungsreihe am Radiobleipräparat.

Ganz analog verhält sich

Pd-Blech I.

t	$\log J$	$\frac{d}{dt} \log J$
0	1·149	
		0·00242
73	0·972	
		0·00224
191	0·708	
		0·00225
219	0·645	
		0·00212
285	0·505	

Ebenso zeigen die in der V. Mitteilung besprochenen Pd-Bleche II und III in der letzten Zeit eine zu langsame Abnahme.

Während diese letztere Erscheinung in der bereits oben angedeuteten Weise leicht erklärlich erscheint durch die Annahme, daß bei der Aktivierung auch eine kleine Menge von RaD mitabgeschieden wurde, ist die am Anfange auftretende, in einer Beschleunigung des Abfalles bestehende Störung derzeit noch nicht aufgeklärt; weitere Versuche hierüber sind im Gange.

4. Polonium. Zur Untersuchung gelangten zwei Präparate, die von Herren L. Haitinger und C. Ulrich nach dem Curieschen Verfahren, also im wesentlichen durch Abscheidung des Wismuts aus den Pecherzrückständen, und zwar in Form von Nitraten hergestellt waren.

In dickerer Schicht (zirka 2 *cm*) senden diese Substanzen keine merkliche β-Strahlung aus, so daß schon aus dieser Tatsache allein auf das Fehlen von RaE (und somit auch von RaD) geschlossen werden kann.

Der zeitliche Verlauf der Aktivität bestätigt diese Annahme, indem sich für die Logarithmen ein linearer Gang ergibt, der für die Halbierungskonstante die Werte

$$HC = 140 \text{ Tage, beziehungsweise } 137\cdot 8 \text{ Tage}$$

liefert, wie dies die folgenden beiden Tabellen und deren graphische Darstellung in der Fig. 3 zeigen.

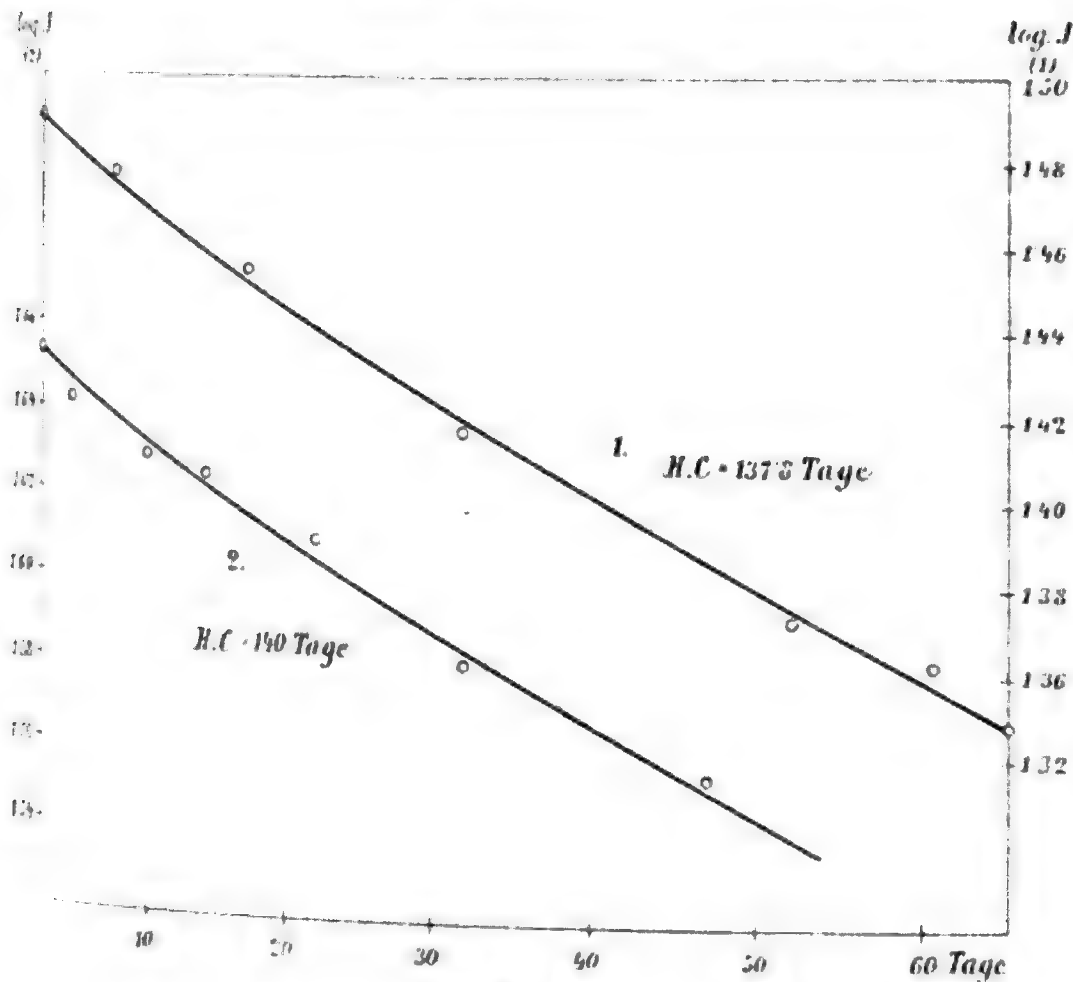


Fig. 3.

Poloniumpräparat 1.

t	log J
0.......	1·490
7.......	477
17.......	455
32.......	417
52.......	373
61.......	362
65.......	348

$HC = 137\cdot 8$ Tage

Poloniumpräparat 2.

t	log J
0.......	1·654
3.......	642
10.......	629
14.......	626
22.......	611
32.......	581
47.......	556

$HC = 140$ Tage

Der wesentliche radioaktive Bestandteil einer poloniumhaltigen Substanz ist also unzweifelhaft RaF; die öfters gemachte Annahme (z. B. von Rutherford, Marckwald und anderen), daß Polonium kein einheitlicher Stoff, sondern eine Mischung von RaD, RaE und RaF sei, ist auf eine vereinzelte Angabe M. Curie's[1] zurückzuführen, daß die Halbierungskonstante eines Präparates 11 Monate betragen habe; da aber die Verfasserin an derselben Stelle für andere Präparate andere Zeitkonstanten angibt, die ausschließliche Emission von α-Strahlen aber stets als charakteristisch für Polonium hinstellt, sind wohl jene Abweichungen teils auf zufällige Beimengungen von RaD in noch nicht vollkommen gereinigtem Polonium-Wismut (die ersten Fraktionen enthalten nach M. Curie[2] auch Kupfer und Blei, somit höchstwahrscheinlich auch RaD), teils auf die Unsicherheit der ja damals noch minder ausgebildeten Methoden der Aktivitätsbestimmungen zurückzuführen.

Der Wiedereinführung des ursprünglichen Namens »Polonium« für das RaF dürfte daher unserer Ansicht nach nichts mehr im Wege stehen.

Vereinigt man die an verschiedenen Arten von Polonium (RaF) von uns gefundenen Werte der Halbierungskonstante zu einem Gesamtmittel, so ergibt sich die Zusammenstellung:

Für Radiumrestaktivität	(10 Beobachtungsreihen)	... $HC = 138\cdot2$ Tage
» Radioblei	(3 »)	... $HC = 134\cdot5$ »
» Radiotellur	(2 »)	... $HC = 136\cdot5$ »
» Radiowismut	(2 »)	... $HC = 138\cdot9$ »
Im Mittel ...	(17 Beobachtungsreihen)	... $HC = 137\cdot0$ Tage.

Diesem Werte entspricht dann eine

mittlere Lebensdauer...... $\tau = 197\cdot6$ Tage

und $\frac{1}{\tau}$ .... $\lambda = 0\cdot00506$ $^1/_{\text{Tag}}$.

[1] M. Curie, Recherches sur les Substances radioactives, p. 31 und 122 (1903).

[2] M. Curie, l. c. p. 29.

Anhang.

E. Rutherford[1] und insbesondere auch B. Boltwood[2] stellen sich auf den Standpunkt, daß das oder ein Endprodukt der Radiumverwandlung Blei sei. Indem jeder α-Strahler pro Atom etwa vier Einheiten verliere, hätten nach dieser Anschauung

die Substanzen: Ra → Ra-Emanation → RaA → RaB → RaC →

die Atomgewichte: 225 221 217 213 (RaB, RaC)

→ RaD → RaE → RaF → ?

209 (RaD, RaE, RaF) 205

Daß die Zahl 205 dem Atomgewicht des Bleis 206·5 nahe liegt, daß das Endzerfallsprodukt in den natürlichen Uranmineralien sicher vorhanden ist und der Prozentgehalt an Blei sich in diesen als angenähert konstant erweist, sind wohl die Hauptgründe, die dafür sprechen.

Dagegen lassen sich wohl aber auch einige Bedenken erheben. Der Mangel eines definierten Atomgewichtes für die strahlenlosen und bloß β-strahlenden Produkte, der Widerspruch des Atomgewichtes für die Emanation mit dem aus der Diffusion — allerdings wohl recht unsicher — bestimmten Werte, die Übereinstimmung des Atomgewichtes für RaF mit dem des Wismuts (208·5), das zweifellos auch inaktiv vorkommt, die Tatsache, daß das reichlich inaktiv (nicht einmal δ-strahlend[3]) vorkommende Blei jedenfalls zumindest auch andere Entstehungsursachen annehmen läßt, fallen unter anderem in die Augen.

Auch erscheint es durchaus nicht ausgeschlossen, daß die sogenannten strahlenlosen Produkte wie RaB und RaD sowie das β-strahlende RaE sowohl langsame negative Partikelchen, die nicht mehr ionisierend wirken (δ-Strahlen), als auch ebensolche positive langsame α-artige Partikelchen zu emittieren

---

[1] Vergl. z. B. E. Rutherford, Radioactivity, 2. Aufl., 1905, p. 484.
[2] B. Boltwood, Sill. Journ., XX, p. 253, Oktober 1905.
[3] Vergl. J. J. Thomson, Phil. mag., X, p. 587, November 1905.

vermöchten. Jede α-Partikel mehr als die obige Zahl von fünf α-Strahlern macht aber die Rutherford-Boltwood'sche Anschauung sehr schwierig.

Ohne dabei die Möglichkeit zu leugnen, daß gerade diese Auffassung wie so viele Vorhersagungen Rutherford's sich noch glänzend zu bestätigen vermöchte, wollen wir es hier versuchen, eine andere Arbeitshypothese anzugeben, indem

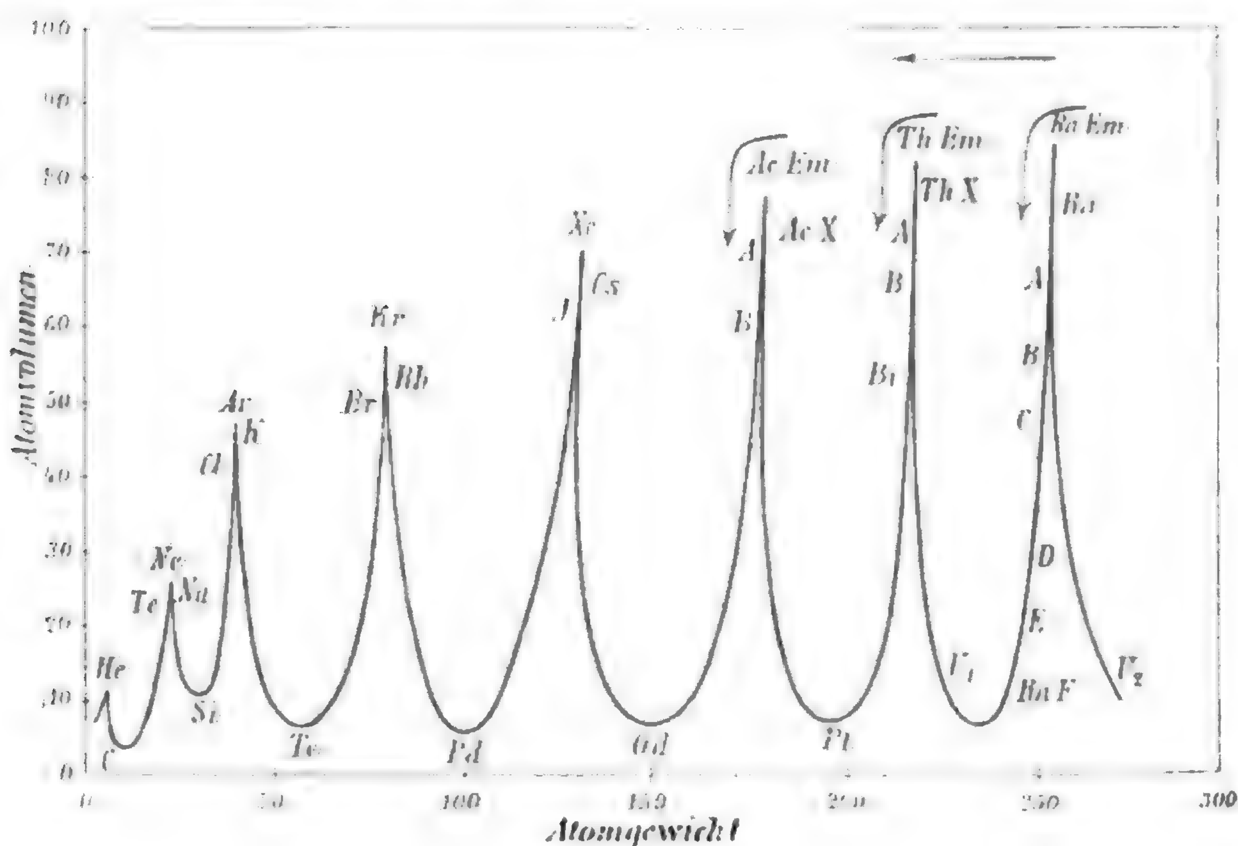


Fig. 4.

wir trachten, im Rahmen der bisherigen Anordnungen des periodischen Systems der Elemente zu bleiben.

Man kennt unter den radioaktiven Substanzen derzeit drei Gase. Wenn dieselben im periodischen System Platz finden sollen, so kann dies nur in der Gruppe der Edelgase geschehen, in der Darstellung der Fig. 4 an den Spitzen der Atomvolumen-Atomgewichtskurve. Das Radium selbst gehört seinem Spektrum und seinem chemischen Verhalten nach in die Gruppe der Erdalkalien, wo es auch meist eingestellt wurde. Daraus ergibt sich unmittelbar die in der Tabelle gegebene Anordnung der Radiumfamilie in ihrer Zuordnung zu den vertikalen Gruppen, wenn man jedem Zerfallsprodukt den Rang eines Elementes

I	H 1																	He 4
II	Li 7		Be 9			B 11			C 12					N 14		O 16	Fl 19	Ne 20
III	Na 23		Mg 24			Al 27			Si 28					P 31		S 32	Cl 35	Ar 40
IV	K 39	Ca 40	Sc 44	Ti 48	V 51	Cr 52	Mn 55	Fe 56	Co 59	Ni 59	Cu 64	Zn 65	Ga 70	Ge 72	As 75	Se 79	Br 80	Kr 82
V	Rb 85	Sr 88	Y 89	Zr 91	Nb 94	Mo 96	—	Ru 102	Rh 103	Pd 106	Ag 108	Cd 112	In 114	Sn 119	Sb 120	Te 128	J 127	Xe 128
VI	Cs 133	Ba 137	La 138	Ce 140	Pr 141	Nd 144	Sa 150	Eu	Gd	Ho	.... Er .... Tu ... Yb_1 . Yb_2 ... 166 171 173					Ac *B*	Ac *A*	Ac Em.
VII	Ac *X*	Ac	—	......	Ta 183	W 184	—	Os 191	Ir 193	Pt 195	Au 197	Hg 200	Tl 204	Pb 207	Bi 209	Th *B*	Th *A*	Th Em.
VIII	Th *X*	Ra Th	.....	Th 233 (?)	.....	U_1 240 (?)					←	Ra *F* (235?)	Ra *E* ←	Ra *D*	Ra *C*	Ra *B*	Ra *A*	Ra Em.
IX	(Ra *X*)	Ra ←(260?)	....	......	U *X*	U_2												

Die Atomgewichte von Er, Tu, Yb dürften, den Differenzen Hg—Cd, Tl—In etc. nach zu schließen, etwas zu groß angegeben sein. Mann könnte dann für Ac 180, Radiothor 220 als Näherungswerte einsetzen. Sämtliche Werte sind in erster Annäherung eingetragen.

einräumt. Die Existenz eines kurzlebigen RaX erscheint nicht ausgeschlossen.

Wir möchten so, mit anderen Worten, die späteren Zerfallsprodukte nicht mit den bereits bekannten Elementen um 206 identifizieren, sondern in ihnen die nächsten homologen Elemente sehen.

Das gemeinsame Vorkommen des mit Blei chemisch so sehr verwandten RaD würde so leicht plausibel. Das chemische Verhalten, wie die Löslichkeit in Ammoniak, beziehungsweise in Säuren der einzelnen Produkte etc., steht dabei mit der ihnen im System angewiesenen Stelle in guter Übereinstimmung; auch die Tatsache, daß gegen die Mitte hin (mit abnehmendem Atomvolumen) die Substanzen elektrochemisch edler werden.[1] Nimmt man Uran als Ahnherrn des Radiums an, so wäre es von diesem Gesichtspunkt aus nur natürlich, daß aus dem UX keine gasförmige Emanation entsteht. Die Produkte der Thorium- und Aktiniumfamilien wären analog einzuordnen, wobei die Einsetzung in die Horizontalreihen der Tabelle allerdings recht willkürlich bleibt. Da aber das Atomgewicht des Thoriums wohl am ehesten als Stützpunkt gelten kann und das Aktinium die größte Verwandtschaft mit den seltenen Erden zeigt, haben wir versuchsweise die gegebene Anordnung getroffen. Die Stellung der ThX- und AcX-Produkte entspricht dabei ihrem chemischen Verhalten recht gut, ebenso die der A- und B-Produkte. Daß Wismut das Endprodukt der Thoriumzerfallsreihe sei, ist bereits einmal — allerdings mit anderer Begründung — auch von Boltwood angenommen worden.

Wir verkennen es durchaus nicht, daß man gegen diese Anpassung an das einmal bestehende System der Elemente gewichtige Einwände erheben kann. So stimmt das Atomgewicht der Radiumemanation, wie es zur Zeit angegeben wird, ebensowenig für diese Anschauung wie für die Rutherford'sche. Auch müßte man das Atomgewicht des Radiums selbst höher ansetzen als mit 225, etwa mit 255 bis 260, indem die Differenzen der Gruppe

[1] Vergl. F. v. Lerch, diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, p. 583 (1905), und Wiener akad. Anzeiger Nr. XXV vom 7. Dezember 1905.

	Ca	Sr	Ba	Ac	Ra Th	Ra
	40	88	137	180(?)	220(?)	255 bis 260
Δ.....	48	45	43	40	35 bis 40	

dann plausibel werden. Diese Annahme ist übrigens nicht vereinzelt.[1] Konsequent muß dann allerdings auch noch angenommen werden, daß ein U_1 mit dem Atomgewicht von zirka 225 als Stammvater der Thorfamilie ein Eka-Uran, U_2 mit einem höheren Atomgewicht (von zirka 270) als der Ahnherr des Radiums zu gelten habe. Für die Möglichkeit, daß das Uran (240) als nicht einheitlich aufzufassen sei, spricht erstens die ungewöhnlich große Zahl seiner Spektrallinien, dann aber auch die Differenz der Atomgewichte dieser Gruppe, indem

	Cr	Mo	Nd	W	U
Atomgewicht....	52	96	144	184	240
Δ............	44	48	40	56!	

die Differenz gegen Wolfram, die eher kleiner als 40 zu erwarten ist, 56 beträgt.

Daß das Thorium nicht einheitlich sei, wurde schon mehrfach behauptet (B. Brauner, Ch. Baskerville) und es erscheint daher auch nicht ausgeschlossen, daß der entsprechende Körper der achten Horizontalreihe ein etwas niedrigeres Atomgewicht besitze (etwa 223).

Da sich die gegebene Anordnung der Elemente im Zusammenhalt mit den Atomvolumina schematisch durch die Kurve der Fig. 4 wiedergeben läßt, so wäre daraus zu entnehmen, daß sich die Atomverwandlung durch zwei Momente beeinflußt denken läßt: erstens durch Abnahme an Atomgewicht, zweitens dadurch, daß die Atome stabilere Formen, das sind solche mit kleinerem Atomvolumen, anstreben.

Die Vermutung, daß sich aus den δ-strahlenden Alkalien die Edelgase bilden, läge dann nahe. Ebenso wäre es verständlich, daß J. J. Thomson[2] an Blei, Silber, Quecksilber, die

[1] Vergl.: C. Runge und J. Precht (Phys. Zeitschrift, 4, p. 285 [1903]) nehmen die Zahl 258 an, H. C. Jones (Amer. Chem. Journ., 34, p. 467 [1905]) plädiert für 255 bis 260.

[2] L. c.

geringe Atomvolumina haben — sehr stabil sind — keine solche Strahlung feststellen konnte.

Wir hätten es ohne weitere Belege nicht für angebracht gehalten, von dieser Arbeitshypothese Kenntnis zu geben, wenn es nicht durch die zahlreichen Publikationen, die auf der Rutherford-Boltwood'schen Auffassung fußen, als zweckentsprechend erschienen wäre, auf die Möglichkeit anderer Deutungen im Rahmen der Rutherford'schen Disintegrationstheorie einerseits und in dem der bestehenden Anordnung der chemischen Elemente andrerseits hinzuweisen.

Bemerkung zur Theorie der Entropiezunahme in der »Statistischen Mechanik« von W. Gibbs

von

Tatiana und **Paul Ehrenfest.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Februar 1906.)

1. Die Kapitel I bis X der »Statistischen Mechanik« von W. Gibbs[1] sind zum großen Teil einer eigentümlichen mechanischen Analogie zu den reversiblen Prozessen der Thermodynamik gewidmet. Mit dem Kapitel XI und XII setzt die Analogie zu den irreversiblen Prozessen ein. Die Methode, die Gibbs hier entwickelt, weicht vollständig von der Boltzmann'schen Methode des H-Theorems ab. Wir wollen, ohne auf eine Besprechung der ganzen Methode einzugehen, bloß den Nachweis für die folgende Behauptung führen:

Das Theorem, dessen Entwicklung das Kapitel XII gewidmet ist und das den Ausgangspunkt für die Gibbssche Theorie der irreversiblen Erscheinungen bildet, ist vorläufig unbewiesen, denn der Beweis, den Gibbs gibt, enthält einen Fehler.

2. Der Autor schickt der Entwicklung jenes Problems folgende Erörterung voraus: Man gebe in einem geschlossenen Gefäß eine inkompressible, nichthomogene Flüssigkeit vor. Diffusion sei für diese Flüssigkeit ausgeschlossen. Sie befinde sich innerhalb des Gefäßes zu allen Zeiten in Bewegung.[2]

---

[1] W. Gibbs, Elem. Princ. in Statistical Mechanics (London, 1902). Deutsch von Zermelo (Leipzig, 1905).

[2] Der Einfachheit wegen kann man sich auf eine stationäre Strömung beschränken, so daß also u, v, w als Funktionen von x, y, z von der Zeit unabhängig gegeben sind.

Wegen der Inkompressibilität behält jedes Teilchen seine ursprüngliche Dichte (ρ) bei. Man überzeugt sich leicht, daß dann jeder Ausdruck von der Form:

$$\Phi = \int\int\int f(\rho)\,dx\,dy\,dz \quad (\int\int\int \text{ über die gesamte Flüssigkeit})$$

zeitlich konstant bleibt.[1]

So wird auch z. B. das »mittlere Quadrat der Dichte«

$$\overline{\rho^2} = \frac{\int\int\int \rho^2\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int dx\,dy\,dz} \quad (\int\int\int \text{ über die gesamte Flüssigkeit})$$

sich im Laufe der Zeit nicht ändern können.

Andrerseits bemerkt der Autor, es sei unmittelbar anschaulich, daß (ausgenommen gewisse singuläre Bewegungen) die Flüssigkeit bei ihrer Bewegung mehr und mehr einem Ausgleiche der Dichte zustrebt (auch dann, wenn Diffusion ausgeschlossen wird).[2] Bekanntlich ist aber die gleichförmige Verteilung einer Masse über einen Raum gegenüber jeder ungleichförmigen Verteilung derselben Masse über denselben Raum durch den Minimalwert von $\overline{\rho^2}$ ausgezeichnet. Danach würde also doch wegen des zunehmenden Dichtenausgleiches $\overline{\rho^2}$ abgenommen haben — im Widerspruche mit dem oben gewonnenen Resultat.

3. Gibbs oder deutlicher noch Burbury[3] löst diesen Widerspruch folgendermaßen: Jene Dichte ρ, von der wir sagen, daß $\frac{d\rho}{dt} = 0$, d. h. daß jedes Teilchen sein ρ beibehalte,

---

[1] Seien die Koordinaten eines Teilchens für $t_0 \ldots x_0 y_0 z_0$, für $t \ldots x, y, z$, so führe man in den Ausdruck für Φ als Integrationsvariabeln ein: $x_0 y_0 z_0$; dann ist: $\Phi = \int\int\int f(\rho) \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} dx_0 dy_0 dz_0$, wegen der Inkompressibilität ist aber $\rho = \rho_0$ und $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = 1$, somit auch $\Phi = \int\int\int f(\rho_0) dx_0 dy_0 dz_0$, also $= \Phi_0$ w. z. b. w.

[2] Zur Veranschaulichung kann man annehmen, daß die verschiedenen Dichten durch verschiedene Intensitäten der Färbung kenntlich seien. In diesem Falle würde sich also mehr und mehr eine gleichförmige Färbung aller Stellen im Gefäß einstellen.

[3] S. H. Burbury, On the variation of entropy as treated in W. Gibbs »Statist. Mechan.« Phil. Mag., Aug. 1902, July 1904.

wird definiert durch eine Raumeinteilung dx, dy, dz, mit der zur Grenze übergegangen wird. Und für sie ist tatsächlich mit

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{auch} \quad \frac{d\overline{\rho^2}}{dt} = 0.$$

Was uns aber unsere Anschauung als Dichte liefert — etwa unser Auge als Farbdichte — das ist nicht die durch die Präzisionsdefinition festgelegte Dichte; vielmehr läßt sie sich nur durch eine approximative Definition (einigermaßen) fassen. Wir werden dem hier in Betracht kommenden Maße der Dichte — sie heiße P — nahe kommen, indem wir das ganze Gefäß in Parallelopipede von sehr kleiner, aber nicht verschwindender Ausdehnung teilen, so daß benachbarte Parallelopipede vom Auge nicht mehr getrennt werden können und wenn wir dann definieren:

$$P = \frac{\iiint \rho\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz} = \frac{\iiint \rho\, dx\, dy\, dz}{\Omega}.$$

Die Integration ist dabei über jenes Parallelopiped Ω zu erstrecken, von dem wir gerade untersuchen, welche Dichte P »in ihm« herrscht.[1]

Wir können als Seitenlänge willkürlich z. B. 10^{-4} *mm* festlegen. Denn hier kommt es nur darauf an, den Gegensatz zwischen den Aussagen über P und über ρ aufzuzeigen. Im Gegensatze zu der Konstanz von $\overline{\rho^2}$ wird man die Konstanz von

$$\overline{P^2} = \frac{\Sigma P^2}{N} \quad (N = \text{Anzahl der Zellen } \Omega)$$

im Laufe der Zeit nicht behaupten. Was uns nach der Bemerkung von Gibbs die Anschauung unmittelbar liefern soll, ist nur: Die Inhomogeneität von P flacht mit zunehmender Zeit

[1] Unser ρ entspricht dem Gibbs'schen D, also bis auf einen für alles folgende gleichgültigen konstanten Faktor auch seinem P (groß p), somit weiter seinem e^{η}, demnach unser $\lg \rho$ (bis auf eine additive Konstante) seiner Größe η. Trotzdem Gibbs, wie wir sehen, den Gegensatz von ρ und P bespricht, führt er doch für unser P keine neue Bezeichnung ein. Gerade dadurch kommt sein fehlerhafter Beweis zu stande; vergl. § 6.

ab, d. h. $\overline{P^2}$ nimmt ab. Das aber widerspricht nicht der Konstanz von $\overline{\rho^2}$.

Auf gleiche Weise wird man behaupten, daß

$$\overline{\lg \rho} = \frac{\iiint \rho \lg \rho \, dx dy dz}{\iiint \rho \, dx dy dz} {}^{1} \quad (\iiint \text{ über die ganze Flüssigkeit})$$

zeitlich konstant ist. Von

$$\overline{\lg P} = \frac{\Sigma \iiint \lg P . \rho . dx dy dz}{\Sigma \iiint \rho dx dy dz} = \frac{\Sigma \lg P . P . \Omega}{\Sigma P . \Omega} = \frac{\Sigma P . \lg P}{\Sigma P}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma \text{ über alle } \Omega \\ \iiint \text{ über je ein } \Omega \end{bmatrix}$$

hingegen wird man die zeitliche Konstanz nicht behaupten.

4. Das Theorem des Kapitels XII, das Gibbs zur Grundlage für die Theorie der Entropievermehrung nimmt, bezieht sich nur auf die zeitliche Veränderung von $\overline{\lg P}$. Der Beweis von Gibbs stützt sich auf das Theorem IX des Kapitels XI. Dasselbe besagt:

Verteilt man einmal mit

dann mit konstanter Dichte ρ_0 α) / variabler Dichte ρ β)

dieselbe Masse M über denselben Raum R, so daß also — A

$$\iiint \rho dx dy dz = \iiint \rho_0 dx dy dz = M \quad (\iiint \text{ über } R) \qquad \gamma)$$

so ist

$$\iiint \rho \lg \rho dx dy dz > \iiint \rho_0 \lg \rho_0 dx dy dz \quad (\iiint \text{ über } R)$$

($\iiint \rho . \lg \rho . dx dy dz$ kann also bei vorgegebenem M und R als Maß für die Inhomogeneität der ρ-Verteilung angesehen werden.)

Dieses Theorem wird durch eine elementare Rechnung bewiesen.[2]

---

[1] Diese Mittelbildung ist also etwas abweichend von der, die $\overline{\rho^2}$ definierte. Wir folgen hier den Entwicklungen von Gibbs. Siehe p. 44 (Übers. p. 42), Gl. 108, p. 137, Gl. 452 etc. (Übers. p. 139).

[2] Siehe Kapitel XI, Th. IX, p. 137. Bezeichnungen siehe Anm. 3 zu § 3.

Auf P übertragen, lautet dieses Theorem:

Verteilt man einmal mit

dann mit

konstantem P_0 α′)

variablem P β′)

dieselbe Masse M über dieselbe Gruppe R von Zellen Ω, so daß also

$$\Sigma P.\Omega = \Sigma P_0.\Omega = M, \qquad \gamma')$$

so ist

$$\Sigma P.\lg P > \Sigma P_0 \lg P_0 \quad (\Sigma \text{ über alle } \Omega, \text{ die zu } R \text{ gehören}).$$

A'

($\Sigma P.\lg P$ kann somit bei vorgegebenem M und R als Maß für die Inhomogeneität einer solchen P-Verteilung angesehen werden.)

5. Um einen Einblick in die zeitliche Änderung von $\overline{\lg P}$ durch die Strömung zu erhalten, stellt Gibbs folgende Betrachtung an:

Zur Zeit t' herrsche im Gefäß irgend eine Dichtenverteilung (ρ und P) der inkompressiblen Flüssigkeit. Wegen der Strömung herrscht zur Zeit t'' eine andere Dichtenverteilung. Diese messen wir zur Zeit t'', indem wir erstens mit der dx, dy, dz-Teilung zur Grenze übergehen (Feststellung von ρ) und indem wir ferner das Gefäß in jene kleinen, aber nicht verschwindenden Zellen Ω teilen. Wir greifen eine bestimmte Zelle heraus; sie heiße Ω''. Ihr kommt zu ein

$$P'' = \frac{\iiint \rho'' dx dy dz}{\Omega} \qquad \iiint \text{ über } \Omega''$$

und ein Wert von

$$\iiint \lg P''.\rho'' dx dy dz = \lg P''.P''.\Omega.$$

Wir fragen nun: In welchen Parallelopipeden Ω sind zur Zeit t' jene Teilchen anzutreffen, die zur Zeit t'' in Ω'' liegen. Alle diese Teilchen liegen zur Zeit t' in einem kleinen Gebiet Φ', das sich im allgemeinen an einer andern Stelle des Gefäßes befindet und das aus Ω'' durch irgend eine Verzerrung hervorgeht. Wegen der Inkompressibilität ist jedenfalls $\Phi' = \Omega''$.

Der Autor macht nun darauf aufmerksam, daß dieses Gebiet Φ' im allgemeinen in mehrere Zellen Ω hineinragt. (Schon deshalb, weil es im allgemeinen kein Parallelopiped ist und doch das Volumen Ω besitzt.)

Den betrachteten Teilchen kommt

$$\text{zu } t'' \ldots \text{dasselbe } P''$$

zu. Zur Zeit t' seien sie aber etwa über i verschiedene Ω verstreut, also kommt den einzelnen Teilchen

$$\text{zu } t' \ldots P_1' \text{ oder } P_2' \text{ oder} \ldots P_i'$$

zu.

Wir können nun die Teilchen betrachten, wie sie zu t'' in Ω'' versammelt sind und können ihnen dabei

a) einzeln den ihnen zur Zeit t'' gemeinsam zukommenden Wert P'' oder aber

b) jedem einzelnen den Wert P_1' oder $P_2' \ldots P_i'$ zuordnen, der ihm zur Zeit t' zukommt.

So überblickt man leicht, welchen Wert von

$$\iiint \lg P . \rho \, dx \, dy \, dz$$

unsere ausgezeichneten Teilchen zur Zeit t' und welchen sie zu t'' besitzen:

$$\left.\begin{aligned} t' \ldots & \iiint \lg P' . \rho'' dx\,dy\,dz \text{ (oder wegen } \rho' = \rho'' \text{ auch)} = \\ & = \iiint \lg P' . \rho' dx\,dy\,dz\,^{1} \\ t'' \ldots & \iiint \lg P'' . \rho'' dx\,dy\,dz = \lg P'' . P'' . \Omega \\ & (\textstyle\iiint \text{ über } \Omega'') \end{aligned}\right\} B.$$

Dabei wollen wir noch kurz zusammenstellen, daß ρ', ρ'' und P' innerhalb des Integrationsgebietes variabel sind und nur P'' innerhalb des Integrationsgebietes Ω'' konstant ist.

6. Ohne die Ausdrücke B explizit hinzuschreiben und ohne die Größen ρ und P durch verschiedene Schreib-

[1] Diesen Ausdruck, und zwar gleich in der zweiten Form gewinnt man auch, indem man $\rho' \lg P'$ über Φ' integriert und dann erst als Integrationsvariable die Koordinaten der Teilchen zur Zeit t'' einführt. Die Transformationsdeterminante $= 1$. Die Darstellung im Text folgt den Entwicklungen von Gibbs im Kapitel XII.

weise auseinanderzuhalten, verweist nun Gibbs, bei diesem Punkt angelangt, kurzweg[1] auf das Theorem IX des Kapitels XI (siehe »Theorem A« in § 4) und folgert:

Die Teilchen, die zur Zeit t'' in Ω'' liegen, liefern zur Zeit t'' einen kleineren Wert von $\int\int\int \lg P.\rho\, dx\, dy\, dz$ als zur Zeit Z'.

Und da diese Betrachtung für jedes Ω angestellt werden könne, so folge daraus weiter (siehe Definition von $\overline{\lg P}$ in § 3):

Der Mittelwert von $\lg P$, den die gesamte im Gefäß befindliche Flüssigkeit zur Zeit t'' aufliefert, ist **kleiner** als der Mittelwert von $\lg P$, den sie zur Zeit t' aufliefert.

Hält man jedoch, wie es hier geschieht, die Größen ρ und P durch die Schreibweise auseinander und schreibt die Ausdrücke B, die Gibbs bloß durch Worte definiert, in Zeichen hin, so sieht man ohneweiters, daß das Theorem IX, Kapitel XI, sich nicht auf die Größen B, sondern nur auf ähnlich gebaute Größen bezieht.[2] Man sieht also,

---

[1] Original, p. 149, 150 (Übers., p. 152, 153). — Vergl. Anmerk. zu § 3.

[2] Hält man die Bezeichnungen für ρ und P nicht auseinander, so kann man die Ausdrücke B entweder

$a)$ mit $\int\int\int \rho' \lg \rho' dx\,dy\,dz$, respektive $\int\int\int \rho'' \lg \rho'' dx\,dy\,dz$

oder

$b)$ mit $\int\int\int P' \lg P' dx\,dy\,dz$, respektive $\int\int\int P'' \lg P'' dx\,dy\,dz$

($\int\int\int$ über Ω'')

verwechseln. Aber auch über diese Ausdrücke liefert das Theorem IX, Kapitel XI, keine Aussage. Im Falle $a)$ ist nämlich die Bedingung α) des Theorems nicht erfüllt (siehe § 4), denn ρ'' ist innerhalb Ω'' durchaus nicht konstant; die Bedingung γ) ist allerdings erfüllt. Denn es ist

$$\int\int\int \rho' dx\,dy\,dz = \int\int\int \rho'' dx\,dy\,dz \quad (\textstyle\int\int\int \text{ über } \Omega'').$$

Im Falle $b)$ ist (siehe Form A' des Theorems) zwar die Bedingung α') erfüllt. Denn P'' ist innerhalb Ω'' konstant.

Hingegen ist die Bedingung γ') nicht erfüllt, denn im allgemeinen ist

$$\int\int\int P' dx\,dy\,dz \neq \int\int\int P'' dx\,dy\,dz \quad (\textstyle\int\int\int\ \Omega'')$$

denn $\int\int\int P' dx\,dy\,dz$ stellt nicht die Masse in Ω'', respektive Φ' dar, wie man leicht einsieht, wenn man den richtigen Wert $\int\int\int \rho' dx\,dy\,dz$ gegenüberstellt.

daß das Theorem des Kapitels XII unbewiesen ist, denn es folgt nicht aus dem Theorem IX des Kapitels XI, wie der Gibbs'sche Beweis es erfordern würde.

7. Für die Beantwortung der Frage, ob sich das Theorem anderweitig beweisen ließe — eventuell unter welchen einschränkenden Voraussetzungen — dürften die eigentümlichen Betrachtungen einen Fingerzeig geben, die Gibbs noch im selben Kapitel an jenes Theorem knüpft. Zuvor wollen wir feststellen, was jenes Theorem besagen würde, falls man es zugibt. $\overline{\lg P}$ ist ein Maß für die Inhomogeneität von P innerhalb der Flüssigkeit, wie wir im § 4 (A') gesehen haben, insofern es seinen Minimalwert $\lg P_0$ annimmt, wenn P im ganzen Gefäß $= P_0$ ist. Danach würde das obige Theorem über $\overline{\lg P}$ besagen, daß die Inhomogeneität der Flüssigkeit (gemessen in P) zur Zeit t'' kleiner als zur Zeit t' ist.

Läge nun nur noch t' vor t'', so hieße das: »Die P-Inhomogeneität der Flüssigkeit flacht mit wachsender Zeit durch die Strömung ab. Also gerade das, wovon Gibbs sagt, daß es uns die Anschauung lehrt.

8. Nun ist aber gerade der Umstand bemerkenswert, daß in dem ganzen Gibbs'schen Beweis nirgends die Aussage benötigt oder benützt wird, daß t' dem t'' zeitlich vorausgehen müsse. Mehr noch: es ist ersichtlich, daß t' und t'' von vornherein ganz gleichberechtigte Momente sind und daß man in dem ganzen Beweis überall statt t' t'' einsetzen kann und umgekehrt, so daß man genau so gut zeigen könnte:

Die Teilchen, die zur Zeit t' in Ω' vereinigt liegen, liefern zur Zeit t' einen kleineren Wert von $\int\int\int \lg P . \rho dx dy dz$ als zur Zeit t'', wo sie über mehrere Ω'' zerstreut sind. Und weiter:

Der Mittelwert von $\lg P$, den die gesamte im Gefäß befindliche Flüssigkeit zur Zeit t' aufliefert, ist kleiner als der Mittelwert von $\lg P$, den sie zur Zeit t'' aufliefert.[1]

So würde ersichtlich, daß der Beweis und der Satz in dieser Allgemeinheit absurd ist.

9. Gibbs fühlt, daß in seinem Resultat eine Paradoxie liegt, und er sucht sie durch einige eigentümliche Betrachtungen

[1] Vergl. Burbury, l. c.

zu überwinden, die wir soweit wiedergeben, als es möglich ist, ohne weiter ausholen zu müssen. Er führt aus:

Ist auch nachgewiesen, daß $\overline{\lg P}$ zur Zeit t'' kleiner als zur Zeit t' ist, so ist damit noch nicht gezeigt, daß $\overline{\lg P}$ mit wachsender Zeit abnimmt. Denn an keinem Punkte des Beweises wurde vorausgesetzt, daß Z' vor t'' liege. Wenn zur Zeit Z' eine inhomogene Verteilung vorgegeben wird und wir betrachten die Verteilung, die zur Zeit t'' herrscht, wo aber jetzt t'' vor t' liegen möge und wir nehmen bei Festhaltung von t' für t'' ein immer früheres und früheres Datum, so wird man auch in dieser Richtung im allgemeinen zu einer homogenen P-Verteilung kommen.

»The determining difference in such cases is that between a definite distribution at a definite time and the limit of a varying distribution, when the moment considered is carried either forward or backward indefinitely.«

Dazu die Fußnote: »Man könnte damit die kinematische Tatsache vergleichen, daß, wenn sich zwei Punkte mit konstanter Geschwindigkeit bewegen (mit der einzigen Ausnahme, daß ihre Relativgeschwindigkeit Null ist), daß dann ihre wechselseitige Entfernung zu jeder »definiten« Zeit kleiner ist als für $t = +\infty$ und $t = -\infty$.«

Ferner im Text: »Aber während die Unterscheidung von »früher« und »später« bei mathematischen Fiktionen ganz unwesentlich sein mag, ist dies durchaus anders mit den Geschehnissen der realen Welt.«

Die folgenden Bemerkungen stützen sich auf Begriffe, deren Erläuterung hier zu weit führen würde.

10. Wir glauben folgendermaßen resumieren zu können: Von $\overline{\lg P}$ gilt zwar nicht wie von $\overline{\lg p}$ die Aussage, daß es konstant bleiben müsse. Es ist aber keineswegs der Nachweis erbracht worden, daß es mit wachsender Zeit im allgemeinen abnimmt, d. h. daß die Inhomogeneität der Flüssigkeit (in P) mit wachsender Zeit abflacht.

Es erhebt sich dann die Frage: Läßt sich vielleicht diese Behauptung, die Gibbs zunächst unmittelbar unter Berufung auf die Anschauung aufstellt — etwa in engerem Umfang und

unter einschränkenden Voraussetzungen über den Anfangszustand der Flüssigkeit — auf anderem Wege beweisen?

Jedenfalls ist dieses Theorem des Kapitels XII (ausgesprochen für einen Raum höherer Dimensionszahl) von Gibbs zur Grundlage für die Theorie der Entropievermehrung genommen worden, die er in der »Statistischen Mechanik« entwickelt. Alle folgenden Kapitel berufen sich darauf. $\overline{-\lg P}$ spielt die Rolle der Entropie. Solange das Theorem nicht bewiesen ist, solange fehlt der dort gegebenen mechanischen Theorie der irreversibeln Erscheinungen der Ausgangspunkt.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. II. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über photographische Azimutbestimmung

von

dipl. Ing. **Adolf Klingatsch,**

o. ö. Professor der k. k. technischen Hochschule in Graz.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1906.)

1.

Während für die Astrophysik die Photographie seit etwa fünfzig Jahren ein unentbehrliches Hilfsmittel bildet, zeigt sich in jüngster Zeit die Tendenz, die photographische Kamera auch in die Astrometrie einzuführen. Bezüglich der geographischen Ortsbestimmung ist bisher die photographische Methode zur genauen und genäherten Polhöhenbestimmung nach dem Prinzip des Horrebow-Talcott'schen Verfahrens einer eingehenden Erprobung unterzogen worden.

Nachdem Küstner[1] und Marcuse[2] die Anwendung der Photographie auf Polhöhenbestimmungen nach dieser Methode befürwortet hatten, schritt man zunächst auf der Georgetowner Sternwarte[3] zu Versuchen, wobei ein von Fargis erdachter Apparat, der Photochronograph, Verwendung fand; durch letzteren sollen bei allen Messungen, welche auf der Beobachtung von Sterndurchgängen beruhen, die persönlichen Fehler vermieden werden.

In den Jahren 1895 bis 1898 wurden von Marcuse, Schnauder, Hecker und Wanach[4] sowohl Beobachtungen mit den nach den Angaben Marcuse's konstruierten photo-

[1] Astronomische Nachrichten, 1891, Nr. 3015.
[2] Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 1892.
[3] Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1892—1895.
[4] Verhandlungen der internationalen Erdmessung, 1895 II, 1896, 1898.

graphischen als auch mit dem visuellen Zenithteleskop durchgeführt, welche den Beweis erbrachten, daß in Hinsicht der bloßen Genauigkeit der Leistung das photographische Verfahren auf der Höhe des visuellen steht.

Aber auch die schwierigste Aufgabe der geographischen Orientierung, die Längenbestimmung, ist durch die erfolgreichen Arbeiten von Schlichter, Hills und Koppe[1] als gelöst zu betrachten; mit demselben Problem beschäftigten sich auch Stolze[2] und Runge,[3] wobei letzterer im allgemeinen eine gewöhnliche photographische Kamera voraussetzt. In jenen Fällen, wo für geodätische Arbeiten eine Landesaufnahme, also auch ein Kartenmaterial zur Verfügung steht, genügt für die Orientierung im allgemeinen die Angabe des Azimutes bezüglich zweier in die Aufnahme einbezogenen Punkte, da die Länge und die Breite entweder geodätisch aus jener eines Fundamentalpunktes ableitbar ist oder aber sonst, wenn überhaupt die geographischen Koordinaten benötigt werden, diese für einen Punkt genügend genau aus einer Karte entnommen werden können.

Bei der großen Bedeutung, welche das photogrammmetrische Aufnahmsverfahren schon heute hat und das stereophotogrammetrische in Hinkunft besitzen dürfte, ist es naheliegend, die Orientierung derartiger Aufnahmen auf photographischem Wege zu bewirken.

Indem zunächst von jeder speziellen Anordnung der einzelnen Konstruktionsteile der hiezu dienenden Instrumente, der Photogrammeter, abgesehen wird, soll für die folgenden Genauigkeitsuntersuchungen lediglich eine photographische Kamera vorausgesetzt werden, welche um eine durch den Mittelpunkt eines horizontal zu stellenden Teilkreises gehende und zu letzterem senkrechte Achse drehbar ist. Der Kassettenteil der Kamera soll eine Einrichtung besitzen, daß die Ausmessung der Bilder nach rechtwinkeligen Koordinaten bezüglich zweier Achsen stattfinden kann, welch letztere auf dem

---

[1] Koppe, Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung, 1896.

[2] Stolze, Die photographische Ortsbestimmung ohne Chronometer, 1893.

[3] Runge, Über die Bestimmung der geographischen Länge auf photographischem Wege. Zeitschrift für Verm., 1893.

Glasnegativ entweder durch abgebildete Fäden als Linien erscheinen oder aber durch die Abbildungen je zweier Marken bestimmt sind.

2.

Die vom zweiten Hauptpunkte des Kameraobjektivs auf die Bildebene gefällte Normale soll als optische Achse der Kamera bezeichnet werden; der Abschnitt zwischen ihrem

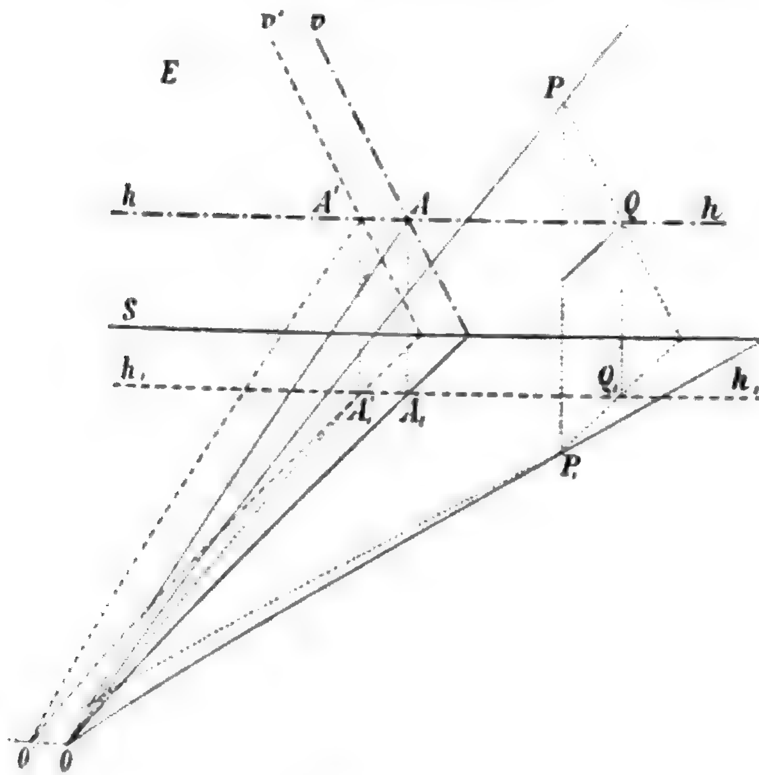


Fig. 1.

Schnittpunkte mit der Bildebene und dem zweiten Hauptpunkte gibt die Bilddistanz. Zwei durch die optische Achse gelegte Ebenen V und H, von welchen die erste vertikal ist, die zweite auf jener senkrecht steht, schneiden die Bildebene in zwei Geraden v, h, welche die Ordinaten- und Abszissenachse für das der Plattenausmessung dienende Achsenkreuz bilden.

In Fig. 1 ist E eine in der Bilddistanz vor dem ersten Hauptpunkt O gelegte Parallelebene zur Bildebene, welche die durch O gehende Horizontalebene in der Geraden s schneidet; die Abbildung auf E entspricht daher dem Positiv und werden

die folgenden Untersuchungen auf diese Ebene bezogen, obwohl die Ausmessung auf dem Negativ vorgenommen wird.

Es bezeichne ferner:

$\overline{OA} = f$ die Bilddistanz,

$\sphericalangle AOA_1 = i$ die Neigung der optischen Achse gegen den Horizont,

P die Abbildung eines Gestirns auf E,

$\overline{AQ} = x$, $\overline{PQ} = y$ die Koordinaten,

$\sphericalangle POP_1 = h$ den Höhenwinkel von OP;

dann ist die Horizontalprojektion α des Winkels AOP gegeben durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{f . \cos i - y . \sin i}, \tag{1}$$

während h aus

$$\operatorname{tg} h = \frac{(y \cos i + f . \sin i) \cos \alpha}{f \cos i - y \sin i} \tag{2}$$

berechnet werden kann.

Ist φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, δ die Deklination des Gestirns zur Beobachtungszeit, so ist dessen Azimut A aus

$$\cos A = \frac{\sin \varphi . \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi \cos h} \tag{3}$$

und das Azimut von V aus $A \mp \alpha$ abzuleiten, wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem P rechts oder links von v liegt. Ist a die Kreisablesung für die der Aufnahme entsprechende Stellung der Kamera und haben β, b die analoge Bedeutung für jenen Fixpunkt, dessen Azimut w bestimmt werden soll, so ist

$$w = (A \mp \alpha) + b - a \pm \beta . \tag{4}$$

Besitzt der photographische Apparat ein Fernrohr und wird mit diesem die Einstellung auf den Fixpunkt bewirkt, so bedeutet in 4) β die Horizontalprojektion des Winkels, welchen die Fernrohrvisur mit V bildet. Wird von dem Horizontalachsen- und dem Kollimationsfehler des Fernrohres abgesehen, so ist β für dasselbe Instrument konstant. Sind x', y' die Bildkoordinaten eines Punktes, der mit dem Fernrohr eingestellt wurde, so erhält man β aus

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x'}{f.\cos i - y'.\sin i}. \tag{5}$$

3.

Der Apparat wird so weit berichtigt vorausgesetzt, daß die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Marken des Glasnegativs, beziehungsweise die abgebildeten Fäden zwei Gerade geben, von welchen die eine h die optische Achse schneidet und bei aufgestelltem Instrument horizontal ist, während die andere v' der Ebene V parallel ist und h in einem Punkte schneidet, dessen Abbildung auf E, A' sei. Es bezeichnet dann $\overline{AA'} = \Delta x$ den bei der Justierung zurückgebliebenen Fehler, welcher so wie jener Δf in der Bestimmung der Bilddistanz für dieselbe Platte ein systematischer insofern ist, als beide ein bestimmtes, wenn auch nicht bestimmbares Vorzeichen besitzen. Hingegen werden die Messungsfehler m_x, m_y in den Koordinaten sowie jener m_i in der Neigung der optischen Achse als zufällige, und zwar bereits als mittlere Fehler in die Rechnung eingeführt. Dabei soll in m_i auch ein kleiner, in der Bestimmung der Lage von h zurückgebliebener zufälliger Fehler berücksichtigt sein.

Aus 1) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x} &= \frac{\sin 2\alpha}{2x}, & \frac{\partial\alpha}{\partial y} &= \frac{\sin^2\alpha.\sin i}{x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial f} &= -\frac{\sin^2\alpha.\cos i}{x}, & \frac{\partial\alpha}{\partial i} &= \sin\alpha.\operatorname{tg} h \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und damit aus 2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= -\frac{\sin^2\alpha.\sin 2h}{2x}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{(\cos i + \cos\alpha.\sin i.\operatorname{tg} h)\sin\alpha.\cos^2 h}{x}, \\ \frac{\partial h}{\partial f} &= \frac{(\sin i - \cos\alpha.\cos i\operatorname{tg} h)\sin\alpha\cos^2 h}{x}, \\ \frac{\partial h}{\partial i} &= \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

welche Differentialquotienten wegen 1) und 2) Funktionen von x, y, f, i sind.

In 4) bedeutet α nunmehr die Horizontalprojektion des Winkels, welchen die durch O und den angenommenen Koordinatenursprung A' gelegte Vertikalebene mit OP einschließt; da in diesem Fall auch der Hauptpunkt des Objektivs in der in A' auf E errichteten Normalen angenommen wird, somit nach O' verlegt erscheint, so wird nach 1) der Winkel $A_1'O'P_1 = \alpha'$ berechnet, während α zu bestimmen ist.

Setzt man $\sphericalangle OP_1O' = \nu$, $\sphericalangle OA_1'O' = \nu'$, so ist

$$\alpha = \alpha' + (\nu' - \nu).$$

Da ν' und ν kleine Winkel sind, ist genügend genau

$$\nu' = \frac{\overline{OO'}}{\overline{O'A_1'}} = \frac{\Delta x}{f \cdot \cos i}; \tag{8}$$

da ferner ν die Änderung des $\sphericalangle A_1OP_1$ bezeichnet, wenn die Abszissen bis A' gezählt werden, so wird

$$\nu = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) . \Delta x. \tag{9}$$

Folglich bewirkt die durch A' gehende Lage v' der Linie v einen Teilfehler

$$\alpha - \alpha' = \left(\frac{1}{f \cdot \cos i} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) \Delta x,$$

welcher der Herleitung gemäß das entgegengesetzte Zeichen für einen Punkt erhält, der bezüglich v symmetrisch zu P liegt.

Wegen der übrigen hier in Betracht gezogenen Fehlerquellen wird die dadurch bewirkte Änderung $\Delta\alpha$ von α

$$\Delta\alpha = \left(\frac{1}{f \cdot \cos i} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) \Delta x + \\ + \frac{\partial \alpha}{\partial f} . \Delta f \pm \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} . m_x + \frac{\partial \alpha}{\partial y} m_y + \frac{\partial \alpha}{\partial i} m_i\right) . \tag{10}$$

Diese Gleichung gibt auch den Fehler $\Delta\beta$ von β, wenn in 6) und 7) x, y durch die betreffenden Koordinaten ersetzt werden.

Wird von dem Fehler in der Entnahme der Deklination und der Annahme der geographischen Breite abgesehen, so ist jener von A lediglich durch den Fehler Δh von h bedingt, also

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial h} . \Delta h, \tag{11}$$

wobei

$$\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{\sin\delta . \sin h - \sin\varphi}{\cos h . \sqrt{\cos^2\varphi . \cos^2 h - (\sin\varphi \sin h - \sin\delta)^2}} \tag{12}$$

ist. Wegen 7) ist dann

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial h}\left(\frac{\partial h}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial h}{\partial f}\Delta f \pm \left(\frac{\partial h}{\partial x} m_x + \frac{\partial h}{\partial y} m_y + \frac{\partial h}{\partial i} m_i\right)\right). \tag{13}$$

Wir entwickeln nun den Fehler einer doppelten Azimutbestimmung, wobei die Bildpunkte $P_1 P_2$ desselben Gestirns zu verschiedenen Seiten von v gelegen sein sollen, etwa P_1 rechts, P_2 links davon. In diesem Fall ist das Mittel w aus den Einzelbestimmungen w_1 und w_2

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + b - \frac{a_1 + a_2}{2} \pm \beta . \tag{14}$$

Die von Δx abhängenden Teilfehler in 10) und 13) äußern sich bezüglich α_1 und α_2, respektive A_1 und A_2 mit entgegengesetztem, die von Δf abhängenden jedoch mit demselben Vorzeichen. Wird überdies vorausgesetzt, daß $P_1 P_2$ symmetrisch zu v liegen und sieht man von einer Höhenänderung des Gestirns und einer Neigungsänderung der optischen Achse für die Zwischenzeit beider Beobachtungen ab, so wird $\frac{A_1 + A_2}{2}$ das von Δx abhängende Glied in 13) und $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ den von Δf abhängenden Teilfehler von 14) nicht mehr enthalten, so daß man erhält:

$$\Delta\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)=\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{1}{f\cos i}\right)\Delta x\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial i}\right)^2 m_i^2\right)}\right) \tag{15)}$$

$$\Delta\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)=\frac{\partial A}{\partial h}\cdot\left(\frac{\partial h}{\partial f}.\Delta f\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial h}{\partial i}\right)^2 m_i^2\right)}\right). \tag{16)}$$

Da nun für verschiedene Platten auch Δx und Δf den Charakter von zufälligen Fehlern besitzen, so führen wir schließlich zur Gewinnung eines Genauigkeitsmaßes für dieselben die bezüglichen mittleren Fehler m'_x und m_f ein und erhalten dann für die mittleren Fehler m_α, m_A von $\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$, respektive $\frac{A_1+A_2}{2}$ bezüglich zweier zu v symmetrisch gelegener Aufnahmen auf derselben Platte

$$m_\alpha=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{1}{f\cos i}\right)^2 m_x'^2+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial i}\right)^2 m_i^2\right)} \tag{17)}$$

$$m_A=\pm\frac{\partial A}{\partial h}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial f}\right)^2 m_f^2+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial h}{\partial i}\right)^2 m_i^2\right)}. \tag{18)}$$

Hiebei gibt 17) mit $x=x'$, $y=y'$ und Einführung der bezüglichen Neigung auch den mittleren Fehler m_β von β, vorausgesetzt, daß ebenso zwei zu v symmetrische Aufnahmen des Fixpunktes gemacht wurden. Liegt nur eine Aufnahme vor oder wurde die Einstellung mit dem Fernrohr bewirkt, so ist nach 10), beziehungsweise 5)

$$m_\beta = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{f \cos i} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 m_{x'}^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial f}\right)^2 m_f^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial i}\right)^2 m_i^2}, \qquad 19)$$

so daß, wenn die Kreisablesungen a, b als fehlerfrei angenommen werden, somit lediglich der in dem photographischen Meßverfahren begründete Gesamtfehler m_w in Betracht kommt, letzterer aus

$$m_w = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + m_A^2 + m_\beta^2} \qquad 20)$$

zu berechnen ist.

Ist die Bildebene, also auch E und v vertikal, mithin die optische Achse und die Ebene H horizontal, so gehen 1), 2), 5), 6), 7) mit $i = 0$ über in

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{f} \qquad 1a)$$

$$\operatorname{tg} h = \frac{y \cos \alpha}{f} \qquad 2a)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x'}{f} \qquad 5a)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{f}{f^2+x^2}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial f} = -\frac{x}{f^2+x^2}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial i} = \frac{xy}{f^2+x^2} \qquad 6a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{x}{2(f^2+x^2)} \cdot \sin 2h, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\cos^2 h}{\sqrt{f^2+x^2}}, \quad \frac{\partial h}{\partial f} = -\frac{f}{2(f^2+x^2)} \sin 2h, \quad \frac{\partial h}{\partial i} = \frac{f}{\sqrt{f^2+x^2}}, \qquad 7a)$$

welche Werte, in die allgemeinen Gleichungen 17), 18), 19) eingesetzt, die den Gesamtfehler 20) bildenden Teilfehler in diesem speziellen Falle geben.

4.

Die Genauigkeit der photographischen Azimutbestimmung hängt von der Größe der zu gewärtigenden Messungsfehler m_x, m_y, also von der Ausmeßvorrichtung, sodann von dem zu benützenden Instrument ab, da durch letzteres das Verfahren und die Genauigkeit der Konstantenbestimmung, somit die Größe von m'_x, m_f, m_i, m_ξ bedingt ist.

Da gegenwärtig noch sehr wenige zu photo-astronomischen Arbeiten gebaute Instrumente zur Verfügung stehen, so wurde den folgenden Untersuchungen der Typus der gegenwärtig in der photogrammetrischen Praxis gebräuchlichen Instrumente zu Grunde gelegt. Diese Instrumente geben zumeist die Kreisablesung auf eine Minute, so daß für die Ausmessung Nonienmaßstäbe von 0·02 *mm* Angabe ausreichen, demnach von mikroskopischer Ausmessung abzusehen ist.

Mit Rücksicht auf die Genauigkeit photogrammetrischer Aufnahmen kann auch die durch die obigen Umstände bedingte, nur genäherte Orientierung derselben genügen; letztere kann dann mit dem Aufnahmsapparat selbst vorgenommen werden und machen sich auch hier die bekannten Vorzüge des photographischen Verfahrens geltend. Im übrigen wird so wie früher der Ablesefehler am Kreise nicht weiter berücksichtigt.

Das zu den späteren Versuchen benützte Instrument ist ein vom Inspektor Pollack konstruierter und von Lechner in Wien angefertigter, in Fig. 2 dargestellter Phototheodolit. Das Objektiv, ein Anastigmat-Weitwinkel 1 : 18 von Zeiß, ist längs einer mit einem Nonius *n* versehenen Teilung *t* parallel zur Umdrehungsachse des Instrumentes verschiebbar. Die Einstellung des Noniusnullpunktes auf einen Teilstrich der Skala ist etwa auf 0·02 *mm* sicher; die Ablesung, der Schätzung auf die halbe Noniusangabe gleichkommend, auf 0·05 *mm*. Der Kassettenteil der Aluminium-Blechkamera enthält einen dem Plattenformat 13/18 entsprechenden Zentimeterrahmen, an

welchen durch eine entsprechende Vorrichtung die lichtempfindliche Schichte der Platte angedrückt wird, so daß für alle Aufnahmen dieselbe Bilddistanz — ebene Platten vorausgesetzt — resultieren soll. Auf der entwickelten Platte erscheint daher die Abbildung des Zentimeterrahmens mit den betreffenden, die Lage der Koordinatenachsen bestimmenden Marken.

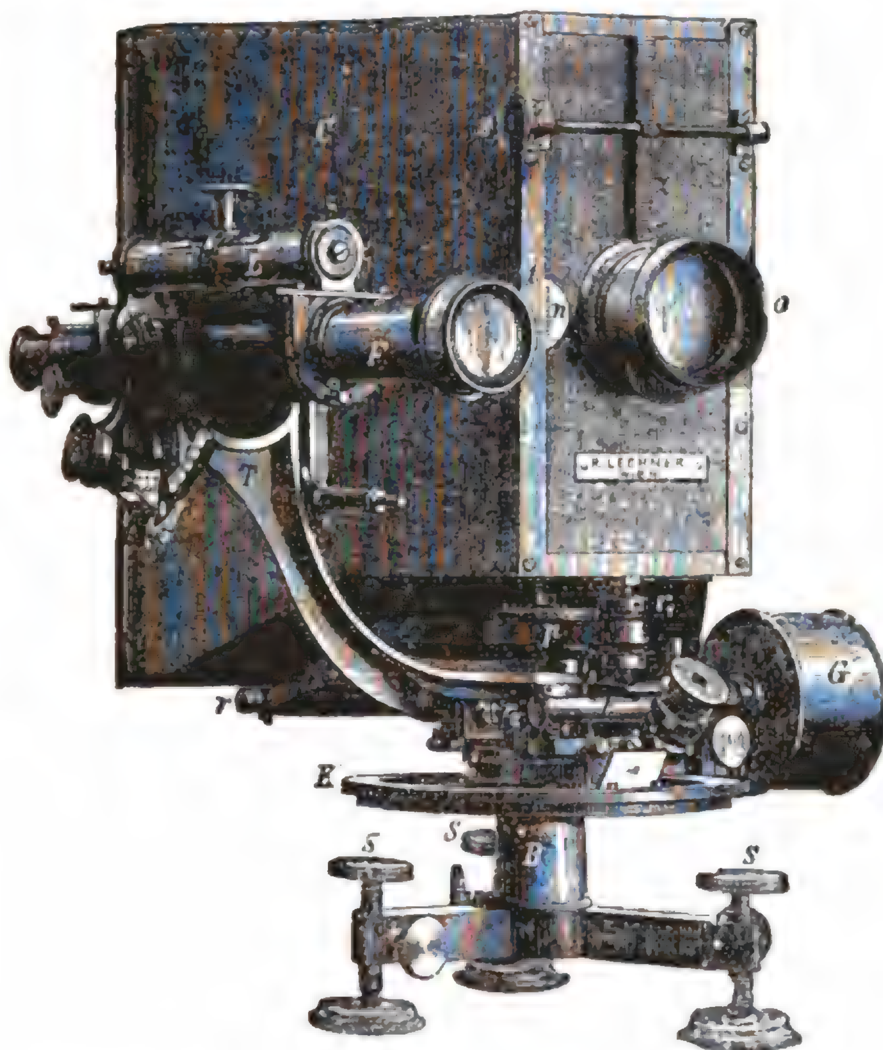


Fig. 2.

Seitlich der Kamera ist ein durch ein Gegengewicht G äquilibriertes Fernrohr F angebracht. Letzteres ist mit der Kamera in horizontalem Sinne über einem Teilkreise K drehbar, welcher mit zwei Nonien von $1'$ Angabe durch Drittelschätzung auf $20''$ abgelesen wird.

Die Prüfung und Berichtigung des Instrumentes wird in bekannter Weise vorgenommen, so daß lediglich die Ermittlung der Bildweite, ferner die Lage der den Messungen zu Grunde

gelegten Hauptvertikalen v, jene des Horizontes h sowie endlich die Bestimmung von β mit Rücksicht auf den Umstand, als die Einstellung nach dem Fixpunkte mit dem Fernrohr bewirkt werden sollte, zu behandeln sind, um die Größe der bezüglichen Fehler angeben zu können.

5.

Die Bildweitenbestimmung wurde in üblicher Weise vorgenommen, indem mit einem Mikroskoptheodolit von 5″ Angabe die Horizontalwinkel nach n Punkten in mehreren Sätzen gemessen und sodann diese Punkte durch eine Aufnahme mit vertikaler Bildebene abgebildet wurden; die Zentrierung des Instrumentes erfolgte bei dieser Aufnahme mit dem Hauptpunkt des Kameraobjektivs.

Bezeichnet P_i $(i = 1 \ldots n)$ die Projektion des Bildpunktes auf h und ist der gemessene Horizontalwinkel $P_1OP_i = \omega_i$, so ergeben sich die $n-1$ Gleichungen

$$\alpha_i = \alpha_1 + \omega_i \qquad i = 2 \ldots n, \tag{21}$$

wobei die Theodolitwinkelmessungen ω_i als fehlerfrei angenommen werden können.

Wegen der Messungsfehler in x_i und infolge einer Annahme für f werden die aus 1a) abgeleiteten α_i der Gleichung 21) nicht genügen. Die Bilddistanz bedarf einer Verbesserung δ_f, die Abszissen bedürfen einer, wie wir annehmen wollen, konstanten Verbesserung δ_x, indem von der Distorsion des Objektivs hier abgesehen werden kann.

Wegen

$$d\alpha_i = \frac{\cos^2 \alpha_i}{f}\,\delta_x - \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{f}\,\delta_f$$

hat man mit

$$a_i = \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1,$$

$$b_i = \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_i,$$

$$l_i = \frac{(\alpha_1 + w_i - \alpha_i)''}{\rho''} \cdot f,$$

wo $\rho'' = \frac{180.60.60}{\pi} = 206264 \cdot 8$ ist, die Fehlergleichungen

$$v_i = a_i \delta_f + b_i \delta_x + l_i \qquad i = 2 \ldots n.$$

Hierin bedeuten v_i die im Bogenmaß ausgedrückten Änderungen, welche die an und für sich als fehlerfrei vorausgesetzten Winkelmessungen erfahren müssen, damit das Strahlenbüschel mit dem Zentrum $f + \delta_f$ zur Punktreihe $x_i + \delta_x$ perspektivisch liegt.

Die beiden Normalgleichungen

$$[aa]\delta_f + [ab]\delta_x + [al] = 0$$
$$[bb]\delta_x + [bl] = 0$$

liefern

$$\delta_f = -\frac{[al2]}{[aa2]}, \quad \delta_x = -\frac{[bl2]}{[bb2]}$$

mit den mittleren Fehlern

$$m_f = \frac{e}{\sqrt{[aa2]}}, \quad m'_x = \frac{e}{\sqrt{[bb2]}}$$

wo $e = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}$ ist.

Die für $n = 15$ Punkte gemessenen x_i und ω_i ergaben für die Annahme $f = 184 \cdot 10$ *mm*

$$\delta_f = -0 \cdot 063 \, mm \qquad \delta_x = 0 \cdot 39 \, mm$$

mit den Fehlern

$$m_f = \pm 0 \cdot 084 \, mm \qquad m'_x = \pm 0 \cdot 28 \, mm,$$

so daß der beizubehaltende Wert der Bildweite $f = 184 \cdot 04 \pm 0 \cdot 08$ ist, während die Abszissen eine Vergrößerung von $0 \cdot 39$ *mm* erfahren. Hiedurch ist der Abstand der Hauptvertikalen von dem zur Messung der x_i benützten, auf der Platte mit einer Pickiernadel gezogenen Strich bestimmt. Der Abstand des letzteren wurde auch von den Abbildungen der parallelen Ränder des Rahmens bestimmt, da beabsichtigt war, bei der Ausmessung anderer Platten die Abstände der Bilder auf diese Ränder zu beziehen und sodann die Abszissen auf den Strich

der ersten Platte, respektive die dadurch bestimmte Lage der Hauptvertikalen zu reduzieren. Hiedurch soll das Ziehen des Striches bei folgenden Platten vermieden werden, da gerade diese Operation eine Unsicherheit von 0·1 *mm* bewirkt, einen Betrag, welcher beträchtlich die Genauigkeit der eigentlichen Ausmessung überschreitet. Da die gegenüberliegenden Ränder des Rahmens jedoch kaum parallel und auch nicht geradlinig sein werden, so hat die Messung des erwähnten Abstandes in bestimmten Intervallen, etwa für Ordinatendifferenzen von 1 *cm*, zu erfolgen.

6.

Zur Bestimmung des Horizontes wurden von dem Aufstellungspunkte des Phototheodolits bei Einhaltung derselben Instrumentenhöhe mit einem Mikroskoptheodolit von 2″ Angabe die Höhenwinkel nach sechs Punkten in mehreren Sätzen gemessen und mit Benützung dieser sowie der den Bildpunkten entsprechenden endgültigen Abszissen aus 2 a) die zugehörigen Ordinaten abgeleitet. Der Vergleich mit den auf der Platte gemessenen, also auf den Strich derselben bezogenen Ordinaten ergab eine Änderung der letzteren um

$$\Delta y = -1 \cdot 02,\ -0 \cdot 96,\ -0 \cdot 97,\ -0 \cdot 93,\ -0 \cdot 91,\ -0 \cdot 89\ mm.$$

In einem Diagramm kann sodann diejenige Gerade ermittelt werden, welche dem Horizont entspricht. Die Lage desselben läßt sich schärfer bestimmen als jene der Vertikallinie, indem die Abweichungen der der graphischen Ausgleichung zu Grunde gelegten Punkte von dem durch die Ausgleichung erhaltenen Horizont etwa 0·01 *mm* betragen. Aus diesem Grunde konnte auch von der Einführung eines systematischen Fehlers in der allgemeinen Entwicklung abgesehen werden.

Die Platte wird nun aus denselben Gründen wie vorhin von dem ursprünglich gezogenen Strich bis zu den gegenüberliegenden Rändern für runde Werte der Abszissen ausgemessen, wobei die endgültige Lage des Horizontes zu berücksichtigen ist, wodurch auf dieser Platte ein Netz in Maßen bestimmt ist.

Die Ermittlung von β wird zweckmäßig mit dem für die Azimutbestimmung zu benützenden Fixpunkte vorgenommen, indem der Phototheodolit mit der Vertikalachse zentriert und

sodann in beiden Fernrohrlagen die Einstellung auf ersteren vorgenommen wird. Nachdem die Kamera auf das Mittel der bezüglichen Kreisablesung eingestellt ist, liefert eine Aufnahme x' und damit nach 5) β.

Die angedeutete Bestimmung der Konstanten gilt lediglich für die benützte mittlere Objektiveinstellung. Bei vertikaler Bildebene stehen jedoch in diesem Falle nur Höhenwinkel bis zu 12° zur Verfügung. Es empfiehlt sich daher, um solche bis zu 20° benützen zu können, diese Bestimmungen für eine zweite Objektiveinstellung zu wiederholen. Die Verschiebung der Hauptpunkte des Objektivs ändert eben nicht allein den Horizont, sondern im allgemeinen auch die Bilddistanz und die Lage der Vertikallinie, da die Verschiebung kaum genügend genau in einer Vertikalen erfolgen wird.

Für eine zweite Konstantenbestimmung ist natürlich auch die Ausmessung der bezüglichen Platte vorzunehmen, welche dann für die Reduktion von Aufnahmsplatten mit dieser Objektiveinstellung auf das Achsenkreuz dieser Platte dient.

7.

In den beiden vorhergehenden Abschnitten wurde vorausgesetzt, daß bei der allgemeinen Berichtigung des Instrumentes die Ebene des Zentimeterrahmens parallel zur Umdrehungsachse des Instrumentes gestellt wurde, also bei aufgestelltem Instrument vertikal ist und auch bei späteren Aufstellungen in dieser Lage durch genügend genaue Libellen erhalten werden kann. Hiebei ist der bei der ursprünglichen Justierung zurückgebliebene Fehler Δi von demjenigen m_i zu trennen, welcher durch mangelhafte Aufstellung hervorgerufen wird.

Ist nämlich bei der Bestimmung der Horizontlinie die Bildebene um Δi gegen die Vertikale geneigt, die Umdrehungsachse des Instrumentes jedoch vertikal, so wird auf der geneigten Bildebene die Ordinate y' erhalten, während auf der senkrecht stehenden Platte sich y ergeben würde.

Hiebei hat man für den Höhenwinkel h in der Ebene V[1]

$$y = y' \cos \Delta i + y' \sin \Delta i \operatorname{tg} h$$

[1] Koppe, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889, p. 61.

und genügend genau auch für jede Richtung α

$$y - y' = \frac{y'^2}{f} \cdot \frac{\Delta i'}{\rho'},$$

wo $\rho' = \frac{180.60}{\pi}$ ist.

Nimmt man bei sorgfältiger Justierung $\Delta i = 1'$, so wird selbst für $y' = 100\ mm$, $y - y' = 0 \cdot 015\ mm$, ein Wert, welcher eben an die Grenze der Messungsschärfe heranreicht.

Von größerem Einflusse hingegen ist die durch minder genaue Libellen bewirkte Unsicherheit in der Aufstellung. Wenn lediglich die Projektion der Abweichung der Aufstellungsachse von der vertikalen Lage auf die Ebene V berücksichtigt wird, so bedeutet m_i die dadurch bedingte Neigungsänderung der optischen Achse gegenüber jener Lage, welche dieselbe bei der Konstantenbestimmung hatte. Der dadurch bedingte Fehler im Höhenwinkel ist $m_h = \frac{\partial h}{\partial i} m_i$, also wegen 7*a*) mit $x = 0$, $m_h = \pm m_i$, wie auch unmittelbar klar ist.

Es empfiehlt sich daher außer den mit der Alhidade verbundenen Libellen die Anbringung einer oder besser von zwei genaueren Libellen, welche, in unmittelbarer Verbindung mit der Kamera stehend, durch auf letztere wirkende Stellschrauben zum Einspielen gebracht oder abgelesen werden und dadurch vor jeder Aufnahme nicht allein die vertikale Lage der Bildebene, sondern auch ihre unveränderliche Lage sichern sollen.

Unter dieser Voraussetzung, die auch bei neueren Instrumenten zutrifft, kann von einer merkbaren Neigungsänderung der optischen Achse abgesehen werden.

8.

Nach den vorhergehenden Untersuchungen sind die mittleren Justierungs- und Messungsfehler in den Gleichungen 17), 18), 19) mit $m'_x = 0 \cdot 3\ mm$, $m_f = 0 \cdot 1\ mm$, $m_x = m_y = 0 \cdot 02\ mm$ anzunehmen, während $m_i = 0$ gesetzt wird.

Für die in Betracht kommenden Höhenwinkel kann in 17) der von m_x herrührende Teilbetrag vernachlässigt werden; da ferner bei visueller Einstellung nach dem Fixpunkt x' kaum

1 mm betragen wird, so kommt in 19) lediglich der durch m_x bedingte Teilfehler in Betracht.

Wegen 6*a*) und 7*a*) ergeben sich mit den obigen Vernachlässigungen aus 17), 18), 19) die mittleren Fehler für das Mittel aus zwei symmetrischen Beobachtungen, in Minuten ausgedrückt,

$$m_\alpha = \pm \rho' \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2}{f(f^2+x^2)}\right)^2 m_x'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{f}{f^2+x^2}\right)^2 m_\alpha^2} \qquad 17a)$$

$$m_A = \pm \rho' \cdot \frac{\partial A}{\partial h} \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{2(f^2+x^2)} \cdot \sin 2h\right)^2 m_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2 h}{\sqrt{f^2+x^2}}\right)^2 m_y^2} \qquad 18a)$$

$$m_\xi = \pm \rho' \cdot \frac{f}{f^2+x^2} m_\alpha . \qquad 19a)$$

Für eine einzelne Beobachtung in der Ebene V hat man aus 10) und 13) wegen $x = 0$

$$m_\alpha = \pm \rho' \cdot \frac{m_x}{f} \qquad 17b)$$

$$m_A = \pm \rho' \cdot \frac{\partial A}{\partial h} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sin 2h}{2f}\right)^2 m_f^2 + \left(\frac{\cos^2 h}{f}\right)^2 m_y^2} . \qquad 18b)$$

Im nachstehenden werden Sonnenbeobachtungen vorausgesetzt.

Man kann vor der Aufnahme durch Beurteilung der Sonnenbilder auf der Mattscheibe diejenigen Kreisablesungen bestimmen, welchen annähernd symmetrisch gelegene Aufnahmen entsprechen, so daß etwa sieben bis neun Aufnahmen bei derselben Objektiveinstellung auf einer Platte Platz finden.

Die nachfolgende Übersicht gibt für je drei symmetrisch gelegene Beobachtungen die aus 17*a*) und 18*a*) berechneten m_α und m_x, wobei für die angenommenen h der Faktor $\frac{\partial A}{\partial h}$ nach 12) zu bestimmen ist. Die Mittelwerte von m_A beziehen sich auf das Sommerhalbjahr. Außerdem sind die aus 17*b*) und 18*b*) berechneten Werte für eine einzelne Beobachtung in der mittleren Ebene angegeben.

x	m_a	m_A									$m_{a,A} = \sqrt{m_a^2 + m_A^2}$
		$h = 10°$			$h = 15°$			$h = 20°$			
		$\delta = 23°$	$\delta = 0$	Mittel	$\delta = 23°$	$\delta = 0$	Mittel	$\delta = 23°$	$\delta = 0$	Mittel	
cm	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′
0	0·37	0·52	0·54	0·53	0·61	0·70	0·65	0·71	0·90	0·80	0·74
2	0·28	0·44	0·46	0·45	0·54	0·63	0·58	0·64	0·82	0·73	0·61
4	0·35	0·43	0·45	0·44	0·53	0·61	0·57	0·63	0·80	0·72	0·66
6	0·58	0·41	0·43	0·42	0·50	0·58	0·54	0·61	0·78	0·70	0·76

Die in der letzten Kolonne für $h = 15°$ berechneten mittleren Fehler $m_{a,A}$ beziehen sich auf das Azimut der Vertikalebene $A_1 A_1' O$ (Fig. 1), hiebei visuelle Einstellung nach dem Fixpunkte vorausgesetzt. Das Gesamtmittel aus den annähernd gleich genauen Ergebnissen hat daher den mittleren Fehler

$$M_{a,A} = \frac{m_{a,A}}{\sqrt{4}} = 0\cdot 35' = 20''. \qquad 22)$$

Ebenso groß sollte sich daher der aus wirklichen Messungen hergeleitete Fehler eines Plattenmittels ergeben, während für die Bestimmung von w nach 4) β mit seinem Zeichen dem Gesamtmittel hinzuzufügen ist.

Da nach 19a) $m_\xi = \pm 0\cdot37'$ gesetzt werden kann, so gibt

$$M_w = \sqrt{M_{a,A}^2 + m_\xi^2} = 0\cdot58' \doteq 35'' \qquad 23)$$

die mittlere Abweichung der photographischen Bestimmung von dem wahren Werte. Hingegen ist durch 22) M_w dann gegeben, wenn durch ein geeignetes Meßverfahren β eliminiert wird, was jedoch nur möglich ist, wenn die Kamera mit dem Fernrohre durchgeschlagen werden kann, also symmetrische Beobachtungen in beiden Fernrohrlagen durchführbar sind. In dem letzteren Falle wird im Gesamtmittel auch der systematische Fehler Δx eliminiert, wodurch die Genauigkeit erhöht wird.

9.

Bei den Versuchsmessungen stand der Phototheodolit auf einem Stativ; die Zentrierung erfolgte mit der Vertikalachse über einem Punkte der Plattform des Observatoriums. Bei allen Beobachtungen wurde dieselbe Objektiveinstellung und dieselbe Doppelkassette 9, 10 benützt, welche für die früheren Untersuchungen Verwendung fand. Vor Beginn der Aufnahme, ferner zwischen jenen der Kassetten 9 und 10, endlich nach der letzten Aufnahme wurde das Fernrohr in beiden Lagern nach dem Fixpunkt eingestellt. Bei jeder Momentaufnahme — die Expositionszeit betrug $^1/_{40}$ Sekunden — wurde ein Chronometer abgelesen, um für die Berechnung der Deklinationen einen genäherten Uhrstand zu erhalten.

Die Sonnenbilder sind natürlich elliptisch und es fällt somit der Mittelpunkt dieser Ellipse nicht mit der Abbildung des Sonnenmittelpunktes zusammen. Man kann nun entweder einen Rand einmessen und die Reduktion auf den Mittelpunkt mit Benützung des Sonnenhalbmessers durchführen oder aber die Ausmessung für beide Ränder durchführen. Im letzteren Falle genügt es, mit dem Mittel der Koordinaten zu rechnen.

In der nachfolgenden Zusammenstellung, in welcher einzelne Sekunden lediglich als Rechnungsgrößen erscheinen, sind sowohl die einzelnen Beobachtungen als auch die Mittel aus den annähernd symmetrisch gelegenen, welch letztere von systematischen Fehlern teilweise befreit, daher vergleichbar sind, zusammengestellt. Bei sämtlichen Platten ist der aus den

Messungen hergeleitete Fehler des Gesamtmittels wesentlich kleiner als der in 22) angegebene, was auf teilweise Fehlertilgung zurückzuführen ist. Ebenso zeigen auch die an demselben Tag, also bei derselben Instrumentenaufstellung mit verschiedenen Platten bewirkten Beobachtungen befriedigende Übereinstimmung. In der Tabelle sind schließlich die Differenzen Δw zwischen den Mittelwerten der photographischen Azimutbestimmungen und dem mit dem Universalinstrument gefundenen und auf den Aufstellungspunkt des Phototheodolits auf etwa 1″ genau reduzierten Werte von 128° 48′ 28″ zusammengestellt. Diese Differenzen zeigen eine Schwankung, welche durchschnittlich den doppelten des in 23) ausgewiesenen Betrages erreicht, und erklären sich aus der für den vorliegenden Zweck keineswegs ausreichenden Genauigkeit in der Instrumentenaufstellung.

Zur Aufstellung dienen lediglich zwei kleinere, mit dem unteren Instrumententeile verbundene Libellen, während der Kassettenteil keine Libellen besitzt. Zur Ermittlung der mit diesem Instrument erreichbaren Genauigkeit in der Aufstellung wurde dessen Fernrohr mit einem zweiten kollimiert, in dessen Fokalebene sich ein Fadenmikrometer befindet, so daß Neigungsänderungen des Phototheodolits mit dem Mikrometer gemessen werden konnten. Hiebei wurden bei jedesmal einspielenden Libellen Differenzen von 25″ konstatiert, welche im vollen Betrag auf die Höhenwinkel und bei dieser Beobachtungszeit ($\delta = -14°$) mit dem 1·5fachen Betrag auf das Sonnenazimut übergehen, durch welchen Umstand die durchschnittlich eine Minute betragende Schwankung in den Tagesmitteln ihre Erklärung findet.

Datum 1905	Kassette	Zeit h	m	s	w °	′	″	Mittel °	′	″	Δw ′	″
30. Okt.	9	3	18	34	128	48	23					
			20	53		48	34					
			21	2		47	16	128	47	22	−1	6
			22	5		47	10		47	29	−0	59
			23	10		47	43		46	58	−1	30
			24	18		46	40		47	26	−1	2
			25	46		46	24	128	47	19	−1	9
			26	51		46	21	±7″				
	10	3	36	5	128	49	34					
			37	10		47	39					
			38	15		46	35	128	47	38	−0	50
			39	24		46	59		47	0	−1	28
			40	30		46	25		46	20	−2	8
			41	34		46	56		46	58	−1	30
			42	31		46	4		46	25	−2	30
			43	40		46	22	128	46	52	−1	36
			44	44		45	43	±14″				
31. Okt.	9	3	15	7	128	50	43					
			16	24		51	49					
			17	29		51	13	128	48	53	+0	25
			18	33		50	14		49	42	+1	14
			19	44		49	37		49	55	+1	27
			20	48		47	57		49	5	+0	37
			21	57		48	38		49	37	+1	9
			22	58		48	36	128	49	26	+0	58
			24	7		47	4	±12″				

Datum 1905	Kassette	Zeit h	m	s	w °	'	"	Mittel °	'	"	Δw '	"
31. Okt.	10	3	30	47	128	52	0					
			31	57		50	51					
			32	53		50	14	128	49	50	+1	38
			33	51		50	54		49	33	+1	5
			34	58		48	54		49	40	+1	12
			35	56		49	7		49	54	+1	26
			37	4		48	15	128	49	44	+1	16
			37	55		47	40	± 5"				
2. Nov.	9	3	13	16	128	48	58					
			14	12		47	11					
			15	10		46	54	128	47	30	—0	58
			15	58		46	46		47	11	—1	17
			16	47		48	1		47	42	—0	46
			17	43		48	30		47	23	—1	5
			18	31		47	12	128	47	26	—1	2
			19	22		46	3	± 7"				
	10	3	29	44	128	49	39					
			30	36		49	10					
			31	32		48	3	128	47	34	—0	54
			32	27		48	16		48	6	—0	22
			33	16		47	47		47	36	—0	52
			34	55		46	56		47	36	—0	52
			35	41		47	10		47	47	—0	41
			36	48		47	2	128	47	44	—0	44
			37	46		45	30	± 6"				

10.

Die Genauigkeit der photographischen Orientierung kann wesentlich gesteigert werden, wenn ein schärferes Ausmessungsverfahren, z. B. optische Ausmessung, verwendet wird, wie dies bei dem neueren Phototheodolit von Koppe sowie bei dem von Marcuse konstruierten Reiseuniversal verwirklicht wird; letzteres soll, wie aus einer Voranzeige[1] zu entnehmen ist, alle Aufgaben der genäherten geographischen Ortsbestimmung an einem Instrument lösen, wobei die Genauigkeit in Breite und Azimut 2″, in Länge und Zeit $0 \cdot 2^s$ betragen soll.

Beim Phototheodolit von Koppe findet ein eigenes Ausmessungsfernrohr Verwendung, dessen horizontale Drehungsachse gabelförmig gebogen ist, so daß das Zentrum der Kreise, welche Objektiv und Okular dieses Fernrohres beim Auf- und Niederkippen beschreiben, in den vorderen Hauptpunkt des Objektivs verlegt wird. Die optische Achse der Kamera hat dabei dieselbe Neigung wie bei der Aufnahme, das Diapositiv wird in derselben Lage wie bei jener in die Kamera eingesetzt, so daß die zur Aufnahme erforderlichen Winkel an der Platte gemessen werden.

Im Prinzip wäre übrigens das optische Ausmessungsverfahren auch bei jedem Photogrammeter möglich, wenn ein Theodolit, welcher die Rolle des Ausmeßfernrohres übernimmt, verwendet wird.

Durch Kollimation wird bewirkt, daß der durch einen Bildpunkt der eingesetzten Platte und durch den zweiten Hauptpunkt des Kameraobjektivs bestimmte Strahl parallel zur Visierlinie des Fernrohres wird. Für die bezügliche Einstellung ist im allgemeinen sowohl eine Drehung der Kamera als auch eine solche des Ausmeßinstrumentes erforderlich. Werden sodann beide Horizontalkreise abgelesen und wird für einen zweiten Punkt der Platte ebenso verfahren, so gibt, wie sich leicht zeigen läßt, die Summe der von den Ablesevorrichtungen beider Instrumente durchlaufenen Winkel die horizontale Projektion des betreffenden Winkels an. Hiebei wird die Einstellung

[1] Zeitschrift für Marine-Rundschau, 1901.

durch das Kameraobjektiv erleichtert, wenn eine Verschiebung des letzteren in vertikaler Richtung möglich ist, ohne daß sich die Bilddistanz oder die Lage der Hauptvertikalen ändert. Analoges gilt von der Messung der Winkel α. Wird die Platte um 90° gedreht, so könnten bei vertikaler Lage der Bildebene lediglich mit Benützung von Horizontalkreisablesungen an beiden Instrumenten die Projektionen der Höhenwinkel auf die Ebene V bestimmt und mit Benützung der gemessenen α auch die Höhenwinkel selbst gefunden werden, so daß sowohl für den Hilfstheodolit wie für den photographischen Apparat Höhenkreise entbehrlich wären. Dies setzt natürlich geeignete Abänderungen am Kassettenteil des letzteren voraus, ebenso, wie erwähnt, exakte Führung des Objektivschlittens, damit dieses Ausmeßverfahren praktisch durchführbar wird.

Wärmeleitung in inhomogenen Körpern

von

Dr. **Lise Meitner.**

Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Februar 1906.)

Im ersten Band seines Lehrbuches der Elektrizität und des Magnetismus leitet Maxwell eine Formel ab für den spezifischen elektrischen Widerstand K eines heterogenen Mediums, das aus einer Substanz vom spezifischen Widerstand k_2 und aus einer Reihe in dieser Substanz zerstreut liegender kleiner Kugeln zusammengesetzt ist, deren Gesamtvolumen zu dem Volumen des Mediums im Verhältnis von p zu 1 steht und deren spezifische Leitungsfähigkeit gleich k_1 ist, und findet hiefür den Ausdruck

$$K = \frac{2k_1+k_2+p(k_1-k_2)}{2k_1+k_2-2p(k_1-k_2)}\,k_2.$$

Diese Formel gewinnt Maxwell, indem er einerseits das Potential einer um alle kleinen Kugeln geschlagenen ideellen Kugel vom spezifischen Widerstand K in eine Reihe harmonischer Kugelfunktionen entwickelt, andrerseits die gleiche Entwicklung für die kleinen Kugeln aufstellt und beide Ausdrücke einander gleich setzt. Die zur Gültigkeit der Formel notwendige Voraussetzung ist, daß die Radien der Kugeln sehr klein gegen ihre gegenseitigen Abstände sind, so daß die Störungen der einzelnen Kugeln nicht miteinander interferieren. Daher muß p eine sehr kleine Größe sein.

Ferner darf auch der Bruch $\frac{k_1-k_2}{2k_1-k_2}$ keinen beträchtlichen Wert haben, da sonst der Widerstand nach einer bestimmten

Richtung noch abhängig ist von der Anordnung der einzelnen Kugeln.

Da sich nun aus den Gesetzen für elektrische Leitung durch bloße Vertauschung der entsprechenden Begriffe die Gesetze für die Wärmeleitung ergeben, liegt es nahe, die obige Formel durch Untersuchungen auf dem Gebiete der Wärmeleitung zu verifizieren. Auf Anregung des Herrn Prof. Dr. F. Exner habe ich es nun versucht, die Gültigkeit der genannten Formel an der Quecksilbersalbe (Ung. Hydrargyri) zu prüfen. Diese genügt den notwendigen Bedingungen für die Gültigkeit der Formel aufs beste. Die Kugelgestalt der eingebetteten Teilchen, deren gegenseitige Entfernung so groß ist, daß die Störungen, die sie einzeln in dem Laufe des Wärmestromes hervorbringen, voneinander unabhängig sind, mit anderen Worten, daß keine merkliche Strahlung zwischen ihnen stattfindet, schließlich die Möglichkeit, die Größe p sowie das Wärmeleitvermögen der reinen Salbenmasse in einfacher Weise und mit genügender Genauigkeit zu bestimmen, all dies macht die Quecksilbersalbe zu den nachstehenden Messungen besonders geeignet. Da diese sowohl an der Quecksilbersalbe als an der reinen Salbenmasse ausgeführt werden mußten, wurde nicht die gewöhnliche käufliche Salbe verwendet, sondern eine eigens zu diesem Zwecke hergestellte, der Parmac. VII entsprechende. Dadurch war es möglich, die unerläßliche Bedingung zu erfüllen, daß die reine Salbenmasse von genau gleicher Zusammensetzung sei wie das zur Quecksilbersalbe gehörige Fett.

Es wurde nun mit der im nachstehenden beschriebenen Methode das Leitvermögen k_2 der reinen Salbenmasse bestimmt und einmal auf Grund der Maxwell'schen Formel daraus das Leitvermögen der Quecksilbersalbe berechnet. Andrerseits wurde die spezifische Leitfähigkeit der Quecksilbersalbe direkt gemessen.

Die Größe p läßt sich leicht bestimmen. Ist

s das spezifische Gewicht der reinen Salbenmasse,
S » » » » Quecksilbermasse,
σ » » » des Quecksilbers,

v_g und v_s beziehungsweise die Volumina des Quecksilbers und der reinen Salbenmasse, die in einer Menge Quecksilbersalbe vom Volumen V enthalten sind, so bestehen die Gleichungen

$$v_g + v_s = V,$$
$$v_g.\sigma + v_s.s = V.S,$$
$$v_g.\sigma + (V - v_g)s = V.S,$$
$$p\sigma + (1-p)s = S,$$
$$p = \frac{S-s}{\sigma-s}.$$

S und s wurden mittels der hydrostatischen Wage bestimmt. Für das spezifische Gewicht σ des Quecksilbers wurde der Wert für 15° C. aus den Tabellen von Landolt entnommen.

Nachstehend die Werte für s, S, σ und p:

s	S	σ	p
0·9007	1·2416	13·5586	0·02693

Die Bedingung, daß p ein kleiner Bruch sei, ist hier jedenfalls genügend erfüllt. Nach Poisson (F. Joubert-Mascart, Electric., p. 146 ff.) ist die gegenseitige Induktion der leitenden Teilchen zu vernachlässigen, sobald ihr Volumen nicht mehr als $^1/_4$ des scheinbaren Körpervolumens beträgt, weil dann die inneren Kräfte bereits unter $^1/_{11}$ der äußeren herabsinken. Der für p gefundene Wert liegt nun nahe bei $^1/_{40}$, so daß die Vernachlässigung der Strahlung zwischen den Quecksilberkugeln ohne Zweifel gestattet ist. Immerhin wurde die Größe der Kugeldurchmesser unter dem Mikroskop bestimmt. Da die Werte derselben stark variierten — die größten Kugeln hatten einen viermal so großen Durchmesser wie die kleinsten — so wurde für den Radius r das Mittel aus 100 Messungen genommen.

Der so gefundene Wert betrug:

0·00178 *mm*.

Aus dem nun bekannten Radius und dem früher bestimmten Verhältnis p zwischen dem Volumen der Salbe und dem in ihr eingeschlossenen Quecksilbervolumen läßt sich die Distanz der Mittelpunkte der Kugeln ohneweiters finden.

Ist n die Anzahl der Quecksilberkugeln in der Volumeinheit und a der Abstand ihrer Mittelpunkte, so ist

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} \qquad p = \frac{4r^3\pi}{3} . n = \frac{4r^3\pi}{3a^3}$$

$$a = r\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3p}}.$$

Daraus ergibt sich

$$a = 0\cdot 0094\, mm = 5\cdot 3 r.$$

Die bei den Messungen angewendete Methode war dieselbe wie die, deren sich zuerst Christiansen (Wied. Ann., Bd. XIV, p. 23, 1881) bei seinen Untersuchungen über das relative Leitungsvermögen verschiedener Körper bedient hat.

Versuchsanordnung.

Drei Kupferplatten von gleichem Durchmesser und gleicher Dicke waren in der Weise übereinander gelegt, daß zwischen der unteren (III) und der mittleren (II) die Salbenschicht eingepreßt war, deren Wärmeleitvermögen bestimmt werden sollte; die mittlere und die obere (I) hingegen, waren durch kleine Glasstückchen getrennt, so daß sich zwischen ihnen eine Luftschicht von bekannter Dicke befand. Die ganze Leitungssäule stand auf einem Blechgefäß, durch welches der Strahl einer Wasserleitung hindurchgeleitet werden konnte. Auf der obersten Kupferplatte befand sich das Siedegefäß, welches zur Zuleitung des Wasserdampfes diente. Um einen möglichst guten Kontakt zwischen den Kupferplatten und den Blechgefäßen herzustellen, wurde Quecksilber als Zwischenmittel verwendet.

Die drei Kupferplatten waren gut planparallel und eben geschliffen und wurden — da geringe Unebenheiten der Platten auf die Temperatur einen verhältnismäßig bedeutenden Einfluß

haben — vor jeder Messung frisch amalgamiert. Die Temperaturen der Kupferplatten wurden an drei Thermometern, die in seitlichen Öffnungen übereinander angebracht waren, abgelesen. Außerdem wurde noch ein viertes Thermometer zur jedesmaligen Bestimmung der Zimmertemperatur verwendet. Alle vier Thermometer waren in ganze Grade geteilt und wurden mit einem Normalthermometer verglichen. An den nachfolgenden Temperaturangaben sind bereits alle Korrekturen einschließlich der des herausragenden Fadens angebracht. Die letztere wurde nach der von F. Kohlrausch (Kleiner Leitfaden der praktischen Physik) angegebenen Formel

$$a = 0 \cdot 00016\, \alpha(t - t_0)$$

ausgeführt, wobei 0·00016 der scheinbare Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers im Glase, α die in Graden ausgedrückte Länge und $t°$ die mittlere Temperatur des herausragenden Fadens ist.

Um den Einfluß der in der Umgebung vorhandenen Luftbewegung — seitlich an den Plattenrändern findet jedenfalls ein Aufsteigen der Luft statt — zu konstatieren, wurden einige Vorversuche angestellt, bei welchen die ganze Leitungssäule von einer Hülle aus Pappendeckel umgeben war. Die Abweichung der so erhaltenen Werte von denen, die unter sonst gleichen Umständen, aber ohne die Hülle gefunden worden waren, lag innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler und wurde daher im folgenden nicht weiter berücksichtigt.

Wie schon erwähnt, wurde die Luftschicht zwischen den Platten I und II durch drei kleine Glasstückchen hergestellt. Dieselben hatten zusammen eine Oberfläche von 0·32 cm^2. Ihre Dicke wurde mittels eines Sphärometers bestimmt und betrug im Mittel 0·1879 *cm*. Diese verhältnismäßig bedeutenden Dimensionen der Glasplättchen vermeiden zwar den Übelstand, daß durch den Druck des Siedegefäßes die Dicke der Luftschicht geändert werde, machen es aber andrerseits notwendig, den Wärmestrom, der durch die Glasstückchen hindurch stattfindet, mit in Rechnung zu ziehen.

Die Salbenmasse, deren Wärmeleitvermögen bestimmt werden sollte, wurde zwischen die Platten II und III gebracht,

die darin befindlichen Luftblasen durch Zusammenpressen möglichst gut entfernt. Die Dicke dieser Salbenschicht wurde mittels eines Schraubenmaßes von 0·001 *mm* Teilung an 6 bis 7 Stellen des Umfanges und in der Mitte bestimmt. Dieselbe variierte selbstverständlich für die einzelnen Messungen.

Da es sich weiters ergab, daß die Dicke der Salbenschicht während des Versuches durch das Gewicht der darüber lastenden Kupferplatten sowie des Siedegefäßes eine Veränderung erfuhr, so wurde die Dicke der Schicht vor und nach jeder Messung bestimmt. Die größte beobachtete Dickenänderung betrug 0·0033 *cm*. Den Berechnungen des Wärmeleitvermögens wurden immer die unmittelbar nach dem Versuch gemessenen Dicken zu Grunde gelegt, da diese jedenfalls den Werten, die dem schließlich eintretenden stationären Zustand entsprechen, am nächsten kommen.

Berechnung der Versuche.

Wird die obere Platte durch Wärmezufuhr, die untere durch Wärmeentziehung auf einer konstanten Temperatur gehalten, so wird nach einiger Zeit auch die Temperatur der mittleren Platte einen konstanten Wert annehmen.

Ist dieser Zustand eingetreten, so läßt sich aus den Temperaturen der Kupferplatten und dem als bekannt vorausgesetzten Wärmeleitvermögen der Luft die Wärmeleitfähigkeit der zwischen den Platten II und III befindlichen Schichte bestimmen. Die Temperaturen der Kupferplatten sind hiebei als konstant vorausgesetzt. Diese Annahme ist hier zulässig, da die Zwischenräume zwischen den Platten mit verhältnismäßig sehr schlecht leitenden Substanzen ausgefüllt sind, so daß das Temperaturgefälle innerhalb der Kupferplatten nicht in Betracht kommt.

Die Berechnung gestaltet sich nun folgendermaßen: Ist

L die Wärmemenge, die die mittlere Platte durch Leitung der Luft und der Glasstückchen von der Platte I erhält,

l die Wärmemenge, welche die mittlere Platte durch Vermittlung der Salbenschicht an III abgibt,

S die Wärmemenge, welche die Platte II durch Strahlung von I empfängt,

w die Wärmemenge, welche II durch Leitung, Strahlung und Konvektion an die umgebende Luft abgibt,

σ die Wärmemenge, welche die Salbenschicht durch Leitung, Strahlung und Konvektion nach außen abgibt, so ist für den stationären Zustand

$$L+S = l+w+\sigma.$$

Bezeichnet

R den Radius der Kupferplatten,
D die Dicke der mittleren Platte,
t_1 » Temperatur der oberen Kupferplatte (I),
t_2 » » » mittleren Kupferplatte (II),
t_3 » » » unteren Kupferplatte (III),
t_4 » » » Umgebung,
d_e » Dicke der Luftschicht,
d » » » Salbenschicht,
k_0 das absolute Wärmeleitvermögen der Luft bei 0° C.,
a den Temperaturkoeffizienten,
k_g das absolute Wärmeleitvermögen der Glasplättchen,
f die Oberfläche derselben,
k das Wärmeleitvermögen der Salbenschicht,
e » Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers,
ε » » der Salbenschicht,
A » Absorptionsvermögen der Kupferplatten,
H einen Faktor für Abgabe von Wärme durch Strahlung, Leitung und Konvektion,

so wird (Christiansen, Wied. Ann., Bd. XIV, p. 26)

$$L = \frac{R^2 \pi k_0}{d_e}\left[1+a\,\frac{t_1+t_2}{2}\right](t_1-t_2)+\frac{f k_g (t_1-t_2)}{d_e},$$

wobei das letzte Glied dieses Ausdruckes den Wärmestrom durch die Glasplättchen darstellt.

$$l = \frac{R^2 \pi k}{d}(t_2-t_3).$$

Nach der Formel von Winkelmann (Wied. Ann., Bd. XXIX, p. 73, 1886) ist ferner

$$S = \frac{R^2 \pi e A^2}{2A - A^2} [(t_1 + 273)^4 - (t_2 + 273)^4]$$

und

$$w = 2 R \pi D H (t_2 - t_4)^{1 \cdot 181}.$$

Die Wärmemenge σ, welche von der Salbenschicht an die umgebende Luft abgegeben wird, setzt sich aus der Strahlungsgröße σ_1 und der Größe σ_2 für Leitung und Konvektion zusammen.

$$\sigma_1 = 2 R \pi d \varepsilon \left[\left(\frac{t_2 + t_3}{2} + 273 \right)^4 - \left(t_4 + 273 \right)^4 \right]$$

Die Größe σ_2 ergibt sich aus der vorstehenden Formel von Winkelmann:

$$\sigma_2 = 2 R \pi d \left\{ H \left(\frac{t_2 + t_3}{2} - t_4 \right)^{1 \cdot 181} - e A \left[\left(\frac{t_2 + t_3}{2} + 273 \right)^4 - - (t_4 + 273)^4 \right] \right\}$$

daher

$$\sigma = 2 R \pi d \left\{ H \left(\frac{t_2 + t_3}{2} - t_4 \right)^{1 \cdot 181} + (\varepsilon - e A) \left[\left(\frac{t_2 + t_3}{2} + 273 \right)^4 - - \left(t_4 + 273 \right)^4 \right] \right\}$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich:

$$\frac{R^2 \pi k_0}{d_e} \left(1 + a \frac{t_1 + t_2}{2} \right) (t_1 - t_2) + \frac{f k_g (t_1 - t_2)}{d_e} + + \frac{R^2 \pi e A^2}{2A - A^2} [(t_1 + 273)^4 - (t_2 + 273)^4] = \frac{R_2 \pi k}{d} (t_2 - t_3) + + 2 R \pi D H (t_2 - t_4)^{1 \cdot 181} + 2 R \pi d \left\{ H \left(\frac{t_2 + t_3}{2} - t_4 \right)^{1 \cdot 181} + + (\varepsilon - e A) \left[\left(\frac{t_1 + t_2}{2} + 273 \right)^4 - (t_4 + 273)^4 \right] \right\}$$

und

$$k = \frac{L + S - w - \sigma}{R^2 \pi (t_2 - t_3)} d.$$

Das Emissionsvermögen ε der Salbenschicht ist nicht bekannt und eine Bestimmung desselben ist auch nicht möglich. Lehnebach hat das Ausstrahlungsvermögen des Glases bestimmt (Pogg. Ann., 151, p. 108, 1874) und bei geschwärztem Glas dasselbe Resultat erhalten wie für ungeschwärztes. Auch Christiansen (Wied. Ann., Bd. XIX, p. 271, 1883) erhielt für geschwärzte Glasplatten Werte, die von den Werten Lehnebach's für blankes Glas nur sehr wenig abweichen. Daher ist der Fehler jedenfalls sehr gering, wenn man für das Emissionsvermögen der Salbe den für Glas berechneten Wert benützt, zumal der von ε abhängige Ausdruck bei der größten Dicke der zur Verwendung gekommenen Salbenschichten nicht mehr als $^1/_2$% des übrigen Betrages ausmacht.

Resultate:

Die Versuche wurden nun in der Weise ausgeführt, daß in einem Wasserkessel Dampf erzeugt und durch einen Schlauch in das Siedegefäß geleitet wurde. Dadurch erwärmte sich die oberste Kupferplatte und übertrug ihre Wärme teilweise auf die beiden unteren Platten. Um die unterste Platte auf konstanter Temperatur zu halten, wurde der Strahl der Wasserleitung durch das Blechgefäß, auf dem die ganze Leitungssäule stand, hindurchgeleitet. Nach einiger Zeit wurde die Temperatur der oberen und unteren Platte konstant, während die mittlere Platte sich langsamer dem stationären Zustand näherte. War dieser erreicht, so wurden die Ablesungen vorgenommen.

Da es für die Genauigkeit der Versuche von wesentlicher Bedeutung ist, daß bei der Wärmeabgabe von einer Platte zur anderen die Strahlung in sehr geringem Maß gegenüber der Leitung beteiligt ist, ist es angezeigt, die Abstände der Kupferplatten möglichst klein zu wählen. Andrerseits mußte aber bei den folgenden Messungen darauf geachtet werden, daß die Temperatur der mittleren Platte nicht über 20° C. steige, um zu vermeiden, daß in der Konstitution der Salbe Änderungen eintreten. Daher durfte die Dicke der Luftschicht nicht zu gering gewählt werden. Um ferner die Unabhängigkeit der Resultate von der Dicke der Salbenschicht zu prüfen, wurde dieselbe in

einigen Versuchen erheblich variiert. Der Vergleich der so gefundenen Werte mit den anderen ergibt mit genügender Sicherheit, daß das Wärmeleitvermögen von der Dicke der zum Versuch benützten Schichte unabhängig für die folgenden Untersuchungen ist:

$R = 3 \cdot 5\, cm$,
$D = 1 \cdot 5376\, cm$,
$d_e = 0 \cdot 1879\, cm$,
$k_0 = 0 \cdot 0_4 555$ (Wied. Ann., Bd. XXIX, p. 100, 1886),
$\varepsilon = 1 \cdot 095 \cdot 10^{-12}$ (Wied. Ann., Bd. XIX, p. 280,1883),
$e = 1 \cdot 21 \cdot 10^{-12}$ (ebendaselbst),
$A = 0 \cdot 06$ (Wied. Ann., Bd. XXIX, p. 76),
$a = 0 \cdot 00206$ (ebendaselbst),
$H = 0 \cdot 0_4 770$ (Wied. Ann., Bd. XXIX, p. 100),
$k_g = 0 \cdot 00226$ (Paalhorn, Wärmeleitung verschiedener Gläser),
$f = 0 \cdot 32\, cm^2$.

Die Dicke d der Salbenschicht wird für jede Beobachtung besonders angegeben.

Im folgenden sind die erhaltenen Werte zusammengestellt:

I. Salbenmasse ohne Quecksilber.

1. $d = 0 \cdot 0987\, cm$
$t_1 = 80 \cdot 94$
$t_2 = 17 \cdot 2$ $\quad t_1 - t_2 = 63 \cdot 74$
$t_3 = 9 \cdot 6$ $\quad t_2 - t_3 = 7 \cdot 6$
$t_4 = 20 \cdot 1$ $\quad t_2 - t_4 = -2 \cdot 9$

$$k_2 = 3621 \cdot 10^{-8}$$

2. $d = 0 \cdot 1354\, cm$
$t_1 = 79 \cdot 314$
$t_2 = 18 \cdot 52$ $\quad t_1 - t_2 = 60 \cdot 794$
$t_3 = 8 \cdot 8$ $\quad t_2 - t_3 = 9 \cdot 72$
$t_4 = 18 \cdot 2$ $\quad t_2 - t_4 = 0 \cdot 32$

$$k_2 = 3669 \cdot 10^{-8}$$

3. $d = 0\cdot1374\,cm$

$t_1 = 73\cdot18$

$t_2 = 17\cdot4$ $\qquad t_1 - t_2 = 55\cdot78$

$t_3 = 9$ $\qquad t_2 - t_3 = 8\cdot4$

$t_4 = 21$ $\qquad t_2 - t_4 = -3\cdot6$

$k_2 = 3607 \cdot 10^{-8}$

4. $d = 0\cdot1612\,cm$

$t_1 = 80\cdot94$

$t_2 = 20\cdot2$ $\qquad t_1 - t_2 = 60\cdot74$

$t_3 = 8\cdot7$ $\qquad t_2 - t_3 = 11\cdot5$

$t_4 = 18\cdot9$ $\qquad t_2 - t_4 = 1\cdot3$

$k_2 = 3683 \cdot 10^{-8}$

5. $d = 0\cdot1223\,cm$

$t_1 = 77\cdot84$

$t_2 = 19\cdot2$ $\qquad t_1 - t_2 = 58\cdot64$

$t_3 = 10\cdot05$ $\qquad t_2 - t_3 = 9\cdot15$

$t_4 = 14\cdot5$ $\qquad t_2 - t_4 = 4\cdot7$

$k_2 = 3679 \cdot 10^{-8}$

II. Salbe mit Quecksilber.

1. $d = 0\cdot0887\,cm$

$t_1 = 76\cdot94$

$t_2 = 15\cdot2$ $\qquad t_1 - t_2 = 61\cdot74$

$t_3 = 8\cdot7$ $\qquad t_2 - t_3 = 6\cdot5$

$t_4 = 19\cdot6$ $\qquad t_2 - t_4 = -4\cdot4$

$K = 3853 \cdot 10^{-8}$

2. $d = 0\cdot1691\,cm$

$t_1 = 80\cdot54$

$t_2 = 20\cdot5$ $\qquad t_1 - t_2 = 60\cdot04$

$t_3 = 9\cdot2$ $\qquad t_2 - t_3 = 11\cdot3$

$t_4 = 18\cdot4$ $\qquad t_2 - t_4 = 2\cdot1$

$K = 3888 \cdot 10^{-8}$

3. $d = 0 \cdot 1615\, cm$
$t_1 = 76 \cdot 53$
$t_2 = 19 \cdot 21$ $t_1 - t_2 = 57 \cdot 33$
$t_3 = 8 \cdot 9$ $t_2 - t_3 = 10 \cdot 3$
$t_4 = 19 \cdot 21$ $t_2 - t_4 = 0$

$$K = 3891 \cdot 10^{-8}$$

4. $d = 0 \cdot 1372\, cm$
$t_1 = 75 \cdot 8$
$t_2 = 18 \cdot 3$ $t_1 - t_2 = 57 \cdot 5$
$t_3 = 9 \cdot 5$ $t_2 - t_3 = 8 \cdot 8$
$t_4 = 18 \cdot 6$ $t_2 - t_4 = -0 \cdot 3$

$$K = 3860 \cdot 10^{-8}$$

5. $d = 0 \cdot 1215\, cm$
$t_1 = 79 \cdot 84$
$t_2 = 17 \cdot 6$ $t_1 - t_2 = 62 \cdot 24$
$t_3 = 8 \cdot 6$ $t_2 - t_3 = 9$
$t_4 = 19 \cdot 8$ $t_2 - t_4 = -2 \cdot 2$

$$K = 3881 \cdot 10^{-8}$$

Im nachstehenden sind die Resultate der Messungen nebeneinander gestellt und die Mittelwerte daraus berechnet.

$10^8 K$	$10^8 k_2$
$3888 \pm 11 \cdot 4$	3621 ± 23
3853	3669
3891	3683
3860	3607
3881	3679
Mittelwert $3875 \pm 5 \cdot 2$	Mittel $3652 \pm 10 \cdot 1$

Unter Zugrundelegung des Mittelwertes für k_2 ergibt sich aus der Maxwell'schen Formel für K der Wert

$$K = 3803 \cdot 10^{-8}.$$

Die Abweichung des so berechneten Wertes von dem direkt gemessenen beträgt $1 \cdot 9\%$. Dieser Fehler ist in Anbetracht der Ungenauigkeiten, die bei allen Wärmemessungen

unvermeidlich sind, jedenfalls klein. Die Hauptfehlerquelle liegt hier in dem Vorhandensein von Luftblasen in der Salbenschicht, die eine Verringerung des Wärmeleitvermögens hervorrufen. Daraus erklärt sich auch der Umstand, daß der wahrscheinliche Fehler bei der reinen Salbenmasse nahezu doppelt so groß ist wie für die Salbe mit Quecksilber; denn aus der letzteren konnten die Luftblasen — wegen der festeren und konsistenteren Beschaffenheit der Quecksilbersalbe — leichter entfernt werden. Jedenfalls sind die größten Werte die wahrscheinlichsten.

Berechnet man k_2 aus den drei großen Werten, so erhält man als Mittelwert

$$10^8 k_2 = 3677,$$

daraus ergibt sich

$$10^8 K = 3822.$$

Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten ist in Anbetracht dessen, daß es sich um Wärmemessungen handelt, immerhin befriedigend, so daß die vorliegenden Resultate wohl als Bestätigung der Maxwell'schen Formel betrachtet werden können.

Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen

von

Georg Pick in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Februar 1906.)

Die sogenannte natürliche Geometrie (Geometria intrinseca)[1] ist der auf die Gruppe der Bewegungen bezügliche Einzelfall einer völlig analogen allgemeinen, d. h. auf irgend welche endliche kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen bezüglichen Analyse. Um dies zunächst für die Ebene darzulegen und diese Analyse in ihren Grundzügen herzustellen, hat man zwei fundamentale Begriffe zu konstruieren: das Bogenelement[2] der Gruppe und die kovarianten Koordinaten derselben. In ersterer Hinsicht ist die Begriffsbestimmung sehr naheliegend und übrigens in einem speziellen, aber über die Maßgeometrie hinausgehenden Falle schon durchgeführt.[3] Nichtsdestoweniger war eine eingehende Besprechung

---

[1] Vergl. das bekannte Buch von Cesàro, deutsch von Kowalewski: »Vorlesungen über natürliche Geometrie«.

[2] Die Beibehaltung dieses Namens für einen Begriff, der mit einer Länge im allgemeinen nichts mehr zu tun hat, rechtfertigt sich wohl durch die weitgehende Analogie mit dem metrischen Spezialfalle.

[3] Vergl. Study, Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie, Leipziger Berichte 1901, wo (p. 349) das oben als Bogenelement bezeichnete Differential für die projektive Gruppe der Ebene besprochen und explizite angegeben und das Integral derselben als Parameter für die Darstellung ebener Kurven in Aussicht genommen ist. Leider bin ich erst kürzlich (durch eine freundliche Mitteilung von Herrn Fr. Engel) auf diese Schrift aufmerksam geworden, mit deren eben erwähnten einschlägigen Aufstellungen meine allgemeine Definition des Bogenelements sowie die fertige Formel für die projektive Gruppe sich in völliger Übereinstimmung erwies.

dieses Begriffes nötig, vor allem im Hinblick auf gewisse Besonderheiten, die sich einstellen können (§§ 1 bis 3).

Die Konstruktion des zweiten Fundamentalbegriffes ist Gegenstand des vierten der nachfolgenden Paragraphen. Kovariante Koordinaten sollen für eine beliebige Transformationsgruppe dem entsprechen, was für die Gruppe der Bewegungen die auf das System Tangente—Normale einer zu Grunde gelegten Kurve bezogenen kartesischen Koordinaten sind.[1] Den sogenannten »Unbeweglichkeitsbedingungen« entspricht dann ein Gleichungssystem von fundamentaler Bedeutung, welches als das System der Identitätsbedingungen bezeichnet werden soll (§ 5).

Ein weiterer Paragraph erläutert das kürzeste, allgemein angebbare Verfahren zur Gewinnung der Fundamentalgrößen. Es folgt die Anwendung der erörterten Prinzipien auf die Gruppe aller Kollineationen der Ebene (§ 7). Im letzten Paragraphen endlich sind einige Bemerkungen enthalten, welche sich auf die Fortführung der Untersuchung nach mehreren Richtungen beziehen.

§ 1. Das Bogenelement.

Jede endliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene besitzt bekanntlich einen wesentlichen Differentialparameter,[2] der auf die einfache Form

$$\frac{d\varphi}{K dx} = \frac{\varphi'}{K}$$

gebracht werden kann. Hierin bedeutet K eine Funktion von x, y und einer Reihe von Ableitungen $y', y'', \ldots$ Die Existenz des Differentialparameters kommt also auf diejenige des invarianten Differentials $d\sigma = K dx$ hinaus. Dieses niedrigste invariante Differential der Gruppe, welches bis auf einen numerischen Faktor bestimmt ist,[3] bezeichnen wir als das Bogenelement der Gruppe.

---

[1] Vergl. Cesàro, a. a. O., insbesondere Kap. 2.

[2] Man findet die Sätze über Differentialinvarianten, welche für den Text in Betracht kommen, in »Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen« von Lie-Scheffers.

[3] Vergl. jedoch den sogleich zu behandelnden Ausnahmefall.

Zur Bestimmung derselben dient im allgemeinen das vollständige System

$$U_k^{(r-2)}(f) - \frac{d\xi_k}{dx}\varphi'\frac{\partial f}{\partial \varphi'} = 0. \qquad 1)$$

$U_k(f)$ bezeichnen hier die erzeugenden infinitesimalen Transformationen der Gruppe, $U_k^{(p)}(f)$ ihre p-fachen Erweiterungen, r ist die Gliederzahl der Gruppe und somit auch des Systems 1), und endlich ist, ausführlich geschrieben:

$$U_k(f) \equiv \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Das System liefert jedoch nur dann einen Differentialparameter, wenn nicht

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi'} = 0$$

eine Folge desselben ist, also wenn nicht schon das reduzierte System

$$U_k^{(r-2)}(f) = 0 \qquad 2)$$

eine Lösung besitzt. Der so charakterisierte, bisher in Bezug auf den Differentialparameter unbeachtet gebliebene Ausnahmefall bedarf also besonderer Diskussion.

Zunächst ist klar, daß das System 2) nicht mehr als eine Lösung besitzen kann. Denn eine solche ist Differentialinvariante der Gruppe von niedrigerer als der $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, also identisch mit der einzigen existierenden Differentialinvariante unterhalb der Ordnung r. Auch sieht man, daß das System

$$U_k^{(r-1)}(f) = 0$$

in diesem Falle dieselbe Funktion zur einzigen Lösung hat und daß der Fall durch die Bedingung

$$|\xi_k, \eta_k, \eta_k', \ldots \eta_k^{(r-2)}| = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

gekennzeichnet ist.

Unter dieser Voraussetzung bedarf es somit einer neuerlichen Erweiterung von 1) zum Zwecke der Gewinnung des Differentialparameters; man betrachte also das System

$$U_k^{(r-1)}(f) - \frac{d\xi_k}{dx}\varphi'\frac{\partial f}{\partial \varphi'} = 0. \qquad 3)$$

Dasselbe ist r-gliedrig, enthält $(r+2)$ partielle Differentialquotienten, besitzt also zwei unabhängige Lösungen. Da nur eine derselben nach früher Bemerktem von φ' frei sein kann, so liefert das System sicher einen Differentialparameter. Aus der besonderen Form des Systems leuchtet ein, daß derselbe die bekannte Gestalt

$$\frac{\varphi'}{K}$$

erhalten kann, wo K einen Ausdruck in $x, y, y', \ldots y^{(r-1)}$ bedeutet.

Ist nun J die niedrigste Differentialinvariante, welche nach Früherem hier höchstens die Ordnung $(r-2)$ besitzt, so muß

$$\frac{dJ}{Kdx}$$

gleichfalls eine Invariante sein, also, da ihre Ordnung kleiner als r ist, die Form

$$\omega(J)$$

besitzen. Es folgt

$$Kdx = \frac{dJ}{\omega(J)} = d(\bar{J}),$$

wo $\bar{J}$ eine bloße Funktion von J, also selbst Invariante ist. Übrigens ist klar, daß man statt des ursprünglichen J ebensowohl $\bar{J}$ benützen oder andrerseits an Stelle von K die Größe

$$\omega(J)K = \frac{dJ}{dx}$$

treten lassen kann. Letzteres folgt auch direkt aus dem Umstande, daß das System 3) den Differentialparameter nur bis auf einen Faktor festlegt, der eine beliebige Differentialinvariante von niedrigerer als der r^{ten} Ordnung sein kann.

Der behandelte Ausnahmefall tritt also ein für diejenigen Gruppen, deren Bogenelement integrabel ist und, integriert, eine Invariante der Gruppe liefert.

§ 2. Gruppen mit integrablem Bogenelemente.

Wir stellen jetzt die allgemeinere Frage nach allen jenen Gruppen, deren Bogenelement integrabel ist. Wenn dH invariant und zugleich integrabel ist, so folgt bloß, daß H bei den Transformationen der Gruppe sich bis auf eine additive Konstante reproduziert. Es bestehen also, unter $a_1, a_2, \ldots a_r$ nicht näher bekannte konstante Größen verstanden, die Gleichungen

$$U_k^{(r-2)}(H) = a_k, \tag{1}$$

wobei vorausgesetzt ist, daß H nicht höherer als $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sei, was für das niedrigste invariante Differential ja unter allen Umständen zutrifft.

Verschwinden sämtliche a_k, so werden wir auf den im vorigen Paragraphen behandelten Fall zurückgeführt. Gibt es aber unter den a_k von Null verschiedene, so bestimme man $(r-1)$ voneinander unabhängige Größensysteme λ_k der Bedingung

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r = 0$$

gemäß. Dann entspringen aus der Formel

$$V(f) \equiv \lambda_1 U_1(f) + \lambda_2 U_2(f) + \ldots + \lambda_r U_r(f)$$

$(r-1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen $V_1(f)$, $V_2(f), \ldots V_{r-1}(f)$, welche eine $(r-1)$-gliedrige Gruppe erzeugen, der gegenüber H invariant, und zwar offenbar die Invariante niedrigster Ordnung ist. Da für die Gruppe U_k der Ausnahmefall des vorigen Paragraphen jetzt ausgeschlossen ist, so enthält dH keine höhere Ableitung als die $(r-2)^{\text{te}}$, somit H keine höhere als die $(r-3)^{\text{te}}$. Für die Gruppe V_i tritt also gerade der Ausnahmefall des § 1 ein.

Die Gruppe V_i ist eine invariante (ausgezeichnete) Untergruppe der gegebenen. Denn, da offenbar

$$(V_i^{(r-3)} U_k^{(r-3)}) H = 0 \tag{2}$$

ist für alle zulässigen Werte von i, k, so lassen sich die $(V_i U_k) f$ durch die $V_i f$ allein linear ausdrücken.

Besitzt umgekehrt eine r-gliedrige Gruppe U_k eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe V_i und diese eine Differentialinvariante H von nicht höherer als der $(r-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, so bestehen Gleichungen von der Form 2) oder folglich

$$V_i^{(r-3)}(U_k^{(r-3)} H) = 0.$$

Man kann nun $(r-1)$ von den U_k direkt mit den V_i identisch annehmen. Für die noch übrige, die wir jetzt einfach U nennen, folgt aus

$$V_i^{(r-3)}(UH) = 0,$$

daß $U(H)$ eine bloße Funktion von H ist. Bekanntlich läßt sich dann $\omega(H) = \overline{H}$ so bestimmen, daß

$$U(\overline{H}) = 1 \text{ oder } = 0$$

wird. Im ersten Falle liegt offenbar die in diesem, im letzten die im vorigen Paragraphen besprochene Besonderheit vor.

Die Ergebnisse der beiden Paragraphen lauten zusammengefaßt:

Das Bogenelement einer r-gliedrigen Gruppe der Ebene ist dann und nur dann integrabel, wenn dieselbe eine ρ- $=$ r- oder $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe und diese eine Differentialinvariante von nicht höherer als der $(\rho-2)^{\text{ten}}$ Ordnung besitzt.

Der zweite Teil dieser Bedingung verlangt, daß die fragliche Untergruppe in den Elementen $(\rho-2)^{\text{ter}}$ Ordnung intransitiv sei.

§ 3. Die Operation $D^{(\rho)}$.

Aus den Gleichungssystemen 1) und 3) in § 1 folgen zur Bestimmung von K die Systeme

$$U_k^{(r-2)}(K) + \frac{d\xi_k}{dx} K = 0, \tag{1}$$

$$U_k^{(r-1)}(K) + \frac{d\xi_k}{dx} K = 0, \tag{2}$$

von denen das erste im allgemeinen, das zweite aber bei in den Elementen $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung intransitiven Gruppen zu

verwenden ist. Von diesen Gleichungen ausgehend, kann man auf mehr analytischem Wege zu den früher gewonnenen Resultaten gelangen.

Es sei

$$D^{(\rho)} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + y^{(\rho+1)} \frac{\partial}{\partial y^{\rho}}, \tag{3)}$$

eine Operation, welche, auf eine Funktion von $x, y, y', \ldots y^{(\rho)}$ ausgeübt, einer totalen Differentiation nach x gleichkommt. Dann besteht, wie eine einfache Rechnung ergibt, die Relation

$$(U^{(\rho)} D^{(\rho-1)}) f = -\frac{d\xi}{dx} D^{(\rho-1)} f - \frac{d\eta^{(\rho)}}{dx} \frac{\partial f}{\partial y^{(\rho)}} \tag{3)}$$

oder auch

$$(U^{(\rho)} D^{(\rho)}) f = -\frac{d\xi}{dx} D^{(\rho)} f - \eta^{(\rho+1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(\rho)}}. \tag{3*)}$$

Aus 3) folgt nun für $\rho = r-2$ und unter der Annahme, daß f keine höhere Ableitung als $y^{(r-3)}$ enthält,

$$U_k^{(r-2)}\left(\frac{df}{dx}\right) - \frac{d}{dx}(U_k^{(r-2)} f) = -\frac{d\xi_k}{dx} \frac{df}{dx}.$$

Vergleicht man dies mit 1), so ergibt sich, daß K aus 1) dann und nur dann als vollständiger Differentialquotient

$$\frac{df}{dx}$$

sich ergibt, wenn für alle U_k

$$\frac{d}{dx}(U_k^{(r-2)} f) = 0,$$

also $U_k^{(r-2)} f$ konstant ist.

Andrerseits folgt aus 3) für $\rho = r-1$ und unter der Annahme, daß f höchstens von der Ordnung $(r-2)$ ist,

$$U_k^{(r-1)}\left(\frac{df}{dx}\right) - \frac{d}{dx}(U_k^{(r-1)} f) = -\frac{d\xi_k}{dx} \frac{df}{dx}.$$

Dies mit 2) zusammengehalten, zeigt, daß letzteres System eine Lösung von der Form

$$K = \frac{df}{dx}$$

dann und nur dann besitzt, wenn alle

$$U_k^{(r-1)} f$$

konstant sind. Da aber unter der Voraussetzung, welche für die Anwendung von 2) maßgebend ist, die Determinante des Gleichungssystems

$$U_k^{(r-2)}(f) = 0$$

verschwindet und da ferner f die $(r-1)^{te}$ Ableitung nicht enthält, müssen offenbar jene Konstanten sämtlich verschwinden.

Hiedurch sind die früheren Ergebnisse auf diesem Wege wiedergewonnen.

Beispiele für die Fälle integrablen Bogenelements bieten schon einige sehr bekannte Gruppen elementarer Natur.

Die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen

$$\boxed{p,\ q,\ -yp+xq,\ xp+yq}$$

hat zum Bogenelement den Kontingenzwinkel

$$\frac{y'' dx}{1+y'^2} = d(\operatorname{arctg} y');$$

sie besitzt die invariante Untergruppe

$$\boxed{p,\ q,\ xp+yq}$$

mit dem Bogenelemente

$$y'' dx = d(y')$$

und der Invariante

$$y'.$$

§ 4. Kovariante Koordinaten.

Von nun ab sei der Sonderfall des § 1 ausgeschlossen, also stets angenommen, daß die zu Grunde liegende r-gliedrige

Gruppe für die Elemente $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung transitiv ist. In der Tat existiert für Gruppen, die in diesem Sinn intransitiv sind, keine natürliche Geometrie, welche der gewöhnlich sogenannten in den wesentlichen Zügen analog wäre.

Wir bezeichnen mit x, y die laufenden Koordinaten längs einer willkürlich angenommenen Kurve, mit X, Y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene. Es existiert eine infinitesimale Transformation der Gruppe, welche das Element $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Kurve $(x, y, y', \ldots y^{(r-2)})$ in das Nachbarelement derselben Ordnung überführt. Diese Transformation erteilt, auf den Punkt X, Y ausgeübt, den Koordinaten desselben Variationen. Ich nenne nun kovariante Koordinaten jenes Punktes zwei von $X, Y, x, y, y', \ldots y^{(r-2)}$ abhängige Größen u, v, welche erstens die Lage des Punktes bestimmen und zweitens gegenüber jener infinitesimalen Transformation unveränderlich sind, wie immer die zu Grunde gelegte Kurve angenommen sein mag.

Sind Ξ_k, H_k die Funktionen ξ_k, η_k, aber in X, Y geschrieben, so sind die gesuchten u, v offenbar irgend zwei voneinander unabhängige Lösungen des r-gliedrigen vollständigen Systems

$$U_k^{(r-2)}(f)+\Xi_k\frac{\partial f}{\partial X}+\mathrm{H}_k\frac{\partial f}{\partial Y}=0. \qquad 1)$$

Denn einerseits ist jede Lösung dieses Systems invariant gegenüber allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe. Zweitens aber folgt aus der vorausgesetzten Transitivität der Gruppe, daß sich X, Y aus zwei unabhängigen Lösungen des Systems nicht eliminieren lassen, daß sich also X, Y rückwärts durch diese Lösungen ausdrücken lassen.

Es seien also zwei solche Funktionen

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y, y', \ldots y^{(r-2)};\ X, Y) \\ v &= v(x, y, y', \ldots y^{(r-2)};\ X, Y) \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

ausgewählt, so bestehen die $2r$ Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} U_k^{(r-2)}(u)+\Xi_k\frac{\partial u}{\partial X}+\mathrm{H}_k\frac{\partial u}{\partial Y}&=0,\\ U_k^{(r-2)}(v)+\Xi_k\frac{\partial v}{\partial X}+\mathrm{H}_k\frac{\partial v}{\partial Y}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad 3)$$

Durch Auflösung von 2) nach X, Y ergeben sich diese als Ausdrücke in $u, v, x, y, y', \ldots y^{(r-2)}$, welche selbst gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen müssen, die sich leicht ergeben, indem man in 3) die u, v statt der X, Y als unabhängige Variable einführt. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} U_k^{(r-2)}(X)&=\Xi_k,\\ U_k^{(r-2)}(Y)&=\mathrm{H}_k.\end{aligned}\right\}\qquad 4)$$

Die in diesen Gleichungen ausgesprochene Eigenschaft ist keine andere als die, daß X, Y bei festgehaltenen u, v unter dem Einflusse der Transformation U_k die Variationen $\Xi_k\delta t$, $\mathrm{H}_k\delta t$ erleiden; die Gleichungen hätten also demgemäß a priori hingeschrieben werden können.

Die durch das geschilderte Verfahren ermittelten kovarianten Koordinaten u, v sind diejenigen solchen von möglichst niedriger Ordnung. Es besteht aber natürlich kein Hindernis, kovariante Koordinaten von beliebig höherer Ordnung zu bilden. Um etwa derartige Koordinaten zu erhalten, welche $y^{(r-1+s)}$ als höchste Ableitung enthalten, wird man zwei Lösungen des vollständigen Systems

$$U_k^{(r-1+s)}(f)+\Xi_k\frac{\partial f}{\partial X}+\mathrm{H}_k\frac{\partial f}{\partial Y}=0$$

aufzusuchen haben, welche voneinander unabhängig sind und aus denen sich X, Y rückwärts berechnen lassen. Nun sind jedenfalls u, v derartige Lösungen des Systems. Da dasselbe im ganzen $(s+3)$ Lösungen besitzt und außer u, v leicht $(s+1)$ Lösungen angegeben werden können, so kennt man die allgemeine Lösung. Bezeichnet J die niedrigste Differentialinvariante der Gruppe, welche genau von der Ordnung $(r-1)$ ist, ferner

$$d\sigma = K dx$$

das invariante Differential (Bogenelement), so sind

$$J, \frac{dJ}{d\sigma}, \frac{d^2J}{d\sigma^2}, \dots \frac{d^sJ}{d\sigma^s}$$

die fraglichen $(s+1)$ weiteren Auflösungen. Es gilt somit der Satz:

Man erhält die allgemeinsten kovarianten Koordinaten $(r-1+s)^{\text{ter}}$ Ordnung, indem man zwei beliebige Funktionen φ, ψ von u, v, J, $\frac{dJ}{d\sigma}, \dots \frac{d^sJ}{d\sigma^s}$ bildet unter der einzigen Bedingung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} \neq 0.$$

§ 5. Die Identitätsbedingungen.

Im Gegensatze zu der früheren Auffassung denken wir uns jetzt X, Y festgehalten und fragen nach den Änderungen, welche u, v in Folge hievon beim Wechsel des Elementes $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung erleiden. Diese Änderungen, bedingt durch die Zuwächse

$$dx,\ dy = y'dx,\ dy' = y''dy, \dots\ dy^{(r-2)} = y^{(r-1)}dx$$

der Elementkoordinaten, mögen mit du, dv bezeichnet werden. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} du &= D^{(r-2)}(u).dx, \\ dv &= D^{(r-2)}(v).dx, \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

unter D die in § 3 eingeführte Operation verstanden. In den Ausdrücken für du, dv denken wir uns X, Y ersetzt durch ihre aus der Auflösung der Gleichungen 2), § 4, folgenden Werte. Hiedurch erhalten wir du, dv ausgedrückt durch

$$x, y, y', \dots y^{(r-1)}, u, v.$$

Die Gültigkeit der so gewonnenen Formeln ist also die Bedingung dafür, daß der durch u, v bezeichnete Punkt durch

die Transformationen der Gruppe nicht geändert wird. Wir bezeichnen diese Formeln daher als die **Identitätsbedingungen**. Es ist nun leicht zu sehen, daß die Differentiale du, dv invariant sind. Ist nämlich T die infinitesimale Transformation der Gruppe, welche die beiden benachbarten Elemente $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung verknüpft, so sind du, dv die Unterschiede zwischen den kovarianten Koordinaten zweier Punkte P, P', die selbst durch T verknüpft sind. Die benachbarten Elemente $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden zusammen ein Element $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Unterwirft man nun die Figur, bestehend aus diesem Element und den Punkten P, P', einer beliebigen (endlichen oder infinitesimalen) Transformation S der Gruppe, so verwandeln sich P, P' in zwei neue Punkte Q, Q' mit denselben kovarianten Koordinaten, d. h. es bleiben du, dv ungeändert. Zur infinitesimalen Transformation $S^{-1}TS$ gehören also dieselben du, dv wie zu T, worin offenbar der Nachweis der Invarianz dieser Differentiale liegt.

Hieraus folgt nun, wenn mit $d\sigma$ wieder das Bogenelement der Gruppe bezeichnet wird, daß $\frac{du}{d\sigma}$, $\frac{dv}{d\sigma}$ Differentialinvarianten sind. Da in diesen Größen keine höhere Ableitung als $y^{(r-1)}$ auftritt, so sind dieselben (abgesehen von ihrer Abhängigkeit von u, v) reine Funktionen von J, der niedrigsten Differentialinvariante der Gruppe. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\sigma} &= \Phi(u, v, J), \\ \frac{dv}{d\sigma} &= \Psi(u, v, J) \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

als endgültige Gestalt der Identitätsbedingungen.

Es dürfte nicht überflüssig sein, die Invarianz dieser Ausdrücke auch auf rein analytischem Wege nachzuweisen. Hiezu gehen wir von den Gleichungen 1) oder besser von der Gleichung

$$df = D^{(r-2)}(f)\,dx$$

aus, welche zufolge derselben für eine beliebige Funktion von u, v, also für eine beliebige Lösung von 1), § 4, besteht.

Nach 3*), § 3, hat man

$$(U_k^{(r-2)} D^{(r-2)})f = -\frac{d\xi_k}{dx}\cdot\frac{df}{dx} - \eta_k^{(r-1)}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}^{(r-2)}}$$

oder

$$U_k^{(r-2)}\left(\frac{df}{dx}\right) = -D^{(r-2)}\left(\Xi_k\frac{\partial f}{\partial X} + \mathrm{H}_k\frac{\partial f}{\partial Y}\right) - \frac{d\xi_k}{dx}\cdot\frac{df}{dx} - \eta_k^{(r-1)}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}^{(r-2)}}$$

$$= -\left(\Xi_k\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{df}{dx}\right) + \mathrm{H}_k\frac{\partial}{dY}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) - - \frac{d\xi_k}{dx}\frac{df}{dx} - \eta_k^{(r-1)}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}^{(r-2)}}$$

Nun sind für X, Y ihre Ausdrücke durch u, v zu substituieren. Bezeichnen wir das Resultat einer Operation auf das umgestaltete $\frac{df}{dx}$ durch Einschließung in eckige Klammern, so wird

$$\left[U_k^{(r-1)}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] = -\left(\Xi_k\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{df}{dx}\right) + \mathrm{H}_k\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) - - \frac{d\xi_k}{dx}\cdot\frac{df}{dx} - \eta_k^{(r-1)}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}^{(r-2)}} + \eta_k^{(r-1)}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}^{(r-1)}}\left(\frac{df}{dx}\right) + + \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{df}{dx}\right)\cdot U_k^{(r-2)}(X) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial f}{dx}\right) U_k^{(r-2)}(Y).$$

Es ist aber offenbar

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}^{(r-1)}}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}^{(r-2)}}$$

und es bestehen die Gleichungen 4), § 4. Somit bleibt

$$U_k^{(r-1)}\left(\frac{df}{dx}\right) = -\frac{d\xi_k}{dx}\cdot\frac{df}{dx},$$

wo die eckigen Klammern nun ohne Befürchtung einer Verwechslung wieder weggelassen werden durften.

Es ist weiter

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{d\sigma} = \frac{1}{K} \cdot \frac{df}{dx}$$

und nach § 3, Gleichung 1)

$$U_k^{(r-1)}(K) = U_k^{(r-2)}(K) = -\frac{d\xi_k}{dx} K.$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$U_k^{(r-1)}\left(\frac{df}{d\sigma}\right) = 0;$$

$\frac{df}{d\sigma}$ ist also eine reine Funktion der einzigen Lösung J dieses vollständigen Systems.

§ 6. Berechnung der Fundamentalgrößen.[1]

Das kürzeste Verfahren, das im allgemeinen zur Berechnung der Invariante, des Bogenelementes und der kovarianten Koordinaten eingeschlagen werden kann, erhält man wohl dadurch, daß man das Integral des Bogenelementes von vornherein zur unabhängigen Veränderlichen macht. Die Vereinfachung, die man so herbeiführt, zeigt sich schon in der ausgiebigen Abkürzung des Erweiterungsverfahrens.

Um zunächst zur Invariante zu gelangen, erweitere man bis einschließlich zu den Ableitungen $\bar{r}^{\text{ter}}$ Ordnung, wo

$$\bar{r} = \frac{r-1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{r}{2},$$

[1] Bezüglich des hier (freilich nicht ganz vollständig hinsichtlich der denkbaren Unterfälle) auseinandergesetzten Verfahrens zur Ermittlung der Differentialinvarianten vergl. Lie-Scheffers, Vorl. über kont. Gr., p. 680 ff. Es war im Hinblick auf die Ausführungen zum Schlusse dieses Paragraphen über Gewinnung der kovarianten Koordinaten notwendig, das Verfahren ausführlich zu besprechen. Übrigens ist selbstverständlich, daß für besondere Gruppen noch weitere Vereinfachungen des Verfahrens möglich sind, z. B. für die projektive Gruppe durch Einführung homogener Koordinaten (vergl. Study, a. a. O.).

je nachdem r ungerade oder gerade ist. Man erhält im ersten Fall eine, im zweiten zwei Invarianten. Führt man im Falle des ungeraden r die Erweiterung um einen Schritt weiter, so ergeben sich zwei weitere Invarianten, von denen eine die Ableitung der erstgefundenen nach dem Bogenelement sein muß, während die andere neu ist. Die Invarianten höherer Ordnung, welche sich durch wiederholte Fortführung der Erweiterung ergeben, sind dann offenbar sämtlich durch die Differentialquotienten der beiden bislang unabhängigen Invarianten ausdrückbar. Für den Fall einer geraden r gibt offenbar schon die erste Weiterführung der Erweiterung nur die Differentialquotienten der erstgefundenen Invarianten.

Zwischen diesen beiden in jedem Falle sich ergebenden Invarianten muß nun, da ja unter Voraussetzung der Verwendung des Differentialparameters nur eine unabhängige Invariante existiert, eine Relation in dem Sinne stattfinden, daß eine derselben, etwa J_1, durch die andere J und deren Ableitungen $J', J'', \ldots$ ausgedrückt werden kann, noch exakter: eine Relation von der Form

$$\Omega(J, J', \ldots; J_1) = \text{konst.},$$

in welcher Form die Möglichkeit eingeschlossen ist, daß J_1 in der Gleichung fehlt. Über die Gestalt von Ω läßt sich folgendes ermitteln. Man denke sich in den Ausdrücken von J, J_1 statt σ eine beliebige neue Veränderliche ψ eingeführt. Ω wird dann außer den Differentialquotienten der Koordinaten nach ψ noch diejenigen von ψ nach σ oder umgekehrt enthalten. Da nun $\frac{d\sigma}{d\psi}$ selbst durch die Differentialquotienten der Koordinaten ausdrückbar sein muß, so existiert sicher eine niedrigste Relation von der Form $\Omega =$ konst., in welcher bei Einführung der neuen Variablen ψ nur der erste Differentialquotient von σ nach ψ auftritt. Diese Relation liefert also die Bestimmung des bis dahin antizipierten Bogenelementes.

Zur Aufstellung der Relation dient in bekannter Weise die unendliche Gruppe

$$\psi_1 = F(\psi),$$

wo F jede Funktion bedeuten darf. Ist M eine von dieser Gruppe unbeeinflußte Veränderliche und $\alpha(\psi)\delta t$ das Inkrement von ψ bei einer infinitesimalen Transformation der Gruppe, so hat man

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dM}{d\psi}\right) = -\alpha' M,$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{d^2 M}{d\psi^2}\right) = -2\alpha' M' - \alpha'' M,$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{d^3 M}{d\psi^3}\right) = -3\alpha' M'' - 3\alpha'' M' - \alpha''' M$$

etc.

Rechts sind hier die Differentialquotienten durch Akzente angedeutet. Hiernach wird man die Variation der J, J_1 etc. berechnen und somit die Variation von Ω aufstellen. Aus der Forderung nun, daß diese nur α', nicht aber α'', α''',... enthalten soll, entspringt ein vollständiges System partieller linearer Differentialgleichungen für Ω nach $J, J', \ldots, J_1$. Durch Auflösung derselben ergibt sich Ω und damit $d\sigma$.

Für die Bestimmung von u, v sind die $(\bar{r}-1)$-fachen Erweiterungen der infinitesimalen Transformationen zu benutzen. Es ist aber zu bemerken, daß die Koordinaten, die sich so ergeben, nicht notwendig die niedrigsten sein werden. Es handelt sich also darum, ein Mittel zu kennen, um die erhaltenen u, v erforderlichenfalls zu reduzieren. Man ermittle zu diesem Zwecke zunächst für dieselben die Identitätsbedingungen. Aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen und dem am Schluß von § 4 gefundenen Satz über allgemeine kovariante Koordinaten ergibt sich die Form dieser Bedingungen:

$$\frac{du}{d\sigma} = \Phi(u, v, J, J', \ldots),$$

$$\frac{dv}{d\sigma} = \Psi(u, v, J, J', \ldots).$$

Nun bilde man zwei Funktionen

$$u_1 = \varphi(u, v, J, J', \ldots),$$
$$v_1 = \psi(u, v, J, J', \ldots)$$

und drücke $\frac{du_1}{d\sigma}$, $\frac{dv_1}{d\sigma}$ durch $u_1, v_1, J, J', \ldots$ aus. Dann muß es möglich sein, die Funktionen φ, ψ so zu bestimmen, daß in den schließlichen Formeln für $\frac{du_1}{d\sigma}$, $\frac{dv_1}{d\sigma}$ die Ableitungen J', $J'', \ldots$ in Wegfall kommen. Die Bedingungen hiefür stellen sich in der Form partieller Differentialgleichungen dar; eine eingehendere Besprechung derselben ist indes für unsere Zwecke nicht erforderlich.

Schließlich möge bemerkt sein, daß die letzten Auseinandersetzungen über die Gewinnung kovarianter Koordinaten allgemeiner gehalten sind als das tatsächliche Bedürfnis es verlangt. Wenn wir nämlich an der Voraussetzung festhalten, daß die Gruppe in den Elementen $(r-2)$ter Ordnung transitiv sei, so treten in den Formeln für $\frac{du}{d\sigma}$, $\frac{dv}{d\sigma}$, wie leicht zu sehen ist, keine höheren Ableitungen auf als die erste, J'. Es handelt sich also dann nur um die Wegschaffung dieser einen Größe.

§ 7. Anwendung auf die allgemeine projektive Gruppe der Ebene.

Ohne auf die Einzelheiten der Herleitung einzugehen, sollen hier die hauptsächlichsten, auf die allgemeine projektive Gruppe der Ebene bezüglichen Formeln zusammengestellt werden. Dieselben ergeben sich leicht nach dem im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Verfahren.

Ableitungen nach dem Bogenelemente sind im folgenden durch Akzente bezeichnet. Ferner ist zur Abkürzung

$$x^{(i)}y^{(k)} - x^{(k)}y^{(i)} = A_{ik},$$
$$(X-x)y^{(i)} - (Y-y)x^{(i)} = P_i$$

gesetzt. Man findet als niedrigste Invarianten

$$J = 2\frac{A_{23}}{A_{12}} + \frac{A_{14}}{A_{12}} - \frac{4}{3}\frac{A_{13}^2}{A_{12}^2},$$

$$J_1 = 3\frac{A_{24}}{A_{12}} - 8\frac{A_{13}A_{23}}{A_{12}^2} - 2\frac{A_{13}A_{14}}{A_{12}^2} + \frac{8}{3}\frac{A_{13}^3}{A_{12}^3}.$$

Zwischen denselben findet eine Relation statt, welche man unter geeigneter Verfügung über einen numerischen Faktor in der Form

$$6J_1+9J'=1$$

erhält. Aus dieser Relation ergibt sich sogleich die dritte Potenz des Bogenelementes $d\sigma$ ausgedrückt durch die Differentiale der Koordinaten. Macht man etwa vorübergehend x zur unabhängigen Veränderlichen, so wird

$$d\sigma=\frac{\sqrt[3]{9y^{\text{II}\,2}y^{\text{V}}-45y^{\text{II}}y^{\text{III}}y^{\text{IV}}+40y^{\text{III}\,3}}}{y^{\text{II}}},$$ [1]

wobei durch römische Ziffern Ableitungen nach x angedeutet sind.

Es gehen ferner aus der Integration des betreffenden vollständigen Systems kovariante Koordinaten u, v hervor, welche durch die Proportion

$$u:v:1=\left\{P_2-\frac{2}{3}\frac{A_{13}}{A_{12}}P_1\right\}:\left\{3A_{12}+\frac{A_{13}}{A_{12}}P_2+\right.$$
$$\left.+\left(J-\frac{1}{2}\frac{A_{14}}{A_{12}}\right)P_1\right\}:P_1$$

offenbar als trimetrische Koordinaten sich erweisen. Die Identitätsbedingungen lauten

$$\frac{du}{d\sigma}=-\frac{1}{2}J-\frac{1}{3}v-u^2,$$

$$\frac{dv}{d\sigma}=\frac{1}{18}+\frac{3}{2}Ju-uv.$$

Schreibt man die Koordinaten homogen, setzt also

$$u:v:1=u_1:u_2:u_3,$$

so wird

$$\frac{du_1}{d\sigma}=\omega.u_1+u_2,$$

---

[1] Vergl. Study, a. a. O.

$$\frac{du_2}{d\sigma} = \omega . u_2 - \frac{1}{2} J u_1 - \frac{1}{3} u_3,$$

$$\frac{du_3}{d\sigma} = \omega . u_3 + \frac{1}{18} u_1 + \frac{3}{2} J u_2,$$

wo ω ganz beliebig bleibt. Sind p_1, p_2, p_3 auf dasselbe Koordinatensystem bezogene kovariante Linienkoordinaten, so ergeben sich für diese die Identitätsbedingungen

$$\frac{dp_1}{d\sigma} = \bar{\omega} . p_1 + \frac{1}{2} J p_2 - \frac{1}{18} p_3,$$

$$\frac{dp_2}{d\sigma} = \bar{\omega} . p_2 - p_1 - \frac{3}{2} J p_3,$$

$$\frac{dp_3}{d\sigma} = \bar{\omega} . p_3 + \frac{1}{3} p_2,$$

worin $\bar{\omega}$ beliebig bleibt.

Auf die Fülle von Aufgaben, für deren Lösung hiemit die Grundlage gegeben ist, kann hier nicht näher eingegangen werden. Nur hinsichtlich der Lage des kovarianten Koordinatendreiecks möge noch folgendes bemerkt werden. Es ist klar, daß dasselbe bestimmt sein muß durch die oskulierende W-Kurve[1] zusammen mit dem Berührungspunkte selbst oder auch durch das in Ruhe bleibende Dreiseit und den Kurvenpunkt. Ecken und Seiten dieses Dreiseits ergeben sich leicht aus den Identitätsbedingungen. Offenbar kann man nun dieses Dreiseit selbst als Koordinatendreiseit verwenden und erhält so in der Tat ein System kovarianter Koordinaten; nur ist dasselbe irrational hinsichtlich J. Doch bietet es gewisse Vorzüge und so mögen die zugehörigen Identitätsbedingungen hier angeführt werden:

$$\frac{dv_1}{d\sigma} = \omega v_1 + \lambda_1 v_1,$$

[1] Bezüglich dieser Kurven vergl. etwa Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III$_3$, p. 204 ff. — Unter Oskulation ist im Texte natürlich eine 8-punktige Berührung verstanden.

$$\frac{dv_2}{d\tau} = \omega v_2 + \lambda_2 v_2,$$

$$\frac{dv_3}{d\tau} = \omega v_3 + \lambda_3 v_3,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 + J.\lambda - \frac{1}{54} = 0$$

sind. Einheitspunkt ist der Kurvenpunkt selbst.

§ 8. Schlußbemerkung.

Die in § 4 ermittelten kovarianten Koordinaten sind von zwei Elementen abhängige Differentialinvarianten. Es wäre nicht schwer, eine allgemeine und abgeschlossene Theorie solcher Invarianten eines Elementes μ^{ter} und eines ν^{ter} Ordnung, wo im allgemeinen $\mu+\nu+4 \geqq r+1$ sein muß, aufzustellen, in Analogie mit der Theorie der gewöhnlichen Differentialinvarianten. Hier möge jedoch nur die Rede sein von dem besonderen Falle $\mu = r-2$, unter welchem für $\nu = 0$ die kovarianten Punktkoordinaten enthalten sind. Ist $\nu \geqq 0$, so erhält man solcher Invarianten gerade $\nu+2$; sie sind als kovariante Koordinaten des Elementes ν^{ter} Ordnung zu betrachten. Bestimmt man die Änderungen dieser Koordinaten unter der Voraussetzung, daß das Element von der infinitesimalen Transformation unbeeinflußt bleibt, so ergeben sich wieder Identitätsbedingungen. Sind $u_1, u_2, \ldots u_{\nu+2}$ die Koordinaten, so ist folgendes die Form des Systems der Identitätsbedingungen:

$$\frac{du_1}{d\tau} = \Phi_1(u_1, u_2, \ldots u_{\nu+2}, J),$$

$$\frac{du_2}{d\tau} = \Phi_2(u_1, u_2, \ldots u_{\nu+2}, J),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{du_{\nu+2}}{d\tau} = \Phi_{\nu+2}(u_1, u_2, \ldots u_{\nu+2}, J).$$

Solche kovariante Elementkoordinaten können insbesondere so angenommen werden, daß u_k von der Ordnung $(k-2)$ ist. Ist das System der Koordinaten für die Ordnung ν bekannt, so ist für die nächst höhere Ordnung nur eine neue Größe hinzuzufügen und diese ergibt sich offenbar durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

Überlegungen, wie sie in vorliegender Untersuchung durchgeführt sind, gehören selbstverständlich auch zu räumlichen Gruppen, allgemein zu jeder endlichen Gruppe von Punkttransformationen eines Raumes von beliebiger Dimensionszahl. Es stellt sich also die natürliche Geometrie in ihrem ganzen Umfang als Einzelfall einer Analyse von hoher Allgemeinheit dar.

Aber nicht bloß in der Richtung der Verallgemeinerung, sondern auch hinsichtlich der Durchführung spezieller Fälle verdient der Gegenstand weiter verfolgt zu werden. Um nur Eines anzuführen: Gewisse Klassen von Aufgaben, als deren adäquate Lösungsmethode die gewöhnliche (metrische) natürliche Geometrie angesehen zu werden pflegt, gehören im Grunde genommen zu einer natürlichen »Ähnlichkeitsgeometrie« und werden von dieser mit einfacheren Mitteln erledigt, wie ich bei anderer Gelegenheit zu zeigen mir vorbehalte.

Über langsame Ionen in atmosphärischer Luft

von

Hermann Knoll.

Aus dem Institute für theoretische Physik an der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Februar 1906.)

Es wurden Zerstreuungsmessungen zwischen konzentrischen Kugeln in einem Zimmer und einem Kellerraume vorgenommen. Die Versuchsanordnung war folgende: Auf einem Tischchen wurde ein Elster-Geitel'sches Elektroskop aufgestellt. Seine Umhüllung war in leitender Verbindung mit den Röhren einer Wasserleitung. Die Isolation des Elektroskopes wurde, wenn, wie später zu beschreiben sein wird, im Keller gearbeitet wurde, durch Natriumtrocknung vorzüglich erhalten. Vor jedem Versuche wurde die Stellung des Elektroskopes mittels Wasserwage korrigiert. Abgeändert wurde die Ablesevorrichtung, indem die Glaswände des Elektroskopes beide durch vollkommen durchsichtige Glasscheiben ersetzt wurden. Die hintere Glasscheibe wurde mit einem transparenten Papier überklebt, auf dem eine runde Skala zum Ablesen der Divergenz der Elektroskopblättchen gezeichnet war. Abgelesen wurde mittels eines Fernrohres in einer Entfernung von beiläufig $2^1/_2\,m$ vom Elektroskop. Zur Beleuchtung der Skala diente eine Glühlampe, die $1^1/_2\,m$ hinter dem Elektroskop aufgehängt war.

Auf den Hals des Elektroskopes wurde dann die untere Hälfte einer horizontal entzweigeschnittenen Kugelschale aus Messing aufgesteckt. Ihr oberer Rand war zu einem Wulst erweitert, in den der Rand der oberen Schalenhälfte gut hinein-

paßte. Bevor letztere aufgesetzt wurde, wurde auf einem entsprechend langen Stiel konzentrisch zur beschriebenen Kugel eine kleinere als Zerstreuungskörper aufgesetzt. An ihrer höchsten Stelle hatte die umschließende Kugel ein Loch, durch das hindurch mittels eines an das positive Ende einer Zambonisäule angebrachten Drahtes geladen werden konnte. Nach dem Laden wurde jedesmal das Loch mit einem stanniolbezogenen

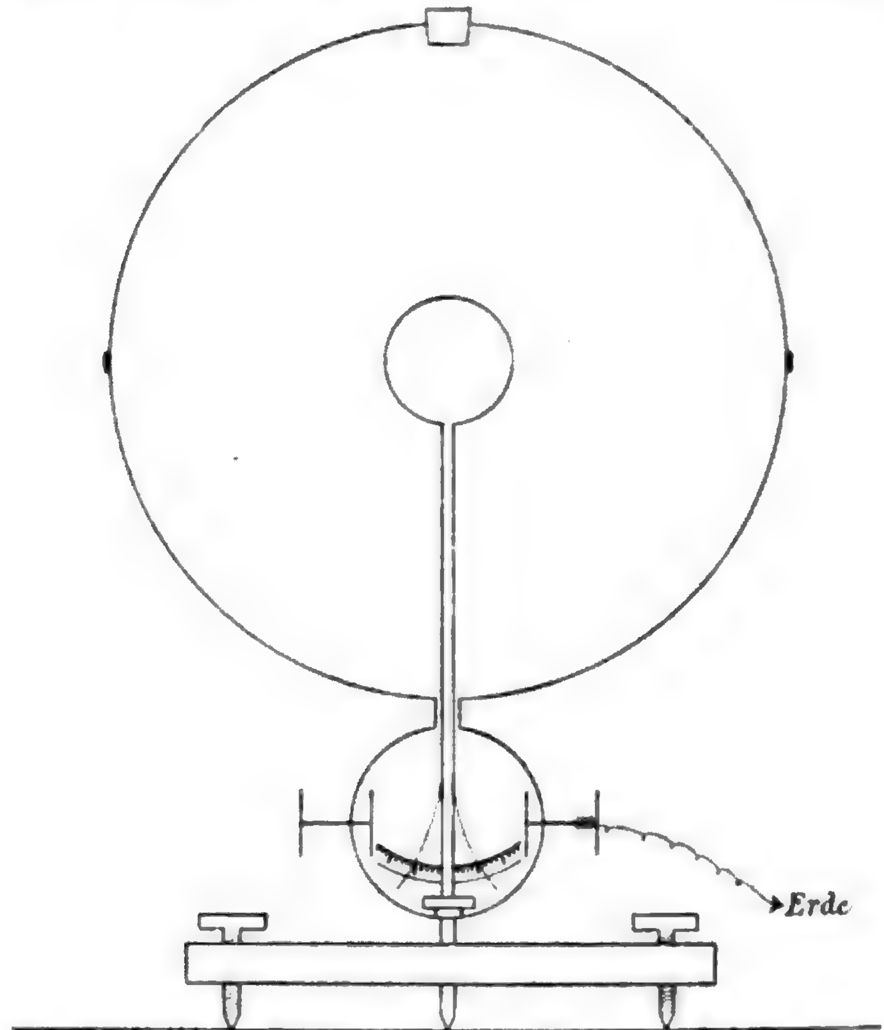


Fig. 1.

Korkpfropfen zugestopft. Solche Beobachtungen, wo vergessen war, das Loch zu schließen, wurden ausgeschieden, da bei ihnen nicht der Raum zwischen beiden Kugeln allein in Betracht kommt, sondern aus dem umgebenden Raum Ionen durch das Loch diffundierten, wodurch sich eine Vergrößerung der Entladungsgeschwindigkeit von einigen Prozenten einstellte.

Bezeichnen wir den Radius der inneren Kugel mit r_i, den der äußeren mit r_a, so standen folgende Kugelgrößen zur Verfügung:

$$r_i = 2\cdot5, \quad 5, \; 7\cdot5, \; 10\,cm$$
$$r_a = 3\cdot75, \; 5, \; 7\cdot5, \; 10, \; 15\,cm$$

Ich hatte also 11 Kombinationsmöglichkeiten. Doch soll nur die Kombination $r_i = 2\cdot5$, $r_a = 15\,cm$ hier angeführt werden. Für sie beträgt die mit dem Harms'schen Kondensator (Phys. Zeitsch., V, 1904, p. 47) bestimmte Kapazität $10\cdot4\,cm$ (das ist also die Kapazität der auf das Elektroskop aufgesteckten Kugel mit dem Radius $2\cdot5\,cm$, wenn sie von der Kugel mit dem Radius $15\,cm$ umgeben ist). Das Volumen des dadurch bestimmten kugelschalenförmigen Raumes beträgt mitsamt dem Volumen des angeschalteten Elektroskopes $14\cdot262\,cm^3$.

Es wurden nun teils mit den verschiedenen Kugelzusammenstellungen, teils mit den ohne umhüllende Kugel auf das Elektroskop aufgesteckten Kugeln Zerstreuungsmessungen angestellt, 353 im ganzen, und zwar teilweise in einem Zimmer des Institutes für theoretische Physik, dessen Länge × Breite × Höhe gleich $6\times5^1/_2\times4\,m^3$ beträgt, teilweise in einem Keller im Universitätsgebäude unter dem mathematischen Seminar, entfernt von allen Starkstrom- und Heizanlagen. Nur ein Zweigstrom wurde zum Betriebe von drei Glühlampen in den Keller geleitet. Der Boden des Kellers ist weder mit Steinen noch Ziegeln bedeckt, sondern das Erdreich steht nackt zu Tage. Der Keller ist etwas niedriger als das Zimmer und gewölbt, an Länge und Breite dem erwähnten Zimmer mindestens gleich groß. Es verdient wegen eventuellen Einflusses von Wirkungen induzierter Aktivitäten noch bemerkt zu werden, daß jedesmal, wenn im Keller gearbeitet wurde, bei Unterbrechung der Versuche, also sowohl über Mittag als über Nacht, das Elektroskop wieder zurück ins Institut getragen wurde, um dann bei Wiederaufnahme der Versuche neu montiert zu werden. Nur dadurch konnte die Isolation tadellos erhalten bleiben. Die Kugeln blieben im Keller.

Von all den zahlreichen Versuchen sind für uns folgende wichtig:

Im Keller.

1. $r_i = 2 \cdot 5$, $r_a = 15\,cm$. Innenkugel positiv geladen.
Datum 5./IV. 1905. Versuchsanfang $9^h\,17^m\,28^s$.

Zeit	17^{28}	17^{42}	17^{55}	18^{46}	19^{03}	19^{45}	21^{00}	21^{24}
Spannung ..	170·6	168·9	167·8	164·8	163·8	161·2	156·5	155·–
Zeit	22^{15}	23^{18}	24^{35}	25^{40}	26^{58}	28^{10}	29^{10}	
Spannung ..	151·–	147·6	142·5	139·1	133·9	130·1	125·8	
Zeit	30^{39}	32^{55}						
Spannung ..	121·2	113·1						

2. $r_i = 2 \cdot 5\,cm$, $r_a = 15\,cm$. Innenkugel negativ geladen.
Datum 12./IV. 1905. Versuchsanfang $10^h\,55^m$.

Zeit	5^{12}	6^{14}	7^{23}	10^{28}	20^{18}	23^{08}	23^{37}	31^{05}
Spannung ..	179·3	177·6	175·8	170·6	153·5	148·9	148	134·1
Zeit	33^{00}	33^{57}	35^{36}	37^{35}	44^{08}	50^{51}	57^{10}	63^{15}
Spannung ..	132·9	131·6	128·2	125·8	115·6	104·9	93·1	83·3

Im Zimmer.

3. $r_i = 2 \cdot 5\,cm$, $r_a = 15\,cm$. Innenkugel positiv geladen.
Datum 27./VI. 1905. Versuchsbeginn $10^h\,17^m$.

Zeit	17^{15}	18^{06}	18^{54}	19^{44}	22^{56}	24^{30}	26^{24}	30^{00}
Spannung ..	209·2	208·8	208·3	207·5	206·–	205·3	204·7	203·7
Zeit	31^{54}	33^{42}	34^{24}	35^{12}	35^{54}	36^{55}	37^{30}	39^{45}
Spannung ..	202·6	201·8	201·3	200·3	200·–	199·4	199·1	198·3
Zeit	91^{00}	91^{55}	93^{45}	94^{30}	95^{30}	96^{36}	97^{18}	101^{00}
Spannung ..	175·–	174·–	173·–	172·7	172·1	171·4	171·1	169·7
Zeit	101^{45}	104^{06}	108^{15}	111^{20}	114^{24}	151^{24}	153^{15}	
Spannung ..	169·1	168·7	167·2	165·9	164·9	148·7	147·8	
Zeit	153^{56}	155^{00}	155^{45}	156^{48}				
Spannung ..	147·8	147·5	146·9	146·2				

4. $r_i = 2 \cdot 5\,cm$, $r_a = 15\,cm$. Innenkugel positiv geladen. (Versuchsreihe von drei hintereinander mit verschiedenen Anfangsspannungen ausgeführten Versuchen.)
Datum 5./VII. 1905. Versuchsbeginn $2^h\,16^m$ p. m.

a) Zeit	16^{38}	19^{30}	24^{30}	29^{30}	34^{25}	37^{15}	39^{15}	45^{15}	48^{18}
Spannung .	208·9	208·–	206·8	205·6	204·4	203·8	203·2	202·2	201·2

b) Zeit	$2^h\,54^{45}$	56^{20}	59^{30}	$4^h\,54^{45}$					
Spannung	148·–	147·4	146·7	122·3					
c) Zeit	$6^h\,0^{00}$	4^{00}	23^{30}	29^{45}	33^{00}	41^{15}	45^{15}	47^{00}	49^{50}
Spannung	158·–	157·4	154·1	152·8	151·–	150·2	149·3	149·–	147·7

Im Keller.

5. $r_i = 2 \cdot 5\, cm$, $r_a = 15\, cm$. Innenkugel positiv geladen. Datum 7./VII. 1905. Versuchsbeginn $10^h\, 38^m$.

Zeit	48^{12}	49^{00}	49^{36}	50^{38}	60^{15}	62^{45}	64^{30}	68^{00}	69^{00}
Spannung	215·9	215·4	215·–	214·8	200·5	199·7	199·2	198·3	197·8

Daraus folgt, daß bloß beim Versuche 4, sonst aber bei keinem Versuche bei einer Spannung von 200 Volt Sättigungsstrom vorhanden war.

Diesen Versuchen füge ich noch Versuche an, die zeigen, daß auch schon bei kleineren Volumina Abweichungen vom Sättigungsstrom bei Spannungen von zirka 100 bis 150 Volt eintraten.

Im Keller.

6. $r_i = 2 \cdot 5\, cm$, $r_a = 20\, cm$. Innenkugel positiv geladen. Datum 30./III. 1905. Versuchsbeginn 9^h a. m.

a) Zeit	0^{00}	2^{45}	5^{10}	6^{50}	9^{00}	12^{30}	15^{10}
Spannung	180·3	176·1	173·7	171·9	169·5	165·7	163·2
b) Zeit	16^{10}	19^{00}	20^{05}	22^{30}	24^{40}		
Spannung	157·4	154·4	152·9	150·1	148·7		
c) Zeit	26^{00}	31^{15}	34^{20}	38^{30}	40^{15}		
Spannung	115·4	110·9	107·5	104·1	101·1		

7. $r_i = 7 \cdot 5\, cm$, $r_a = 15\, cm$. Innenkugel positiv geladen. Datum 5./IV. 1905. Versuchsbeginn $10^h\, 12^m$.

a) Zeit	12^{08}	13^{18}	13^{36}	15^{08}	16^{50}	18^{33}	21^{25}	21^{43}	22^{28}
Spannung .	178·–	175·2	174·4	170·6	167·2	163·4	157·–	156·3	154·8
Zeit	23^{43}	24^{30}	26^{00}	26^{38}	28^{06}				
Spannung .	152·5	151·–	147·6	146·7	143·8				
b) Zeit	29^{33}	30^{37}	32^{18}	33^{00}	34^{38}	37^{00}			
Spannung .	126·7	124·8	121·6	120·7	117·3	112·6			

8. $r_i = 10\,cm$, $r_a = 15\,cm$. Innenkugel positiv geladen.
Datum 5./IV. 1905. Versuchsbeginn $10^h\,40^m$ a. m.

a)	Zeit.....	40^{55}	43^{40}	45^{10}	48^{43}	52^{22}	56^{37}	$11^h\,0^{15}$	1^{20}
	Spannung	182·8	179·6	178·–	174·6	170·6	166·3	162·9	161·5
	Zeit.....	3^{35}	5^{20}	6^{03}					
	Spannung	159·1	157·4	156·5					
b)	Zeit	7^{40}	9^{35}	11^{20}	13^{03}	14^{45}	16^{10}	18^{28}	20^{53}
	Spannung	137·2	135·5	133·7	132·5	130·8	129·7	127·1	125·2
c)	Zeit	24^{50}	27^{30}	29^{45}	6^{10}				
	Spannung	122·4	120·1	117·7	112·6				

Zeichnet man nach diesen Angaben Kurven, bei denen die Abszisse jedes Kurvenpunktes die Zeit t (in Minuten) und die Ordinate die zugehörige Spannung V der Elektrizität auf der Innenkugel angibt, so kann man dann aus diesen Kurven solche Kurven ableiten, bei denen die Abszisse jedes Kurvenpunktes die Spannung und die Ordinate den zugehörigen Spannungsabfall pro Minute bedeutet.

Wir erhalten dann auf diese Weise für die Versuche 1 bis 4 folgende Figur, wenn wir die letztgenannten $\left(V, \frac{dV}{dt}\right)$-Kurven auf ein Blatt vereinigen:

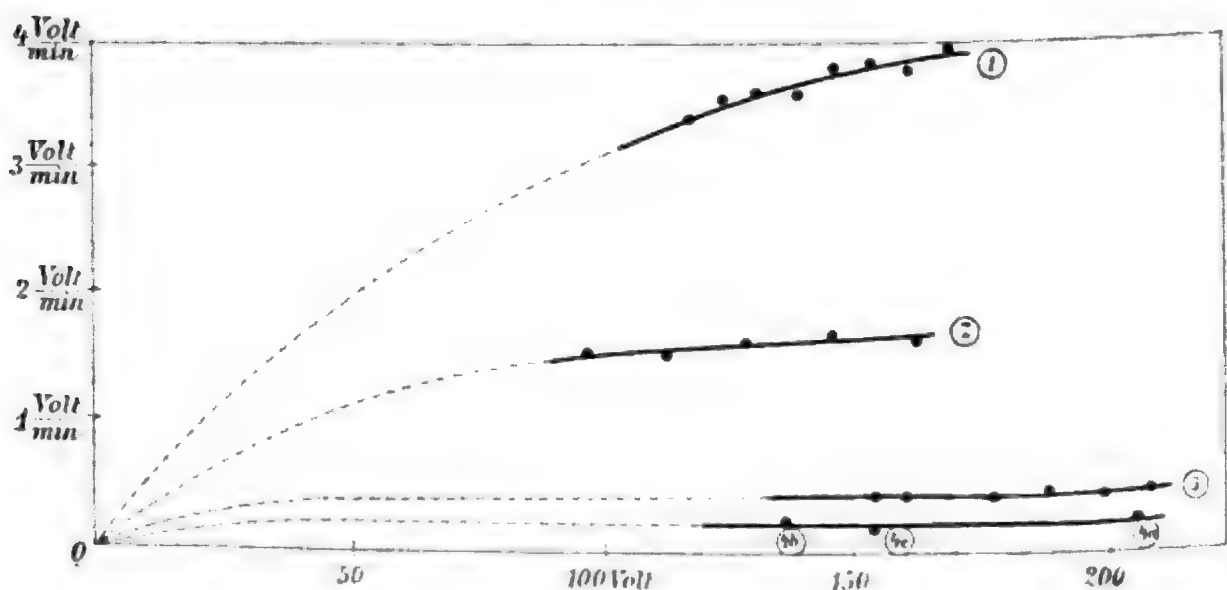


Fig. 2.

Diese Figur dient uns zum Ausgangspunkt für die Berechnungen.

E. Riecke[1] stellt den Zusammenhang zwischen teilweise gesättigtem Strom, Sättigungsstrom, Ionisierungsstärke und Potential der Innenkugel für einen von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Luftraum folgendermaßen her.

$$C = C_0 - 4\pi\varepsilon\alpha \int_{r_i}^{r_a} r^2 \overset{+}{N}_0 \overset{-}{N}_0 \, dr.$$

Dabei bedeutet:

C den teilweise gesättigten Strom;

C_0 den Sättigungsstrom;

ε das elektrische Elementarquantum;

α den Koeffizienten der Wiedervereinigung;

$\overset{+}{N}_0$, $\overset{-}{N}_0$ die in der Volumeinheit in der Entfernung r vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Kugeln vorhandene Anzahl der positiven, respektive negativen Ionen, und zwar wie sie für den Sättigungsstrom galten. $\overset{+}{N}_0$ und $\overset{-}{N}_0$ selbst sind gegeben durch

$$\overset{+}{N}_0 = \frac{q}{3vU}\,\frac{r}{F_0}\left(1 - \frac{r_i^3}{r^3}\right), \quad \overset{-}{N}_0 = \frac{q}{3vV}\,\frac{r}{F_0}\left(\frac{r_a^3}{r^3} - 1\right).$$

Dabei ist wieder:

q die Anzahl der in der Volum- und Zeiteinheit neu gebildeten Ionen;

v die Lichtgeschwindigkeit;

U, V die Beweglichkeit der positiven, respektive negativen Ionen (d. h. die Geschwindigkeit der Ionen, die sie erhalten, wenn auf sie die nach elektromagnetischem Maße gemessene Feldkraft 1 wirkt);

F_0 ist die durch die Ladung der Innenkugel bedingte Feldkraft (gemessen in elektrostatischem Maße), und zwar wie sie für den Sättigungsstrom gilt. Nach Analogie zur Abhandlung Riecke's über den Strom zwischen planparallelen Platten im selben Bande der Annalen, p. 820, wird F_0 überhaupt konstant angenommen und gleich der Potentialdifferenz dividiert durch den Elektrodenabstand $r_a - r_i$ gesetzt.

[1] Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 12 (1903), p. 52 und 814.

Setzt man also für $\overset{+}{N}_0$ und $\overset{-}{N}_0$ die angegebenen Werte ins Integral ein, F_0^2 aber als Konstante vor das Integralzeichen, so entsteht die Formel:

$$C = C_0 - \frac{2\pi\varepsilon\alpha}{15\nu^2 UVF_0^2} q^2 [r_a^5 - r_i^5 - 5r_a^2 r_i^2 (r_a - r_i)];$$

wir schreiben

$$C = C_0 - Bq^2 \frac{1}{F_0^2}.$$

Verwendet man nun die Werte

$\varepsilon = 3{\cdot}4 \,.\, 10^{-10}$ elektrost. Einh., $\alpha = 1{\cdot}4 \,.\, 10^{-6}$
$U = 1{\cdot}76 \,.\, 10^{-8}$, $V = 1{\cdot}24 \,.\, 10^{-8}$,

so erhält man für B den Wert

$$B = \frac{2 \,.\, 10^{-10} \,.\, 10^{-6} \,.\, 10^{7}}{3 \,.\, 10^{20} \,.\, 10^{-16} \,.\, 10^{2}} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-15},$$

also die Gleichung:

$$C = C_0 - \frac{2}{3} \cdot 10^{-15} \cdot \frac{q^2}{F_0^2} = C_0 - S.$$

Dabei ist natürlich $C_0 = \varepsilon q \frac{4\pi(r_a^3 - r_i^3)}{3}$, also entsteht im Falle unserer Kugelzusammenstellung für $r_a - r_i = 15 - 2{\cdot}5 = = 12{\cdot}5\, cm$:

Für $F = \frac{250 \text{ Volt}}{300 \,.\, 12{\cdot}5\, cm}$ und $q = 10$ Ionen $.\, cm^{-3}$ sec^{-1}:

$$C_0 = 5 \,.\, 10^{-5} \qquad S = \frac{3}{2} \cdot 10^{-11}.$$

$q = 100$:

$$C_0 = 5 \,.\, 10^{-4} \qquad S = \frac{3}{2} \cdot 10^{-9}.$$

$q = 1000$:

$$C_0 = 5 \,.\, 10^{-3} \qquad S = \frac{3}{2} \cdot 10^{-7}.$$

Für $F = \frac{125 \text{ Volt}}{300.12 \cdot 5\,cm}$ und $q = 10$:

$$C_0 = 5.10^{-5} \qquad S = 6.10^{-11}.$$

$q = 100$:

$$C_0 = 5.10^{-4} \qquad S = 6.10^{-9}.$$

$q = 1000$:

$$C_0 = 5.10^{-3} \qquad S = 6.10^{-7}.$$

Für $F = \frac{12 \cdot 5 \text{ Volt}}{300.12 \cdot 5\,cm}$ und $q = 10$:

$$C_0 = 5.10^{-5} \qquad S = 6.10^{-9}.$$

$q = 100$:

$$C_0 = 5.10^{-4} \qquad S = 6.10^{-7}.$$

$q = 1000$:

$$C_0 = 5.10^{-3} \qquad S = 6.10^{-5}.$$

Wir sehen also, daß erst bei den letzten Annahmen die Größe S den 100. Teil der Größe C_0 auszumachen beginnt, daß also erst für die letzten Annahmen C sich von C_0 merklich zu unterscheiden beginnt. In allen übrigen Fällen, bei größeren Spannungen als 10 Volt und kleineren Ionisierungsstärken als 1000 Ionen pro Sekunde und Kubikzentimeter, müßte, wenn U und V wirklich die angenommenen Werte besitzen, immer Sättigungsstrom herrschen.

Die Versuche zeigen aber, daß tatsächlich bei kleineren Ionisierungsstärken, etwa 500 pro Sekunde und Kubikzentimeter und sogar höheren Spannungen, etwa 150 bis 180 Volt, schon Abweichungen vom Sättigungsstrom sich zeigen. Ließe man auch zu, daß α für Kellerluft einen andern, etwa zehnmal so kleinen oder zehnmal größeren Wert hat, so würde doch noch immer S klein bleiben gegenüber C_0.

Läßt man aber die Möglichkeit zu, daß langsamere Ionen in der Luft vorhanden sind neben den bekannten mit der Geschwindigkeit $U = 1 \cdot 74.10^{-8}\,cm/\text{sec}$ und $V = 1 \cdot 26.10^{-8}\,cm/\text{sec}$, so könnten dadurch die beobachteten Abweichungen vom Sättigungsstrom wohl erklärt werden.

Zu welcher Größenordnung nun berechnet sich das Produkt UV aus unseren Versuchen? Wir verwenden Versuch 1.

Wie die Fig. 2 zeigt, kommt bei Versuch 1

einer Spannung von 170 Volt ein Spannungsabfall von 3·32 Volt/min,

einer Spannung von 175 Volt ein Spannungsabfall von 4 Volt/min

zu, so daß wir die Gleichungen erhalten:

$$C_{175} = \frac{4.10 \cdot 4}{60.300} = 2 \cdot 31.10^{-3} =$$
$$= \frac{2\pi\varepsilon\alpha q^2}{15\, v^2 U_x V_x F_{175}^2} [r_a^5 - r_i^5 - 5 r_a^2 r_i^2 (r_a - r_i)]$$

$$C_{110} = \frac{3 \cdot 32 . 10 \cdot 4}{60.300} = 1 \cdot 92 . 10^{-3} =$$
$$= \frac{2\pi\varepsilon\alpha q^2}{15\, v^2 U_x V_x F_{110}^2} [r_a^5 - r_i^5 - 5 r_a^2 r_i^2 (r_a - r_i)]$$

$$(2 \cdot 31 - 1 \cdot 92) 10^{-3} =$$
$$= \frac{2\pi\varepsilon\alpha q^2}{15\, v^2 U_x V_x} [r_a^5 - r_i^5 - 5 r_a^2 r_i^2 (r_a - r_i)] \left(\frac{1}{F_{110}^2} - \frac{1}{F_{175}^2}\right).$$

q berechnen wir aus dem Sättigungsstrom, den wir durch Extrapolieren zu 4·6 Volt/min annehmen können; dann ist

$$\frac{4 \cdot 6 . 10 \cdot 4}{60.300} = \varepsilon q \Omega = 3 \cdot 4 . 10^{-10} . 1 \cdot 4 . 10^4 . q.$$

Ω ist das Volumen des Zwischenraumes zwischen beiden Kugeln und gleich 14.000 cm^3. Also resultiert für q der Wert $q = 5 \cdot 5 . 10^8$, also wird aus unserer Gleichung

$$0 \cdot 39 . 10^{-3} = \frac{550^2 . 2 . 10^{-9}}{135 . 10^{20} . U_x V_x} \left(\frac{300^2 . 12 \cdot 5^2}{110^2} - \frac{300^2 . 12 \cdot 5^2}{175^2}\right).$$

Daraus resultiert für $U_x V_x$ der Wert

$$U_x V_x = 8 . 10^{-20}.$$

Nach der Annahme, daß $U = 1 \cdot 74 . 10^{-8}$, $V = 1 \cdot 26 . 10^{-8}$, ergibt sich für UV der Wert $2 \cdot 2 . 10^{-16}$, also eine ganz andere Größenordnung.

Ziehen wir nun noch den Versuch 3 z. B. in Betracht und setzen wir den Sättigungsstrom mit 0·56 Volt/min an, so ist dieser durch eine Ionisationsstärke von 70 Ionen pro Sekunde und Kubikzentimeter bedingt. Die Figur liefert zur Spannung 210 Volt einen Spannungsabfall von beiläufig 0·49 Volt/min, bei einer Spannung von 150 Volt einen Spannungsabfall von 0·44 Volt/min; setzt man diese Werte wieder in die Formel

$$C_{210} - C_{150} = \frac{2\pi\varepsilon\alpha q^2}{15\nu^2 U_x V_x}\left(\frac{1}{F_{150}^2} - \frac{1}{F_{210}^2}\right)$$

ein, so resultiert für die Größe $U_x V_x$ wieder ein Wert von der Größenordnung 10^{-20}.

Zum Schlusse können wir noch einen von Harms[1] angegebenen Versuch heranziehen. Denkt man sich den dort angegebenen, innen mit einem geerdeten Drahtnetz ausgekleideten Glaszylinder durch eine Kugel mit gleichem Volumen ersetzt, so resultiert für sie der Radius $r_a = 16\,cm$. r_i ist $2 \cdot 25\,cm$, die Kapazität des Systems ist dann $2 \cdot 6\,cm$.

Riecke gibt die aus diesem Versuche zusammengehörigen Werte von V und $\frac{dV}{dt}$ im angegebenen Bande der Annalen auf p. 63 an. Der Wert von εq ist 201.10^{-10}, also wenn $\varepsilon = 3 \cdot 4 . 10^{-10}$, so ist

$$q = 59.$$

Den Sättigungsstrom nimmt Riecke zu 0·00034 elektrost. Einh./sec an, so daß aus unserer Gleichung

$$C = C_0 - \frac{2\pi\varepsilon\alpha q^2}{15\nu^2 U_x V_x F_0^2}(r_a^5 - r_i^5 - 5 r_a^2 r_i^2 \overline{r_a - r_i}),$$

wenn zu einer Spannung von 60 Volt der Strom $C_{60} = 0 \cdot 00033$ gehört, die Zifferngleichung wird:

$$3 \cdot 33 . 10^{-4} = 3 \cdot 4 . 10^{-4} - \frac{3 \cdot 1 . 10^7 . 10^{-16} . 36 . 10^2}{15 . 9 . 10^{20} U_x V_x . 2 \cdot 1 . 10^{-4}}$$

[1] Phys. Zeitschr., Jahrg. 4 (1902—1903), p. 13.

Daraus entsteht für $U_x V_x$ der Wert

$$U_x V_x = 6.10^{-19}.$$

Zur Spannung 38·9 Volt gehört der Strom $C_{39} = 0 \cdot 000298$ elektrost. Einh./sec; daraus und aus dem Sättigungsstrom berechnet sich dann der Wert $U_x V_x$ zur Größe

$$U_x V_x = 2.10^{-19}.$$

Wie also ersichtlich, liefert auch dieser Versuch einen Wert für das Produkt der Ionenbeweglichkeiten, dessen Größenordnung 10^{-19} näher an der aus unseren Versuchen sich ergebenden Größenordnung 10^{-20} als der für Ionen, die von Radiumstrahlen herrühren, liegt und mit 10^{-16} bestimmt ist.

Langevin[1] hat auf Ionen in der Luft aufmerksam gemacht, die eine zirka 3000mal so kleine Beweglichkeit besitzen als die mit den Beweglichkeiten $U = 1 \cdot 74.10^{-8}$, $V = 1 \cdot 26.10^{-8}$.

Sowohl die angeführte Beobachtung von Harms als die oben gegebenen Resultate lassen sich deuten unter der Annahme, daß bei diesen Versuchen sowohl die Ionen mit den Beweglichkeiten $U = 1 \cdot 74.10^{-8}$, $V = 1 \cdot 26.10^{-8}$ als auch die Langevin'schen Ionen von maßgebender Bedeutung sind.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Hofrat Boltzmann für die Anregung zu den Versuchen und sein Interesse an denselben als den Herren Dr. St. Meyer und Dr. H. Mache für viele Ratschläge, die sie mir bei der Arbeit erteilten, bestens zu danken.

---

[1] Comptes rendus vom 23. Jänner 1905.

Zur Theorie der Thermoelektrizität

von

Ernst Lecher,

k. M. k. Akad.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 11 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1906.)

In der Sitzung vom 7. Dezember 1905[1] legte ich einen Bericht über eine Messung der Abhängigkeit des Thomsoneffektes einiger Metalle von der Temperatur vor. Die dort gegebenen Versuche sind gewiß noch mit Fehlern behaftet, die sich verbessern lassen werden. Gleichwohl aber dürfte es vielleicht des Interesses wert sein, diese Messungen einer theoretischen Betrachtung zu unterziehen.

Die Kenntnis des Thomsoneffektes ist ja von größter Wichtigkeit für die Darstellung thermoelektrischer Probleme. So meint W. Thomson:

»It appears, that the whole theory of thermoelectric force in linear conductors is reduced to a knowledge of the circumstances on which the value of the coefficient A, in the expression $-A\gamma+B\gamma^2$ for the heat developed throughout any given conductor, depends.«[2]

Auch sind die folgenden Betrachtungen ganz allgemeiner Natur und hängen nicht von der strengen Richtigkeit der Versuchsresultate ab.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. II a, p. 1599 (1905).

[2] γ bedeutet Stromstärke. W. Thomson, Math. and Phys. Papers, I., 1882, p. 244.

Die gefundenen Funktionen σ geben den Thomsoneffekt für eine bestimmte Temperatur, d. h. die durch den Durchgang eines Coulomb in einer beliebigen Länge eines Drahtes aus dem betreffenden Material erzeugte — positive oder negative — Wärme, wenn das Temperaturgefälle für diese Länge 1° C. beträgt. Diese Funktionen waren:

für Eisen

$$\sigma_f = -[1\cdot860 + 0\cdot02057\, t - 0\cdot00005120\, t^2]\, 10^{-6}\, g \text{ Kal.},$$

für Kupfer

$$\sigma_c = +[3\cdot01 + 0\cdot00662\, t]\, 10^{-7}\, g \text{ Kal.},$$

für Silber

$$\sigma_a = +[7\cdot363 + 0\cdot00887\, t]\, 10^{-7}\, g \text{ Kal.},$$

für Konstantan

$$\sigma_k = -[4\cdot73 + 0\cdot00610\, t - 0\cdot0000240\, t^2]\, 10^{-6}\, g \text{ Kal.}$$

In einem kleinen Leiterelementchen, dessen Endflächen die Temperaturdifferenz dt besitzen, ist dann die erzeugte Wärme σdt. Sind die Temperaturen an den Enden eines endlichen Leiterstückes t_1 und t_2, so ist die in diesem Leiterstücke erzeugte Thomsonwärme gegeben durch $+\int_{t_1}^{t_2} \sigma dt$, wobei als obere Integralgrenze die Temperatur der Eintrittsstelle des Stromes zu setzen ist. Bilden wir dieses Integral $\int \sigma dt$, so erhalten wir aus meinen Messungen bis auf eine nicht bestimmbare Integrationskonstante in Grammkalorien:

für Eisen

$$-[1\cdot860\, t + 0\cdot01028\, t^2 - 0\cdot00001707\, t^3]\, 10^{-6},$$

für Kupfer

$$+[3\cdot01\, t + 0\cdot00331\, t^2]\, 10^{-7},$$

für Silber

$$+[7\cdot363\, t + 0\cdot004435\, t^2]\, 10^{-7},$$

für Konstantan

$$-[4\cdot73\, t + 0\cdot00305\, t^2 - 0\cdot0000080\, t^3]\, 10^{-6}.$$

Diese Kurven sind in Fig. 1 in beliebiger Höhe eingezeichnet. Für irgend ein Material ist dann das bestimmte $\int_{t_1}^{t_2} \sigma dt$ gleich der Differenz der Ordinaten für t_2 und t_1, welche Differenz die Größe des Thomsoneffektes in dem betreffenden linearen Leiterstück zwischen t_2 und t_1 in absolutem Maße,

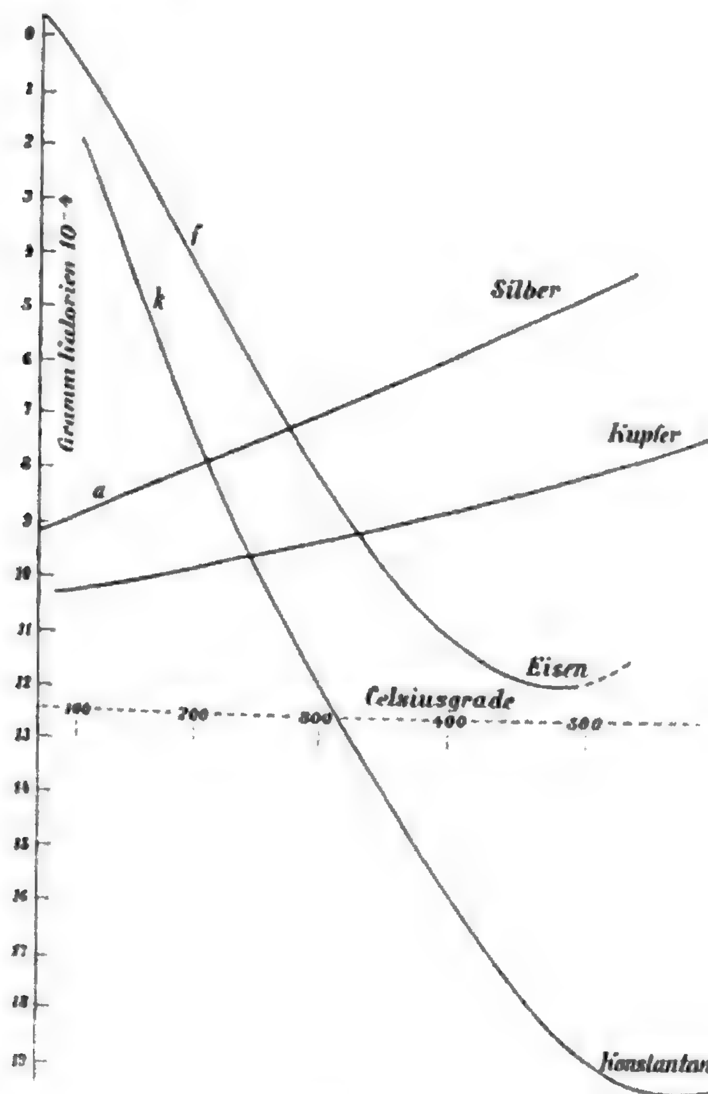


Fig. 1.

in Grammkalorien mal 10^{-4} ergibt. Diese Wärme wird natürlich positiv sein, wenn der Strom in der Richtung von einer größeren zu einer kleineren Ordinate fließt, hingegen negativ, wenn die Stromrichtung die umgekehrte ist. So sehen wir aus der Figur, daß, wenn die Richtung des elektrischen und Wärmestromes dieselbe ist, wir in Eisen einen negativen, in Kupfer einen positiven Wert erhalten.

I. Konkrete Beispiele.

Um nun alle Energiemengen, die in einem geschlossenen Thermoelemente auftreten, in einem übersichtlichen Diagramm zu vereinigen, betrachten wir irgend eine bestimmte Metallkombination und führen sämtliche experimentell bestimmten Energien ein. Ihre Summe muß natürlich gleich Null sein.

1. Eisen—Silber.

Denken wir uns ein Thermoelement, das aus einem Eisen- und Silberdrahte besteht. Die eine Lötstelle wird auf 0° erhalten und die andere Lötstelle auf $t°$ erhitzt; dann ist die thermoelektrische Kraft dieser Kombination in bekannter Weise gegeben durch die Kurve in Fig. 2. Ist die eine Lötstelle auf t_1 und die andere auf t_2, so ist die thermoelektrische Kraft gegeben durch die Ordinate von t_2 weniger der Ordinate von

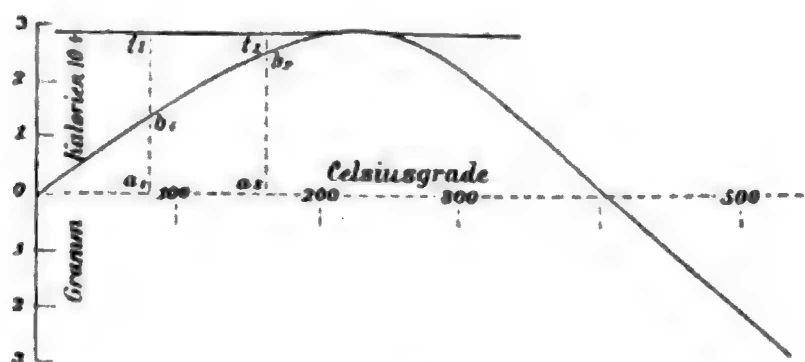


Fig. 2.

t_1, z. B. $a_2 b_2 - a_1 b_1$. Ziehen wir die horizontale Tangente, so ist die elektromotorische Kraft auch gegeben durch $b_1 t_1 - b_2 t_2$, d. h. ich kann die Abszissenachse beliebig verschieben. So erhalte ich die Kurve x in den späteren Diagrammen.

Die in Fig. 2 gegebene Kurve habe ich bis etwa 300° einer Arbeit von Artur Palme[1] entnommen. Es ist dies die letzte Bestimmung dieser Größe und scheint mit großer Sorgfalt durchgeführt zu sein. Das Tait'sche Diagramm[2] gibt etwas

[1] A. Palme, Wiener Zeitschrift für Elektrotechnik, XXIII, p. 414 (1905).
[2] Siehe G. Wiedemann, Lehre von der Elektrizität, II, p. 286 (1894).

höhere Werte. Ebenso die Messungen von Bausenwein;[1] leider hat aber letzterer eine nicht unwichtige Fehlerquelle unterschätzt. Es wurde nämlich angenommen, daß ein in seinem Porzellanschutzrohre befindliches Pt—PtRh-Thermoelement, welches die Temperatur bestimmte, dieselbe Temperatur habe wie die unmittelbar im elektrischen Ofen danebenliegende Eisen—Silber-Lötstelle, in welcher der Peltiereffekt und die thermoelektrische Kraft untersucht wurden. Nun ist aber infolge der Wärmeleitung des Silberdrahtes die Temperatur dieser Lötstelle tiefer. Diese Fehlerquelle, über welche derzeit im hiesigen physikalischen Institute gearbeitet wird, ist im elektrischen Ofen von Heräus eine überraschend große. Immerhin aber kann man für die höheren Temperaturen den Gang der Kurven aus den Bausenweinschen Messungen in ungefährer Weise schätzen, indem man den neutralen Punkt, wo die Änderung der elektromotorischen Kraft mit der Temperatur gleich 0 wird, übereinstimmend mit anderen Messungen auf 240° legt. Dann läuft die Kurve nach Bausenwein zunächst in ziemlich gerader Richtung weiter. Der Umkehrpunkt des Stromes, wenn die eine Lötstelle auf 0° gehalten wird, liegt dann aber nicht bei 2×240°, sondern tiefer. Es ist also entgegen dem Tait'schen Diagramm der absteigende Ast der Parabel etwas steiler als der ansteigende, wie dies auch Palme[2] bemerkt, der diese Temperatur gleichfalls tiefer ansetzt. Ich lasse meine Linie in Fig. 2 bei etwa 400° die Achse schneiden, füge jedoch hinzu, daß diese Zahl für die folgenden Betrachtungen von keiner allzu entscheidenden Bedeutung ist.

Als Ordinaten dieser Kurve gebe ich nicht Millivolt, sondern Grammkalorien mal 10^{-4}. Zu dem Zwecke habe ich die in Volt gegebenen elektromotorischen Kräfte mit 0·239 multipliziert und habe so jene Wärmemengen erhalten, welche durch diese elektromotorischen Kräfte dann erzeugt werden, wenn dieselben ein Coulomb in Bewegung gesetzt haben. Dann gelten alle Größen in den folgenden Diagrammen für 1 Coulomb.

---

[1] E. Bausenwein, Diese Berichte, CXIII, Abt. IIa, p. 676 (1904).
[2] A. Palme, l. c. p. 414.

Nun zeichne ich (Fig. 3) die von mir bestimmte Kurve $\int \sigma dt$ für Silber; dieselbe ist mit a bezeichnet. Darüber zeichne ich eine zweite Kurve x so, daß die Ordinatendifferenzen der Kurven x und a genau gleich sind der Strecke tb der Fig. 2. Und schließlich zeichne ich die Kurve $\int \sigma dt$ für Eisen so, daß sie die beiden anderen Kurven in ihrem Berührungspunkte schneidet; diese letztere Kurve sei mit f bezeichnet.

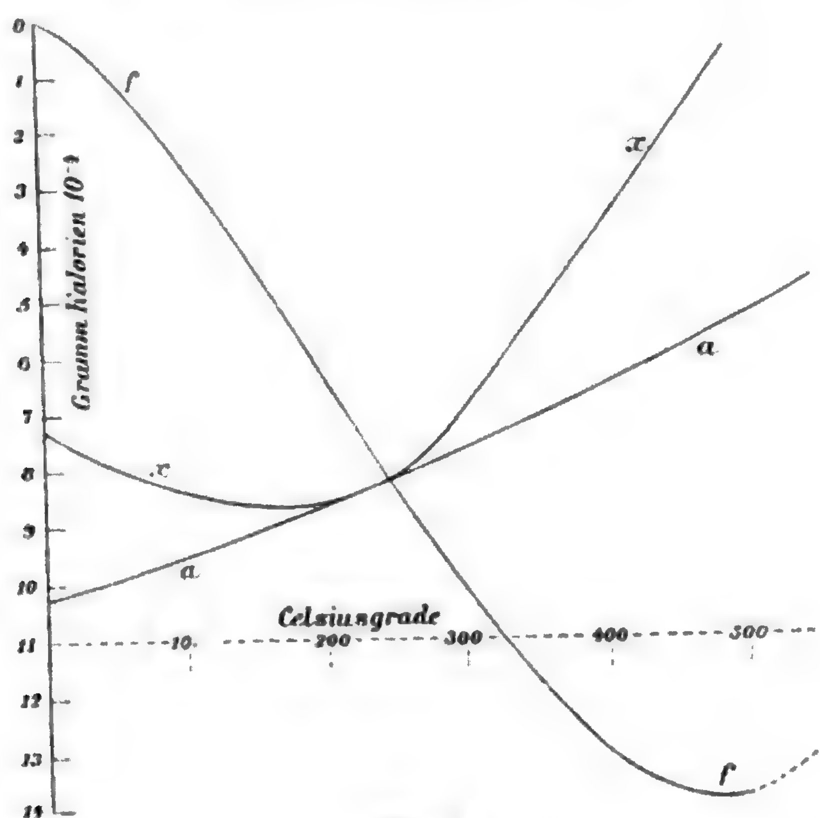


Fig. 3.

Dann müssen die Ordinatendifferenzen der Kurve x und der Kurve f den Peltiereffekt von Fe-Ag für die betreffende Temperatur darstellen.

Um dies zu zeigen, wollen wir unser Beispiel für einige bestimmte Temperaturdifferenzen der beiden Lötstellen durchführen. Da wir im folgenden stets mit Ordinatendifferenzen zu arbeiten haben, so bezeichnen wir der Abkürzung wegen die Höhendifferenz zwischen zwei Punkten, z. B. einem Punkte der Kurve f bei t_1 und einem Punkte der Kurve x bei t_2 mit dem Symbol $\widehat{f_{t_1} x_{t_2}}$. Die Einheiten dieser Höhendifferenzen sind in Fig. 3 in Grammkalorien mal 10^{-4} gegeben.

a) Unser Thermoelement Fe—Ag arbeite zuerst zwischen 0° und 100° C. Dann fließt der Strom in der Lötstelle 0° von

Fe zu Ag, in der Lötstelle 100° von Ag zu Fe. Die wirklich beobachteten Wärmemengen sind der Reihe nach die folgenden:

In der Lötstelle 0° findet eine Erwärmung $\widehat{f_0 x_0}$ statt.

In der Lötstelle 100 eine Abkühlung $\widehat{x_{100} f_{100}}$.

Im Eisendrahte fließt der Strom in der Richtung des Wärmegefälles, wir haben hier eine Abkühlung $\widehat{f_{100} f_0}$.

Im Silberdrahte fließt der Strom gegen das Wärmegefälle, wir haben hier eine Abkühlung $\widehat{a_0 a_{100}}$.

Wenn der Strom stationär fließen soll, so müssen auch alle Temperaturen konstant bleiben, d. h. eine Erwärmung durch den Strom bedingt fortgesetzte Wärmeabgabe des Systems und eine Abkühlung fortgesetzte Wärmeeinnahme. Die gesamte Abgabe von Energie ist also $\widehat{f_0 x_0}$ oder $\widehat{f_0 a_0}-\widehat{a_0 x_0}$. Die gesamten Einnahmen von Energie finde ich mit $\widehat{a_0 a_{100}}$, $\widehat{x_{100} f_{100}}$ (oder $\widehat{a_{100} f_{100}}-$ $-\widehat{a_{100} x_{100}}$), $\widehat{f_{100} f_0}$ und dies gibt summiert $\widehat{a_0 f_0}-\widehat{a_{100} x_{100}}$. Es ist also die Wärmeeinnahme um $\widehat{a_0 x_0}-\widehat{a_{100} x_{100}}$ größer als die Wärmeabgabe. Dieser Verlust an Wärmeenergie tritt als elektrische Energie des Thermoelementes auf.

Wir haben in Fig. 3 Thomsoneffekt und elektromotorische Kraft eingezeichnet, wie sie wirkliche Versuche ergaben. Es müssen also die Höhendifferenzen $\widehat{x f}$ dem Peltiereffekt entsprechen.

Soviel mir bekannt, ist dieser Wert für AgFe selbst noch nie gemessen worden. Jahn[1] bestimmt die Peltierwärme im Eiskalorimeter für CuFe mit 3·163 und für CuAg mit 0·413; danach wäre für AgFe die Differenz dieser Zahlen 2·750 zu setzen, welcher Wert für 1 Ampère und 1 Stunde gilt. Das ergibt für 1 Coulomb $7\cdot 64\cdot 10^{-4}$ Grammkalorien. Meine Konstruktion in Fig. 3 ergibt für 0° etwa $7\cdot 3\cdot 10^{-4}$ Grammkalorien, eine sehr gute Übereinstimmung. Die Abhängigkeit der Peltierwärme von der Temperatur ergibt in ungefährer Annäherung und unter den p. 177 besprochenen Kautelen die Arbeit

[1] H. Jahn, Wied. Ann., 34, p. 755 (1888).

von Bausenwein und danach dürfte die Thomsonwärme bei 100° auf etwa $6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}$ Grammkalorien einzuschätzen sein, indes mein Diagramm $5 \cdot 6 \cdot 10^{-4}$ Grammkalorien liefert. Diese Zahlen müßten gleich sein. Daß dieselben nicht besser stimmen, hat seinen Grund in erster Reihe wohl darin, daß die Messungen der verschiedenen Autoren an verschiedenem Material vorgenommen wurden. Dies wird sich experimentell ohne Zweifel viel genauer machen lassen und dann wird sich sicher eine bessere Übereinstimmung ergeben, da ja hier der erste Hauptsatz wohl nur die durchgeführte Deutung zuläßt.[1]

Ob aber die Genauigkeit bei diesen Versuchen mit AgFe so weit reichen wird, um über die weitere Frage der Art der Anwendbarkeit des zweiten Hauptsatzes eine Entscheidung zu fällen, ist minder gewiß. Diese weitere Entscheidung betrifft die Frage, ob die Leitung der Wärme und die Leitung der Elektrizität vollständig voneinander getrennte und unabhängige Vorgänge sind oder nicht. Ist ersteres der Fall, so können wir auf die Energieumsätze direkt das Gesetz $\int \frac{dQ}{T} \leqq 0$ anwenden. Wir haben dann, wenn σ_f und σ_a den Thomsoneffekt für Fe und Ag bedeuten und wenn wir absolute Temperaturen einführen:

$$\int_{273}^{373} \frac{\sigma_f \, dT}{T} + \int_{373}^{273} \frac{\sigma_a \, dT}{T} - \frac{\widehat{f_{273} x_{273}}}{273} + \frac{\widehat{x_{373} f_{373}}}{373} \leqq 0,$$

und es wäre die Auswertung natürlich eine sehr einfache, aber es sind die Versuche zu wenig genau, um über die Frage zu entscheiden, ob das $=$ oder $<$ Zeichen zutrifft. Wenn wir jede dieser Summen als Repräsentanten eines umkehrbaren Prozesses auffassen, so muß obige Gleichung, die noch mit der Stromstärke i zu multiplizieren ist, für jedes positive oder negative i Gültigkeit haben und das ist nur möglich, wenn die Gesamtsumme gleich Null wird. Denn dann muß ja natürlich auch der ganze Prozeß ein umkehrbarer sein.[1] Ich verweise

---

1 Siehe dagegen p. 189, Anm. 1.

2 Siehe M. Planck, Wied. Ann. 36, p. 634 (1889).

hier auf eine analoge Betrachtung bei Konstantan—Eisen, p. 188, welche die Möglichkeit einer derartigen Vorstellungsweise zu verneinen scheint. Eines läßt sich aber an dem Diagramm leicht zeigen, daß unser System insofern dem zweiten Hauptsatze nicht widerspricht, als die Wärmeeinnahme zwischen 0° und 100°, die Wärmeabgabe hingegen nur an der kalten Lötstelle bei 0° stattfindet. Diesem Grundsatze wäre widersprochen, wenn die drei Kurven sich nicht in einem Punkte schnitten, wie später p. 184 gezeigt werden wird.

b) Erhitzen wir nun die zweite Lötstelle über den neutralen Punkt hinaus, z. B. auf 390° C., indes die erste Lötstelle auf 0° gehalten werde. Dann haben wir in der Lötstelle 0° wie früher Wärmeabgabe $\widehat{f_0 x_0}$. An der Lötstelle 390, wo der Strom von Ag zu Fe fließt, gleichfalls Wärmeabgabe $\widehat{f_{390} x_{390}}$. Der Thomsoneffekt im Silberdrahte — der Strom fließt gegen das Wärmegefälle — erzeugt Kälte $\widehat{a_0 a_{390}}$; ebenso im Eisendrahte, wo der Strom mit dem Wärmegefälle fließt, $\widehat{f_{390} f_0}$. Beide Thomsoneffekte bedeuten also Wärmeeinnahme. Wir haben hier den interessanten Fall, daß in beiden Lötstellen Wärmeabgabe und nur in den Drähten Wärmeaufnahme stattfindet.

Um hier die Summe zu finden, betrachten wir, was rechts und links von 240 vor sich geht; links bedeutet nach dem eben durchgenommenen Beispiel $\widehat{x_0 a_0}$ den Überschuß der Einnahme über die Ausgabe. In ganz analoger Weise ergibt sich rechts als Wärmeabgabe $\widehat{f_{390} x_{390}}$, hingegen als Wärmeeinnahme $\widehat{f_{390} f_{240}} + \widehat{a_{240} a_{390}}$ oder $f_{390} a_{390}$. Die Differenz ist hier eine Wärmeabgabe $\widehat{a_{390} x_{390}}$. Es ergibt sich somit für den ganzen Stromkreis, wenn ich jetzt die beiden Stellen rechts und links vom neutralen Punkte vereine, als Überschuß der Einnahme über die Ausgabe $\widehat{a_0 x_0} - \widehat{a_{390} x_{390}}$. Da diese beiden Werte fast gleich sind, so ist auch der Strom sehr schwach: wir sind in der Nähe jener Temperatur, wo die Stromrichtung umkehrt.

c) Erhöhen wir die Temperatur der Lötstelle noch etwas mehr, vielleicht auf 410° C., so würde $\widehat{a_0 x_0} - \widehat{a_{410} x_{410}}$ negativ,

d. h. es würde die Wärmeeinnahme kleiner als die Wärmeausgabe, was natürlich unmöglich ist, und darum kehrt sich der Strom auch um, d. h. es sind jetzt alle Thomsoneffekte und Peltiereffekte in entgegengesetztem Sinne als früher zu nehmen.

d) Aus der Figur ist nun ersichtlich, daß, wenn wir die Temperatur der zweiten Lötstelle noch mehr erhöhen, der Peltiereffekt infolge der eigentümlichen Krümmung der Eisenlinie zwischen 500 und 600° eine Anomalie zeigen muß, und eine solche ist auch wirklich von Bausenwein bei hohen Temperaturen gefunden worden. Ich hoffe, daß bei genaueren Messungen sich eine vollständige Übereinstimmung dieser merkwürdigen Kurvenknickungen herausstellen wird.

e) Betrachten wir vielleicht der Vollständigkeit wegen noch folgenden Fall. Es sei die eine Lötstelle auf 300° und die zweite etwa auf 400°. Dann ist die Stromrichtung umgekehrt als im Fall *a*. Wir haben dann im Eisendrahte Erwärmung $\widehat{f_{300} f_{400}}$ und ebenso im Silberdrahte $\widehat{a_{400} a_{300}}$ und die Peltierwirkung ist in der Lötstelle 300, wo der Strom vom Silber zu Eisen geht, entgegengesetzt der bei gewöhnlicher Temperatur, nämlich Erwärmung $\widehat{x_{300} f_{300}}$, hingegen in der Lötstelle 400 Abkühlung $\widehat{f_{400} x_{400}}$. Das ergibt einen Überschuß der Einnahme über die Ausgabe von $\widehat{a_{400} x_{400}} - \widehat{a_{300} x_{300}}$. Auch hier findet die Einnahme bei höherer Temperatur statt als die Ausgabe.

Diese wenigen Beispiele genügen wohl, um zu zeigen, daß unser AgFe-Diagramm in allen Fällen den Tatsachen entspricht.

Es ist selbstverständlich, daß sich die Ag-Linie parallel mit sich selbst, z. B. nach abwärts, verschieben läßt. Die elektromotorische Kraft des Thermoelementes ist in unserem Diagramme[1] immer eine Differenz und ändert sich nicht, wenn ich Minuend und Subtrahend um gleichviel vergrößere oder verkleinere. Das ist auch unmittelbar einleuchtend, da die elektromotorische Kraft, wie sie ein Thermoelement liefert,

---

[1] Wie auch schon in Fig. 2.

stets einer Differenz zweier Kräfte entspricht, die man einzeln bisher noch nicht zu messen vermochte. Hingegen müssen die Kurven für f und x, deren Ordinatendifferenz den Peltiereffekt gibt, in einer bestimmten Höhendifferenz zueinander bleiben. Den Peltiereffekt kann man ja für jede Lötstelle einzeln bestimmen.

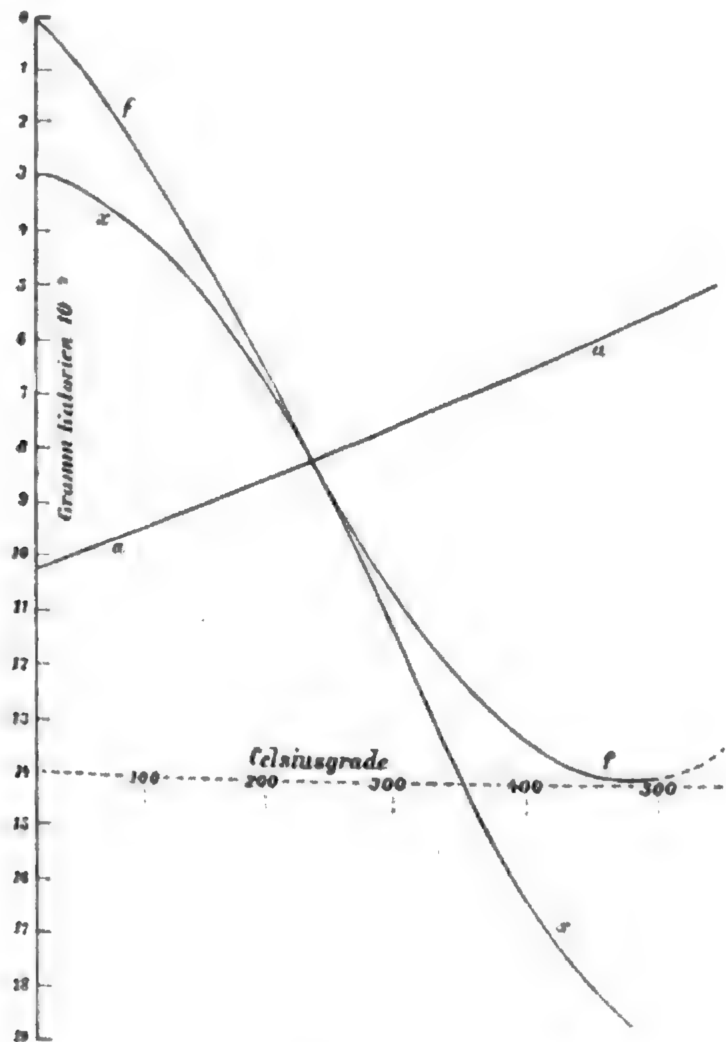


Fig. 4.

Ebenso hätte ich auch umgekehrt die elektromotorische Kraft unter die Eisenlinie auftragen können wie in Fig. 4, wobei natürlich alle die Betrachtungen und Resultate bis auf selbstverständliche Änderungen dieselben geblieben wären. (Siehe Fig. 4.)

Die allgemeinste Darstellungsform findet sich später in Fig. 9, 10 und 11.

Schließlich möchte ich noch theoretisch zeigen, daß beim neutralen Punkte, den ich bei 240° ansetzte, auch der Peltiereffekt sein Zeichen wechseln muß.[1]

Machen wir zuerst die Annahme (Fig. 5), es liege der Nullpunkt des Peltiereffektes höher (z. B. bei 260° C.) als das Maximum der elektromotorischen Kraft (z. B. bei 240° C.). Betrachten wir dann unser Thermoelement, zwischen den Temperaturen 240° und 260°. In demselben fließt der Strom in der heißen Lötstelle bei 260° von Eisen zu Silber, also entgegengesetzt als bei gewöhnlichen Temperaturen, wir sind ja der Annahme nach schon jenseits des neutralen Punktes. Der Peltiereffekt ist aber infolge unserer Annahme noch ein solcher wie bei gewöhnlichen Temperaturen, so daß ein Strom, der von Fe zu Ag geht, Wärme erzeugt.

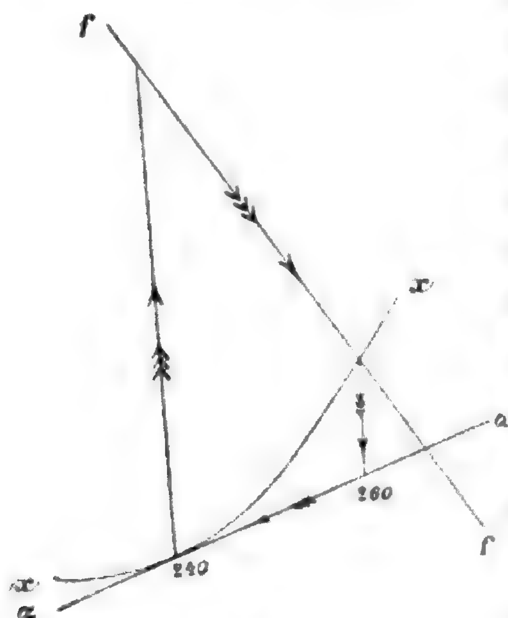


Fig. 5.

Wir erhalten als Resultat in der Lötstelle 240° einen Peltiereffekt $\widehat{x_{240}f_{240}}$ als Abkühlung, d. h. Wärmeeinnahme, in der Lötstelle 260° ist kein Peltiereffekt vorhanden. Hingegen bedeutet der Thomsoneffekt in Eisen $\widehat{f_{240}f_{260}}$ und in Silber $\widehat{a_{260}a_{240}}$ Erwärmung oder Wärmeabgabe, d. h. wir erhielten ein System, das bei der tiefen Temperatur Wärme einnimmt, einen Teil dieser Wärme in elektromotorische Kraft verwandelt und den Rest bei höherer Temperatur abgibt, was dem zweiten Hauptsatz widerspricht.

Machen wir hingegen die entgegengesetzte Annahme (siehe Fig. 6), es liege der Nullpunkt der elektromotorischen Kraft höher (z. B. bei 260°) als der Nullpunkt des Peltiereffektes (z. B. bei 200°). Betrachten wir ein Thermoelement zwischen 200 und 210°. Hier ist die Stromrichtung die

[1] Ausführlicher E. Lecher, Physik. Zeitsch., VII, p. 34 (1906).

gewöhnliche. Sie geht in der heißen Lötstelle 210° von Ag zu Fe, hingegen ist der Peltiereffekt bereits ein umgekehrter. Wir haben dann in der Lötstelle 200 keinerlei Energieumsatz, in der Lötstelle 210 eine Wärmeabgabe $\widehat{a_{210}x_{210}}$. Im Eisendrahte haben wir eine Wärmeeinnahme $\widehat{f_{210}f_{200}}$ und ebenso im Silberdrahte $\widehat{a_{200}a_{210}}$. Also auch hier würde Wärme unter Arbeitsleistung von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen und dies ist unmöglich.

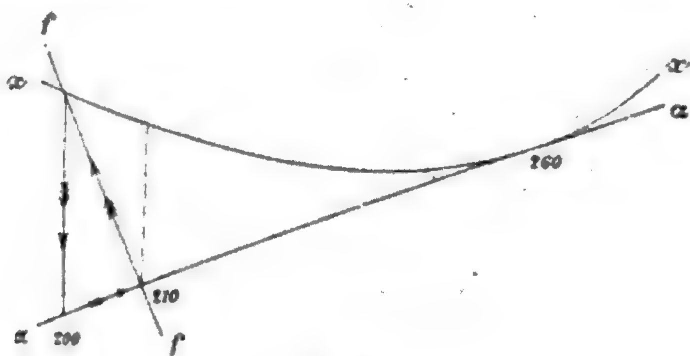


Fig. 6.

2. Kupfer—Eisen.

Ich habe in dem Vortrage, den ich am Naturforschertage in Meran gehalten habe,[1] dieses Beispiel behandelt. Nun ist aber der Thomsoneffekt für Kupfer ein so kleiner, daß seine experimentelle Bestimmung nur sehr angenähert erfolgen kann.

Es ergab sich auch bei Ausführung des Diagrammes, daß der Nullpunkt des Peltiereffektes und der neutrale Punkt der Thermokraft nicht zusammenfielen. Und dies ist, wie ich gerade eben gezeigt habe, unmöglich. Deshalb habe ich über diesen Punkt direkte Messungen gemacht. Ich habe nach einer ähnlichen Methode wie Bausenwein, aber mit vier Lötstellen, wodurch der Effekt verdoppelt wurde, jene Temperatur genau bestimmt, wo der Peltiereffekt verschwindet. Hier verschwinden nun, da ja der Effekt Null wird, auch alle Fehlerquellen, wie Ausstrahlung, Änderung der spezifischen Wärme u. s. w., die

[1] E. Lecher, Physik. Zeitschr., 6, 781 (1905) Ber. d. deutschen phys. Ges., III, 331 (1905).

für andere Temperaturen die Größe des Effektes bei der angewandten Methode etwas fälschen können. Die Temperatur der Lötstelle maß ich durch ein direkt eingelötetes Konstantan-Eisenelementchen mit sehr dünnen Drähten. Eine Reihe von Versuchen, deren Beschreibung ich mir wohl ersparen kann, ergaben als Umkehrpunkt zirka 255° C. Bei eben derselben Temperatur fand ich aber auch das Maximum der elektromotorischen Kraft desselben Elementes Cu-Fe. Ich möchte hinzufügen, daß die Bestimmung des Nullpunktes des Peltiereffektes eine verhältnismäßig genaue ist, hingegen ist es ziemlich schwer, jene Temperatur zu bestimmen, wo das Maximum der elektromotorischen Kraft liegt, da die Kurve, welche die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft von der Temperatur darstellt, im Maximum sehr flach verläuft.[1]

3. Konstantan—Eisen.

Hier wollen wir das Diagramm ähnlich wie früher zeichnen, nur verkleinere ich die Ordinaten auf den zehnten Teil. Ich zeichne zunächst das $\int \sigma dt$ für Konstantan (k in Fig. 7). Dann zeichne ich eine Kurve x in der Weise, daß die Ordinatendifferenz zwischen k und x in analoger Weise wie früher die elektromotorische Kraft Konstantan—Eisen bestimmt. Der Schnittpunkt dieser x und k-Kurven ist willkürlich auf 400° verlegt, er könnte geradeso irgendwo anders liegen. Die elektromotorische Kraft eines Konstantan—Eisenelementes, dessen Lötstellen die Temperaturen t_1 und t_2 haben,

[1] Bei Bestimmung des Nullpunktes des Peltiereffektes schien es mir, als sei diese Temperatur nicht unabhängig von der Stromstärke. Theoretisch unmöglich wäre dies nicht. So findet sich bei Helmholtz (Vorlesungen über die Theorie der Wärme, herausgegeben von F. Richarz, 1903, pag. 263): »Die Erwärmung durch den Peltiereffekt ..... ist wie alle umkehrbaren Stromwirkungen der ersten Potenz der Stromstärke J proportional, solange J nur klein ist, jedenfalls aber nur von ungeraden Potenzen von J abhängig, nicht von geraden.« Mir schien die Sache so, als ob bei starken Strömen durch die Joulewirkung eine Erwärmung des Eisendrahtes und ein steiles Gefälle gegen den Silberdraht hin bei der Lötstelle eintreten müsse, und daß diese unmittelbar an dieser Lötstelle im Gefälle auftretende Thomsonwärme den Peltiereffekt verkleinere. Jedenfalls sind darüber weitere Messungen von Interesse.

ist dann gegeben durch $\widehat{k_{t_1} \; x_{t_1}} - \widehat{k_{t_2} \; x_{t_2}}$. Für Temperaturen über 400° ist dann natürlich statt der Differenz die Summe dieser Strecken zu nehmen. Die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft von der Temperatur entnehme ich einer Arbeit von Bausenwein.[1] Dann habe ich $\int \sigma dt$ für Eisen (f in Fig. 7) in solcher Höhe zu ziehen, daß $\widehat{x_t \; f_t}$ dem Peltiereffekt bei dieser Temperatur entspricht. Nun kenne ich zwar den absoluten Wert des Peltiereffektes nicht, denn Bausen-

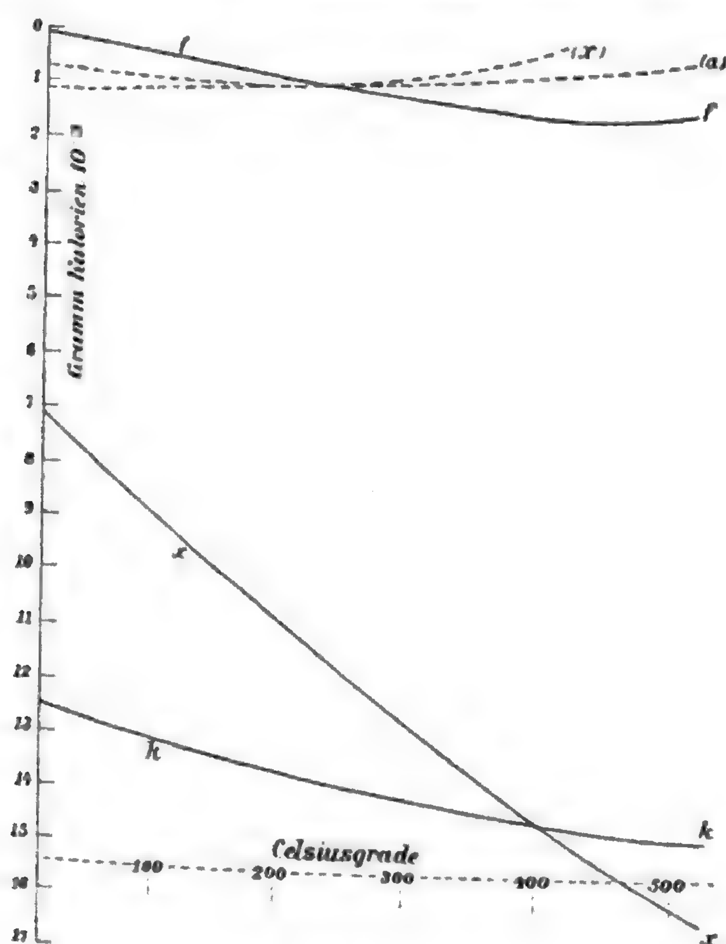


Fig. 7.

wein gibt nur die relative Abhängigkeit von der Temperatur. Wir können aber aus seinen Messungen ersehen, daß der Peltiereffekt bei 370° C. ungefähr 1·5 mal so groß ist wie bei 0°. Ich muß also meine Linie f so einzeichnen, daß $\widehat{x_{370} f_{370}} = 1 \cdot 5 \, \widehat{x_0 f_0}$ wird. Dann ist das Diagramm fertig. Daraus könnte ich auch den absoluten Wert des Peltiereffektes für jede

[1] E. Bausenwein, Diese Berichte, Bd. CXIV, Abt. II a, p. 1625 (1905).

beliebige Temperatur ablesen. Derselbe müßte für 0° ungefähr $7 \cdot 10^{-3}$ Grammkalorien sein. Das wird aber nur eine rohe Annäherung sein, richtig nur in der Größenordnung. Die Messungen von Bausenwein berücksichtigen nicht die Änderung der spezifischen Wärme mit der Temperatur und auch nicht die eventuelle Änderung des Wärmeverlustes mit der Temperatur. Darum ist die Bausenwein'sche Linie wahrscheinlich etwas zu flach. Mein $\int \sigma dt$ ist aus denselben Gründen für Konstantan vielleicht auch etwas zu wenig steil. Diese Fehler würden bewirken, daß obige Zahl 7 zu groß ist und es ist aus dem Diagramm leicht zu ersehen, daß hier geringe Neigungsänderungen der Linien schon sehr ins Gewicht fallen.

Um ein solches Diagramm zu erhalten, ist es daher immer besser, wenn man, wie wir es bei Ag—Fe gemacht haben, die Abhängigkeit des Thomsoneffektes und der elektromotorischen Kraft von der Temperatur zuerst einzeichnet und dann den Peltiereffekt für irgend eine bestimmte Temperatur seinem wirklichen Werte nach zur Herstellung der richtigen Höhendifferenz $\widehat{xf}$ benützt.

In dem Diagramm (Fig. 7) ist folgendes sehr interessant. Zunächst, daß der Thomsoneffekt gegenüber dem Peltiereffekt sehr wenig in Betracht kommt. Überdies ist derselbe in den beiden Drähten, die ja von Strömen in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden, entgegengesetzt. Ich habe mich also bei der Berechnung in erster Reihe nur um den Peltiereffekt zu kümmern. Und es wird die elektromotorische Kraft in erster Reihe bestimmt werden durch die Differenz des Peltiereffektes an den beiden Lötstellen. Das $\int \frac{dQ}{T}$ wird hier in großer Annäherung gegeben sein durch $-\frac{\pi_{t_1}}{T_1} + \frac{\pi_{t_2}}{T_2}$, wenn π_t der Peltiereffekt bei der Temperatur t ist.

Nehmen wir 20° und 606° C. für die beiden Lötstellen, so erhalten wir

für $T = 293$ den Peltiereffekt $12 \cdot 33$,
» $T = 3 \cdot 293$ den Peltiereffekt $2 \cdot 12 \cdot 33$.

Wir haben somit:

$$\int\frac{dQ}{T} = -\frac{12\cdot 33}{293} + \frac{2\cdot 12\cdot 33}{3\cdot 293} = \frac{12\cdot 33}{293}\left(-\frac{1}{1}+\frac{2}{3}\right) < 0.$$

Sind somit die Messungen von Bausenwein auch nur ungefähr richtig, so haben wir keine Spur von Umkehrbarkeit, d. h. es ist hier die Wärmeleitung der Metalle von großem Einfluß.

Um dieses Beispiel Eisen—Konstantan mit dem früheren Beispiel Eisen—Kupfer zu vergleichen, ist das Diagramm aus Fig. 3 in obige Figur mit punktierten Linien in richtigem Verhältnisse eingezeichnet. Man ersieht die gewaltigen Größenunterschiede der hier ins Spiel tretenden Energiemengen.

II. Allgemeine Theorie.

Wir haben im vorigen Kapitel die einzelnen, beim thermoelektrischen Prozeß auftretenden Energieen addiert und gesehen, daß ihre Summe immer gleich Null war. In den gegebenen Diagrammen steckt keinerlei Hypothese, sondern nur das allgemeine Prinzip der Äquivalenz von Arbeit und Wärme. »Its agreement with any experimental results is only to be looked on as a verification of the accuracy of the experiments, and can add nothing to the certainty of the part of theory from which it is deduced.« [1]

Es müssen also alle Theorien, welche bisher über Thermoelektrizität gegeben wurden, in jenem Teile, der sich nur auf den ersten Hauptsatz bezieht, in den eben besprochenen, rein energetischen Diagrammen sich wiederfinden.

Eine beschreibende Darstellung der thermoelektrischen Erscheinungen kann nun, wie dies z. B. schon W. Thomson selbst gemacht hat, so gehalten werden, daß man auf die interessante Frage, wohin der Sitz der elektromotorischen Kraft zu verlegen sei, gar nicht eingeht. Die meisten andern

[1] W. Thomson, Math. and phys. Papers, I., 1882, p. 250. Dabei ist aber stillschweigend die Annahme gemacht, daß die innere Energie konstant bleibt. Es wäre ja immerhin möglich, daß dies auch hier, wie z. B. bei galvanischen Ketten nicht der Fall wäre. Siehe darüber A. Szarvassi, Ann. d. Phys. 17, p. 248, 1905.

Theorien unterscheiden sich aber gerade durch diesbezügliche Annahmen; es sind da drei Möglichkeiten vorhanden: Die elektromotorische Kraft kann entstehen entweder nur in den Lötstellen oder nur in den Wärmegefällen der Drähte oder an beiden Stellen. Dementsprechend ergeben sich drei verschiedene Anschauungsweisen, die nun an dem früher ausführlich gegebenen Beispiele Ag Fe erörtert werden sollen.

I. Der Sitz der elektromotorischen Kraft liegt nur in den Lötstellen. Diese Vorstellungsweise, welche wohl den Vorzug der größten Einfachheit für sich hat, ist von Planck[1] genau formuliert worden.

Unter »elektromolekularer Energie« versteht M. Planck einen Energiebetrag, der jedem Elektrizitätsteilchen zukommt, ganz abgesehen von der durch die Wechselwirkungen der Elektrizitäten unter sich bedingten elektrostatischen Energie. Diese elektromolekulare Energie ist abhängig von der Natur des Leiters und von dessen Temperatur ohne Rücksicht auf dessen sonstigen elektrischen Zustand.[2]

Es sei für das eine Metall die elektromolekulare Energie u_a und für das andere u_b. Dann haben wir an einer Kontaktfläche, wenn π_{ab} die Peltierwärme in der Lötstelle und e_{ab} die elektromotorische Kraft daselbst bedeutet, die Gleichung

$$e_{ab} + \pi_{ab} + u_a - u_b = 0$$

In der früheren Figur entspricht meine Linie $\int \sigma_f dt$ genau dem u_a, hingegen $\int \sigma_a dt$ genau dem u_b.[3]

Nachfolgende Figur 8 ist identisch mit der alten Fig. 3; nur habe ich die Bezeichnungen entsprechend der Planck'schen Theorie geändert. Infolge dieser Übereinstimmung des Diagrammes können alle im vorigen Kapitel gegebenen Bemerkungen durch diese Theorie befriedigt werden.

---

[1] M. Planck, Wied. Ann. 36, p. 624, 1889.

[2] Planck, l. c. p. 628. Siehe diesbezüglich Bemerkung, p. 195, Anm. 2 vorliegender Arbeit.

[3] Nach Planck (l. c. pag. 632) ist die Thomsonwärme du gegeben durch $i \frac{du}{dt} \frac{\partial t}{\partial n} dn$ und in meiner Zeichnung durch $i \sigma dt$.

Die allgemeinste Darstellung dieser Auffassung finden wir aber in Fig. 9. Hier sind die von mir gemessenen Funktionen u_a

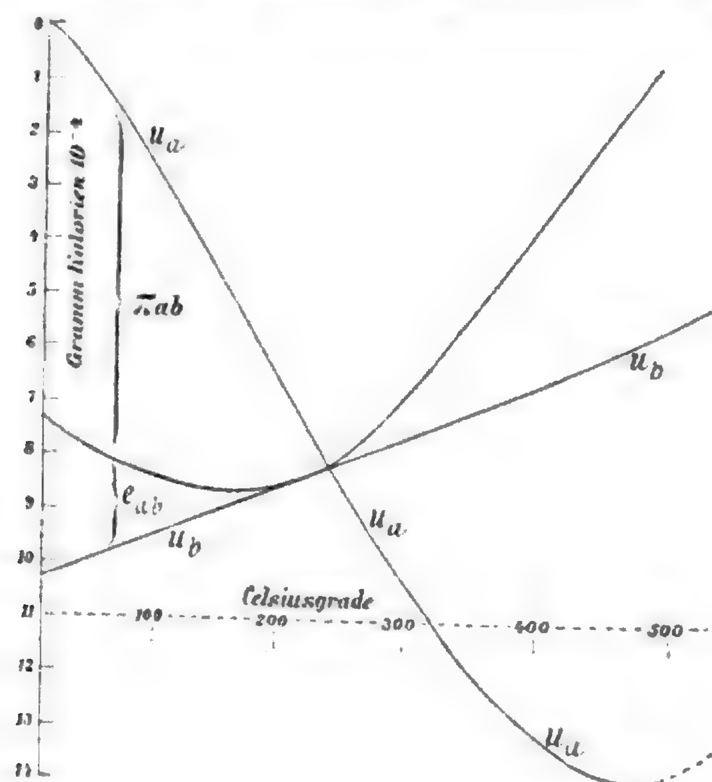


Fig. 8.

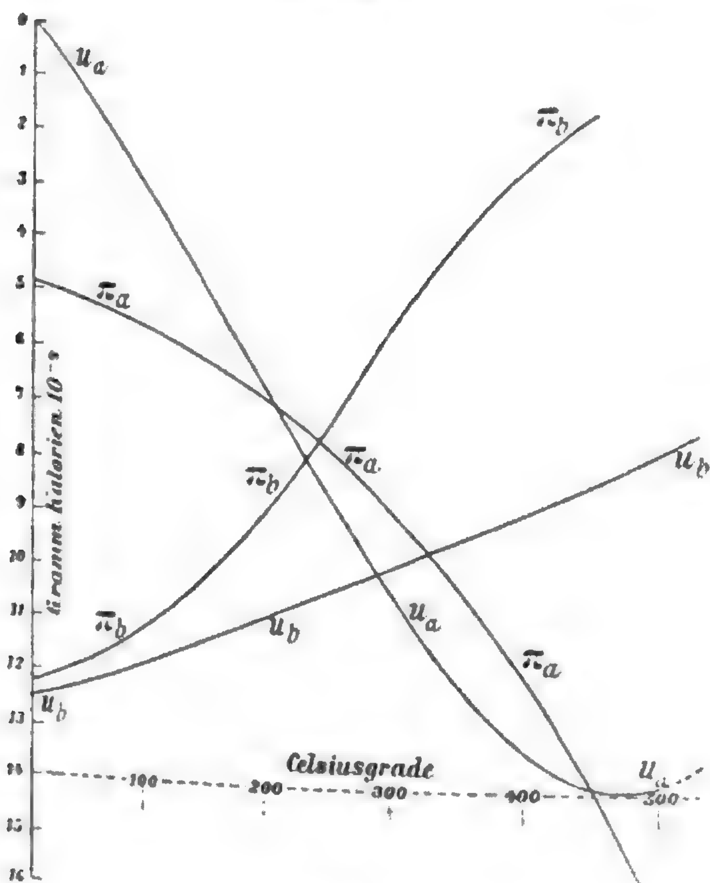


Fig. 9.

und u_b in beliebiger Höhe gezeichnet, ferner wurden zwei Kurven π_a, π_b so aufgetragen, daß ihre Differenz bei jeder Temperatur dem Peltiereffekt entspricht. Dann ist an irgend einer Lötstelle der ganze Energieumsatz gegeben durch

$$\pi_a - \pi_b + e_a + e_b + u_a - u_b,$$

und im Drahte durch das $\int du$ innerhalb der Temperaturgrenzen der Lötstellen.[1]

II. Betrachten wir unser Beispiel für Ag Fe von jenem Standpunkte aus, welchen die Theorie von Kohlrausch[2] annimmt. Nach diesem zieht ein elektrischer Strom Wärme mit sich und ein Wärmestrom Elektrizität. Die elektromotorische Kraft liegt hier gar nicht an den Kontaktstellen, sondern nur in

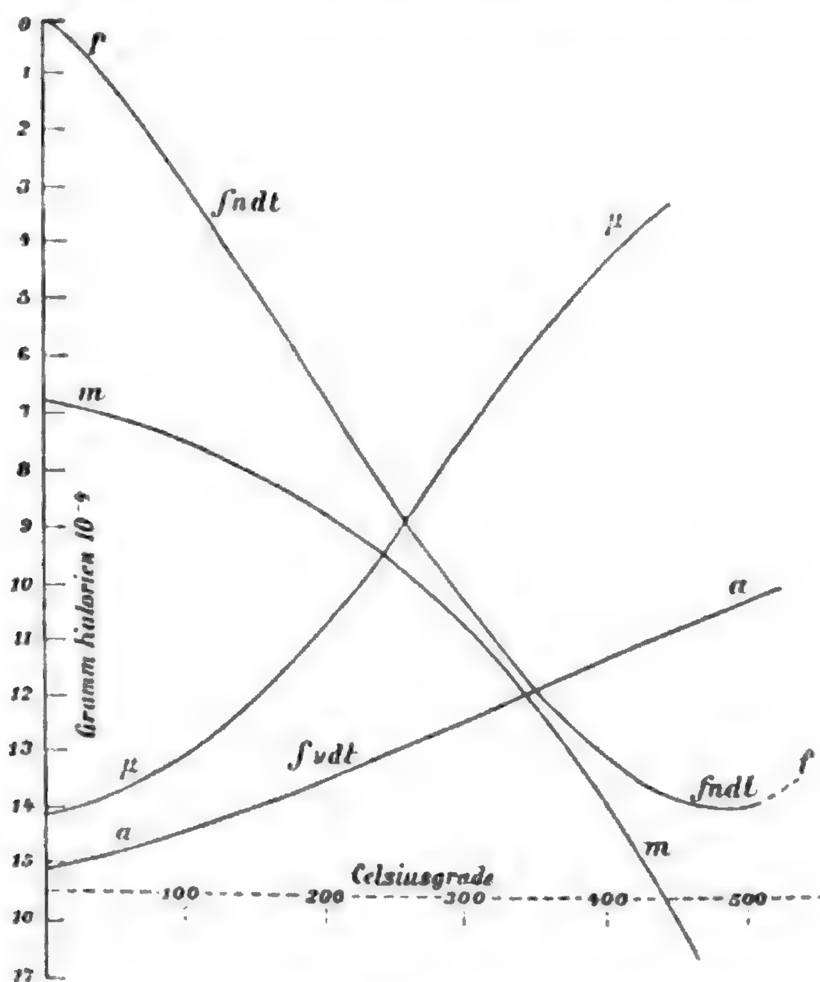


Fig. 10.

den Temperaturgefällen der Drähte. Den mathematischen Ausdruck dieser Theorie liefert Boltzmann.[3] Fig. 10 ist mit der

[1] Planck, l. c. p. 635.
[2] F. Kohlrausch, Pogg. Anm. 156, p. 601, 1875.
[3] L. Boltzmann, Diese Berichte, Bd. XCVI, II. Abt., pag. 1258, 1888.

Fig. 9 dem Sinne nach bis auf die Bezeichnung identisch, welche wir der Abhandlung von Boltzmann entnehmen wollen. Boltzmann nennt m (respektive μ für den zweiten Draht) eine Temperaturfunktion, welche jene Wärmemenge darstellt, die beim Austritt der Elektrizitätsmenge Eins aus diesem Metalle entwickelt wird. Dann ist $m - \mu$ die an einer Lötstelle frei werdende Peltierwärme.[1] Die früheren Linien π_a und π_b stellen also diese Funktionen m und μ dar, da ja die jeweilige Ordinatendifferenz dem Peltiereffekt entspricht. Die Änderung der Funktion m gibt aber auch längs des einen Drahtes (z. B. Eisen) zwischen t_2 und t_1 Anlaß zu einem Energieumsatz $\int \frac{dm}{dt}\,dt$. Das ist in unserer früheren Bezeichnung $\widehat{m_{t_2}\, m_{t_1}}$. Nun ist aber der hier wirklich beobachtete Energieumsatz ein anderer. Er ist in unserem Falle $\int n\,dt$, wenn wir nach Boltzmann mit n die spezifische Wärme (Thomsoneffekt σ) im Drahte bezeichnen; diese Größe ist $\widehat{f_{t_2}\, f_{t_1}}$. Die Differenz zwischen dem wirklich beobachteten und dem durch die Fortführung der Wärme bedingten Energieumsatz, nämlich $\int n\,dt - \int \frac{dm}{dt}\,dt$ muß also als Elektrizität auftreten. Nennen wir nun nach Boltzmann die bei der Temperaturdifferenz dt auftretende elektromotorische Kraft $a\,dt$, so gelangen wir zu der Gleichung $n\,dt = \left(\frac{dm}{dt} + a\right) dt$.[2] Wenn also Wärme durch Eisen von höherer zu tieferer Temperatur strömt, so verschwindet ein Teil dieser Wärme, weil die eigentliche Mitführung der Wärme durch die Elektrizität bei tieferer Temperatur größer ist. Es geht in jedem Punkte mehr weg als ankommt; ein weiterer Teil aber verwandelt sich aus Wärmeenergie in elektrische Energie (oder umgekehrt), d. h. in eine Energie, die erst anderswo wieder als Wärmeenergie zum Vorschein kommt.[3]

---

[1] Boltzmann l. c. Gleichung 9).
[2] Boltzmann, l. c. p. 1267.
[3] Boltzmann, l. c. p. 1270.

Es ist also auch hier die Höhendifferenz $\widehat{m_{t_2} f_{t_2}}$ die elektromotorische Kraft im Eisendrahte; die analoge Differenz im Silberdrahte ist $\mu_{t_2}\, a_{t_1}$.

Wir haben somit genau dieselben Schlußresultate wie nach der Planck'schen Anschauung. Dabei ist natürlich jedes beliebige Hinaufschieben der Kurve erlaubt, solange wir nur die Ordinatendifferenzen für den Peltiereffekt konstant erhalten. Um diese Willkür auszudrücken, habe ich absichtlich Fig. 10 nicht, wie ich es hätte tun können, genau identisch mit Fig. 9 gezeichnet.

III. Selbstverständlich gilt ebenso das gleiche Diagramm für eine Vereinigung der beiden Anschauungen, nach welcher wir die elektromotorische Kraft sowohl in den Lötstellen als auch in den Temperaturgefällen der Drähte suchen. Diese

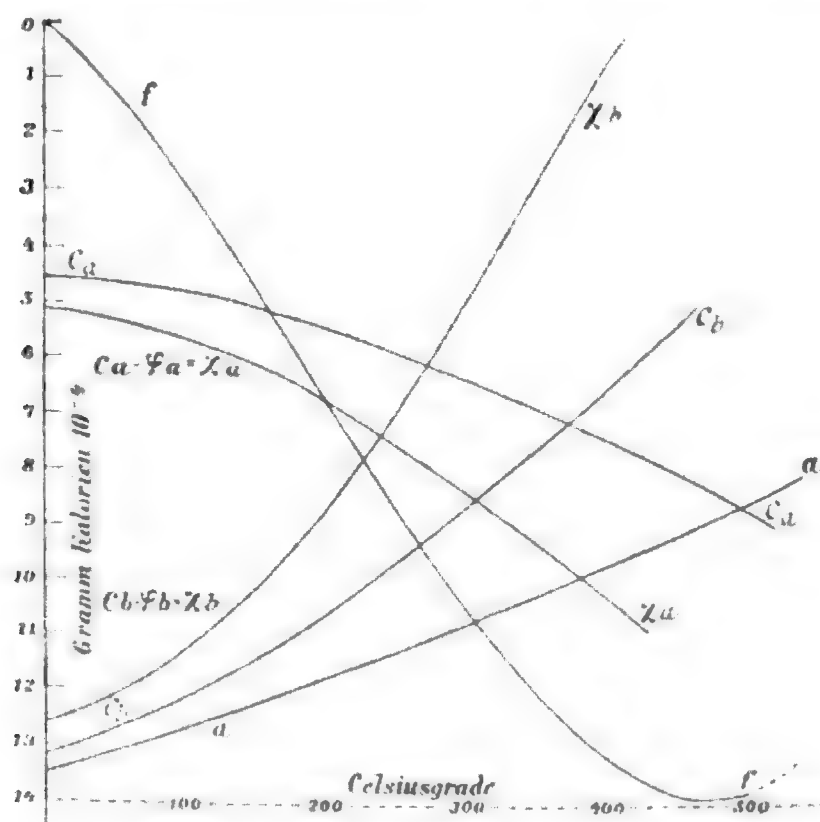


Fig. 11.

Vorstellung von Clausius wurde meines Wissens zuletzt am ausführlichsten von Budde behandelt.[1] Führen wir die Bezeichnung von Budde ein, so haben wir zuerst (siehe Fig. 11) zwei

[1] E. Budde, Wied. Ann. 30, p. 665, 1887.

beliebige Temperaturfunktionen c_a und c_b zu zeichnen, welche »spezifische Wärmeenergie der Elektrizität« im Drahte a und b genannt wird.[1] Der Begriff »spezifische Wärmeenergie der Elektrizität« ist zwar ebenso zu definieren wie jener der »elektromolekularen Energie« von Planck, darf aber infolge der Art, wie Planck diese Funktion verwendet, nicht mit jener verwechselt werden.[2]

Des ferneren haben wir zwei beliebige Temperaturfunktionen φ_a und φ_b zu bilden (in der Figur nicht gezeichnet), welche das »Potenzialniveau« der Drähte bei den betreffenden Temperaturen angeben. Bilden wir nun zwei neue Funktionen, welche bestimmt sind durch

$$\chi_a = c_a - \varphi_a, \text{ respektive } \chi_b = c_b - \varphi_b$$

und welche der Bedingung entsprechen, daß die Ordinatendifferenzen von χ_a und χ_b den Peltiereffekt für die betreffenden Temperaturen ergeben. Budde nennt diese Funktionen χ »thermoelektrische Kräftefunktion«.[3]

Wir haben dann in der Lötstelle t infolge der Änderung von c zu erwarten $c_{a_t} - c_{b_t}$; der Versuch ergibt aber $\chi_{a_t} - \chi_{b_t}$. Wir haben also hier eine Differenz, welche uns für die elektromotorische Kraft der Lötstelle wie bei Planck aufzukommen hat, nämlich $\widehat{\chi_{a_t} c_{a_t}} + \widehat{\chi_{b_t} c_{b_t}}$. Ebenso ergibt in den Drähten (wie bei Kohlrausch-Boltzmann) die Änderung von c allein nur $\widehat{c_{a_{t_2}} c_{a_{t_1}}}$ (respektive $\widehat{c_{b_{t_2}} c_{b_{t_1}}}$), indes der Versuch ergibt $\widehat{f_{t_2} f_{t_1}}$ (respektive $\widehat{a_{t_2} a_{t_1}}$), und diese Differenzen müssen gleich sein den elektromotorischen Kräften in den Drähten. Da wir auch hier die Kurven in vertikaler Richtung beliebig verschieben können, wenn nur die Differenzen den gegebenen

---

[1] Budde, p. 684. Die Differenz $c_a - c_b$ nennt Budde später p. 690 auch »thermisch-elektrische Energiedifferenz«.

[2] Nur für den Fall, daß man in den Temperaturgefällen keinerlei elektromotorische Kraft sieht, also nur vom Standpunkte Plancks aus sind beide Begriffe identisch.

[3] Thomson nennt sie »thermoelektrische Potenzialfunktionen«. Siehe Budde l. c., p. 689.

Bedingungen entsprechen, so können wir, wenn nur die die Peltierwärme liefernden Ordinatendifferenzen erhalten bleiben, aus Fig. 11 alle die früheren, einfacheren Figuren gewinnen.

Es ist somit unmöglich und das ist ja eigentlich selbstverständlich, aus Versuchen mit geschlossenen Thermoelementen eine Entscheidung über den Sitz der elektromotorischen Kraft zu gewinnen.[1] Bei dem derzeitigen Stande unserer experimentellen Kenntnis ist es reine Geschmackssache, an welchen Punkt der Kette wir den Sitz der elektromotorischen Kraft verlegen wollen. Darum könnte ich z. B. einer Behauptung, wie folgender: »Die Theorie von Clausius ist die einzig berechtigte«[2] nicht beipflichten. Ebenso ist es selbstverständlich, daß man auch durch Einführung von Spekulationen mit Elektronen und dergleichen keine Entscheidung wird treffen können, wie dies ja eigentlich schon der Begründer der Elektronentheorie in Metallen, W. Weber,[3] gezeigt hat.

---

[1] Für die unter II und III gegebenen Anschauungen hat dies ja schon L. Boltzmann (l. c.) gezeigt. Mein Weg scheint mir etwas übersichtlicher infolge wirklicher Einführung der gemessenen Funktionen.

[2] Budde, Wied. Ann. 21, p. 294, 1884.

[3] W. Weber, Pogg. Ann. 156, p. 30, 1875.

Trennungen des Radiums *C* vom Radium *B*[1]

von

Dr. F. v. Lerch.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Februar 1906.)

Die Rutherford'sche Umwandlungstheorie[2] führt die Aktivität von Körpern, die mit Radium induziert sind, auf eine Reihe auseinander entstehender Körper zurück. Aus der Emanation bildet sich das schnell abklingende Radium *A* mit der Halbierungskonstante 3 Minuten, aus diesem das keine ionisierenden Strahlen aussendende Radium *B*, das unter Bildung des strahlenden Radium *C* abklingt. Die weiteren Umwandlungsprodukte werden unter dem Namen Restaktivitäten zusammengefaßt. Jede Substanz entsteht mit der Geschwindigkeit, mit der ihr Vorgänger zerfällt, und klingt gleichzeitig nach ihrem eigenen Zerfallsgesetz ab. Formuliert man die Theorie mathematisch, so erhält man eine Reihe Differentialgleichungen, die sich leicht integrieren lassen.[3] Das Resultat ist für verschiedene Fälle immer eine Summe von Exponentialfunktionen, wobei auch Glieder mit negativen Vorzeichen vorkommen können. Führt man die Rechnung für den Fall durch, daß aus einer

---

[1] Vergl. die vorläufige Mitteilung über diesen Gegenstand, Akad. Anz. d. Wien. Ber., Nr. XXV, 7. Dez. 1905.

[2] E. Rutherford, Phil. Trans. Roy. Soc. of London. Serie *A*, vol. 204, p. 169 bis 219 (1904), P. Curie und J. Danne, C. R., 138, p. 748 (1904), I.

[3] J. Stark, Jahrbuch d. Rad., I., 1 — P. Curie und J. Danne, C. R., XXXVIII, 1904, I, p. 683 — E. Rutherford, l. c. An dieser Stelle finden sich die Formeln für verschiedene Expositionsdauer sehr anschaulich abgeleitet.

inaktiven Substanz B eine strahlende Substanz C entsteht, so erhält man für die zur Zeit t vorhandene Menge der Substanz C den Ausdruck:

$$J_t^C = \frac{J_{t_0}^B \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}),$$

wenn zur Zeit $t = 0$ nur die Menge $J_{t_0}^B$ der inaktiven Substanz B vorhanden war, aus der sich das aktive C zu bilden anfängt. λ_1 und λ_2 bezeichnen die Wandlungskonstanten für B und C.

Der Ausdruck J_t^C steigt zuerst mit der Zeit an, erreicht ein Maximum, wenn $t = \frac{ln \lambda_2 - ln \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ ist, und wird nach längerer Zeit proportional $e^{-\lambda_1 t}$ abklingen, wenn $\lambda_1 < \lambda_2$ ist, respektive proportional $e^{-\lambda_2 t}$, wenn $\lambda_1 > \lambda_2$.

Hat z. B. das aktive C die größere Wandlungskonstante (also die kleinere Halbierungskonstante $HC = \frac{ln\, 2}{\lambda}$ ist $\lambda_1 < \lambda_2$), so wird nach längerer Zeit die jeweilig vorhandene Menge proportional $e^{-\lambda_1 t}$ abklingen, also der Menge des vorhandenen Radiums B proportional sein. Man kann dies als einen Gleichgewichtszustand bezeichnen.

Hat man aus dem letzten Teil der Abklingungskurve das eine λ erhalten, so läßt sich aus dem Anstieg das andere λ berechnen. Welches λ der ersten, respektive der zweiten Wandlung zuzuschreiben ist, läßt sich aus der Kurve nicht ersehen.

Ursprünglich wurde der ersten inaktiven Wandlung die kleinere Halbierungskonstante zugeteilt und der zweiten aktiven Wandlung die größere.

Da aber die Aktivität von induzierten Körpern, die kurze Zeit geglüht werden, schneller abklingt als die ungeglühter Körper,[1] mußte man annehmen, daß das Glühen das Abklingen der Aktivität beeinflußt. Dieser Schwierigkeit — nach allen anderen Erfahrungen haben die Geschwindigkeiten der radioaktiven Wandlungen den Temperaturkoeffizienten 0 — geht

[1] P. Curie und J. Danne, l. c.

man aus dem Wege, wenn man, wie Bronson[1] vorgeschlagen hat, der inaktiven Substanz B die größere Halbierungskonstante zuschreibt und dem aktiven C die kleinere. Durch das Glühen wird das B mehr entfernt wie das C; es bleibt ein Überschuß von C zurück, der nach seinem eigenen Gesetz schneller abklingt.

Für die Halbierungskonstanten gibt Bronson 26 und 19 Minuten an, während bisher 28 und 21 Minuten angenommen wurden.

Die Trennungen von B und C, über die hier berichtet werden soll, bestätigen die Schlußfolgerungen von Bronson.

Untersucht wurden Induktionslösungen, die durch Kochen von induzierten Platinblechen mit starken Säurelösungen hergestellt waren. Induziert wurde mit einer wässerigen Lösung von 0·1 *g* sogenanntes 40000 Radium in einem Felde von zirka 300 Volt. Die Induktionslösungen wurden mindestens drei Viertelstunden nach der Herstellung stehen gelassen, um praktisch Radium A freie Lösungen zu erhalten.

Die Versuchsanordnung, mit welcher die Aktivität gemessen wurde, war im wesentlichen gleich der in einer früheren Arbeit benutzten. Es wurde die Geschwindigkeit beobachtet, mit der sich ein Quadrantenpaar eines Dolezalek'schen Elektrometers auflud. Der konstant mit einem Harmskondensator verbundene Quadrant gab für eine Elektrizitätsmenge von 1 Volt × 41 *cm* einen Ausschlag von zirka 130 Teilstrichen.

Ähnlich wie das Thorium B vom Thorium A,[2] kann auch das Radium C vom Radium B durch eingetauchte Metalle oder durch Elektrolyse getrennt werden. Eingetauchtes Cu oder Ni fällt nur das aktive Radium C aus, ebenso erhält man durch Elektrolyse mit geringer Stromdichte aktive kathodische Niederschläge, die mit der Halbierungskonstante 19·5 Minuten abklingen.

So wie beim Thorium, ist auch hier der aktive Bestandteil der elektrochemisch edlere mit der kleineren Halbierungs-

---

[1] L. Bronson, American Journal of Science, 20. July 1905, p. 60; Phil. Mag., Jan. 1906. — Vergl. auch H. W. Schmidt, Phys. Zeitschr., 15. Dez. 1905.

[2] F. v. Lerch, Diese Sitzungsber. Abt. II a, März 1905.

konstante. Auch lassen sich ähnliche Gleichgewichtsversuche[1] anstellen, die die Entstehung des schneller abklingenden Radiums *C* aus dem Radium *B* zeigen.

Tauchen wir zu verschiedenen Zeiten in gleiche Teile (3 cm^3) einer Vorratslösung Cu unter gleichen Umständen (10 Minuten lang) ein, so wird die Anfangsaktivität des ausgefällten Radiums *C* ein Maß der in Lösung vorhandenen Menge von *C* sein. Wäre das *C* allein in Lösung, so würde Cu,

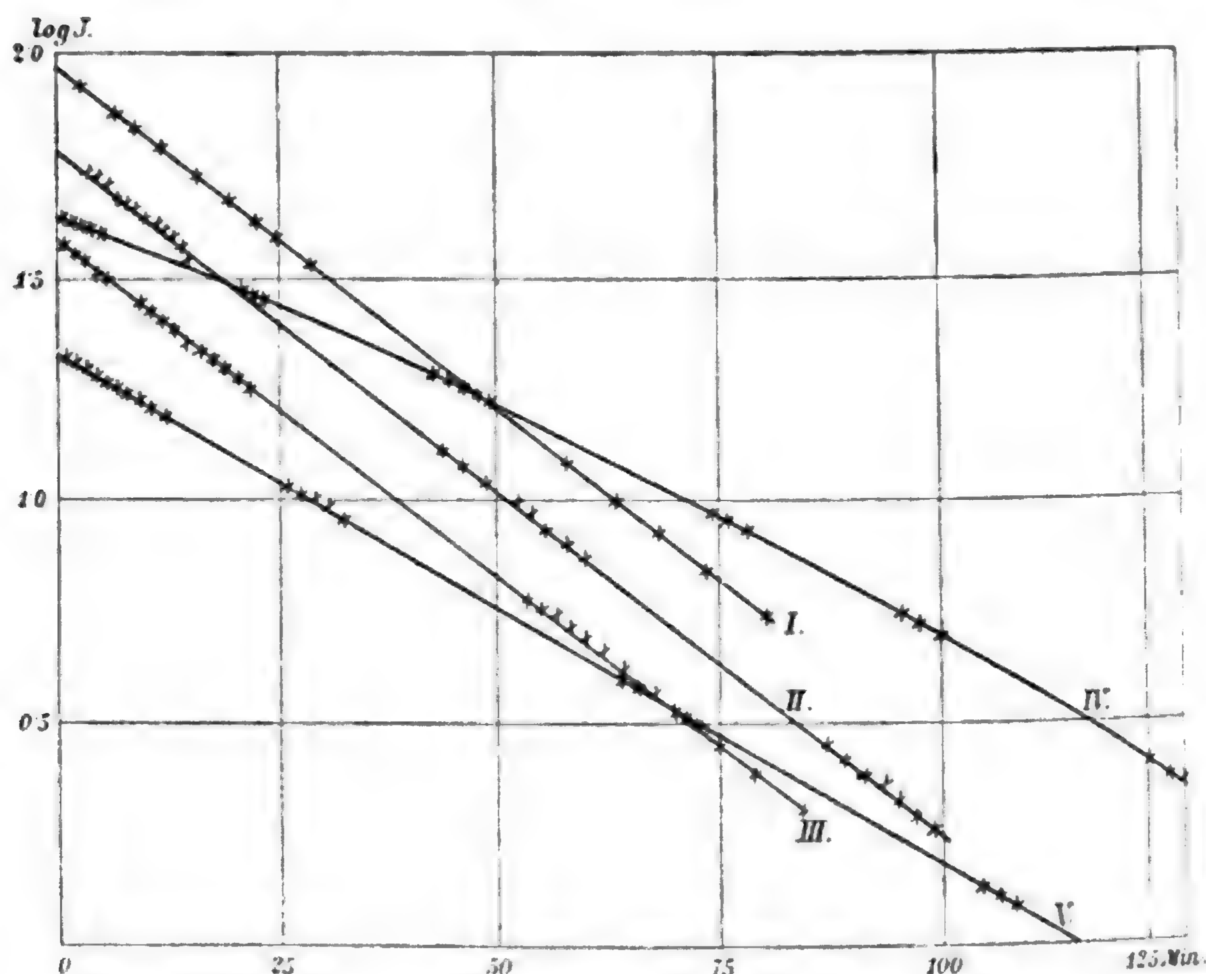


Fig. 1.

I. Ni-Draht, 20 Minuten in Induktions-HCl aktiviert.
II. Cu-Blech, 30 Minuten in Induktions-HCl aktiviert.
III. Blanke Platinkathode ($2 \times 2 \cdot 5$ *cm*) nach $^3/_4$ stündiger Elektrolyse mit 0·0008 A. von Induktions-HCl.
IV. Zn 5 Minuten in Induktions-HCl, $^3/_4$ Stunden nach Herstellung derselben. In der Lösung ist noch nicht *B* und *C* im Gleichgewicht.
V. Zn 5 Minuten in Induktions-HCl, $2^1/_2$ Stunden nach Herstellung derselben.

19·5 Minuten später eingetaucht, nur halb so aktiv werden wie das zu Beginn des Versuches eingetauchte Cu. Inzwischen

[1] Diese Sitzungsber., Abt. II a, März 1905. — Jahrbuch f. Rad. II. Heft 4.

wäre aber auch die Aktivität von letzterem auf die Hälfte gesunken. Die Abklingungskurven der verschiedenen Cu-Proben müßten sich aneinander anschließen und in ihrem weiteren Verlaufe decken. Anders, wenn der aktive Bestandteil nachgeliefert wird, wie es hier der Fall ist. Die Anfangswerte der verschiedenen Kurven liegen innerhalb der Versuchsfehler auf der Abklingungskurve für das Radium *B*. Wenn hier auch wegen der geringen Differenz der Halbierungskonstanten, 19·5 Minuten und 26·7 Minuten, die Unterschiede nicht so groß sind wie beim Thorium — 10·6 Stunden und 1 Stunde — so sieht man doch sehr deutlich, daß sich die verschiedenen Kurven nicht decken.

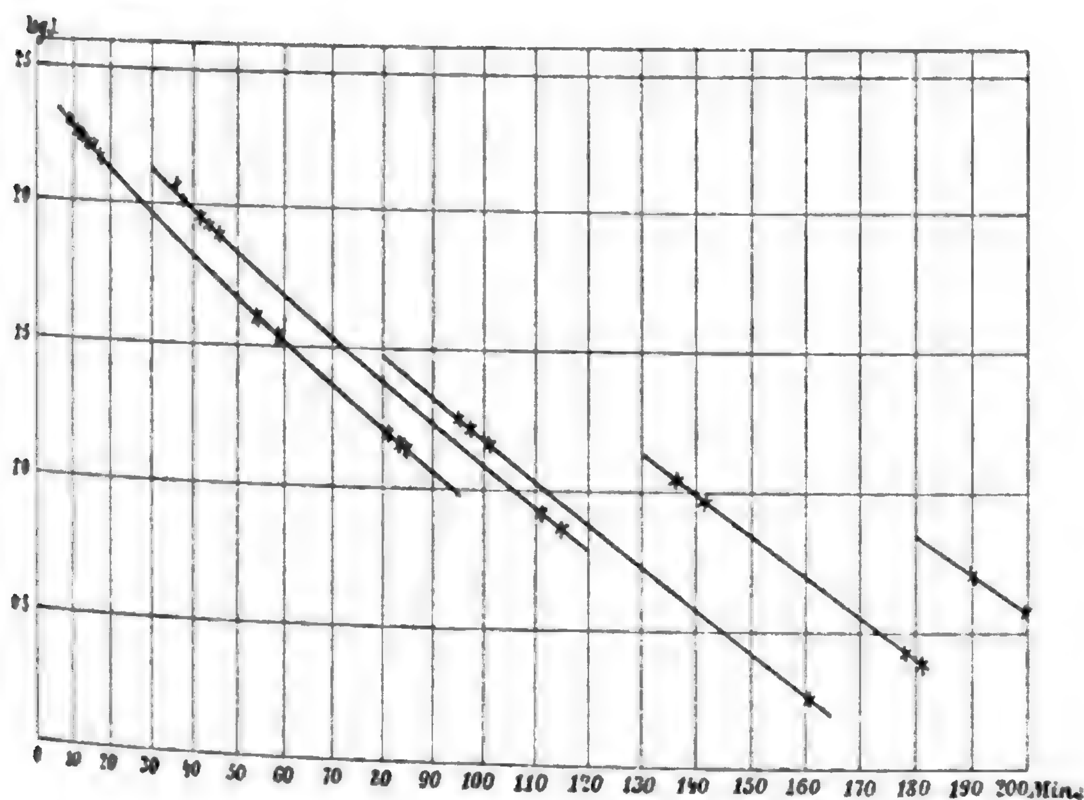


Fig. II.

Eingetauchtes Pb und Fe fällen aus saurer Induktionslösung Radium *C* und eine geringe Menge *B* aus, Pt bleibt inaktiv, Ag und Pd werden nur spurenweise aktiv. Die von Pb und Fe ausgefällte Aktivität klingt zuerst schneller ab und geht allmählich in den Abfall für das *B* über — ähnlich wie die geglühter Bleche.[1] Auch beim Glühen wird das *B* bis auf einen kleinen Rest verdampft und der Überschuß von *C* klingt zuerst

[1] Bronson, l. c.

nach seinem eigenen schnelleren Abfall ab. So berechneten sich aus den verschiedenen aufeinander folgenden Teilen der beobachteten Kurven die Halbierungskonstanten:

für ein Pt-Blech, das 1 Minute im Gebläse geglüht war, 20·2, 21·5, 24·5, 26·25 Minuten,

für ein Fe-Blech, das 26 Minuten in Induktions-HCl getaucht war, 22, 23·5, 24·5 Minuten,

für einen Pb-Draht, der 25 Minuten in Induktions-HCl getaucht war, 24, 25·5, 26·7 Minuten.

Wie bei den Thoriuminduktionen,[1] ist auch hier neben dem Potential Elektrode-Elektrolyt die Oberflächenbeschaffenheit von großer Wichtigkeit für die elektrolytischen Niederschläge. Cu fällt für sich allein nur C aus, platiniertes Pt bleibt inaktiv; wird aber platiniertes Pt mit Cu verbunden eingetaucht, so scheidet sich auch das *B* am platinierten Pt mit ab. In zwei hintereinander geschalteten elektrolytischen Zellen — die Pt-Elektroden waren alle gleich groß, $2\times 2^1/_2\,cm$ — hatte sich nach 18 Minuten Elektrolyse mit 0·0095 A einer salzsauren Induktionslösung an der blanken Platinkathode fast nur Radium *C*, an der platinierten Platinkathode auch Radium *B* abgeschieden, wie das langsame Abklingen des Niederschlages zeigte. Die Platinanode blieb inaktiv. Starke anodische Aktivitäten erhielt man aber durch Bindung des Anions, so durch Verwendung von Ag bei Elektrolyse von Induktions-HCl, von Pb bei Induktions-H_2SO_4 und von Cu bei Elektrolyse von Induktions-KOH als Anodensubstanz. In neutraler Lösung wird eine Pt-Anode deutlich aktiv, stark in alkalischer Lösung. Nach einviertelstündiger Elektrolyse mit 0·3 A einer stark alkalischen (NH_3) Lösung war nach Beendigung der Elektrolyse die blanke Platinkathode zirka 2·3mal so aktiv wie die blanke Platinanode. Da aber die Aktivität an der Kathode schneller abklang wie die der Anode, war die Anode nach 100 Minuten zirka 1·7mal so aktiv wie die Kathode.

Da die beiden Radiuminduktionen elektrochemisch edler sind wie der Wasserstoff, so gelingt es auch mit Spannungen, die unter der Zersetzungsspannung der HCl liegen, bei Verwendung von platinierten Elektroden aktive kathodische

[1] Drude's Ann., Bd. 12, p. 745, 1903.

Niederschläge zu erhalten. Eine Trennung von *B* und *C* durch verschiedene Spannungen konnte aber nicht erreicht werden. Bei 0·8 und 0·7 Volt Badspannung erhielt man an der Kathode Radium *B* und *C*, bei 0·6 Volt in einem Fall fast reines *C*, bei 0·5, 0·3 und 0·2 Volt wieder ein Gemisch beider.

Eine Trennung von *B* und *C* konnte auch auf anderem Wege durchgeführt werden. Metallsalze, einer Induktionslösung zugefügt und nach einer Weile gefällt, »reißen Aktivität mit sich«. Baryumnitrat, einer Induktions-HCl zugesetzt und nach einer

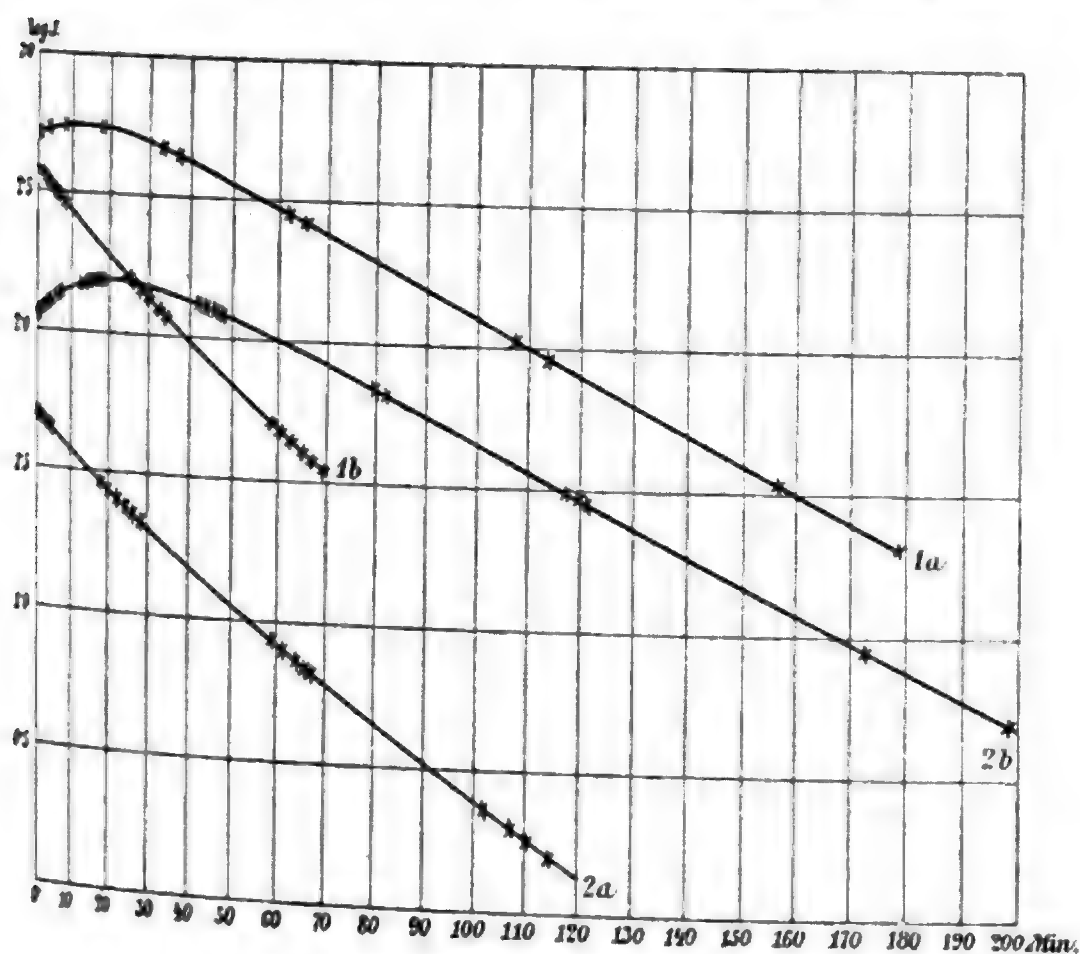


Fig. 3.

Minute in der Wärme mit H_2SO_4 gefällt, reißt das Radium *B* mit sich; im Filtrat findet sich nach Eindampfen reines Radium *C* (vergl. Fig. III, 1 *a* das gefällte Baryum, erste Messung zirka eine Viertelstunde nach der Fällung; 1 *b* das eingedampfte Filtrat).

Wird $CuSO_4$ einer Induktions-HCl zugefügt und nach einer Minute in der Wärme mit KOH gefällt, so scheidet sich zugleich mit dem Kupfer etwas Radium *B* mit einem Überschuß

von C ab (Fig. III, 2 *a*). Im Filtrat findet sich das restliche B (Fig. III, 2 *b*). Da sich die Aktivität der eingedampften KOH nicht bequem messen läßt, so wurde — auch um möglichst schnell zu arbeiten — das alkalische Filtrat elektrolysiert und der Niederschlag an der platinierten Platinkathode untersucht. Aus dem anfänglichen Anstieg seiner Aktivität konnte man auf die Anwesenheit von Radium B schließen. Die erste Messung geschah zirka eine Viertelstunde nach der Fällung mit KOH.

Während sich bei der Fällung von Baryum im Filtrat das Radium C findet, bleibt bei der Fällung von Cu das Radium B im Filtrat.

Blei, einer Induktions-HNO_3 zugesetzt und mit H_2SO_4 in der Wärme gefällt, läßt Radium C im Filtrat. Ähnliche Versuche, mit Zn, Ag, Fe angestellt, ergaben zwar sämtlich aktive Niederschläge, doch konnte eine Trennung von B und C nicht erreicht werden.

Aus 15 Abklingungskurven für das Radium C, denen verschiedene Wertigkeit beigelegt wurde, ergab sich als Mittelwert für die Halbierungskonstante 19·5 Minuten. Die Werte, aus denen das Mittel genommen wurde, lagen zwischen den Grenzen 19·24 und 19·95 Minuten. Kurven, bei denen eine Zunahme der Halbierungskonstante im letzten Teil beobachtet wurde, sind nicht in die Rechnung aufgenommen.

Um die andere Halbierungskonstante zu erhalten, wurden mehrere Abklingungskurven zirka eine Stunde lang induzierter Bleche aufgenommen; die erste Messung 3 bis 4 Stunden nach dem Entfernen vom Radiumpräparat. Als Mittelwert von zwölf Kurven, deren Halbierungskonstanten innerhalb 27 und 28 lagen, ergab sich 27·4 Minuten als Halbierungskonstante für die Zeit $4^3/_4$ Stunden nach dem Entfernen vom Präparat, also zirka $4^1/_4$ Stunden nach Erreichen des Maximums.

Um sich ein Bild zu machen, wie schnell die Abklingungskurven in eine einfache e-Funktion übergehen ($e^{-\lambda_2 t}$ gegenüber $e^{-\lambda_1 t}$ zu vernachlässigen ist), kann man folgende einfache Rechnung ausführen: Klingt eine Substanz nach einer einfachen e-Funktion ab $J_t = J_0 e^{-\lambda t}$, so besitzt sie die Halbierungskonstante

$$HC = \frac{ln 2}{\lambda} = -\frac{J ln 2}{\frac{dJ}{dt}} \quad \ldots \text{I)}$$

Allgemein ist die jeweilig vorhandene Menge Radium *C* durch die Differenz zweier *e*-Funktionen gegeben, wenn man vom Radium *A* absieht, was bei den hier vorliegenden Versuchen sicher erlaubt ist.

Rechnen wir die Zeit vom Erreichen des Maximums an, also $t = 0$, $\frac{dJ}{dt} = 0$, so erhalten wir:

$$J_C = a\left(e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}\right) \quad \ldots \text{II)}$$

Ordnen wir einem Kurvendifferential eine Halbierungskonstante zu, so erhalten wir aus I und II

$$HC = \frac{ln 2 (\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})} \quad \ldots \text{III)}$$

Die HC_2 beträgt nach direkten Messungen des abgetrennten Radiums *C* 19·5 Minuten. Die HC_1 für das Radium *B* ist so zu wählen, daß wir zirka 4¹/₄ Stunden nach Erreichen des Maximums die Halbierungskonstante 27·4 Minuten erhalten. $HC_1 = 26 \cdot 7$ Minuten.

Zeit in Stunden	Halbierungskonstante in Minuten
0	∞
0·5	48·31
1	35·97
1¹/₂	31·96
2	30·03
2¹/₂	28·96
3	28·26
3¹/₂	27·81
4	27·50
4¹/₂	27·28
5	27·13
6	26·93
10	26·72
∞	26·7

Wegen der geringen Verschiedenheit der beiden Halbierungskonstanten nähert sich das HC der Gleichung III) nur langsam dem Werte $\frac{ln\,2}{\lambda_1} = HC_1$. Nach zirka $3^1/_2$ Stunden beträgt sie in Übereinstimmung mit den Curie'schen Angaben 28 Minuten.

Zum Schluß soll noch in zwei Fällen die Übereinstimmung von beobachteter und berechneter Kurve gezeigt werden.

Das aus einer Induktionslösung gefällte Baryum.

(Vergl. Fig. III, 1 *a*.)

Zeit in Minuten	Aktivität	
	beobachtet	berechnet
0	501	515
3·5	522	528
8·2	543	533
18	520	513
33·7	440	435
37·1	413	415
61·8	279	275
65·7	253	256
107·5	108	107
113·3	95	94
155·7	35·4	35·1
170·2	24·8	24·8
178·5	20·2	20·2

Die Aktivität des Filtrates nach der Fällung des Cu.

(Vergl. Fig. III, 2 *b*.)

Zeit in Minuten	Aktivität	
	beobachtet	berechnet
0	362	359
1·5	380	383
2	392	389
3	401	402
4·5	410	419
5·5	430	430
9·25	456	456
13·5	475	480
15	482	484
16·5	494	488
17·5	496	489
19	490	490
26	482	481
27·5	483	478
29	466	473
42·5	413	414
44·8	399	403
47	387	391
49	380	380
80	223	224
82	214	215
118	100	101·0
120	95	96·6
172·5	28·5	28·5
198·2	15·2	15·27

Zusammenfassung der Resultate.

Das elektrochemisch edlere Radium *C* besitzt die kleinere Halbierungskonstante und läßt sich durch Cu und Ni sowie durch Elektrolyse mit geringer Stromdichte an einer blanken

Pt-Kathode vom Radium *B* trennen (Analogie mit den Thoriuminduktionen).

Das Entstehen des schneller abklingenden *C* aus dem *B* läßt sich durch direkte Abtrennungen zeigen. Auch mit Spannungen, die unterhalb der Zersetzungspannung der HCl liegen, erhält man aktive kathodische Niederschläge.

Die Anode bleibt bei Verwendung salzsaurer Induktionslösung inaktiv. Wird das Anion gebunden, erhält man auch aktive anodische Niederschläge. In neutraler Lösung wird die Anode schwach, in alkalischer stark aktiv.

Fügt man zu einer Induktions-HCl Baryumnitrat und fällt das Ba mit H_2SO_4, so findet sich im Filtrat das Radium *C*, während das Radium *B* vom Baryum mitgerissen wird.

Kupfer, mit Kalilauge gefällt, reißt das Radium *C* mit einem Teil des *B* mit, das restliche Radium *B* findet sich im Filtrat.

Als Konstante wurden gefunden für das

$$\text{Radium } B\text{: } HC_1 = 26\cdot 7 \text{ Minuten}, \lambda_1 = 4\cdot 327 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{sec}}$$

$$\text{Radium } C\text{: } HC_2 = 19\cdot 5 \text{ Minuten}, \lambda_2 = 5\cdot 924 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{sec}}.$$

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. III. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Versuche im elektrostatischen Drehfelde

von

Viktor v. Lang,
w. M. k. Akad.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. März 1906.)

Die nachfolgenden Versuche wurden mit der Absicht begonnen, die schönen, zuerst von Arno[1] beschriebenen Erscheinungen eines elektrostatischen Drehfeldes auch einer größeren Zahl von Zuhörern wahrnehmbar zu machen. Die hiezu konstruierten Apparate sind im ersten Teile dieser Arbeit beschrieben, der zweite Teil enthält dann einige neue Versuche, bei denen die Drehungen in Flüssigkeiten vor sich gehen.

Was vor allem die Erzeugung des Drehfeldes betrifft, so wurde hiezu der Wechselstrom der hiesigen Internationalen Elektrizitätsgesellschaft benützt. Derselbe hat 5000 Wechsel (2500 ganze Perioden) in der Minute und wird in den Häusern mit einer Spannung von 100 Volt geliefert. Diese Spannung wurde durch einen Transformator wieder auf die Höhe von 10.000 Volt gebracht. Arno hat gezeigt, wie man aus einem solchen einphasigen Wechselstrom ein statisches Drehfeld erzeugen kann, indem man den Transformator durch einen Widerstand und einen Kondensator in Reihe schließt und von den Enden des Widerstandes und den Belegungen des Kondensators kreuzweise Leitungen nach den vier Polen des Drehfeldes führt. Diese Methode hat aber den Nachteil, daß zwei benachbarte Pole des Drehfeldes sich auf demselben Potentiale befinden und daher nur für die Mitte ein kreisförmiges Dreh-

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 16 Oct. 1892; Elektrotechn. Zeitschrift 14 (1893), p. 17.

feld existiert. Auch die von Guye und Denso[1] angegebene Abänderung des Arrangements von Arno hilft da nichts.

Da es nun für manche der folgenden Versuche fast unumgänglich nötig ist, daß das ganze Drehfeld gleichförmig sei, so habe ich dasselbe zuerst mit Hilfe von zwei Transformatoren hergestellt. In den primären Kreis des einen wurde Widerstand, in den des andern ein Kondensator gelegt. Die sekundären Kreise endigten natürlich in den entsprechenden Polen des Drehfeldes; die Versuche gingen auf diese Weise ganz gut. Der Nachteil dieser Methode besteht aber nicht nur in dem Erfordernis zweier Transformatoren, sondern auch in der großen Kapazität, die der Kondensator notwendig haben muß; so gab der eine Transformator, mit einem Widerstand von 24 Ω an die Wechselstromleitung gelegt, eine Spannung von 7000 Volt; um dies nun unter Einschaltung eines Kondensators zu erreichen, mußte derselbe beiläufig 134 Mikrofarad haben. Freilich braucht dieser Kondensator nur eine Spannung von 100 Volt zu ertragen, falls man ihn beim Aus- und Einschalten vor der Wirkung etwaiger Extraströme schützt.

Einfacher stellt sich jedoch die Sache durch Benützung der von Görges[2] angegebenen Schaltung, die auch für technische Zwecke vorgeschlagen wurde. Die Pole A, B der Sekundärspule eines Transformators werden hiebei zweimal verbunden, und zwar immer durch einen Widerstand und Kondensator in beiden Zweigen, aber in umgekehrter Ordnung, wie dies in Fig. 1 dargestellt ist. Hier sind C, D auf den beiden Zweigen die Punkte, wo Widerstand und Kondensator aneinanderstoßen und die Spannung zwischen diesen Punkten ist um 90° gegen die Spannung zwischen A, B verschoben. Da auch die Spannungen AC gegen BC und AD gegen BD um 90° verschieden sind, so ist die Spannung auf den vier Punkten A, C, B, D immer um 90° verschieden und man hat in jedem Orte des von ihnen gespeisten Drehfeldes dieselbe Beschaffenheit desselben. Soll

[1] Sur la réalisation d'un champ électro-statique tournant de haute tension. L'Éclairage Électrique. 7 Mai 1904.

[2] H. Görges, Über die graphische Darstellung des Wechselpotentials und ihre Anwendung. Elektrotechn. Zeitschr. 19 (1898), p. 164.

das Drehfeld ein kreisförmiges sein, so muß noch die Spannung AC gleich BC und die Spannung AD gleich BD gemacht werden. Es seien einerseits die beiden Widerstände (R) gleich und ebenso die Kapazitäten (C) der beiden Kondensatoren gleich, dann erfordert die gestellte Bedingung die Erfüllung der Gleichung

$$RCb = 1,$$

wo $b = 2\pi n$ und n die Frequenz oder Periodenzahl des Wechselstromes bedeutet. Für $C = 0{\cdot}001\,\mu F$ gibt dies $R = 3{\cdot}8$ Meg.-Ohm. Diese Zahlen geben eine Orientierung über die anzuwendenden Apparate, die genaue Abgleichung muß natürlich durch Versuche erfolgen, indem man z. B. die benützten Wasserwiderstände durch mehr oder weniger tiefes Eintauchen der als Elektroden dienenden Platindrähte reguliert. Die Widerstände waren aus U-förmig gebogenen Glasröhren gebildet, deren Länge 60 *cm* betrug und einen inneren Durchmesser von 3·5 *mm* hatten; sie wurden mit dem Wasser der hiesigen Wasserleitung gefüllt. Die Kondensatoren bestanden aus kleinen Bechergläsern von 10·5 *cm* Höhe und einem äußeren Umfange von 18 *cm*, die Glasdicke betrug beiläufig 1 *mm*. Diese Gläser wurden bis zu einem Abstande von 1·5 *cm* vom Rande außen und innen mit Stanniol belegt, das Innere noch bis zur selben Höhe mit Graphit angefüllt, in welchem die Zuleitung eingebettet war. Jedes dieser Gläser stand in einem 6 *cm* hohen Metallgefäß, an welchem die andere Zuleitung befestigt war.

Bei einer gewissen Stromstärke im primären Kreise des Transformators wurde mit Hilfe eines Braun'schen Elektroskopes für die Widerstände der Spannungsabfall gemessen $AC = BD = 5200$ Volt für die Kondensatoren aber $BC = AD = 5300$ Volt, ferner wieder die Spannungen $AB = 8000$ Volt und $CD = 7300$ Volt beobachtet. Bei vollem Strom wurde gefunden $AB = 9600$ Volt und $CD = 9200$ Volt. Eine volle Gleichheit war nicht zu erzielen, was wohl auf Rechnung der wenig sorgfältigen Isolierung des Apparates zu setzen sein dürfte.

Die Punkte A, B waren direkt mit den Klemmen A', B' des Drehfeldes in Verbindung, die Punkte C, D aber unter Einschaltung eines Hochspannungskommutators mit den Klemmen C', D'. Das Drehfeld bestand aus einem quadratischen Grund-

brett mit vier Füßen und hatte 45 *cm* Seitenlänge. Auf demselben waren vier Brettchen von der Gestalt eines gleichseitigen rechtwinkeligen Dreiecks so befestigt, daß dadurch nach den Diagonalen des Grundbrettes Führungen von trapezförmigem Querschnitt ausgespart blieben, in welche die Pole des Drehfeldes verschoben werden konnten (Fig. 2).

Diese Führungen hatten auf ihrer Grundfläche noch schmale Schlitze, welche gestatteten, die Pole mit den Klemmen A', B', C', D' mittels isolierter Drähte unterhalb des Brettes in Verbindung zu setzen. Diese Einrichtung wurde getroffen, um den Beobachter vor zufälligen Berührungen mit den Leitungen der sekundären Rolle zu schützen.

Als Träger der Pole wurden Holzstücke verwendet, die 3·4 *cm* stark waren und deren Gestalt aus Fig. 4 ersichtlich ist. An ihrem unteren Ende hatten sie trapezförmige Ansätze, mit welchen sie in den erwähnten Führungen verschoben werden konnten. Die Zuführungsdrähte gingen auch hier geschützt durch eine Bohrung dieser Holzstücke und endigten an der hohen schmalen Seite derselben in Messingzapfen. Letztere haben eine horizontale Bohrung, die sich erweitert in dem Holzträger fortsetzt; in derselben bewegen sich Drähte, die die eigentlichen Polplatten tragen; durch Schrauben in den Messingzapfen können sie fixiert werden.

Um die Vorgänge im Drehfelde besser beobachten zu können, wurden die Polplatten nicht aus Blechen, sondern aus Drahtgitter verfertigt. Es wurden zweierlei rechteckige Polplatten angewandt. Die größeren hatten die Dimensionen 12×7 *cm* und waren in ihrer Mitte an die Führungsdrähte gelötet (Fig. 5). Dieselben wurden, wenn größere Gegenstände im Drehfelde untersucht werden sollten und die Polplatten daher weit auseinander zu ziehen waren, mit ihrer längeren Kante horizontal gestellt. Stellt man dagegen diese Kante aufrecht, so können die Platten näher aneinander gebracht werden, wodurch die Intensität des Feldes wächst. Um noch stärkere Felder zu erzielen, wurden bei den im zweiten Teile beschriebenen Versuchen Drahtnetze von 4×6·5 *cm* verwendet, die in der Mitte ihrer unteren kurzen Kante den Führungsstift tragen. Diese Platten können bis auf den Abstand von 6 *cm* genähert

werden; bei einer Spannung von 9000 Volt zwischen den gegenüberliegenden Polen gibt dies eine Feldstärke von $\frac{9000}{6 \cdot 300} = 5$ elektrostatische Einheiten.

Um die Polplatten für verschiedene Entfernung schnell gleich weit einstellen zu können, sind an den Kanten der vier Führungen Einteilungen angebracht, auf welche etwa der hintere Rand der hölzernen Polträger eingestellt wird. Die Ziffern der Teilungen geben gleich den Abstand der Polplatte vom Zentrum des Drehfeldes.

Die Drehung von Isolatoren im Drehfelde kann man sehr augenfällig mit Hilfe von Papierzylindern zeigen. Ein Blatt Schreibpapier, etwa 10×20 *cm*, wird über einen soliden Holzzylinder gerollt und die Enden zusammengeklebt; in das eine Ende wird dann noch ein Boden eingefügt, indem man aus Papier eine entsprechende Kreisfläche schneidet, an derselben aber etwa sechs kleine Ansätze (3×5 *mm*) läßt, die umgebogen und an die innere Fläche des Zylinders geklebt werden. In die Mitte des Bodens wird dann mit einem Korkbohrer noch ein Loch von 5·5 *mm* Durchmesser gemacht, um den Zylinder auf ein Hütchen stecken zu können, das sich auf der Spitze einer Nähnadel mit äußerst geringer Reibung dreht. Dieses Hütchen besteht aus einer kleinen, sehr leichten Messingscheibe, die in ihrer Mitte einen kleinen Hohlzylinder mit einem Achatstein trägt: Gesamtgewicht 1·2 *g*. Da der äußere Durchmesser (4·5 *mm*) dieses Zylinders kleiner ist als der Durchmesser des zuvor besprochenen Loches, so ist es durch kleine Verschiebungen immer möglich, dem Papierzylinder eine vertikale Stellung zu geben.

Der Träger der Nähnadel ist in Fig. 6 abgebildet. Derselbe, aus Messing verfertigt, gestattet, die Spitze der Nadel in verschiedener Höhe über das Grundbrett zu bringen, etwa von 24 bis 18 *cm*, ja noch tiefer, wenn man den Träger gerade über das Loch in der Mitte des Grundbrettes stellt (Fig. 3).

Die Länge der benützten Papierzylinder war ungefähr 10 *cm*. Der Durchmesser variierte zwischen 5 und 5·5 *cm*. Um die Drehung derselben auf die Entfernung beobachten zu können, wurden ihre Mantelflächen mit Farbenstreifen vertikal

oder spiralförmig bemalt. Die Anwendung von paraffiniertem Papier ergab keine wesentlichen Vorteile, die Zylinder werden allerdings dadurch etwas widerstandsfähiger.

Stellt man nun einen solchen Zylinder in die Mitte des Drehfeldes und erregt dasselbe, so gerät er alsbald in lebhafte Rotation, deren Richtung sich ändert, wenn die eine Verbindung kommutiert wird. Dies geht noch, wenn die Spannung zwischen gegenüberliegenden Polen nur mehr 4500 Volt, ihre Entfernung dagegen 30 *cm* beträgt, was für die Stärke des Feldes eine halbe Einheit ergibt.

Auf gleiche Weise kann man nun Holz- und Pappschachteln in Drehung versetzen, indem man im Boden derselben ein Loch macht, womit man sie mit Hülfe des Achathütchens auf der Nadelspitze balanciert. Ich habe so Schachteln von 20 *cm* Durchmesser und 10 *cm* Höhe in Rotation versetzt. Um dieDrehung weithin sichtbar zu machen, kann man auf die Schachtel konzentrisch noch einen der beschriebenen bemalten Papierzylinder stellen.

Man kann auch mehrere drehbare Papierzylinder in das Drehfeld bringen, welche dann gleichzeitig rotieren und so die Homogenität des Drehfeldes in seiner ganzen Ausdehnung demonstrieren. Zweckmäßig verwendet man fünf solche Zylinder, wie dies in Fig. 1 angedeutet ist.

Aber auch außerhalb des Drehfeldes kann ein Papierzylinder in Drehung geraten, besonders in Punkten der Diagonalen des Drehfeldes. Man überzeugt sich leicht, daß in solchen Punkten die Kraftlinien zweier benachbarter Pole sich senkrecht schneiden und, da sie sich um 90° in der Phase unterscheiden, ein Drehfeld geben, nur geht die Rotation im entgegengesetzten Sinne vor sich. Man kann dies mit den fünf Zylindern sehr schön zeigen, indem man bei engem Drehfeld einen Zylinder in die Mitte desselben, die vier übrigen aber außerhalb in den Diagonalen des Grundbrettes aufstellt (Fig. 2). Die äußeren Zylinder drehen sich dann entgegengesetzt wie der innere.

Diese Erscheinung kann sehr gut zur Kontrolle bei Untersuchungen im eigentlichen Drehfelde verwendet werden, indem man außerhalb in einer der Diagonalen einen drehbaren Papierzylinder aufstellt. Man ersieht aus dessen Drehung fürs erste,

ob das Drehfeld in Ordnung ist und nicht etwa eine der Komponenten versagt, fürs zweite erfährt man hiedurch auch immer den Sinn der Drehung des Feldes, welcher ja entgegengesetzt dem der Drehung außerhalb ist.

Sehr schön kann man die Durchlässigkeit der Isolatoren und die Schirmwirkung der Leiter mit Bezug auf die elektrischen Kraftlinien zeigen. Man stellt zu diesem Zwecke einmal einen Glaszylinder über den rotierenden Papierzylinder, das andere Mal aber einen Zylinder aus Drahtnetz; im letzteren Falle hört der Zylinder auf zu rotieren, wenn die Maschen des Netzes gegenüber der Feldstärke eng genug sind. Der Glaszylinder stört natürlich nicht.

Mit Hilfe der Spitze können auch andere Isolatoren als Papier in Rotation versetzt werden, nur dürfen sie kein großes Gewicht haben, da sonst die Reibung zu groß wird. Ich habe aber auf diese Weise auch eine kleine Kristallisierschale aus Glas, in deren Boden ein entsprechendes Loch gebohrt war, zur Drehung gebracht, ebenso Scheiben aus Wachs, Hartgummi etc. Schwerere Gegenstände müssen an Fäden aufgehängt werden, deren Torsion der Drehung entgegenwirkt, so daß es bei schwachen Kräften nur zu einer Ablenkung aus der Ruhelage kommt.

Beispielsweise erwähne ich, daß aufgehängte hohle Glaskugeln bis zu einem Durchmesser von 8 *cm* sehr gut rotieren, und es macht hiebei keinen Unterschied, ob sie evakuiert sind oder nicht. Man kann zu diesem Versuche einfach Glühlampen verwenden, auch unbrauchbar gewordene, indem man sie mit der Fassung nach oben in das Drehfeld hängt.

Es ist zur Rotation aufgehängter Körper auch gar nicht nötig, daß dieselben drehrund seien. So zeigten ganz unregelmäßige Stücke von Bernstein, Stangenschwefel, Paraffin etc. sehr gut die Dreherscheinung. Die Aufhängung erfolgte hiebei mittels 70 *cm* langer Seidenfäden, die einen Durchmesser von beiläufig $^1/_{20}$ *mm* hatten. Sehr viel wurde zu den nachfolgenden Untersuchungen ein prismatischer Quarzkristall verwendet, der an seinen Enden sehr unregelmäßig ausgebildet war; die Gesamtlänge desselben betrug 4 *cm*, sein Gewicht 5·6 *g*.

II.

Dadurch, daß man die zu untersuchenden Körper aufhängt, hat man die Möglichkeit, die Drehung dieser Körper auch in Flüssigkeiten untersuchen zu können. Da zeigten sich nun auch Rotationen, die verkehrt wie die Drehung des Feldes vor sich gehen. Heydweiller[1] bezeichnet diese Drehungsrichtung als positiv im Gegensatze zu der normalen Rotation der Dielektrika im Sinne des Feldes, welche Drehungsrichtung er mit negativ bezeichnet.

Die Erscheinung wurde an allen untersuchten Isolatoren beobachtet: Glas, Quarz, Hartgummi, Paraffin, Schwefel, Bernstein. Dagegen fand ich unter 17 benutzten Flüssigkeiten nur drei, in welchen diese Körper verkehrt rotieren; es sind dies Äther, Chloroform und Xylol. Die übrigen Flüssigkeiten zerfallen in zwei Klassen: in solche in, welchen die Drehung wie in Luft erfolgt, und in solche, worin gar keine Rotation zu beobachten war.

Die untersuchten Flüssigkeiten lassen sich aber durch ihre absorbierende Wirkung, die sie auf die elektrischen Strahlen ausüben, ebenfalls in zwei Klassen teilen. Zur Untersuchung dieser Wirkung wurde ein ringförmiges Gefäß aus zwei Bechergläsern, innen beziehungsweise 17·2 und 4 *cm* weit, gebildet, welche konaxial ineinander gestellt wurden. In das innere Glas wurde Quecksilber gegossen, um das Schwimmen desselben zu verhindern, wenn der ringförmige Zwischenraum mit Flüssigkeit angefüllt wurde. Letzterer bildete so einen Hohlzylinder von 1·6 *cm* Wandstärke und 7·5 *cm* Höhe, welcher um den im Drehfelde aufgehängten Isolator gestellt werden konnte.

Folgende Flüssigkeiten hoben jede Rotation auf, absorbierten also sämtliche elektrische Strahlen:

A { Wasser,
Alkohol,
Karbolsäure,
Anilin,
Äthylacetat,
Amylacetat.

[1] Über bewegte Körper im elektrischen Felde. W. A. Bd. 69 (1891), p. 531.

Für diese Flüssigkeiten dürfte nach den für Wasser, Alkohol, Anilin bekannten Zahlen die Leitfähigkeit bezogen auf Ω^{-1} und cm^{-1}, schon größer als 10^{-8} sein.

Es ist nun begreiflich, daß es in den Flüssigkeiten A zu keinen Rotationen kommen kann, da ja die ganze Wirkung des Drehfeldes durch sie absorbiert wird. Im Gegensatze hiemit wurde keine solche Schutzwirkung beobachtet bei jeder Flüssigkeit, in welcher Rotation stattfand, sei es in dem einen oder anderen Sinne.

Die normale (negative) Drehung wird beobachtet bei:

B {
Benzol,
Toluol,
Benzin,
Schwefelkohlenstoff,
Petroleum,
Olivenöl,
Terpentinöl,
Ricinusöl,[1]

die verkehrte (positive) Drehung, wie schon erwähnt, bei:

C {
Äther,
Chloroform.
Xylol.

Es liegt nun nahe, dieses verschiedene Verhalten der Flüssigkeiten nach den Prinzipien zu erklären, welche schon Hertz in der Untersuchung: »Über die Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche bewegter Leiter«[2] aufgestellt hat und die von v. Schweidler[3] weiter entwickelt worden sind. In der Tat weist schon Heydweiller[3] nach, daß bei Bewegungen im elektrischen Felde nicht nur die dielektrische Hysteresis, welche hemmend (negative Rotation) wirkt, sondern auch die

---

[1] Hier konnten wegen der Dickflüssigkeit allerdings nur Spuren von Drehung beobachtet werden.

[2] W. A. Bd. 13 (1881), p. 266; Ges. W. I, p. 135.

[3] Über Rotationen im homogen elektrischen Felde, W. Ber., 1897, Bd. 106, II a, p. 520.

[4] L. c.

von Hertz berechneten Kräfte, welche hemmend und treibend (positive Rotation) wirken können, eine Rolle spielen. Sollen diese Kräfte verkehrte (positive) Rotationen der festen Isolatoren geben, so muß die Leitfähigkeit derselben größer sein als die der Flüssigkeit. Dies würde nun für die Flüssigkeiten der Gruppe C stimmen zufolge von Bestimmungen, welche Prof. v. Schweidler die große Güte hatte, an Proben der benützten Flüssigkeiten neu auszuführen. Er fand für die Leitfähigkeit der Flüssigkeiten C beziehungsweise $2\cdot 10^{-11}$, 1 10^{-9}, $2\cdot 10^{-11}$ (Ω^{-1} cm^{-1}). Dieselbe ist also unzweifelhaft größer als die der benutzten Isolatoren, deren Leitfähigkeit (Glas vielleicht ausgenommen) kleiner als 10^{-16} sein dürfte.

Diese Leitfähigkeit der benutzten Isolatoren ist aber auch kleiner als die Leitfähigkeit der Flüssigkeiten B, die um 10^{-11} liegt. Trotzdem gehen die Rotationen in diesen Flüssigkeiten im normalen (negativen) Sinne vor sich. Es müssen also in diesem Falle schon die Erscheinungen der dielektrischen Polarisation überwiegen, was ja bei dem jetzigen, so viel kleineren Unterschied der Leitfähigkeiten begreiflich wird.

Zum Schlusse will ich noch einige gelegentliche Beobachtungen mitteilen. Es liegt nahe, zu untersuchen, ob nicht auch die schlecht leitenden Flüssigkeiten selbst im Drehfelde rotieren. Spuren solcher Rotationen wurden allerdings bemerkt; daß es zu keiner eigentlichen Drehung der ganzen Flüssigkeit kommt, dürfte wohl auf die große Reibung zwischen derselben und der Gefäßwand zurückzuführen sein.

So bewegen sich kleine Hartgummispäne in Chloroform sehr lebhaft längs des Gefäßrandes unterhalb der Oberfläche in dem durch die Kapillarität gehobenen Flüssigkeitsvolumen, und zwar ist die Rotation normal. Man sieht dies schon bei Untersuchung eines Hartgummizylinders (Höhe etwa 4 *cm*, Durchmesser 1·6 *cm*) in Chloroform, in dessen untere Fläche man zweckmäßig ein Messingstück schraubt, um das Schwimmen zu verhindern. Das Chloroform greift nämlich das Hartgummi an und es lösen sich kleine Partikelchen davon ab. Letztere bewegen sich sogleich entgegengesetzt der verkehrten Drehung des Zylinders in weiten Spiralen nach dem Rande des Gefäßes.

Eine kleine plankonvexe Linse aus Hartgummi (Durchmesser 14 *mm*), welche, auf Chloroform schwimmend, ins Drehfeld gebracht wird, rotiert lebhaft in verkehrtem Sinne, geht aber an den Rand und rollt dort im normalen Sinne weiter.

Mit Korkteilchen konnte keine Rotation beobachtet werden.

Streut man auf Petroleum im Drehfelde Lykopodium, so fällt ein Teil zu Boden, ohne eine Drehung der Flüssigkeit anzuzeigen, ein Teil sammelt sich aber an der Oberfläche zu kleinen Flecken, die lebhaft im normalen Sinne rotieren und sich, wenn sie an die Gefäßwand gelangen, in demselben Sinne weiter bewegen. Die Flecken erreichen nämlich nicht den Rand selbst, sondern gehen nur bis dahin, wo die Erhöhung der Flüssigkeit durch die Kapillarität beginnt. Diese Vorwärtsbewegung der Flecken ist in einem engen Gefäße (3 *cm* Durchmesser) nicht mehr wahrzunehmen, während ihre Rotation noch immer stattfindet.

In Benzol konnte keine Bewegung der Flüssigkeit beobachtet werden, Hartgummispäne gehen darin direkt zu Boden, während Korkteilchen zwar lebhaft um ihre Axe rotieren, aber keine Flüssigkeitsbewegung anzeigen. Ebenso rotieren Lykopodiumhäutchen lebhaft, halten sich aber ziemlich in der Mitte des Gefäßes; erst wenn sie so groß sind, daß sie den Rand berühren, bleiben sie stehen,

Ich habe auch einige Radiometer im Drehfelde untersucht. Ein gewöhnliches Radiometer mit einseitig geschwärzten Aluminiumflügeln rotierte in normaler Richtung, wie dies schon von verschiedenen Forschern beobachtet wurde. Das zweite Radiometer bestand aus einem drehbaren Glimmerzylinder mit fixer einseitig geschwärzter Platte im Zentrum. Dieser Apparat ist von Puluy[1] angegeben; im Drehfelde rotierte der Glimmerzylinder in verkehrter Richtung, und zwar scheint der Versuch in schwächerem Felde fast besser zu gehen. Andere, auch von Puluy angegebene ähnliche Radiometer mit beweglichen Glaszylindern zeigten keine Rotation.

Die Drehung eines Glimmerzylinders wurde auch in Flüssigkeit beobachtet. Ein Glimmerblatt von $5^1/_2$ *cm* Höhe und

[1] Strahlende Elektrodenmaterie, Wr. Ber. 81, II (1850), p. 864.

13 *cm* Breite wurde zusammengerollt und zwischen zwei Messingringe von 2 *cm* Durchmesser gesteckt; der so gebildete Zylinder gab im Äther verkehrte Rotation. Ein ähnlicher Zylinder von größerem Durchmesser zeigte die Erscheinung weniger gut.

Überhaupt scheinen bei gleichem Gewichte per Längeneinheit Hohlzylinder im Nachteile gegen solide Zylinder zu sein, was wohl daher rührt, daß durch die so viel größere Oberfläche der Hohlzylinder die Reibung stärker wächst als das Drehungsmoment.

Über die Bestimmung der thermischen Änderungen des Elastizitätsmoduls von Metallen aus den Temperaturänderungen bei der gleichförmigen Biegung von Stäben

von

Anton Waßmuth,
k. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Februar 1906.)

Schon im Jahr 1902[1] habe ich auf die Möglichkeit hingewiesen, aus der Abkühlung, die ich bei der Biegung von Metallstäben beobachtete, einen Schluß auf die Änderung, welche der Elastizitätsmodul mit der Temperatur erfährt, zu ziehen. So gilt für den gleichförmig gebogenen Draht die Voigt'sche Gleichung:[2]

$$\frac{\gamma}{T}\tau_{12} = \frac{\varepsilon}{E}\cdot\frac{M_2^2-M_1^2}{\left(\frac{1}{2}r^6\pi^2\right)}, \tag{1}$$

wobei τ_{12} jene Temperaturänderung vorstellt, die eintritt, wenn die Drehung des zylindrischen Stabes vom kreisförmigen Querschnitte (Dicke $= 2r$) vom Moment M_1 aus in das Moment M_2 erfolgt ist; dabei ist γ die spezifische Wärme der Volumseinheit (bei konstanter Spannung), T die absolute Temperatur, E der

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 111, Abt. IIa., Juli 1902. — Ann. der Phys., Bd. 11, 1903, p. 159.

[2] Boltzmann, Festschrift 1904, p. 560.

Elastizitätsmodul und $\varepsilon = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial T}$ die thermische Änderung desselben, die bekanntlich für Metalle negativ ausfällt. Findet die Biegung (Aufwärtsbiegung) infolge des Wachsens der Drehmomente statt (ist also $M_2 > M_1$), so fällt τ_{12} negativ aus, d. h. es tritt, wie ich zuerst beobachtete, eine Abkühlung ein; bei der Abwärtsbiegung ($M_2 < M_1$) findet dann Erwärmung statt.

Die Größen τ_{12} und ε sind proportional, so daß, wenn sich die allerdings sehr kleine Abkühlung τ experimentell sicher bestimmen läßt, auch die Größe ε nach der Voigt'schen Formel ermittelt werden kann. Diesen Weg, ε auf neue Art zu ermitteln, habe ich 1903 eingeschlagen[1] und für zwei verschiedene Stahlstäbe die Werte

$$2\cdot62\times10^{-4},\quad 2\cdot34\times10^{-4},\quad 2\cdot45\times10^{-4} \text{ und } 2\cdot23\times10^{-4}$$

erhalten, deren Mittel **2·41 × 10⁻⁴** von dem Mittel $2\cdot29\times10^{-4}$, wie es die Beobachtungen von Katzenelsohn ($2\cdot33\times10^{-4}$) und Cl. Schäfer ($2\cdot25\times10^{-4}$) für Eisen lieferten, um weniger als 5% abweicht.

Um die allgemeine Anwendbarkeit dieser Methode sicherzustellen, war es notwendig, sie auch auf andere, insbesondere chemisch reine Metalle auszudehnen, für die das ε nach ganz anderen Verfahren von verschiedenen Forschern schon ermittelt worden war. Dank der Unterstützung der kaiserlichen Akademie wurde es mir ermöglicht, solche Untersuchungen, deren Resultate nun folgen, durchzuführen, wobei natürlich auch Fragen allgemeiner Natur erledigt und überdies Legierungen von ganz bestimmter Zusammensetzung gleichfalls betrachtet wurden. Es sei gleich hier bemerkt, daß chemisch reine Metalle, von den ersten Firmen bezogen, zur Verwendung kamen und daß die verwendeten Metallstäbe durch vielfaches Kochen und Abkühlen in den sogenannten Normalzustand übergeführt wurden; nur auf diese Weise ist es möglich, konstante Werte zu erhalten, also z. B. beim Auf- und Abwärtsbiegen in derselben Lage auch die gleiche Pfeilhöhe zu gewinnen.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 112, Abt. IIa., Mai 1903. — Ann. der Phys., Bd. 13, p. 182, 1904.

Prinzip der Methode.

Die in den Normalzustand gebrachten Stäbe erhielten an ihren Enden Versteifungen (von A_2 gegen A_1 und von B_2 gegen B_1 gehend, Fig. 1) in Form von Messingklötzen oder Aluminiumcylindern, welche an den äußersten Enden A_2 und B_2 horizontale, nach aufwärts gerichtete Drehschneiden trugen. Wurden

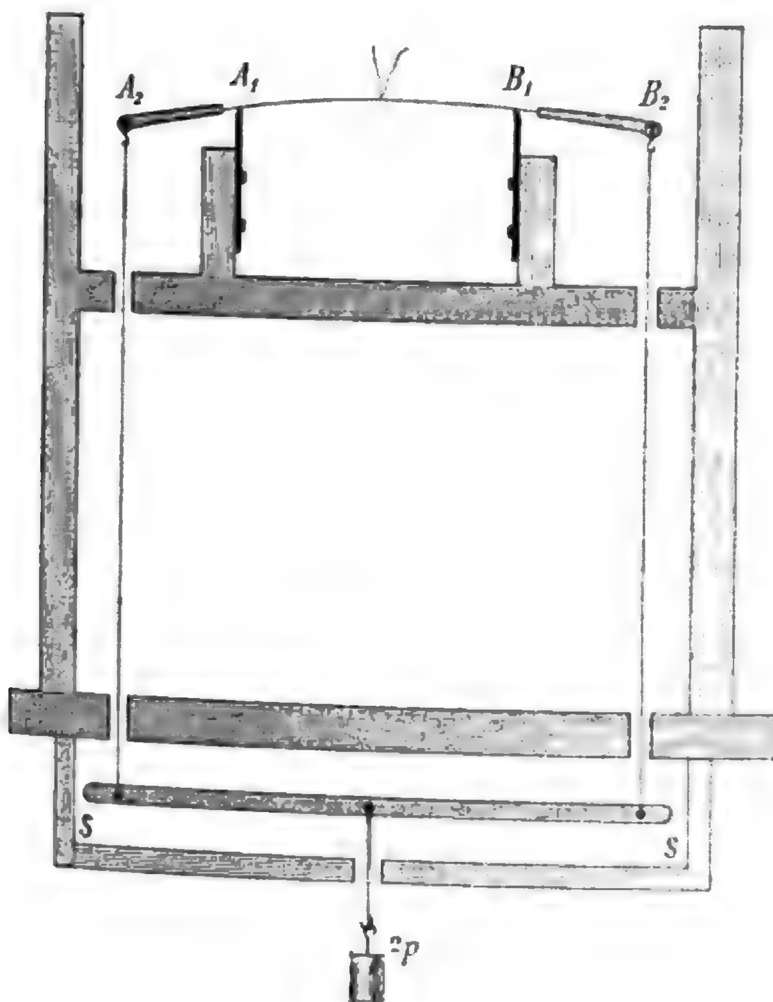


Fig. 1.

nun diese Stäbe auf zwei innnere Schneiden A_1 und B_1 aufgelegt und auf die äußeren Drehschneiden A_2 und B_2 Haken aufgesetzt, die ihrerseits durch seidene Schnüre mit einem leichten Brettchen *SS* verbunden waren, so mußte ein in der Mitte des Brettchens angehängtes Gewicht ($2p$) Zugkräfte auf A_2 und B_2 ausüben, die eine gleichförmige Biegung des Stabes A_1B_1 hervorbrachten. Es wurde stets darauf gesehen, daß die

Arme $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ nahe gleich waren, während die Distanz der inneren Schneiden A_1 und B_1 (gleich $2u$) nahe gleich 14 *cm* blieb. In der Mitte erhielt jeder Stab eine sehr feine Bohrung (Durchmesser kleiner als 0·2 *mm*), in welche die zugespitzten Enden eines Thermoelementes (Konstantan—Eisen) eingelötet oder eingenietet waren. Die Enden des Thermoelementes standen durch sehr dünne Kupferstreifen (zur Verhütung der Deformationsströme) mit den zum Galvanometer führenden, dicken Drähten in Verbindung.

Es wurde auf diese Art ermöglicht, den Gesamtwiderstand w (Thermoelement + Zuleitung + Galvanometer = Widerstand w) möglichst klein zu machen; in der Tat blieb w um 0·5 Ohm herum, wodurch es sich, wie schon früher hervorgehoben, erreichen ließ, trotz der sehr kleinen Änderungen τ sicher meßbare Ausschläge zu erhalten. Um Luftströmungen und Wärmezufuhr zu verhüten, wurde der ganze Apparat mit doppelten Wänden von Pappdeckel und Watte umgeben und auch um das Galvanometer und die Zuleitungen Watte so herumgelegt, daß nur die Durchsicht durch den Glasspiegel des Galvanometers erhalten blieb. Die Astasierung des Galvanometers war gering, die Schwingungsdauer um 4·6 Sekunden herum und die Skaladistanz 2·26 *m*. Nach Schluß einer jeden Versuchsreihe wurde die Schwingungsdauer und der Gesamtwiderstand gemessen und wiederholt die thermoelektrische Konstante R bestimmt. Es ist dies jener Ausschlag, der sich beim Widerstande 1 Ohm der Gesamtleitung einstellen würde, wenn die Temperaturdifferenz der Lötstellen des Thermoelementes gerade 1° wäre. Zu dem Ende wurde das metallene Stäbchen mit dem Thermoelement in ein Holzkästchen, das mit schmelzendem Eise gefüllt war, gebracht, während Zuleitung und ein Teil des übrigen Widerstandes sich in Wasser von der Zimmertemperatur befand. Es wurden die Ablenkungen der Nadel notiert, die der Thermostrom kommutiert hervorbrachte. Die an verschiedenen Tagen durchgeführten Beobachtungen wiesen unter sich und bei verschiedenen Vorschaltwiderständen nahe konstante Werte auf.

So war z. B. am 20. November 1903 der Gesamtwiderstand 900·4 Ohm, der Ausschlag beim Kommutieren im Mittel 73·1 und die mittlere Temperaturdifferenz 15·85; hiemit ergibt sich

$$R = \frac{36\cdot 55}{15\cdot 85} 900\cdot 4 = 2076.$$

Zwei weitere Beobachtungsreihen lieferten

$$R = \frac{64\cdot 75}{15\cdot 45} \times 500\cdot 4 = 2098$$

und

$$R = \frac{157\cdot 0}{15\cdot 3} 200\cdot 4 = 2056,$$

so daß im Mittel zur Schwingungsdauer $T = 4\cdot 30$ ein $R = 2073$ gehörte.

Auch unter sich stimmten diese Bestimmungen hinreichend; so sollte nach dem Obigen zu $T = 4\cdot 41$ ein $R = 2180$ gehören, während hiefür 2130 gefunden wurde.

War diese Konstante R ermittelt und konnte man annehmen, daß sich die Ruhelage der Nadel während der kurzen Beobachtungszeit nicht geändert hatte, so ließ sich nach den Formeln:

$$X_0 = \frac{k}{1+k} \frac{x_1 - x_2}{1 + z\left(k^2 - \frac{k}{1+k}\right)},$$

$$X = A - X_0,$$

$$\tau = \frac{X w}{(1-z)R}$$

die Temperaturänderung τ aus dem beobachteten ersten Ausschlage A, der ersten Distanz der Umkehrpunkte $x_1 - x_2$, dem Dämpfungsverhältnisse k, dem Widerstande w und einer stets sehr kleinen Abkühlungskonstante z[1] ermitteln. Für die vorliegenden Verhältnisse konnte meist $z = 0$ und mit großer Annäherung $k = \frac{4}{3}$ genommen werden.

[1] Haga, Wied. Ann. 15, p. 1, 1882.

Hiemit wird:

$$X = A - \frac{4}{7}(x_1 - x_2)$$

und

$$\tau = \frac{X.w}{R}.$$

Die Temperaturänderungen τ bei der gleichförmigen Biegung sind viel kleiner als wie die (τ') bei der Dehnung auftretenden.[1]

Diese außerordentliche Kleinheit der τ bot aber keinen Anlaß zu einer größeren Fehlerquelle, da dank des kleinen Gesamtwiderstandes w (um 0·5 Ohm herum) die ersten Ausschläge A und die Werte $(x_1 - x_2)$ immer gut meßbar blieben. Bei vielen Versuchen ließen sich überdies auch die zweiten Distanzen der Umkehrpunkte $(x_3 - x_2)$ ermitteln, wo dann τ bestimmt wurde aus den Gleichungen

$$X = A - \frac{1}{3}[(x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)]$$

und

$$\tau = \frac{X.w}{R}.$$

Durch diese Formel konnte in solchen Fällen eine mögliche Fehlerquelle eliminiert werden, die darin besteht, daß trotz der vortrefflichen Umhüllung und obwohl stets lange mit der Beobachtung gewartet wurde — Regenwetter war am günstigsten — im Innern des Apparates Wärmeströmungen und Thermoströme auftraten, welche die Ruhelage der Nadel zwar wenig, aber (des kleinen w wegen) meßbar und gleichmäßig verschoben.

Sind $(\xi_1 - \xi_2)$ und $(\xi_3 - \xi_2)$ die beobachteten, $(x_1 - x_2)$ und $(x_3 - x_2)$ die richtigen Distanzen der Umkehrpunkte, so können wir setzen:

$$(x_1 - x_2) = (\xi_1 - \xi_2) + \delta$$

und

$$(x_3 - x_2) = (\xi_3 - \xi_2) - \delta,$$

[1] Bleibt man innerhalb der Elastizitätsgrenzen, so sieht man z. B., daß für $\tau' = 0·1°$ ein $\tau = 0·002°$ bis $0·005°$ resultiert, also $\tau = \frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{20}$ von τ' wird.

wo sich die δ auf die Verschiebung der Ruhelage beziehen. Wegen

$$(x_1-x_2)=k(x_3-x_2)$$

wird

$$(\xi_1-\xi_2)+\delta=\frac{k}{k+1}[(\xi_1-\xi_2)+(\xi_3-\xi_2)]$$

und für $z=0$.

$$X_0=\frac{k}{k+1}(x_1-x_2)=\frac{k}{k+1}[(\xi_1-\xi_2)+\delta]=$$
$$=\left(\frac{k}{k+1}\right)^2[(\xi_1-\xi_2)+(\xi_3-\xi_2)].$$

Mit $k=\frac{4}{3}$ wird $\left(\frac{k}{k+1}\right)^2=\frac{16}{49}$, d. i. nahe $\frac{1}{3}$.

Ein gutes Beispiel hiefür bietet eine Beobachtung am 16. März 1905 an einem Platinstabe bei einer Gesamtbelastung $2p=200\,g$.

Hier war

$$A=2\cdot8,\qquad \begin{aligned}\xi_1-\xi_2&=1\cdot1,\\ \xi_3-\xi_2&=2\cdot6,\\ \xi_4-\xi_3&=0\cdot2,\\ \xi_5-\xi_6&=2\cdot4\end{aligned}$$

und es wird

$$x_1-x_2=\frac{3}{4}\times2\cdot8=2\cdot1=1\cdot1+1\cdot0=(\xi_1-\xi_2)+\delta,$$

$$x_3-x_2=\frac{3}{4}\times2\cdot1=1\cdot6=2\cdot6-1\cdot0=(\xi_3-\xi_2)-\delta,$$

$$x_3-x_4=\frac{3}{4}\times1\cdot6=1\cdot2=0\cdot2+1\cdot0=(\xi_3-\xi_4)+\delta,$$

$$x_5-x_4=\frac{3}{4}\times1\cdot2=0\cdot9=2\cdot4-1\cdot5\ldots\text{ etc.},$$

so daß die drei ersten übereinstimmend ein $\delta=+1\cdot0$ lieferten.

Es muß übrigens bemerkt werden, daß nur solche Beobachtungen berücksichtigt wurden, wo die Eigenbewegung der Ruhelage gering war; dies trat ein, wenn der Apparat mehrere Tage zusammengestellt blieb und insbesondere bei windstillem Regenwetter.

War auf diese Art das beobachtete τ ermittelt, so konnte an der Hand von Voigt's Formel die dem τ proportionale thermische Änderung $\varepsilon = \frac{1}{E}\frac{dE}{dT}$ bestimmt werden.

Wie schon aus der Betrachtung dieser Formel hervorgeht, muß, weil darin r^6 vorkommt, das Abmessen der Dicke $2r$ des Stabes mit größter Sorgfalt vorgenommen werden, weil ein Fehler darin von 1% einen solchen von 6% in der Ermittlung von τ nach sich zöge. Zu unmittelbaren Messungen standen drei Dickenmesser zu Gebote, mit denen $2r$ an verschiedenen Stellen des Drahtes ermittelt wurde; wo immer es aber anging, wurde die Dicke auch auf die Art berechnet, daß das spezifische Gewicht und das Gewicht einer bestimmten Länge des Stabes ermittelt wurde. Es sei gleich hier bemerkt, daß auch Stäbe von quadratischem Querschnitte (Seite $= a$) vorkamen, in welchem Fall in der Voigt'schen Formel statt der Größe $\left(\frac{1}{2} r^6 \pi^2\right)$ der Wert $\frac{1}{6} a^6$ einzusetzen ist.

Die drehenden Momente M, deren Quadrate in der Voigtschen Formel vorkommen, ließen sich sicher bestimmen. Wurde von der Distanz der äußeren Schneiden im unbelasteten Zustande die der inneren (14 *cm*) abgezogen, so stellte die Hälfte dieser Differenz den Arm L vor, an dem die Zugkraft p wirkte; das Produkt pL ist aber noch nicht dem rechts wie links bei der Belastung wirkenden Momente M gleichzusetzen, wenn auch durch die Steifheit der Enden A_1A_2 und B_1B_2 dafür gesorgt ist, daß diese nicht aus ihrer geraden Richtung kommen. Infolge der Biegung hebt sich (Fig. 2) die Mitte C um die Pfeilhöhe h, so daß hiedurch, da der Stab nicht ausgedehnt wird, die Armlängen A_1A_2 und $B_1B_2 = L$ verkürzt werden. Nennt man (Fig. 2) $2u$ die Distanz A_1DB_1 der inneren Drehschneiden, $2s$ den ganzen Kreisbogen A_1CB_1, der zum Zentriwinkel 2φ gehört, ist ρ der Radius, so wird

$$s = \rho \cdot \varphi = 2\rho \operatorname{arctg} \frac{h}{u} = 2\rho \left[\frac{h}{u} - \frac{1}{3}\frac{h^3}{u^3}\right].$$

Es verkürzt sich jeder Arm, da $2\rho = u + \frac{h^2}{u}$ ist, um

$$s-u=2\rho\frac{h}{u}\left[1-\frac{1}{3}\frac{h^2}{u^2}\right]-u=\left(u+\frac{h^2}{u}\right)\left(1-\frac{1}{3}\frac{h^2}{u^2}\right)-u$$

oder

$$s-u=\frac{h^2}{u}\left[\frac{2}{3}-\frac{h^2}{u^2}\right],$$

d. i. wegen der Kleinheit von $\frac{h}{u}$ wird

$$s-u=\frac{2}{3}\frac{h^2}{u}.$$

Um dieses Ergebnis der Rechnung durch einen Versuch zu erhärten, wurde ein dünner Stahldraht (Dicke 1·45 *mm*),

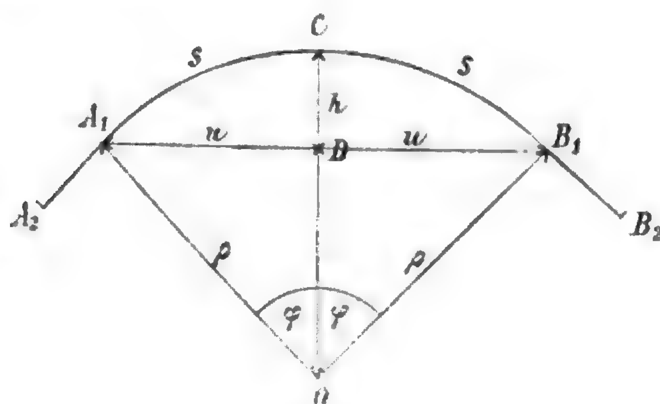


Fig. 2.

der auf einen starken Karton auflag, um zwei senkrecht zur Ebene des Kartons befestigte Stecknadeln gleichförmig gebogen. Es war dabei

$$2u=14\,cm,\quad h=1\cdot725\,cm,$$

also

$$\frac{2}{3}\frac{h^2}{u}=0\cdot28\,cm,$$

während die Messung auf dem Papier hiefür das eine Mal 0·26, das andere Mal 0·30, im Mittel 0·28 ergab. Es ist also L um $\frac{2}{3}\frac{h^2}{u}$ zu verkürzen.

Da sich ferner die Arme aus der Horizontalen nach abwärts um den Winkel φ neigten, so trat auch hierdurch eine Verkleinerung der Momente pL ein, indem statt L der Wert $L\cos\varphi$ zu nehmen war.

Nun ist

$$L\cos\varphi = L\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = L\frac{1-\frac{h^2}{u^2}}{1+\frac{h^2}{u^2}} = L\left(1-\frac{2h^2}{u^2}\right).$$

Die richtige Länge L' wird

$$L' = L\left(1-\frac{2h^2}{u^2}\right)-\frac{2}{3}\frac{h^2}{u} = L\left[1-\frac{2h^2}{u^2}-\frac{2}{3}\frac{h^2}{Lu}\right]$$

oder

$$L' = L\left[1-\frac{2h^2}{u^2}\left(1+\frac{u}{3L}\right)\right].$$

Nun war nahe $2u = 14\,cm$ und L von $5\cdot85$ nicht viel verschieden, so daß $\frac{2}{u^2}\left(1+\frac{u}{3L}\right)$ nahe $0\cdot0583$

$$L' = L(1-h^2\times 0\cdot0583)$$

oder

$$\log M = \log(pL) - C.h^2 \quad \text{für } C = 0\cdot0583 \text{ wird.}$$

Von dem Werte $\log(pL)$ für die horizontale Lage ist der Betrag Ch^2 abzuziehen.

Tabelle der Werte von Ch^2.

h	Ch^2	Differenz Δ_1	Δ_2
1 *mm*	0·0006		
		0·0017	
2	0·0023		0·0012
		0·0029	
3	0·0052		0·0012
		0·0041	
4	0·0093		0·0012
		0·0053	
5	0·0146		0·0011
		0·0064	
6	0·0210		0·0012
		0·0076	
7	0·0286		0·0011
		0·0087	
8	0·0373		0·0012
		0·0099	
9	0·0472		0·0012
		0·0111	
10	0·0583		

War der Elastizitätsmodul E bekannt, so ließ sich die einem bestimmten Drehmomente (pL) entsprechende Pfeilhöhe h (falls sie nicht beobachtet worden war), wie wir gleich sehen werden, berechnen für Drähte mit kreisförmigem Querschnitt (Dicke $2r$) aus

$$h = 31 \cdot 2 \times \frac{(pL)}{E.r^4}$$

und für Drähte mit quadratischem Querschnitte (Kante a) aus

$$h = 294 \times \frac{(pL)}{E.a^4}.$$

Der Elastizitätsmodul E wurde meistens mit Hilfe der bei der gleichförmigen Biegung beobachteten Pfeilhöhen aus den zugehörigen Drehmomenten M ermittelt.

Ist M das rechts wie links wirkende Drehungsmoment, q der Querschnitt, $\varkappa_y$ der Trägheitsradius senkrecht zur Biegungsebene und ρ der Krümmungsradius an der höchsten Stelle, so ist bekanntlich für die gleichförmige Biegung

$$M \times \rho = E.q.\varkappa_y^2.$$

Betrachtet man die Biegung als kreisförmig, nennt $2u$ die Entfernung der inneren Drehschneiden und h die Pfeilhöhe, so muß

$$\rho = \frac{1}{2} \, \frac{u^2+h^2}{h}$$

sein und es wird

$$M = \frac{2h}{u^2+h^2} \cdot E.q.\varkappa_y^2 = 2Eq\varkappa_y^2\left(\frac{h}{u^2} - \frac{h^3}{u^4}\right)$$

und somit für zwei verschiedene Lagen

$$M_2 - M_1 = 2Eq\varkappa_y^2\left[\frac{h_2-h_1}{u^2} - \frac{h_2^3-h_1^3}{u^4}\right] =$$

$$= 2Eq\varkappa_y^2\,\frac{h_2-h_1}{u^2}\left[1 - \frac{h_2^2+h_1 h_2+h_1^2}{u^2}\right].$$

Führt man das arithmetische Mittel h_{12} aus h_1 und h_2 ein, so wird

$$h_2 = h_{12} - \delta, \quad h_1 = h_{12} + \delta,$$

so daß nahe

$$h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2 = 3 h_{12}^2 + \delta^2$$

ist. Man kann dann die Beobachtungen, indem man in kleineren Zwischenräumen aufsteigt, stets so einrichten, daß das zweite Glied δ^2 gegen den ersten Posten $3 h_{12}^2$ verschwindet; es gilt die Grundformel

$$M_2 - M_1 = 2 E q \varkappa_y^2 \frac{h_2 - h_1}{u^2} \left[1 - \frac{3 h_{12}^2}{u^2}\right].$$

Ist der Querschnitt ein Kreis,

$$q = r^2 \pi, \quad \varkappa_y^2 = \frac{r^2}{4},$$

erhält man

$$M_2 - M_1 = E \left(\frac{r^4 \pi}{2}\right) \frac{h_2 - h_1}{u^2} \left[1 - \frac{3 h_{12}^2}{u^2}\right]. \qquad (1)$$

Ist der Querschnitt ein Quadrat,

$$q = a^2, \quad \varkappa_y^2 = \frac{1}{12} a^2,$$

so wird

$$M_2 - M_1 = E . \frac{a^4}{6} \frac{h_2 - h_1}{u^2} \left(1 - \frac{3 h_{12}^2}{u^2}\right). \qquad (2)$$

Die nach diesen Formeln aus den Beobachtungen erhaltenen Werte für E stimmen untereinander und auch mit den Zahlen anderer Beobachter überein. Um die Pfeilhöhe h zu ermitteln, wurde in der Mitte des Stabes eine feine Marke angebracht und eine in Millimeter geteilte spiegelnde vertikale Skala dahinter gestellt; die Ablesung erfolgte mittels einer Lupe und war bis auf 0·1 *mm* genau (die Anwendung eines kleinen Mikroskops hätte leicht eine viel größere, hier indes nicht nötige Genauigkeit erzielen lassen). Es wurde wiederholt nach aufwärts und dann nach abwärts gebogen; infolge des erlangten Normalzustandes stellten sich sehr nahe konstante Werte für h ein. Die Momente M wurden aus den gemessenen Armlängen L und den angehängten Gewichten $2p$ unter Anwendung der erörterten Korrektur berechnet.

So erhielt ich z. B. für chemisch reines Silber vom quadratischen Querschnitte ($a = 0\cdot 135\,cm$) für die Belastungen $2p = 50$, 100, 150 und $200\,g$ konstant die zugehörigen Pfeilhöhen $h = 0\cdot 213$, $0\cdot 390$, $0\cdot 563$ und $0\cdot 723\,cm$, wobei also bei der Bestimmung des Nullpunktes der Höhe h immerhin eine wenn auch kleine Unsicherheit übrig bleibt.

Diese Unbestimmtheit fällt für die h wie für die M ganz hinaus, wenn man nach Formel (2) rechnet, also Differenzen bildet. Man findet wegen $2u = 14\,cm$, $L = 5\cdot 80\,cm$ für den Elastizitätsmodul E die Werte

$$E = 10^{11}\times 6\cdot 950, \quad 10^{11}\times 6\cdot 788, \quad 10^{11}\times 6\cdot 912,$$

d. i. im Mittel

$$E = 10^{11}\times 6\cdot 883\ C.G.S = 7016\ kg/mm^2.$$

Hiefür haben Schäfer 5897, Pietro Cardani 7817 und 8165, Tomlinson 8356, sowie Voigt $7790\,kg/mm^2$, so daß unser Wert hineinpaßt.

Nachweis, daß bei der gleichförmigen Biegung die mittlere Temperaturänderung an allen Querschnitten des gleichförmig gebogenen Drahtes die gleiche ist.

Die thermodynamische Theorie des gleichförmig gebogenen Drahtes, wie sie von Voigt zuerst entwickelt wurde, verlangt, daß die mittleren Temperaturänderungen verschiedener Querschnitte eines und desselben gleichförmig gebogenen Drahtes einander gleich seien, so daß (von den Enden abgesehen) eine Wärmeströmung im Stabe selbst nicht eintritt. Da nun gerade hierin der große Vorzug dieser Art Biegung liegt, ist es einleuchtend, wie notwendig es war, nachzusehen, wie weit das Experiment diese Theorie (Grundwahrheit) bestätigte.

Zu dem Ende wurde ein Stahldraht von $1\cdot 86\,mm$ Dicke an vier verschiedenen Stellen M_0, M_1, M_2 und M_3 mit je einem Thermoelement (Eisen—Konstantan) versehen (Fig. 3).

Von diesen vier Stellen war M_0 in der Mitte gelegen, M_1 $2\,cm$ links, M_2 $1\,cm$ rechts, M_3 $5\cdot 1\,cm$ rechts von der Mitte. Die Enden des Stahlstabes waren wie gewöhnlich mit starken

Messingprismen, die Drehschneiden trugen, versehen. Die Distanz der inneren Drehschneiden war 14 *cm*, die der äußeren 25·92 *cm*. Es wurden drei verschiedene Belastungen angewandt und zwar 500, 1000 und schließlich 1500 *g*, welche Gewichte

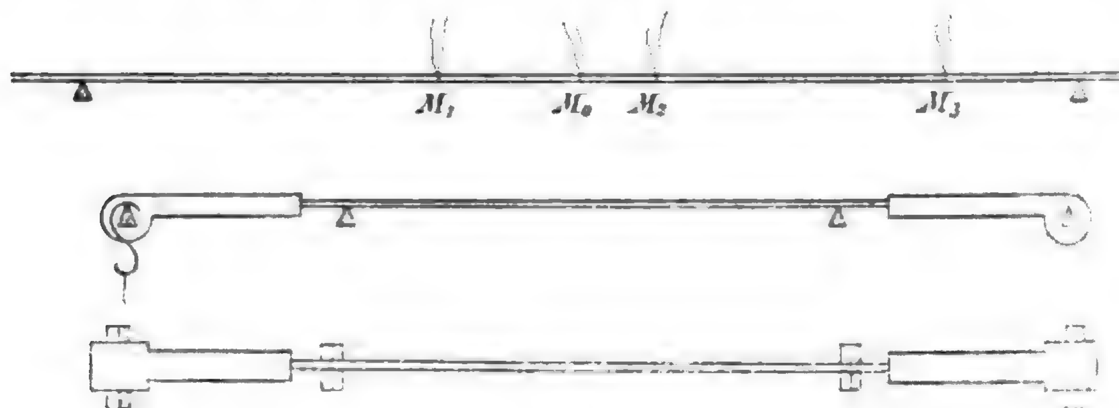


Fig. 3.

sich auf beide Arme gleich verteilten; außerdem war eine Belastung von 100 *g* dauernd vorhanden.

Bei den Versuchen am 10., 11., 12. und 16. Juni 1904 wurden die Stellen M_1, M_2, M_0 und M_3 der Reihe nach mit dem Galvanometer verbunden und ergaben sich folgende, aus den Tafeln ersichtliche Werte.

Am 10. Juni 1904 Thermoelement M_1, d. i. 2 *cm* links von der Mitte. Dabei:

$$w = 0\cdot549,\quad T = 4\cdot40,\quad \log\tau = 0\cdot4384-4+\log X;$$
$$k = 1\cdot28.$$

$2p$	A	x_1-x_2	X	Mittleres X	τ
500+100	8·9	5·1	6·0	5·05	0·00139°
	6·9	4·2	4·7		
	7·9	4·5	5·4		
	6·4	4·2	4·1		
1000+100	27·2	16·1	18·2	14·83	0·00407°
	24·8	15·8	15·9		
	20·7	13·6	13·1		
	20·3	14·6	12·1		
1500+100	35·2	25·7	20·7	20·75	0·00569°
	35·2	25·6	20·8		

Den 11. Juni 1904 das Thermoelement in M_2 kommt an die Reihe, 1 *cm* rechts von der Mitte.

$w = 0 \cdot 560$, $T = 4 \cdot 42$, $\log \tau = 0 \cdot 4432 - 4 + \log X$.

$2p$	A	$x_1 - x_2$	X	Mittleres X	τ
500+100	9·8 8·8	7·7 7 5	5·5 4·6	5·05	0·00140°
1000+100	21·5 24·1	17·2 18·1	11·8 14·0	12·90	0·00358°
1500+100	38·3 40·6 33·8 38·7	29·3 33·5 28·0 30 5	22·0 21·7 18·0 21·8	20·9	0·00580°

Am 12. Juni 1904 ist das Thermoelement M_0 in der Mitte an der Reihe.

$w = 0 \cdot 542$, $T = 4 \cdot 40$, $\log \tau = 0 \cdot 4328 - 4 + \log X$.

$2p$	A	$x_1 - x_2$	X	Mittleres X	τ
500+100	6·8 10·9 7·7 7·9	5·6 5·3 6·1 6·6	3·7 7·9 4·3 4·2	5·02	0·00136°
1000+100	21·3 26·1	17·5 23·3	11·4 18·6	15 0	0·00406°
1500+100	38·8 42·6	30·1 29·6	21·9 25·9	23·9	0·00647°

Am 16. Juni 1904 kommt das Thermoelement in M_3. 5·1 *cm* rechts von der Mitte an die Reihe.

$$w = 0\cdot572, \quad T = 4\cdot42, \quad \log \tau = 0\cdot4524-4+\log X.$$

$2p$	A	x_1-x_2	X	Mittleres X	τ
500+100	9·0	5·5	5·9	4·8	0·00136°
	4·8	1·4	4·0		
	6·9	4·9	4·1		
	8·9	6·8	5·1		
1000+100	23·4	14·1	15·5	13·0	0·00369°
	19·1	15·4	10·5		
1500+100	34·7	30·0	17·8	21·6	0·00612°
	39·4	25·0	25·3		

Fassen wir die Mittelwerte der gefundenen Temperaturänderungen aus allen vier Beobachtungsreihen zusammen, so ergibt sich folgende Tafel:

Stelle	$2p =$ 500+100 g	$2p =$ 1000+100 g	$2p =$ 1500+100 g
M_1, d. i. 2 *cm* links von M_0 .	0·00139°	0·00407°	0·00569°
M_2, d. i. 1 *cm* rechts von M_0	0·00140	0·00358	0·00580
M_0 Mitte	0·00136	0·00406	0·00647
M_3, d. i. 5·1 *cm* rechts v. M_0	0·00136	0·00369	0·00612
Mittel	0·00138	0·00385	0·00602
Wahrscheinlicher Fehler. . .	0·0000115	0·000126	0·000175
In Prozenten	0·84%	3·28%	2·92%

Bedenkt man die Schwierigkeiten der Bestimmung solch außerordentlich kleiner Temperaturdifferenzen, so wird man wohl das obige Gesetz als durch Versuche erwiesen ansehen.

Wurden zwei Thermoelemente — M_0 in der Mitte und M_1 2 *cm* links davon — entgegengesetzt geschaltet, so erhielt man durchwegs sehr kleine, erste Ausschläge A. So 1·4 und 0·9 für $2p = 500\,g$, 2·7 und 2·4 für $2p = 1000\,g$ und selbst bei $2p = 1500\,g$ nur 3·4 und 3·5 *mm*, so daß zweifellos die noch vorhandenen Thermoströme sehr klein waren. Bemerkenswert ist der Umstand, daß der Sinn der Ablenkung nicht im Sinne der Mitte M_0, sondern stets in dem der entfernteren Stelle erfolgte; die Temperaturänderungen wären also in diesem Fall in der Mitte kleiner gewesen.

Man erkennt den großen Vorzug, den die Anwendung der gleichförmigen Biegung gegenüber der ungleichförmigen aufweist, da bei der ersteren nur eine sehr geringe Wärmeströmung im Innern des Stabes eintreten wird. Es muß aber hervorgehoben werden, daß nur die mittleren Temperaturen der einzelnen Querschnitte einander gleich sind, denn nur diese werden durch das Thermoelement angezeigt. Bei der Biegung nach oben werden die oberen Fasern gedehnt, also etwas abgekühlt; die unteren Fasern werden verkürzt, also etwas erwärmt. Die genauere Rechnung zeigt, daß die Abkühlung überwiegt und (Festschrift, l. c.) sich momentan in einem Querschnitt ein mittlerer Zustand herstellt, auf den die Voigt'sche Formel gemünzt ist.

Zu den Fragen allgemeiner Natur zählt auch die der Unabhängigkeit der Temperaturänderung τ_{12} von einer Zwischenstation, so daß also

$$\tau_{12} = \tau_{13} + \tau_{32} = \tau_{14} + \tau_{42} = \ldots$$

nahe erfüllt sein müsse. Der experimentelle Nachweis hiefür wurde schon in einer früheren Untersuchung gegeben und nur der Vollständigkeit wegen sei kurz darauf hingewiesen. Statt wie hier durch Anhängen eines Gewichtes $2p$ einen Zug auszuüben, erfolgte dort dasselbe mit Hilfe eines Winkelhebels,

dessen Drehung an einem Gradbogen abgelesen wurde. So wurde beobachtet bei einer Biegung

von 20° über 15° auf 5°:

$\tau_{13} = 0\cdot00120°$, $\tau_{32} = 0\cdot00518°$, also $\tau_{13}+\tau_{32} = 0\cdot00638°$,

von 20° über 10° auf 5°:

$\tau_{14} = 0\cdot00312°$, $\tau_{42} = 0\cdot00367°$, also $\tau_{14}+\tau_{42} = 0\cdot00679°$,

von 20° über 12° auf 5°:

$\tau_{15} = 0\cdot00209°$, $\tau_{52} = 0\cdot00457°$, also $\tau_{15}+\tau_{52} = 0\cdot00666°$,

von 20° über 8° auf 5°:

$\tau_{16} = 0\cdot00426°$, $\tau_{62} = 0\cdot00235°$, also $\tau_{16}+\tau_{62} = 0\cdot00661°$

so daß die größte Abweichung dieser Summen von ihrem Mittel $\tau_{12} = 0\cdot006607°$ kleiner als 3% bleibt. Hiedurch fand die Proportionalität des τ_{12} mit $(M_2^2—M_1^2)$ ihre experimentelle Bestätigung.

Die Abhängigkeit des τ_{12} von der Dicke des Drahtes respektive Kantenlänge eines quadratischen Querschnittes tritt in vielen Beispielen zu Tage.

Nickel.

Chemisch rein, alle Stäbe erhalten durch die Gefälligkeit der Berndorfer Metallfabrik. Das spezifische Gewicht wurde bei 20°C. bestimmt und hiefür $\sigma = 8\cdot915$ gefunden. Ein Stück des ersten Stabes Ni_1 von der Länge 24·9 *cm* wog 6·8986 *g*, woraus sich eine Dicke $2r = 1\cdot98924$ berechnet, während die Dickenmesser hiefür 2 *mm* ergaben. Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls E kam die gleichförmige Biegung zur Anwendung.

Es entsprachen den

an den Armen:	ziehenden Gewichten p:	die Pfeilhöhen h
5·909 *cm*	85 *g*	0·08 *cm*
5·907	160	0·135
5·904	235	0·200
5·901	310	0·250
5·896	385	0·312
5·891	460	0·370
5·884	535	0·427
5·877	610	0·480
5·869	685	0·535

woraus sich für $2u = 13 \cdot 88$ ein

$$E = 2 \cdot 2375 \times 10^{12}\ C.G.S = 23800\ kg/cm^2$$

ergab, während Schaefer 23544 kg/cm^2 hat. Es war bei $2u = 13 \cdot 88$ *cm* jeder Arm horizontal $= 5 \cdot 910$ *cm.*

Ni_I.

Beobachtungen vom 10. Oktober 1903 am Nickelstabe Ni_I.

Gesamtwiderstand $w = 0 \cdot 497$ Ohm; Schwingungsdauer $T = 4 \cdot 31$, daher die thermoelektrische Konstante

$$R = \left(\frac{4 \cdot 31}{4 \cdot 05}\right)^2 1990 = 2253;$$

$$\log \tau = 0 \cdot 3435 - 4 + \log X. \qquad (1)$$

Da schon sehr bedeutende Zugkräfte, respektive Drehmomente verwendet wurden, so wurde die kleine Anfangsbelastung dagegen vernachlässigt, d. h. $M_a = 0$ gesetzt. Man findet dann ε aus dem beobachteten τ nach der Gleichung:

$$\log \varepsilon = \log \tau - [\log M_g^2 + 0 \cdot 8242 - 13]. \qquad (2)$$

Ganze Belastung $2p$	Erster Ausschlag A	Erste Distanz der Umkehrpunkte $x_1 - x_2$	Zweite Distanz der Umkehrpunkte $x_3 - x_2$	X	Mittleres X	Mittlere beob. Temperaturänderung (1) τ	Diesem beobachteten τ entspricht nach Gl. (2) ein ε
570 g	4·4	1·6	1·8	3·3			
	3·0	3·6	2·8	1·8			
	4·1	3·3	3·5	1·8			
	3·3	1·9	1·6	2·1	2·56	0·000565°	$3·11 \times 10^{-4}$
	5·1	2·3	3·2	3·3			
	4·1	3·3	2·4	2·2			
	5·7	3·3	3·6	3·4			
770 g	6·1	3·3	3·1	4·0			
	10·2	5·5	5·4	6·6			
	6·4	4·6	4·3	3·4	4·57	0·00101°	$3·03 \times 10^{-4}$
	7·1	4·3	3·8	4·4			
	6·9	3·3	3·2	4·7			
	7·4	5·2	4·2	4·3			
970 g	11·4	5·7	5·6	7·6			
	12·2	8·0	6·9	7·2			
	9·9	4·9	4·8	6·7	7·46	0·00164°	$3·14 \times 10^{-4}$
	12·3	5·8	6·5	8·2			
	12·8	7·9	7·8	7·6			
1170 g	15·9	9·1	9·2	9·8			
	16·3	11·0	10·7	9·1			
	15·2	9·3	7·0?	9·8	10·32	0·00228°	$2·99 \times 10^{-4}$
	18·2	11·0	10·1	11·2			
	14·9	7·5	5·4	10·6			
	18·7	11·7	10·3	11·4			

Diese 24 Beobachtungen ergeben demnach einen mittleren Wert für ε, nämlich:

$$\underline{\varepsilon = 3·09 \times 10^{-4}}$$

(mit einer Maximalabweichung von 3% für die letzte Belastung).

Der mit diesem Mittel gerechnete wahrscheinliche Fehler ist $0\cdot025\times10^{-4}$, also kleiner als $1^0/_0$ und erkennt man die treffliche Darstellung dieser Beobachtungen durch die Voigtsche Formel.

Mehrere Störungen zeigten die folgenden Versuche.

Derselbe Stab Ni_1 wurde am 12. Oktober 1903 noch einmal beobachtet und gefunden:

$$w = 0\cdot497 \text{ Ohm}; \quad T = 4\cdot46,$$

somit

$$R = \left(\frac{4\cdot46}{4\cdot29}\right)^2 2230 = 2410; \quad \log\tau = 0\cdot3145-4+\log X, \quad (1')$$

während die Gleichung (2) in der früheren Form:

$$\log\varepsilon = \log\tau - [\log M_g^2 + 0\cdot8242 - 13]$$

bestehen blieb.

$2p$	A	x_1-x_2	X	Mittleres X	Beobachtetes τ	Hieraus nach (2) folgend. ε
570 *g*	3·9	1·8	2·9			
	3·6	3·9?	1·0			
	4·3	1·2	3·6			
	4·3	1·2	3·6	2·70	0·000557°	$3\cdot07\times10^{-4}$
	3·8	3·0	2·0			
	3·8	1·1	3·1			
770 *g*	6·8	1·5	5·7			
	8·7	4·1	6·1			
	7·6	2·6	6·1			
	9·6	4·2	6·9	6·45	0·00132°	$4\cdot02\times10^{-4}$
	8·7	2·7	7·1			
	9·8	5·4	6·7			
970 *g*	12·6	7·4	8·2			
	11·5	4·1	9·2			
	13·0	4·3	10·5			
	12·9	4·7	10·0	9·70	0·00200°	$3\cdot82\times10^{-4}$
	11·8	3·9	9·6			
	13·7	5·0	10·7			
1170 *g*	17·9	4·9	15·1			
	20·0	8·8	15·0			
	15·7	5·2	12·8			
	20·8	9·9	15·1			
	15·1	7·0	11·1	13·76	0·00284°	$3\cdot74\times10^{-4}$
	20·5	9·8	14·9			
	16·7	6·8	12·9			
	18·6	9·5	13·2			

Diese 26 Beobachtungen ergeben ein mittleres

$$\varepsilon = 3\cdot 66 \times 10^{-4}.$$

Derselbe Stab wurde einer dritten Beobachtungsreihe unterworfen; das Thermoelement blieb, nur wurden neue Kupferstreifen angelötet. Widerstand

$$w = 0\cdot 511; \quad T = 4\cdot 51, \quad R = \left(\frac{4\cdot 51}{4\cdot 29}\right) 2230 = 2470;$$

$$\log \tau = 0\cdot 3157 + \log X. \qquad (1'')$$

$2p$	A	$x_1 - x_2$	X	Mittleres X	Beobachtetes τ [Gl. (1'')]	Nach Gl. (2) erhaltenes ε
570 *g*	3·8	1·6	2·9			
	5·0	4·9	2·2			
	4·4	2·1	3·2	3·05	0·000631°	$3\cdot 47 \times 10^{-4}$
	4·6	2·9	2·9			
	5·9	3·0	4·2			
	4·0	2·0	2·9			
770 *g*	7·3	4·2	4·9			
	9·9	5·6	6·7			
	7·0	3·4	5·1	5·48	0·00113°	$3\cdot 43 \times 10^{-4}$
	8·2	4·5	5·6			
	7·1	3·9	4·9			
	8·4	4·7	5·7			
970 *g*	10·5	4·9	7·7			
	11·8	6·0	8·4			
	11·1	4·6	8·7	8·38	0·00173°	$3\cdot 31 \times 10^{-4}$
	12·9	7·1	8·8			
	10·9	5·6	7·7			
	12·9	6·8	9·0			
1170 *g*	16·2	8·5	11·3			
	16·9	10·3	11·0			
	14·7	7·3	10·5	11·72	0·00243°	$3\cdot 19 \times 10^{-4}$
	18·8	10·5	12·8			
	16·2	8·2	11·5			
	18·7	9·6	13·2			
1370 *g*	20·8	11·8	14·1			
	25·1	14·4	16·9	14·88	0·00308°	$2\cdot 97 \times 10^{-4}$
	19·1	10·3	13·2			
	23·5	14·4	15·3			

Diese 28 Beobachtungen ergeben ein mittleres

$$\varepsilon = 3\cdot 37 \times 10^{-4}.$$

Einige weitere Beobachtungen mit ausschließlich hohen Belastungen ($2p = 1370$, 1570) lieferten

$$\varepsilon = 3\cdot07 \times 10^{-4},\ 2\cdot43 \times 10^{-4} \text{ etc.,}$$

Werte, die auf ein Überschreiten der Elastizitätsgrenze hindeuten. Nun wurde der Stab herausgenommen und durch vielfaches Kochen und Abkühlen in den Normalzustand gebracht. Die Beobachtungen vom 16. Oktober 1903 ergaben:

$$w = 0\cdot510,\quad T = 4\cdot52;\quad \log\tau = 0\cdot2256 - 4 + \log X. \quad (1''')$$

$2p$	A	$x_1 - x_2$	X	Mittleres X	Beobachtetes τ [Gl. (1''')]	Nach Gl. (2) erhaltenes ε
570 g	4·9	1·1	4·3			
	4·2	2·9	2·6			
	2·1	1·0	1·5			
	4·6	1·8	3·6	3·13	0·000548°	$3\cdot02 \times 10^{-4}$
	4·7	3·1	3·0			
	4·8	1·7	3·8			
770 g	8·0	4·4	5·5			
	9·6	5·0	6·6			
	8·4	4·8	6·1			
	8·8	5·2	5·8	5·83	0·00120°	$3\cdot62 \times 10^{-4}$
	7·1	3·4	5·2			
	9·0	5·6	5·8			
970 g	11·1	4·5	8·5			
	13·2	6·5	9·5			
	11·5	6·5	7·8			
	14·9	9·8	8·3	8·70	0·00179°	$3\cdot42 \times 10^{-4}$
	12·1	5·8	8·8			
	13·5	7·3	9·3			
1170 g	15·7	8·1	11·1			
	14·4	6·2	10·9			
	16·3	8·7	11·3			
	20·7	13·1	13·2			
	15·3	7·7	10·9	12·25	0·00252°	$3\cdot32 \times 10^{-4}$
	21·5	12·7	14·2			
	15·8	7·2	11·7			
	22·3	13·6	14·5			
1370 g	21·7	9·1	16·5			
	24·1	14·3	15·9			
	19·8	9·5	14·4			
	26·3	15·3	17·6	15·75	0·00324°	$3\cdot12 \times 10^{-4}$
	19·6	11·9	12·8			
	26·7	16·4	17·3			

Diese 32 Beobachtungen liefern ein mittleres

$$\varepsilon = 3\cdot30\times10^{-4}.$$

Die vier Gruppen von zusammen 110 Beobachtungen ergaben für den Stab Ni_I der Reihe nach:

$$\varepsilon_1 = 3\cdot09\times10^{-4},$$
$$\varepsilon_2 = 3\cdot66\times10^{-4},$$
$$\varepsilon_3 = 3\cdot37\times10^{-4}$$

und

$$\varepsilon = 3\cdot30\times10^{-4},$$

das ist im Mittel für diesen Stab

$$\varepsilon = \mathbf{3\cdot355\times10^{-4}}.$$

Ni_{II}.

Am 20. Oktober 1903 wurden an einem zweiten Stabe Beobachtungen angestellt, dessen Dicke, gemessen mit dem Dickenmesser, $2r = 2\cdot5\,mm$ war. Da ein Stück des Stabes von $26\cdot09\,cm$ Länge ein Gewicht von $11\cdot480\,g$ hatte, so ließ sich auch aus diesen Daten und dem spezifischen Gewichte $8\cdot915$ die Dicke ermitteln; es fand sich

$$2r = 2\cdot508\,mm,$$

so daß

$$r = 0\cdot1254\ cm$$

ist. Der Gesamtwiderstand w war:

$$w = 0\cdot575$$

und die Schwingungsdauer

$$T = 4\cdot51,\quad R = 2470,\quad t = 18°,$$

sowie

$$\log\tau = 0\cdot3795-4+\log X, \tag{1}$$

während ε aus dem (mit 1) erhaltenen τ zu berechnen war aus:

$$\log\varepsilon = \log\tau-[0\cdot2185-13+\log M_g^2], \tag{2}$$

indem die Beobachtungen für E den Wert $E = 2\cdot26\times10^{12}$ — also wenig verschieden von Ni_I — ergeben hatten. Es waren nämlich

für h	die Gewichte p	und	die Arme L
0·087 *cm*	285 *g*		5·909 *cm*
0·130	385		5·907
0·159	485		5·905
0·215	585		5·903
0·227	685		5·902
0·259	785		5·901
0·280	885		5·899
0·320	985		5·896
0·345	1085		5·893

Erste Reihe der Beobachtungen (Ni_{II}). 20. Oktober 1903

$$\log \tau = 0\cdot 3795-4+\log X, \tag{1}$$

$$\log \varepsilon = \log \tau - [0\cdot 2185-13+\log M_g^2]. \tag{2}$$

$2p$	A	x_1-x_2	X	Mittleres X	Nach Gl. (1) beobachtetes τ	Nach Gl. (2) hieraus berechnetes ε
1370 *g*	5·6	4·3	3·2			
	3·8	2·9	2·1	3·275	0·000785°	$3\cdot 02\times 10^{-4}$
	5·4	2·5	4·0			
	4·6	1·5	3·8			
1770 *g*	6·2	4·3	3·8			
	9·6	5·5	6·5	5·225	0·00125°	$2\cdot 89\times 10^{-4}$
	9·3	5·2	6·3			
	8·5	7·3	4·3			
2170 *g*	11·5	5·8	8·2			
	13·5	10·4	7·6	8·150	0·00198°	$3\cdot 00\times 10^{-4}$
	13·0	7·9	8·5			
	12·8	7·9	8·3			

Diese 12 Beobachtungen ergeben ein mittleres

$$\varepsilon = 2\cdot 97\times 10^{-4}.$$

Zweite Beobachtungsreihe (Ni_{II}). 21. Oktober 1903.

Es wurden neue, ganz wenig gebogene Kupferstreifen an das Thermoelement angelötet und der Stab 50mal gekocht und abgekühlt.

$$w = 0 \cdot 557, \quad T = 4 \cdot 51, \quad R = 2470;$$

$$\log \tau = 0 \cdot 3532 - 4 + \log X. \qquad (1)$$

$2p$	A	$x_1 - x_2$	X	Mittleres X	Nach Gl. (1) beobachtetes τ	Nach Gl. (2) hieraus berechnetes ε
1370 g	7·6	3·9	5·4	4·467	0·00101°	$3 \cdot 87 \times 10^{-4}$
	5·2	2·7	3·6			
	4·6	1·5	3·8			
	6·1	0·8	5·6			
	4·7	3·0	3·0			
	6·7	2·3	5·4			
1770 g	8·6	4·8	5·8	6·05	0·00137°	$3 \cdot 14 \times 10^{-4}$
	8·5	4·7	5·8			
	8·1	3·9	5·9			
	9·5	4·9	6·7			
1970 g	8·0	3·0	6·3	6·75	0·00152°	$2 \cdot 83 \times 10^{-4}$
	10·0	5·8	6·7			
	10·4	4·4	7·9			
	9·0	5·1	6·1			
2170 g	12·0	4·2	9·6	8·425	0·00190°	$2 \cdot 92 \times 10^{-4}$
	14·0	7·2	9·9			
	10·4	5·5	7·3			
	14·4	11·8	7·7			
	10·0	4·1	7·7			
	12·3	7·2	8·2			
	11·2	5·5	8·1			
	11·2	4·1	8·9			

Diese 22 Beobachtungen ergeben ein mittleres

$$\varepsilon_2 = 3 \cdot 19 \times 10^{-4}$$

so daß alle 34 Versuche für Ni_{II} ein

$$\underline{\varepsilon = 3 \cdot 08 \times 10^{-4}}$$

liefern.

Ni_{III}.

Dieser Nickelstab war ursprünglich 3 *mm* dick und wurde im Eisenwerke der Alpinen Montangesellschaft in Graz 28mal gezogen, bis schließlich seine Dicke nur mehr 1·75 *mm* betrug. Hierauf wurde der Stab wiederholt gekocht und abgekühlt. Nach dem Einlöten des Thermoelements war die Distanz der äußeren Schneiden 25·58 *cm*, die der inneren 13·88 *cm*, so daß der Arm = 5·85 *cm* lang war.

Ein Stück von der Länge 21·47 *cm* wog 4·6173 *g* und wies eine experimentell bestimmte Dichte von 8·915 auf, so daß der Radius $r = 0·08763\,cm$ gefunden wurde, also sehr nahe gleich dem gemessenen Werte $r = 0·0875\,cm$.

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls lieferte nach der Formel

$$\log E = \log M - \log h + 5·7188$$

folgende Werte:

log *M*	log *h*	log *E*	*E*
5·6883	0·9542—2	12·4529	10^{12}.2·84
5·8888	0·1959—1	·4117	2·58
6·0255	0·3222—1	·4221	2·64
6·1290	0·4472—1	·4006	2·52
6·2123	0·5378—1	·3933	2·47
6·2823	0·5999—1	·4012	2·52
6·3421	0·6628—1	·3981	2·50
6·3947	0·6972—1	·4163	2·61
6·4412	0·7490—1	·4110	2·59
6·4836	0·7694—1	·4330	2·71
6·5219	0·7853—1	·4554	2·85

so daß das Mittel aus diesen Werten

$$E = 10^{12}.2·62\ C.G.S = 25700\,kg/mm^2$$

war. Die Höhe dieses Wertes erklärt sich durch das oftmalige Ziehen des Drahtes.

Die Versuche am 24. Oktober 1903 ergaben bei der gleichförmigen Biegung für die Temperaturänderungen folgende in der Tafel zusammengestellte Werte:

(Ni_{III}) 24. Oktober 1903, früh.

$$r = 0\cdot08763\,cm, \quad w = 0\cdot453, \quad T = 4\cdot62,$$

$$R = \left(\frac{4\cdot62}{4\cdot51}\right)^2 2470 = 2591,$$

$$\log \tau = 0\cdot2426 - 4 + \log X \tag{1}$$

und

$$\log \varepsilon = \log \tau - [0\cdot0827 - 12 + \log M_g^g]. \tag{2}$$

$2p$	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittl. X	Beobacht. τ nach Gl. (1)	Hieraus nach (2) berechn. ε
770 g	16·1	10·8	7·5	10·0			
	16·5	11·3	8·1	10·0	10·2	0·00178°	$2\cdot82\times10^{-4}$
	17·3	12·0	8·1	10·6			
	17·6	13·6	8·7	10·2			
970 g	28·0	19·3	14·9	16·8			
	30·0	20·3	15·0	18·2	18·25	0·00319°	$3\cdot40\times10^{-4}$
	29·6	19·1	—	18·7			
	31·1	20·6	—	19·3			
1170 g	38·2	24·0	—	24·6			
	34·5	23·0	—	22·8	22·4	0·00392°	$3\cdot56\times10^{-4}$
	36·5	26·2	—	21·5			
	34·6	24·3	17·4	20·7			

Aus diesen 12 Versuchen ergibt sich für Ni_{III} ein mittleres

$$\varepsilon_1 = 3\cdot26\times10^{-4}.$$

Derselbe Stab Ni_{III} wurde am 24. Oktober 1903, abends, noch einmal den Biegungsversuchen unterworfen und erhalten:

$$w = 0 \cdot 490, \quad T = 4 \cdot 44, \quad R = \left(\frac{4 \cdot 44}{4 \cdot 51}\right)^2 2470 = 2394,$$

$$\log \tau = 0 \cdot 3111 - 4 + \log X. \qquad (1)$$

$2p$	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittl. X	Beobacht. τ nach Gl. (1)	Hieraus nach (2) berechn. ε
570 *g*	8·2	6·5	4·6	4·5			
	9·9	5·3	3·8	6·9			
	7·0	6·4	3·1	3·8	4·575	0·000937°	$4 \cdot 15 \times 10^{-4}$
	5·9	4·9	—	3·1			
770 *g*	15·8	11·2	7·4	9·6			
	14·3	12·5	8·9	7·2			
	14·5	10·8	7·0	8·6	8·30	0·00170°	$2 \cdot 69 \times 10^{-4}$
	14·6	11·1	9·4	7·8			
870 *g*	19·0	12·9	9·3	11·6			
	19·9	13·8	9·6	12·1			
	21·3	14·2	10·7	13·0	12·075	0·00247°	$3 \cdot 34 \times 10^{-4}$
	19·8	14·8	9·7	11·6			
970 *g*	21·7	17·1	12·3	11·9			
	23·9	16·7	13·8	13·7			
	21·9	16·7	10·7	12·8	12·90	0·00264°	$2 \cdot 81 \times 10^{-4}$
	21·6	15·9	9·3	13·2			
1170 *g*	26·9	19·8	—	15·6			
	25·9	19·3	13·3	15·0			
	28·7	20·1	13·2	17·7	15·70	0·00321°	$2 \cdot 92 \times 10^{-4}$
	23·8	18·2	—	14·5			

Diese 20 Beobachtungen ergeben für Ni_{III} ein mittleres $\varepsilon_2 = 3 \cdot 18 \times 10^{-4}$, während für denselben Stab $\varepsilon_1 = 3 \cdot 26 \times 10^{-4}$ war; als Mittel aus ε_1 und ε_2 folgt für Ni_{III} ein

$$\varepsilon = 3 \cdot 22 \times 10^{-4}.$$

Um die Übersicht zu erleichtern, sind für die verschiedenen Nickelstäbe und die verschiedenen Belastungen die Temperaturänderungen τ und die Werte $(10^{+4} \times \varepsilon)$ angegeben.

Ni_I (2 *mm* dick).

	$2p = 570$		$2p = 770$		$2p = 970$		$2p = 1170$		$2p = 1370$		Mittleres ε
	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	
10. Okt. 1903	0·000565°	3·11	0·00101°	3·03	0·00164°	3·14	0·00228°	2·99			$3·09\times10^{-4}$
12. Okt. 1903	557	3·07	132	4·02	200	3·82	284	3·74			$3·66\times10^{-4}$
	631	3·47	113	3·43	173	3·31	243	3·19	0·00308°	2·97	$3·37\times10^{-4}$
*16. Okt. 1903	548	3·02	120	3·62	179	3·42	252	3·32	324	3·12	$3·30\times10^{-4}$
Mittel . . .	0·000575°	**3·18**	0·00117°	**3·53**	0·00179°	**3·42**	0·00252°	**3·31**	0·00316°	**3·05**	$3·37\times10^{-4}$

* Normalzustand nochmals hergestellt.

Die letzte horizontale Reihe ergibt für ε den Mittelwert $\varepsilon = 3·30\times10^{-4}$ mit dem wahrscheinlichen Fehler $\pm0·06\times10^{-4}$.

Ni_{II} (rund 2·5 *mm* dick).

	$2p = 1370$		$2p = 1770$		$2p = 1970$		$2p = 2170$		Mittleres ε
	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	
20. Okt. 1903	0·000785°	3·02	0·00125°	2·89			0·00198°	3·00	$2·97\times10^{-4}$
*21. Okt. 1903	0·00101	3·87	0·00137	3·14	0·00152	2·83	0·00190	2·92	$3·19\times10^{-4}$
Mittel . . .	0·00090°	3·45	0·00131°	3·02	0·00152°	2·83	0·00194°	2·96	$3·08\times10^{-4}$

* Nach Veränderungen.

Die letzte horizontale Reihe ergibt einen mittleren Wert für $\varepsilon = 3 \cdot 065 \times 10^{-4}$ mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0 \cdot 09 \times 10^{-4}$.

Ni_{III} (rund 1·75 *mm* dick).

	$2p = 570$		$2p = 770$		$2p = 870$		$2p = 970$		$2p = 1170$		Mittleres ε
	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	τ	$10^4.\varepsilon$	
21. Okt. 1903			0·00178°	2·82			0·00319°	3·40	0·00392°	3·56	$3 \cdot 26 \times 10^{-4}$
24. Okt. 1902	0·000937°	4·15	0·00170	2·69	0·00247°	3·34	0·00264	2·81	0·00321	2·92	3·18
Mittel . . .	0·000937°	4·15	0·00170°	2·76	0·00247	3·34	0·00292°	3·11	0·00357	3·24	$3 \cdot 22 \times 10^{-4}$

Der mittlere Wert der ε in der letzten horizontalen Reihe ist $\varepsilon = 3 \cdot 32 \times 10^{-4}$ mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0 \cdot 15 . 10^{-4}$.

Den 176 Versuchen entsprechen 33 verschiedene Werte von ε; nimmt man hiervon den Mittelwert, so findet man für

$$\textbf{Nickel: } \underbrace{\varepsilon = 3 \cdot 247 \times 10^{-4}}$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0 \cdot 043$

Sucht man die wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Reihen, so liefert der erste Stab die Werte:

$$0 \cdot 07 \times 10^{-4},$$
$$0 \cdot 21 \times 10^{-4},$$
$$0 \cdot 08 \times 10^{-4}$$

und

$$0 \cdot 09 \times 10^{-4},$$

woraus man ebenfalls ersieht, daß die zweite Reihe, die vom 12. Oktober 1903, zu den schlechteren Beobachtungen zählt. Die wahrscheinlichen Fehler für den zweiten und dritten Stab sind

$$0 \cdot 10 \times 10^{-4}$$

und

$$0 \cdot 12 \times 10^{-4}.$$

Jedenfalls erkennt man, daß die Voigt'sche Formel die Versuche gut wiedergibt.

Kupfer.

Der zuerst am 5. Oktober 1903 zur Anwendung gelangte Stab K_1 wies eine experimentell bestimmte Dichte: 8·90 und eine mit einem feinen Dickenmesser ermittelte Dicke $2r =$ 2·45 *mm* auf. Ein Stück von 28·47 *cm* wog 11·865 *g*, woraus man für den Radius r des kreisförmigen Querschnittes $r = 1 \cdot 221$ *mm* erhält, während der Dickenmesser 1·225 lieferte; als Mittel wurde $r = 1 \cdot 223$ genommen.

Die Distanz der äußeren Schneiden war 25·7 *cm*, die der inneren diesmal $2u = 13 \cdot 88$, woraus sich die horizontale Armlänge

$$\frac{1}{2}(25 \cdot 7 - 13 \cdot 88) = 5 \cdot 91$$

ergibt.

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch die ungleichförmige Biegung des Stabes lieferte für $r = 1 \cdot 223$ *mm* und $l = 268$ *mm* bei den Belastungen

	Kilogramm				
	0·084	0·134	0·184	0·234	0·284
die Pfeiltiefen	1·47	2·37	3·37	4·32	5·37 *mm*,

woraus sich nach der Formel:

$$E = \frac{l^3}{12\pi r^4} \frac{P_2 - P_1}{h_2 - h_1}$$

ergibt

$E = 12678, \quad 11410, \quad 12011, \quad 10867\ kg/mm^2$

so daß das Mittel

$E = 11742\ kg/mm^2 = 1{\cdot}1519 \times 10^{12}\ C.G.S$

war.

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls E mit Hilfe der gleichförmigen Biegung lieferte konstant

bei den Belastungen	die Pfeilhöhen
$p =$ 85 g	$h = 0{\cdot}065\ cm$
135	0·095
185	0·118
235	0·158
285	0·191
335	0·213
385	0·248
435	0·280
485	0·310
535	0·330
585	0·375
635	0·403
685	0·436
735	0·458

woraus sich nach der Formel

$$E = \frac{M}{h} \frac{(2u)^2}{2\pi r^4},$$

für $2u = 13{\cdot}875\ cm$ und $r = 0{\cdot}1223\ cm$ zu den

Drehungsmomenten	die Werte von
$M =$ 492600	$E = 1{\cdot}038 \times 10^{12}$
781700	1·127
1071000	1·243

Drehungsmomenten	die Werte von
$M = 1358000$	$E = 1\cdot177\times10^{12}$
1644000	1·179
1930000	1·241
2214000	1·223
2495000	1·221
2776000	1·226
3058000	1·269
3329000	1·216
3602000	1·224
3875000	1·163
4144000	1·239

ergaben und somit im Mittel

$$E = 1\cdot199\times10^{12}$$

gefunden wurde.

Den weiteren Betrachtungen wurde dieser Wert von E zu Grunde gelegt.

Mit diesem Stabe wurden 22 Versuche zur Bestimmung der Temperaturänderungen τ bei gleichförmiger Biegung durchgeführt, wobei stets die Belastung mit der Entlastung abwechselte.

War A der erste Ausschlag, (x_1-x_2) die erste und x_3-x_2 die zweite Distanz der Umkehrpunkte, so wurde zuerst berechnet:

$$X_0 = \frac{1}{3}[(x_1-x_2)+(x_3-x_2)],$$

dann $X = A-X_0$ und schließlich als beobachtetes

$$\tau = X\cdot\frac{0\cdot483}{1990}$$

genommen, da zur Schwingungsdauer $T = 4\cdot05$ die thermoelektrische Konstante 1990 gehörte und der Gesamtwiderstand 0·483 Ohm betrug.

Beobachtungen vom 6. Oktober 1903 am Kupferstabe K_1.

Halbmesser $r = 0\cdot 1223$. Die Größe ε wurde aus dem beobachteten τ berechnet nach der Formel:

$$\log \varepsilon = \log \tau + 12\cdot 3744 - \log (M_b^2 - M_a^2),$$

wo $M_a^2 = 10^{12} \times 0\cdot 243$ war. Mit diesem ε wurde hierauf τ' berechnet aus:

$$\tau' = \frac{290^\circ \times \varepsilon \times (M_b^2 - M_a^2)}{0\cdot 093 \times 8\cdot 9 \times 419 \times 10^5 \times 1\cdot 199 \times 10^{12} \times \frac{\pi^2}{2} r^6}$$

Nr. des Versuches	Ganze Belastung in der Mitte $2p$	Quadrat des rechts- wie linksdrehenden Momentes M_b^2	Erster Ausschlag A	Erste Distanz der Umkehrpunkte $x_1 - x_2$	Zweite Distanz der Umkehrpunkte $x_3 - x_2$	X	Mittel	Beobachtetes τ im Mittel	Mit $\varepsilon = 10^{-4} \times 3\cdot 64$ berechnetes τ'	Die Beobachtung ergibt ein $\varepsilon =$
1	670 g	$M_b^2 = 10^{12} \times 3\cdot 728$	4·1	2·6	1·7	2·7				
2		$M_a^2 = 10^{12} \times 0\cdot 243$	4·2	1·0	0·6	3·7				
3		$M_b^2 - M_a^2 = 3\cdot 485 \times 10^{12}$	3·6	1·4	1·0	2·8	2·78	0·000676°	0·000536°	$4\cdot 59 \times 10^{-4}$
4			3·7	2·8	2·7	1·9				

Nr. des Versuches	Ganze Belastung in der Mitte $2p$	Quadrat des rechts- wie linksdrehenden Momentes M_b^2	Erster Ausschlag A	Erste Distanz der Umkehrpunkte x_1-x_2	Zweite Distanz der Umkehrpunkte x_3-x_2	X	Mittel	Beobachtetes τ im Mittel	Mit $\varepsilon = 10^{-4}\times 3\cdot 64$ berechnetes τ'	Die Beobachtung ergibt ein $\varepsilon =$
5	870 *g*	$M_b^2 = 10^{12}\times 6\cdot 230$	6·3	3·0	2·6	4·4				
6		$M_a^2 = 10^{12}\times 0\cdot 243$	6·1	4·0	2·7	3·9				
7			8·1	6·2	4·7	4·5				
8		$M_b^2 - M_a^2 = 5\cdot 987\times 10^{12}$	8·0	5·1	4·1	4·9	3·95	0·000960°	0·000920°	$3\cdot 82\times 10^{-4}$
9			6·1	4·3	4·4	3·2				
10			5·9	2·9	2·8	4·0				
11			5·2	3·9	3·6	2·7				
12			6·3	4·0	3·7	3·7				
13	1170 *g*	$M_b^2 = 11\cdot 080\times 10^{12}$	11·1	9·3	4·4	6·5				
14		$M_a^2 = 0\cdot 243\times 10^{12}$	12·0	8·7	5·8	7·2	6·75	0·00164°	0 00167°	$3\cdot 58\times 10^{-4}$
15			11·1	7·9	6·0	6·5				
16		$M_b^2 - M_a^2 = 10\cdot 837\times 10^{12}$	11·3	8·2	5·3	6·8				

17	1370 g	$M_\beta^2 = 15\cdot020\times10^{12}$	18·9	14·2	9·1	11·1	9·05	0 00220°	0·00227°	$3\cdot53\times10^{-4}$
18		$M_\alpha^2 = 0\cdot243\times10^{12}$	16·6	13·6	9·8	8·8				
19		$M_\beta^2 - M_\alpha^2 = 14\cdot777\times10^{12}$	13·2	10·0	8·0	7·2				
20			16·0	11·8	7·6	9·5				
21			14·5	11·0	6·5	8·7				
22			15·5	11·4	8·0	9·0				

Als Mittel aus den sichersten Beobachtungen 5 bis 22 ergibt sich:

$$\varepsilon = 3\cdot64\times10^{-4},$$

während Schaefer

$$= 3\cdot627\times10^{-4}$$

hat. (Hätte man auch die ersten vier Beobachtungen dazu genommen, so wäre, die Zahl der Versuche berücksichtigend, erhalten worden:

$$\varepsilon = 3\cdot84\times10^{-4}).$$

K_2.

Der hernach zur Anwendung gelangte Stab K_2 wies eine experimentell bestimmte Dichte 8·917 auf.

Ein Stück von 7·85 *cm* wog 2·2290 *g*, woraus sich für den Radius r des kreisförmigen Querschnittes ergibt $r = 0 \cdot 1016 cm$.

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch die ungleichförmige Biegung des Stabes lieferte für $r = 1 \cdot 016 mm$ und $l = 268 mm$

bei den Belastungen	die Pfeiltiefen
0·214 *kg*	8·5 *mm*,
0·194	7·75
0·174	6·95
0·154	6·15
0·134	5·33
0·114	4·53
0·094	3·75
0·074	2·95
0·054	2·18
0·034	1·30

woraus sich nach der Formel

$$E = \frac{l^3}{12\pi r^4} \cdot \frac{P_2 - P_1}{h_2 - h_1}$$

ergibt:

$E =$ 12780, 11980, 11980, 11690, 11980,
12290, 11980, 12450, 10890 kg/mm^2,

so daß das Mittel

$$E = 12000\, kg/mm^2$$

oder

$$E = 10^{12} \times 1 \cdot 177$$

war.

Die Ermittlung des Elastizitätsmoduls mit Hilfe der gleichförmigen Biegung lieferte bei den Anhängegewichten

	170	370	570	770	970 *g*
die Pfeilhöhen.....	1·06	2·31	3·56	4·71	5·71 *mm*,

woraus sich für E ergab:

$$E = 10^{12} \times 1 \cdot 335, \quad 10^{12} \times 1 \cdot 326, \quad 10^{12} \times 1 \cdot 313,$$
$$10^{12} \times 1 \cdot 322, \quad 10^{12} \times 1 \quad 355$$

so daß also

$$E = 1 \cdot 33 \times 10^{12}$$

wäre.

Als Mittel beider Beobachtungsreihen wurde

$$E = 1 \cdot 255 \times 10^{12}$$

genommen.

Beobachtungen am Kupferstabe K_2 vom 9. Oktober 1903.

Schwingungsdauer $T = 4 \cdot 52$, thermoelektrische Konstante $R = 2479$, Widerstand $0 \cdot 454$ Ohm. Das beobachtete τ bestimmt sich aus:

$$\tau = X \frac{0 \cdot 454}{2479}.$$

X wird erhalten, indem man

$$\frac{1}{3} [(x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)]$$

vom ersten Ausschlage A abzieht.

Wie angegeben, wird die spezifische Wärme

$$\gamma = 0 \cdot 093 \times 4 \cdot 19 \times 10^7,$$

das spezifische Gewicht

$$\sigma = 8 \cdot 917,$$

der Elastizitätsmodul

$$E = 1 \cdot 255 \times 10^{12}$$

und der Halbmesser r des kreisförmigen Querschnittes

$$r = 0 \cdot 1016 \, cm$$

genommen. Voigt's Formel liefert dann:

$$\log \varepsilon = \log \tau + 11 \cdot 91166 - \log [M_b^2 - M_a^2],$$

wo das ursprüngliche Drehungsmoment M_a gegeben ist durch.

$$M_a^2 = 10^{12} \times 0 \cdot 243.$$

Nr. des Versuches	Ganze Belastung in der Mitte $2p$	Quadrat des rechts- wie linksdrehenden Momentes, d. i. M_b^2	Erster Ausschlag A	Distanz der Umkehrpunkte: Erste x_1-x_2	Distanz der Umkehrpunkte: Zweite x_3-x_2	X	Mittel	Beobachtetes τ	Mit $\varepsilon = 10^{-4}\times 3\cdot532$ berechnetes τ	Die Beobachtung ergibt ein ε
1	370 g	$10^{12}\times 1\cdot147$	3·4	1·5	2·0	2·2	aus allen 2·18	0·0003993°	0·0003913°	$10^{-4}\times 3\cdot604$
2			3·5	2·3	0·9	2·4				
3			4·2	1·7	3·8?	2·8				
4			3·1	1·7	1·0	2·2				
5			3·3	1·6	1·8	2·1				
6			2·6	1·4	2·1	1·4				
7	570 g	$10^{12}\times 2\cdot708$	8·8	4·7	4·6	5·7	aus allen 5·70	0·001044°	0·001067°	$10^{-4}\times 3\cdot456$
8			9·2	5·2	4·9	5·8				
9			8·0	4·3	3·5	5·4				
10			9·0	5·8	4·3	5·6				
11			7·2	2·8	1·9	5·6				
12			9·2	4·9	4·3	6·1				

13	770 *g*	$10^{12}\times 4\cdot 905$	13·0	7·3	7·4	8·1	aus denen beim Aufheben der Biegung 11·03	0·002020°	0·002018°	$10^{-4}\times 3\cdot 535$
14			14·6	7·1	5·6	10·4				
15			14·1	8·3	6·9	9·0				
16			17·5	10·5	5·9	12·0				
17			12·9	6·8	6·9	8·3				
18			16·5	10·1	7·4	10·7				
19	970 *g*	$10^{12}\times 7\cdot 716$	20·7	12·1	7·8	14·1	aus denen beim Aufheben der Biegung 15·9	0·002914°	0·003235°	$10^{-4}\times 3\cdot 179$
20			25·9	16·9	12·8	16·0				
21			21·9	13·1	10·1	14·5				
22			25·1	16·5	12·2	15·5				
23			18·2	11·4	7·9	11·8				
24			24·6	15·2	10·1	16·2				

Die ersten 18 Beobachtungen geben für $\varepsilon \times 10^4$ die Werte 3·604, 3·456 und 3·535, also im Mittel

$$\varepsilon = 10^{-4}\times 3\cdot 532$$

und sieht man, wie scharf Rechnung und Beobachtung übereinstimmt. Dabei sind bei den Versuchen Nr. 13 bis 18 nur die Entlastungen berücksichtigt, weil die so plötzlich vor sich gehen, daß der volle Impuls zur Geltung kommt. Bei den Versuchen Nr. 19 bis 24 bemerkt man schon ein Nachlassen der Wirkung.

Gab der erste Kupferstab ein

$$\varepsilon = 3 \cdot 64 \times 10^{-4},$$

so lieferte der zweite hiefür

$$\varepsilon = 3 \cdot 53 \times 10^{-4},$$

so daß im Mittel

$$\varepsilon = 3 \cdot 59 \times 10^{-4}$$

resultiert; Schaefer hat hiefür $3 \cdot 627 \times 10^{-4}$; Katzenelsohn hat nur die stets größere thermische Änderung des Torsionsmoduls η beobachtet und erhielt hiefür $\eta = 3 \cdot 65 \times 10^{-4}$.

Bestimmt man den wahrscheinlichen Fehler aller 46 Versuche, so erhält man hiefür $\pm 0 \cdot 05$, d. i. $1 \cdot 44\,\%$.

Gold.

Chemisch rein, bezogen von Heraeus in Hanau. Der Stab von 173 *mm* Länge wog $5 \cdot 95\,g$, woraus sich bei einer Dichtigkeit von $19 \cdot 4$ die Dicke $1 \cdot 510$ ergibt. Dieser Stab wurde sehr oft erhitzt und dann abgekühlt, so daß, wie die Konstanz der Pfeilhöhen nachwies, der Normalzustand erreicht war.

Bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls E mit Hilfe der gleichförmigen Biegung zeigte sich innerhalb der angewandten kleinen Belastungen noch keine bleibende Änderung des Drahtes. Es wurde, fast konstant, gefunden, daß

den angehängten Gewichten	die Pfeilhöhen
$2p = 50\,g$	$h = 0 \cdot 163\,cm$
100	$0 \cdot 325$
150	$0 \cdot 470$

entsprachen; die Pfeilhöhen nahmen daher für je $50\,g$ Mehrbelastung zu um $0 \cdot 162$, respektive $0 \cdot 145$, also im Mittel um $\Delta h = 0 \cdot 1535\,cm$. Hieraus rechnet sich E nach der einfachen Formel

$$E = \frac{\Delta M}{\Delta h} \frac{(2u)^2}{2\pi r^4} = \frac{144700}{0 \cdot 1535} \frac{(13 \cdot 8)^2}{2\pi \times 0 \cdot 0755^4},$$

d. i.

$$E = 10^{11} \times 8 \cdot 87 \; C.G.S = 9045 \, kg/mm^2.$$

Am Schlusse aller Temperaturbestimmungen wurde am 21. Oktober 1904 der Elastizitätsmodul E noch einmal bestimmt und gefunden, daß

den Gewichten	die Pfeilhöhen
$2p = 50 \, g$	$h = 0 \cdot 31 \, cm,$
100	$0 \cdot 47$
150	$0 \cdot 64$
200	$0 \cdot 78$

entsprachen, so daß

$$\Delta h = 0 \cdot 16, \; 0 \cdot 17, \; 0 \cdot 14,$$

d. i. im Mittel:

$$\Delta h = 0 \cdot 157 \, cm$$

war. Hiemit ergibt sich

$$E = 10^{11} \times 8 \cdot 68 \; C.G.S = 8840 \, kg/mm^2,$$

somit die Änderung nur gering ($2 \cdot 3\%$) war. Es wurde

$$E = 10^{11} \times 8 \cdot 8$$

gesetzt.

Die ersten Versuche vom 21. Juni 1904 lieferten

$$T = 4 \cdot 37, \; w = 0 \cdot 550; \quad \log \tau = 0 \cdot 3553 - 4 + \log X \qquad (1)$$

und wurde beobachtet:

$2p$	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittl. X	Beobachtetes τ	Nach Gl. (2) (unten) berechnetes ε
100	7·2 7·0	7·4 4·9	5·4 3·7	2·9 4·1	3·5	0·000793°	$4 \cdot 42 \times 10^{-4}$
150	9·6 12·4	7·1 4·7	4·7 5·3	5·7 9·1	7·4	0·00168°	$4 \cdot 66 \times 10^{-4}$
200	11·8 15·4	5·8 10·3	5·6 3·4	8·0 10·8	9·4	0·00213°	$3 \cdot 54 \times 10^{-4}$
250	22·2 23·4	15·2 16·3	8·2 9·2	14·4 14·9	14·65	0·00332°	$3 \cdot 66 \times 10^{-4}$

Mittel $\varepsilon = 4 \cdot 07 \times 10^{-4}$.

Zur Berechnung der Werte von ε aus den beobachteten Werten von τ diente die Gleichung:

$$\log \varepsilon = \log \tau - [\log (M_{\beta}^2 - M_{a}^2) + 0\cdot1540 - 11] \qquad (2)$$

entsprechend der Gleichung:

$$\tau = \frac{293 \times \varepsilon \times (M_{\beta}^2 - M_{a}^2)}{19\cdot3 \times 0\cdot0316 \times 419 \times 10^5 \times 10^{11} \times 8\cdot80 \times \frac{\pi^2}{2} r^6}.$$

Die Anfangsbelastung war $24 g$, die zu den übrigen Belastungen $2p = 100$, 150 etc. dazu kam. Hiemit rechnet sich:

$$M_{a}^2 = 10^{11} \times 0\cdot05$$

und für

	M_{β}^2	$\log \tau - \log \varepsilon$
$2p = 100\ldots\ldots$	$10^{11} \times 1\cdot310$	$0\cdot2544$
$150\ldots\ldots$	$10^{11} \times 2\cdot530$	$0\cdot5571$
$200\ldots\ldots$	$10^{11} \times 4\cdot224$	$0\cdot7797$
$250\ldots\ldots$	$10^{11} \times 6\cdot394$	$0\cdot9564$

wo τ den beobachteten Wert des τ angibt.

Beobachtungen mit demselben Stabe am 24. Juni 1904 lieferten:

$$w = 0\cdot642, \quad T = 4\cdot65, \quad \log \tau = 0\cdot4450 - 4 + \log X, \qquad (1)$$

$$\log \varepsilon = \log \tau - [\log (M_{\beta}^2 - M_{a}^2) + 0\cdot1540 - 11]. \qquad (2)$$

$2p$	A	$x_1 - x_2$	X	Mittleres X	Beobachtetes τ nach (1)	ε nach (2)
100	3·3 3·6	1·8 2·1	2·3 2·4	2·35	0·000655°	$3\cdot64 \times 10^{-4}$
150	6·3 7·8	2·5 5·0	4·9 4·8	4·85	0·00135°	$2\cdot98 \times 10^{-4}$
200	11·2 15·4	5·0 9·7	8·2 9·8	9·0	0·00251°	$4\cdot16 \times 10^{-4}$

Mittel $\varepsilon = 3\cdot59 \times 10^{-4}$

Die Größe ε hat Herr Schaefer nicht beobachtet, da, wie er anführt, die von ihm gebrauchten dünnen Golddrähte auch bei kleinen Belastungen bleibende Verlängerungen aufwiesen. Für die thermische Änderung des Torsionsmoduls erhielt er den Wert $3 \cdot 014 \times 10^{-4}$, wobei er allerdings aufmerksam macht, daß aus denselben Gründen dieser Bestimmung »kein großes Gewicht« beizulegen sei. Da die obigen Werte von ε sogar höher sind als die eben erwähnte Zahl, so war es jedenfalls nötig, die Versuche mit demselben Goldstabe unter geänderten Verhältnissen auszuführen. Der Stab wurde demnach herausgenommen und aufs neue vielfach (30mal) erhitzt und abgekühlt. Das Ganze blieb, nachdem die Galvanometernadeln etwas stärker astasiert worden waren, mit Watte sorgfältig umgeben, mehrere Tage stehen und wurde mit dem Beobachten stets gewartet, bis die Ruhelage sicher konstant geworden war; es wurde auch die zweite Distanz der Umkehrpunkte abgelesen. Ein Überschreiten der Elastizitätsgrenze trat, da kein Anhängegewicht größer als 200 g zur Anwendung kam, nicht ein. Die Beobachtungen vom 12. Oktober 1904 lieferten: Schwingungsdauer $T = 5 \cdot 20$, Gesamtwiderstand 0·56 Ohm, Temperatur 17°,

$$\log \tau = 0 \cdot 2887 - 4 + \log X. \qquad (1)$$

$2p$	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel der X	Beobachtetes τ nach (1)	ε
100 g	4·2	1·2	2·4	3·0	3·85	0·000749°	$4 \cdot 17 \times 10^{-4}$
	6·8	1·6	4·6	4·7			
150 g	11·4	2·9	6·3	8·3	8·05	0·00157°	$4 \cdot 34 \times 10^{-4}$
	11·5	4·2	6·9	7·8			
200 g	17·0	5·4	8·9	12·2	13·5	0·00262°	$4 \cdot 36 \times 10^{-4}$
	20·4	7·0	9·9	14·8			

Mittel $\varepsilon = 4 \cdot 29 \times 10^{-4}$.

Die beobachteten Temperaturänderungen τ sind durchwegs höher als die vom 28. Juni, liefern aber ein ziemlich konstantes ε, d. h. eine hinreichende Bestätigung der Voigtschen Formel.

Um ganz sicher zu gehen, wurden am 20. Oktober 1904 die Versuche mit demselben Stabe wiederholt und hiebei gefunden:

$$w = 0\cdot680, \quad T = 4\cdot56, \tag{1}$$

$$\log \tau = 0\cdot5176 - 4 + \log X.$$

$2p$	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel der X	Beobachtetes τ nach (1)	ε berechnet nach (2)
100 g	3·2	1·2	2·4	2·0	1·8	0·000593°	$3\cdot30 \times 10^{-4}$
	2·5	1·9	0·8	1·6			
150 g	10·9	7·9	2·5	7·4			
	7·8	5·6	5·1	4·2	5·6	0·00184°	$5\cdot11 \times 10^{-4}$
	9·3	7·0	3·0	6·0			
	7·2	2·7	4·8	4·7			
200 g	17·1	16·8	7·8	8·0			
	13·1	9·5	5·5	8·1			
	9·0	5·1	—	6·1	8·17	0·00269°	$4\cdot47 \times 10^{-4}$
	13·3	7·8	3·8	9·4			
	12·1	4·9	8·5	7·6			
	15·1	9·4	9·2	8·9			

$$\text{Mittel } \varepsilon = 4\cdot29 \times 10^{-4}.$$

Dieser Mittelwert von $\varepsilon = 4\cdot29 \times 10^{-4}$ fällt vollständig zusammen mit jenen, den die Versuche vom 12. Oktober 1904 lieferten. Die folgende Tafel gibt nachstehende Übersicht:

$2p$		Datum 1904				Mittel
		21. Juni	28. Juni	12. Oktob.	20. Oktob.	
100	$\tau=$	0·000793°	0·000655°	0·000749°	0·000593°	0·000698°
	$\varepsilon=$	$4\cdot42\times10^{-4}$	3·64	4·17	3·30	$3\cdot88\times10^{-4}$
150	$\tau=$	0·00168°	0·00135°	0·00157°	0·00184°	0·00161°
	$\varepsilon=$	$4\cdot66\times10^{-4}$	2·98	4·34	5·11	$4\cdot27\times10^{-4}$
200	$\tau=$	0·00213°	0·00251°	0·00262°	0·00269°	0·00249°
	$\varepsilon=$	$3\cdot54\times10^{-4}$	4·16	4·36	4·47	$4\cdot13\times10^{-4}$
Mittel	$\varepsilon=$	$4\cdot21\times10^{-4}$	$3\cdot59\times10^{-4}$	$4\cdot29\times10^{-4}$	$4\cdot29\times10^{-4}$	$4\cdot09\times10^{-4}$

Der wahrscheinliche Fehler dieser, an vier verschiedenen Tagen, unter geänderten Umständen ausgeführten 32 Beobachtungen ist

$$0\cdot187\times10^{-4},$$

d. i. unter 5% (als die beste Beobachtung erscheint die vom 12. Oktober 1904 mit dem wahrscheinlichen Fehler $0\cdot15\times10^{-4}$. Die thermische Änderung ε des Elastizitätsmoduls für Gold kann demnach gesetzt werden:

$$\varepsilon = 4\cdot09\times10^{-4}.$$

Die bald auszuführenden, analogen Messungen der Temperaturänderungen bei der Torsion werden zeigen, um wie viel die thermische Änderung des Torsionsmoduls größer ist als ε. Nach alledem wäre Gold in der Reihe der Metalle nicht vor Kupfer, sondern zwischen Kupfer und Silber zu stellen.

Silber.

Chemisch rein, von Kahlbaum bezogen; wiederholt gekocht und abgekühlt. Quadratischer Querschnitt; eine Seite mißt 0·135 *cm*. Dies wurde direkt mit dem Dickenmesser konstatiert und stimmt mit dem spezifischen Gewichte. (Ein Stück

von 31·825 *cm* Länge wog 6·083 *g*, woraus sich als spezifisches Gewicht die gebräuchliche Zahl 10·5 ergibt.) Die Distanz der zwei äußeren Schneiden betrug 25·6 *cm*, die der zwei inneren 14 *cm*. Der Silberstab trug an beiden Enden 6 *mm* dicke und 6 *cm* lange Zylinder aus Aluminium, von denen jeder 4·4 *g* wog. Die ganze Länge des Stabes war $14\cdot6+2\times6 = 26\cdot6\,cm$; dieses Drehmoment entspricht einer Belastung von je 2·5 *g* am Arme von $\frac{1}{2}(25\cdot6-14\cdot0) = 5\cdot8\,cm$. Da die zwei Haken, Seidenfäden und das Querholz 11 *g* wogen, so betrug die stets vorhandene Belastung:

$$11+2\times2\cdot5 = 16\,g.$$

Würden also z. B. unten $2p = 100\,g$ angehängt, so drehten rechts wie links $\frac{1}{2}\,116\,g$ am Arme von 5·8 *cm*, woraus sich die Drehungsmomente M leicht berechnen ließen.

Der Elastizitätsmodul E wurde, wie oben angegeben, aus den Pfeilhöhen bei der gleichförmigen Biegung ermittelt und hiefür

$$E = 10^{11}\times6\cdot883 = 7016\,kg/mm^2$$

erhalten.

Bei den Beobachtungen der Temperaturänderungen τ hatten sich beim Silber, insbesondere bei dünneren Stäben, ganz erhebliche Schwierigkeiten ergeben. Während nämlich bei der bisherigen Anordnung (Thermoelement Konstantan—Eisen in der Mitte) die Bewegung der Nadel im Sinne der von Edlund, Haga und Onnes aufgestellten Gesetze verlief, d. h. die Nadel, da der Thermostrom rasch verschwand, nach einigen Schwingungen in die Ruhelage periodisch zurückkehrte, zeigte sich hingegen bei dünnen Silberstäben (wie auch bei solchen aus Aluminium) ein aperiodisches Verhalten. Die Nadel erhielt einen Stoß, kam etwas zur Ruhe, kehrte aber nicht um, erhielt wieder einen Stoß u. s. w., und kehrte erst nach längerer Zeit, während welcher man die Temperatur nicht als konstant ansehen konnte, in die Ruhelage zurück. So waren z. B. (3. Februar 1904) bei einem dünnen Silberstabe II (quadr.

$a = 0 \cdot 113$) die von 10 zu 10 Sekunden nach dem Abheben von 50 *g* beobachteten Stellungen der Nadel:

58·06, 57·12, 56·70, 56·48, 56·33, 56·28, 56·28,
56·13, 55·85, 55·72, 55·56, 55·42, 55·33, 55·37

und ähnlich auch bei stärkeren Belastungen.

Diese Art aperiodischer Bewegung ist von der von Du Bois-Reymond und Riecke untersuchten wesentlich verschieden und hängt mit der elastischen Nachwirkung zusammen. Infolge dieser, bei Silber und Aluminium besonders stark auftretenden Erscheinung wird z. B. bei der Entlastung des gebogenen Stabes die gesamte Erwärmung nicht sofort, sondern erst allmählich auftreten. Die Differentialgleichung, welche die Bewegung der Nadel bestimmt, bedarf einer Umgestaltung, da bisher nur angenommen wurde, daß die (etwa bei der Entlastung) sich entwickelnde Wärme im Momente der Entlastung entstehe und im Laufe der Zeit (ziemlich rasch) durch Leitung und Strahlung verschwinde. Hier aber kommt die Wärmeentwicklung erst allmählich zur Geltung und kann unter Umständen die Umkehr der Nadel verhindern. Diese merkwürdige Erscheinung soll Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein. Es ist ersichtlich, daß bei dünneren Stäben, wo die Temperaturänderungen bei sonst gleichen Verhältnissen (wegen des r^6 im Nenner) viel höhere Werte annehmen, auch diese Störungen um so greller hervortreten und nicht leicht bei irgend einer Anordnung vollständig zu vermeiden sein werden.

Nach vielen vergeblichen Versuchen (Wahl von anderen Thermoelementen, Einsetzen von metallenen Zwischenstäben oder Elfenbein, Durchlochen der Stäbe u. s. w.) fand sich endlich ein Mittel, das wenigstens gestattete, die Bewegung der Nadel zu einer periodischen zu gestalten. Es wurde nämlich in der Mitte des Silberstabes ein dünner Konstantandraht eingelötet und seitwärts in einer Entfernung von 4 bis 5 *cm* außen ein dünner Silberstreifen von etwa 5 *cm* Länge und 1 *cm* Breite mit Lot an der Außenseite des Stabes befestigt. Der Silberstreifen und der Konstantandraht standen durch dünne Kupferbleche und Kupferdrähte mit dem Galvanometer

in Verbindung. Für dieses so entstandene Thermoelement »Konstantan—Silber« wurde die thermoelektrische Konstante R in der oben angegebenen Weise bei verschiedenen Widerständen und verschiedenen Temperaturen gemessen und erhalten:

$$R = 1780, \quad 1732, \quad 1737, \quad 1766,$$

so daß zu $T = 4 \cdot 64$ ein mittleres $R = 1758$ gehört, während bei dem Thermoelemente Konstantan—Eisen bei gleicher Schwingungsdauer $R = 2410$ war.

Bei dem dickeren Silberstabe ließen sich beide Methoden anwenden und so dartun, daß beide — wie gezeigt werden wird — zu demselben Ziele führen. (Beim Aluminium, das die gleiche störende Erscheinung zeigte, wurde zuerst ein seitlicher Teil des dünnen Aluminiumstabes verkupfert und hierauf ein feiner Kupferstreifen angelötet und die thermoelektrische Kraft in diesem Falle als Mittel aus $R = 1625$, 1620 und 1619, d. i. $R = 1621 \cdot 3$, bestimmt.) Halten wir an der Anschauung von der allmählichen Wärmeentwicklung fest, so wird es auch möglich, eine allerdings hypothetische Erklärung der merkwürdigen Wirkung dieser Vorrichtung zu geben. Durch das Anbringen der seitlichen, breiten Silberstreifen (Oberfläche über 5 cm^3) wird jedenfalls bewirkt, daß der Wärmestrom schneller abfließt, als wenn nur ein dünner, kurzer Draht vorhanden ist; die einzelnen Wärmestöße kommen nicht mehr so stark zur Geltung, so daß nun ein Umkehren der Nadel eintritt. Aus der Größe der ersten Distanz der Umkehrpunkte, die weit unter dem berechneten Werte liegt, sieht man schon, daß diese Wärmestöße, d. h. die elastische Nachwirkung, auch bei der seitlichen Anordnung ebenfalls vorhanden waren.

Es folgen nun Versuche mit Silber I, bei dem der Silberstreifen 5 *cm* von der Mitte entfernt war.

Silber I

mit quadratischem Querschnitt; Kante $a = 0 \cdot 135$ *cm*. Beobachtungen vom 7. Februar 1904. Periodische Bewegung der Nadel. Schwingungsdauer $T = 4 \cdot 50$ und Widerstand $w = 0 \cdot 743$. Die thermoelektrische Konstante

$$R = \left(\frac{4 \cdot 50}{4 \cdot 64}\right)^2 1758 = 1654.$$

Das beobachtete τ ergibt sich aus:

$$\log \tau = \log X + 0 \cdot 6473 - 4, \tag{1}$$

da

$$\tau = \frac{X \times 0 \cdot 743}{1654}$$

ist.

Es wurde die Größe ε aus dem beobachteten τ berechnet nach der Gleichung:

$$\log \varepsilon = \log \frac{\tau_b - \tau_a}{M_b^2 - M_a^2} + 10 \cdot 8064, \tag{2}$$

wobei

$$M_a^2 = 10^{11} \times 1 \cdot 0446$$

und

$$\tau_a = 0 \cdot 00129°$$

war und

$$\frac{\tau_b - \tau_a}{M_b^2 - M_a^2} = \frac{290° \times \varepsilon}{10 \cdot 5 \times 0 \cdot 057 \times 419 \times 10^5 \times 10^{11} \times 7 \cdot 34 \times \frac{1}{6} a^6}$$

ist.

Das Mittel aus allen vier Werten von ε — man vergleiche die nachfolgende Tafel p. 274 — liefert

$$\varepsilon = 7 \cdot 476 \times 10^{-4},$$

das vom Mittel der inneren zwei, d. i. $7 \cdot 533 \times 10^{-4}$ und von der Schaefer'schen Zahl $7 \cdot 65 \times 10^{-4}$ nicht viel abweicht.

Alle Beobachtungen verliefen ungemein ruhig.

Nummer des Versuches	Die ganze in der Mitte wirkende Belastung $2p$	Quadrat des rechts- wie linksdrehenden Momentes M_b^2	Erster Ausschlag A	Erste Distanz der Umkehrpunkte x_1-x_2	X	Mittel	Hieraus gerechnet das beobachtete τ	Die Beobachtung ergibt ein ε
1 2 3 4	116 g	$M_a^2 = 10^{11} \times 1 \cdot 0446$	3·4 4·6 4·0 4·0	2·0 2·2 1·7 1·7	2·3 3·4 3·0 3·0	2·92	$\tau_a = 0 \cdot 00129°$	
5 6 7 8	166 g	$M_b^2 = 10^{11} \times 2 \cdot 0466$	10·2 9·8 7·0 7·2	6·7 7·3 1·5 1·7	6·4 5·7 6·1 5·7	5·98	$\tau_b = 0 \cdot 00266°$	$10^{-4} \times 8 \cdot 755$
9 10	216 g	$M_b^2 = 10^{11} \times 3 \cdot 2788$	11·6 11·2	5·1 4·0	8·8 9·0	8·9	0·00395°	$10^{-4} \times 7 \cdot 624$
11 12	266 g	$M_b^2 = 10^{11} \times 4 \cdot 6475$	14·3 16·3	4·7 6·1	11·7 12·9	12·3	0·00546°	$10^{-4} \times 7 \cdot 411$
13 14 15 16	316 g	$M_b^2 = 10^{11} \times 6 \cdot 0400$	15·6 22·0 17·1 21·6	7·7 11·4 8·1 11·5	11·3 15·6 12·6 15·1	13·65	0·00606°	$10^{-4} \times 6 \cdot 114$

Derselbe Stab ($a = 0 \cdot 135\, mm$) war schon am 6. Februar 1904 untersucht worden und hatte bei den Belastungen

$$2p = 116,\ 166,\ 216 \text{ und } 266\, g$$

ähnliche Werte wie oben ergeben. Es war $T = 4 \cdot 28''$, also

$$R = \left(\frac{4 \cdot 28}{4 \cdot 64}\right)^2 \times 1758 = 1496, \qquad w = 0 \cdot 595,$$

so daß

$$\tau = \frac{0 \cdot 595}{1496},$$

d. i. τ sehr nahe gleich $\frac{4}{10^4} \cdot X$ ausfiel. Demnach gehörten zu den Werten

		die Temperaturänderungen
$X =$	$2 \cdot 82 \ldots$	$\tau = 0 \cdot 00113°$
	$6 \cdot 60 \ldots$	$0 \cdot 00264$
	$7 \cdot 86 \ldots$	$0 \cdot 00314$
	$10 \cdot 9 \ldots$	$0 \cdot 00436$

woraus sich, wenn man immer von der Nullage ausgeht, für ε die Werte

$$\varepsilon = 10^{-4} \times 6 \cdot 93,$$
$$10^{-4} \times 8 \cdot 26,$$
$$10^{-4} \times 6 \cdot 13,$$
$$10^{-4} \times 6 \cdot 01,$$

d. i. im Mittel:

$$\varepsilon = \mathbf{6 \cdot 83 \times 10^{-4}}$$

ergibt.

Diese Beobachtung verlief leider nicht so ruhig wie die obige, die durchwegs höhere Temperaturänderungen aufwies.

Derselbe Silberstab (I, $a = 0 \cdot 135$) war auch am 26. Jänner 1904 in gewöhnlicher Art durch Anbringen eines Thermoelementes in der Mitte untersucht worden und hatte — er gehört schon zu den dickeren Stäben — eine periodische Bewegung der Nadel ergeben. Es war da

$$T = 4 \cdot 65,$$

also $R = 2422$ und $w = 0 \cdot 778$,

$$\log \tau = 0 \cdot 5068 - 4 + \log X,$$

so daß im Ganzen erhalten wurde:

1904	Gesamtgewicht			
	$2p = 116\,g$	$2p = 166\,g$	$2p = 216\,g$	
	$\tau =$	$\tau =$	$\tau =$	
26. Jänner . .	0·00151°	0·00246°	6·00375°	In der Mitte: Konstantan—Eisen
7. Februar .	0·00129	0·00266	0·00395	*
6. Februar .	0·00113	0·00264	0·00314	*

* In der Mitte: Konstantan und 5 *cm* seitwärts ein angelötetes dünnes Silberblech.

Man sieht aus diesen Daten, daß im großen und ganzen wenig verschiedene Temperaturänderungen erzielt werden, ob man nun in üblicher Weise das Thermoelement in der Mitte anbringt oder in der Mitte nur Konstantan und 5 *cm* seitwärts einen angelöteten Silberstreifen für den Thermostrom verwendet.

Geht man immer von der Nullage aus, so liefern die Beobachtungen vom 26. Jänner 1904 für ε die Werte:

$$\varepsilon = 10^{-4} \times 9 \cdot 26,$$
$$10^{-4} \times 7 \cdot 70,$$
$$10^{-4} \times 7 \cdot 32,$$

wo wiederum die zwei letzten sicheren Werte von der Schaefer'schen Zahl ($10^{-4} \times 7 \cdot 65$) nur wenig abweichen. Wir werden nicht fehlgehen, wenn wir für diesen Silberstab

$$\varepsilon = 10^{-4} \times 7 \cdot 47$$

setzen. (Tatsächlich ist dies das Mittel aus allen am 26. Jänner, 7. Februar und 6. Februar ausgeführten Beobachtungen, das dem sichersten vom 7. Februar [$10^{-4} \times 7 \cdot 476$] ungemein nahe liegt.)

Silber II.

Zur Verwendung gelangte noch ein zweiter, schon oben erwähnter dünner Silberstab vom quadratischen Querschnitte mit der Kantenlänge $a = 0 \cdot 113$. Nach Anbringen des seitlichen Silberstreifens in der Distanz von 4 *cm* ergaben sich für

$$T = 4 \cdot 68, \quad R = 1788, \quad w = 0 \cdot 678, \quad t = 16° \text{ C.}$$

am 4. Februar 1904 beim Anhängegewichte 100 *g*:

die ersten Ausschläge A...	10·6	13·5	12·6	14·2
und die Werte (x_1-x_2)....	3·0	3·9	2·8	4·3,

woraus sich im Mittel $X = 9 \cdot 55$ oder $\tau_1 = 0 \cdot 00362°$ berechnet.

Ebenso beim Gewichte 150 *g*:

A.........	19·7	19·9
x_1-x_2.....	7·3	9 0

oder

$$X = 14 \cdot 85, \quad \text{d. i.} \quad \tau_2 = 0 \cdot 00563°,$$

und beim Gewichte 200 *g*:

A........	23·7	25·0	22·4	26·9
x_1-x_2....	15·9	17·6	12·4	15·4
x_3-x_2....	12·0	13·4	11·2	13·1

oder

$$X = 18 \cdot 4, \quad \text{d. i.} \quad \tau_3 = 0 \cdot 00698°.$$

Mit Schaefer's Zahl $\varepsilon = 10^{-4} \times 7 \cdot 65$ ergeben sich berechnet:

$$\tau_1' = 0 \cdot 00286°, \quad \tau_2' = 0 \cdot 00562°, \quad \tau_3' = 0 \cdot 00899.$$

Die Abweichung im ersten und letzten Fall ist jedenfalls auf die elastische Nachwirkung und die schon beginnende bleibende Deformation zurückzuführen (man findet für $10^4 \times \varepsilon$ die Werte 9·68, 7·65 und 5·94).

Nimmt man alle 14 Werte der ε und rechnet daraus den Mittelwert, so findet man für Silber

$$\underbrace{\varepsilon = 7 \cdot 48 \times 10^{-4}}$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler gleich $\pm 0 \cdot 31 = 4 \cdot 2\%$.

Aluminium.

Aluminium I.

Chemisch rein (Kahlbaum), Beobachtungen vom 24. Jänner 1904. Ein dünner Aluminiumstab mit quadratischem Querschnitte ($a = 1 \cdot 2\ mm$) erhielt in der Mitte ein Thermoelement Konstantan—Eisen und gab bei kleinen Belastungen periodische Nadelbewegungen. Es war $T = 4 \cdot 79$, somit

$$R = \left(\frac{4 \cdot 79}{4 \cdot 64}\right)^2 2410 = 2568$$

und es wird, da der Widerstand $w = 0 \cdot 851$ war,

$$\tau = X \frac{0 \cdot 851}{2568}.$$

Es wurde beobachtet:

	$2p_1 = 20\,g$		$2p_2 = 40\,g$				$2p_3 = 60\,g$			
A	2·8	2·5	6·4	4·4	3·4	5·1	7·1	10·0	8·6	10·5
$x_1 - x_2$	1·1	2·4	2·1	0·7	1 7	2·1	1·5	0·6	1·0	2·6
X	2·1	1·3	5·2	4·4	2·5	4·0	6·3	9·6	8·1	9·1
Mittel X...	1·7		4·03				8·3			
$\tau_1 = 0 \cdot 000563°$			$\tau_2 = 0 \cdot 00134°$				$\tau_3 = 0 \cdot 00275°$			

Es ist klar, daß bei so kleinen Anhängegewichten die der Nullage entsprechende Anfangsbelastung eine wichtige Rolle spielt; nennen wir dieselbe $2x$, so soll also sein:

$$\tau_1 = C.\varepsilon.(p_1 + x)^2,$$
$$\tau_2 = C.\varepsilon.(p_2 + x)^2,$$
$$\tau_3 = C.\varepsilon.(p_3 + x)^2.$$

Aus je zweien dieser Gleichungen läßt sich (durch Division) x unabhängig von ε finden und wird so als Mittel $2x = 11 \cdot 5\,g$ erhalten.

Dann ergibt sich nach der Gleichung

$$\tau = \frac{289 \times \varepsilon \times M^2}{2 \cdot 708 \times 0 \cdot 216 \times 10^{11} \times 7 \cdot 136 \times 419 \times 10^5 \times \frac{1}{6} 0 \cdot 12^6}$$

die zu suchende Größe ε aus dem beobachteten τ durch die Formel

$$\log \varepsilon = \log \tau + 10 \cdot 4787 - \log M^2$$

und man findet so:

$$\varepsilon = 20 \cdot 78 \times 10^{-4}, \quad 18 \cdot 47 \times 10^{-4}, \quad 19 \cdot 84 \times 10^{-4},$$

also im Mittel:

$$\underbrace{\varepsilon = 19 \cdot 70 \times 10^{-4}}.$$

Mit diesem Werte ist berechnet:

$$\tau' = 0 \cdot 000534°, \quad 0 \cdot 00142°, \quad 0 \cdot 00273°$$

und, wie oben angegeben, beobachtet:

$$\tau = 0 \cdot 000563°, \quad 0 \cdot 00134°, \quad 0 \cdot 00275°.$$

Die Abweichungen liegen unter den Beobachtungsfehlern.

Aluminium II.

Chemisch rein. Dieser zylindrische Stab hatte eine Dicke $2r = 1 \cdot 78$ *mm*, so daß $r = 0 \cdot 089$ *cm* war; es rechnet sich τ aus

$$\tau = \frac{290 \times \varepsilon \times (M^2 - M_0^2)}{2 \cdot 708 \times 0 \cdot 214 \times 419 \times 10^5 \times 7 \cdot 89 \times 10^{11} \times \frac{\pi^2}{2} 0 \cdot 089^6},$$

d. i.

$$\log \tau = 0 \cdot 7901 - 12 + l\varepsilon + l(M^2 - M_0^2).$$

Das gesamte, stets vorhandene Gewicht war 27 *g*, so daß sich für M_0^2 die Zahl $10^{11} \times 0 \cdot 06$ ergibt (Arm $5 \cdot 834$ *cm*).

Nun wurde am 6. Jänner 1904 mit

$$w = 0 \cdot 777 \text{ Ohm}, \quad T = 4 \cdot 567,$$

also

$$R = \left(\frac{4\cdot567}{4\cdot68}\right)^2 2456 = 2339,$$

beobachtet und mit

$$\log \tau = \log X + 0\cdot5214 - 4$$

berechnet, für:

$2p$	A	$x_1 - x_2$	X	Mittel X	τ
150+27	9·4	1·6	8·5		
	9·8	1·1	9·1	9·35	0·00311°
	10·6	1·0	10·0		
	10·7	1·5	9·8		
200+27	13·4	2·3	12·0		
	15·9	3·3	14·0	13·38	0·00445°
	11·4	1·8	10·3		
	21·3	7·1	17·2		
250+27	15·3	3·3	13·4		
	19·0	4·8	16·4	15·30	0·00505°
	15·7	3·4	13·8		
	21·4	7·0	17·6		

Nimmt man noch eine Beobachtung hinzu, die an demselben Stab einen Tag vorher, mit $2p = 100+27$ ausgeführt, das zugehörige $\tau = 0\cdot00155°$ ergeben hatte — zwei Tage vorher war dafür 0·00162° gefunden worden — so erhält man mit $\varepsilon = 21 \times 10^{-4}$ folgende Zusammenstellung:

	$2p =$ 100+27	150+27	200+27	250+27
Berechnet $\tau' =$	0·00160°	0·00312°	0·00504°	0·00735°
Beobachtet $\tau =$	0·00155	0·00311	0·00445	0·00505

Deutlich erkennt man, daß die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung um so größer ausfallen, je stärker

die Belastung genommen wird und daß beim Entlasten (Abheben der Gewichte, bei den stärkeren Verbiegungen) größere Ablenkungen eintraten als wie bei dem Anhängen der Gewichte; die Wirkung der Entlastung tritt eben sehr rasch auf. Würde man nur diese höheren Ablenkungen berücksichtigen, so würden die beobachteten Zahlen sich schon mehr den berechneten nähern; bei noch stärkerer Biegung würde auch dieses Mittel versagen, da dann die Grenzen der vollkommenen Elastizität überschritten werden und die elastische Nachwirkung sich stets in dem Sinne äußert, daß zu kleine τ beobachtet werden.

Rechnet man das den obigen Beobachtungen entsprechende ε nach der Gleichung

$$\log \varepsilon = \log \tau - \log \tau' + \log 21 \times 10^{-4},$$

so erhält man:

$$\varepsilon_1 = 20 \cdot 34 \times 10^{-4},$$
$$\varepsilon_2 = 20 \cdot 93 \times 10^{-4}$$

und

$$\varepsilon_3 = 18 \cdot 54 \times 10^{-4},$$

also im Mittel $19 \cdot 94 \times 10^{-4}$, d. i.

$$\varepsilon = \mathbf{20 \times 10^{-4}}.$$

Aluminium III.

Ein höchst lehrreiches Beispiel über den Einfluß, den die Art der Befestigung des Thermoelements auf das schließliche Resultat hat, bietet ein Aluminiumstab vom quadratischen Querschnitte, dessen Kante $a = 0 \cdot 138$ *cm* war. Die Befestigung des Thermoelements (ursprünglich Konstantan—Eisen) geschah durch den Mechaniker so, daß er den flachgeklopften Konstantandraht um den Aluminiumstab herumlegte und ihn schließlich mit dem in der Mitte befindlichen Eisendraht außen verlötete. Als auch hier die Bewegung der Nadel aperiodisch blieb, wurde der Stab seitlich etwas verkupfert und in der Entfernung von 5 *cm* von der Mitte ein dünnes Kupferblech angelötet; dieses Kupferblech und das Konstantan — verbunden durch das 5 *cm* lange Aluminiumstück — bildeten nun das

Thermoelement, dessen Enden mit dem Galvanometer verbunden waren. Auch hier bewirkte das seitliche Kupferblech eine periodische Bewegung der Nadel. Durch das Umlegen des Konstantandrahtes war nun aber der Querschnitt des Stabes an dieser Stelle größer geworden; die Kantenlänge war hier nicht 0·138 *cm*, sondern 0·160 *cm*; dieser Umstand macht sich in der Rechnung sofort fühlbar. Setzt man $a = 0 \cdot 138$, so erhält man berechnete Werte, die weit über den beobachteten lagen; es wurde daher der Rechnung ein Mittelwert $a = 0 \cdot 150$ zu Grunde gelegt.

Die Beobachtungen vom 6. April 1904 ergaben:

$$T = 4 \cdot 53, \quad w = 1 \cdot 02, \quad R = \left(\frac{4 \cdot 53}{4 \cdot 38}\right)^2 1621 = 1734,$$

$$\log \tau = \log X + 0 \cdot 7696 - 4.$$

	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel	Beobachtet	Berechnet
$2p_1 = 100\,g$	3·8	1·5	1·8	2·7			
	4·9	0·5	0·5	4·6	$X_1 = 3 \cdot 03$	$\tau_1 = 0 \cdot 00178°$	0·00191°
	4·0	3·9	5·2	1·0			
	5·3	2·7	1·9	3·8			
$2p_2 = 150\,g$	7·3	2·5	1·9	5·8			
	11·5	5·0	3·9	8·5	$X_2 = 6 \cdot 1$	$\tau_2 = 0 \cdot 00359°$	0·00374°
	5·1	0·3	3·4	3·9			
	8·6	3·5	4·0	6·1			
$2p_3 = 200\,g$	12·9	8·0	7·2	7·8			
	20·2	8·8	8·0	14·6	$X_3 = 10 \cdot 25$	$\tau_3 = 0 \cdot 00603°$	0·00599°
	11·8	6·1	5·0	8·1			
	16·2	10·5	6·6	10·5			

Die berechneten Werte wurden erhalten mit $\varepsilon = 21 \times 10^{-4}$ und, wie schon bemerkt, mit $a = 0 \cdot 15$ *cm*, indem die den ganzen Belastungen

$$116\,g, \quad 166\,g, \quad 216\,g$$

entsprechenden Quadrate der Momente

$$M_1^2 = 10^{11} \times 1 \cdot 0446,$$

$$M_2^2 = 10^{11} \times 2 \cdot 0466$$

und

$$M_3^2 = 10^{11} \times 4 \cdot 6475$$

waren und sich

$$\log \tau = 0 \cdot 9398 - 12 + \log \varepsilon + \log M^2$$

ergibt.

Sucht man umgekehrt die den Beobachtungen entsprechenden Werte der ε, so erhält man:

$$\varepsilon_1 = 19 \cdot 6 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon_2 = 20 \cdot 2 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon_3 = 21 \cdot 1 \times 10^{-4},$$

also im Mittel:

$$\underbrace{\varepsilon = 20 \cdot 3 \times 10^{-4}.}$$

Dieses Beispiel erweist zur Genüge, daß es sich empfiehlt, bei diesen Untersuchungen der Biegung (und der Torsion), wo die Querschnittsänderung eine so bedeutende Rolle spielt, den Draht des Thermoelementes nicht um den Stab umzulegen.

Platin.

Chemisch rein, bezogen von Heraeus in Hanau. Die Dicke dieses Stabes wurde zuerst mit einem Dickenmesser sorgfältig bestimmt und hiefür $1 \cdot 500$, $1 \cdot 500$, $1 \cdot 498$, $1 \cdot 500$ und $1 \cdot 498$, also im Mittel zu $1 \cdot 499$ *mm* erhalten. Nun hatten $17 \cdot 45$ *cm* ein Gewicht von $6 \cdot 575$ *g*, woraus sich mit dem spezifischen Gewichte $b = 21 \cdot 4$ eine Dicke $2r = 1 \cdot 498$ *mm* ergab; so wurde denn $r = 0 \cdot 07495$ *cm* gesetzt.

Wie schon oben angegeben, lieferten Versuche über die gleichförmige Biegung für den Elastizitätsmodul E die Werte

$$10^{12} \times 1 \cdot 737, \quad 10^{12} \times 1 \cdot 715, \quad 10^{12} \times 1 \cdot 761 \quad \text{und} \quad 10^{12} \times 1 \cdot 766,$$

so daß

$$E = 10^{12} \times 1 \cdot 745 \; C.G.S$$

war.

Die berechneten Temperaturänderungen τ entsprachen, da $t = 19°$ war, der Formel

$$\tau = \frac{292 \times \varepsilon \times (M_b^2 - M_a^2)}{21 \cdot 4 \times 0 \cdot 032 \times 419 \times 10^5 \times 10^{12} \times 1 \cdot 745 \times \frac{1}{2} \pi^2 r^6}$$

oder

$$\log \tau = 0 \cdot 8240 - 12 + \log \varepsilon + \log (M_b^2 - M_a^2).$$

Es hatten nur die zwei Haken mit ihren Seidenschnüren nebst dem unteren Brettchen ein Gesamtgewicht von 24 *g*, woraus sich, da jeder Arm 6 *cm* lang war, für M_a^2 der Wert $10^{11} \times 0 \cdot 05$ ergibt.

Wurden unten $2p = 150\,g$ angehängt, so daß also im ganzen $150 + 24 = 174\,g$ zogen, so ergab sich

$$M_b^2 = 10^{11} \times 2 \cdot 62$$

und für $2p = 200\,g$:

$$M_b^2 = 10^{11} \times 4 \cdot 35.$$

So sollte für $2p = 150\,g$:

$$\log \tau_1 = 0 \cdot 2339 + \log \varepsilon \qquad (2)$$

und für $2p = 200\,g$:

$$\log \tau_2 = 0 \cdot 4575 + \log \varepsilon \text{ sein.} \qquad (2')$$

Nun ergaben die Beobachtungen vom 14. März 1905 für

$$T = 4 \cdot 60, \quad R = \left(\frac{4 \cdot 60}{4 \cdot 5}\right)^2 2470 = 2576, \quad w = 0 \cdot 56,$$

$$\log \tau = 0 \cdot 3383 - 4 + \log X \qquad (1)$$

und für das Anhängegewicht

$2p$	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel X	Nach (1) beobacht. τ	Nach (2) berechnetes ε
150 *g*	2·2	1·2	2·0	1·1	0·95	0·000207°	$1 \cdot 21 \times 10^{-4}$
	2·5	1·9	3·5	0·7			
	2·3	1·4	2·3	1·1			
	1·9	1·6	1·5	0·9			

$2p$	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel X	Nach (1) beobacht. τ	Nach (2) berechnetes ε
200 g	3·0	2·0	2·7	1·1			
	4·7	3·2	4·9	2·0	1·2	0·000261°	$0·91\times10^{-4}$
	3·0	1·8	3·9	1·1			
	2·6	1·7	4·3	0·6			

Mittel: $\varepsilon = 1·06\times10^{-4}$.

Desgleichen lieferten die Beobachtungen vom 16. März 1905 mit $w = 0·62$, $T = 4·60$, $R = 2576$

$$\log\tau = 0·3814-4+\log X \qquad (1)$$

für

$2p$	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel X	Nach (1) beobacht. τ	Nach (2) u. (2') berechnetes ε
150 g	2·0	0·6	2·9	0·8	0·70	0 000169°	$0·983\times10^{-4}$
	2·0	2·5	1·7	0·6			
200 g	2·8	1 1	2·6	1·6	1·40	0·000337°	$1·175\times10^{-4}$
	2·7	2·6	—	1·2			

Mittel: $\varepsilon = 1·08\times10^{-4}$.

Wir werden demnach $\varepsilon = 1·07\times10^{-4}$ setzen, wofür Katzenelsohn $0·89\times10^{-4}$ und Schaefer $0·732\times10^{-4}$ fanden. Der wahrscheinliche Fehler wird dann $\pm0·024$, d. i. 2·3%.

Palladium.

Chemisch rein, von Heraeus in Hanau bezogen. Die Dicke des Stabes wurde mit drei Apparaten bestimmt und hiefür die mittleren Werte 1·45, 1·45 und 1·48 *mm* erhalten, so daß $2r = 1·46$ *mm* oder $r = 0·073$ *cm* zu setzen war.

Mit den den Anhängegewichten 100 *g* und 200 *g* entsprechenden Pfeilhöhen 0·23 *cm* und 0·33 *cm* findet man für den Elastizitätsmodul die Zahlen

$$E = 10^{12} \times 1 \cdot 100$$

respektive

$$E = 10^{12} \times 1 \cdot 145,$$

so daß im Mittel

$$E = 10^{12} \times 1 \cdot 123$$

war; dieser Wert steht in guter Übereinstimmung mit dem von Schaefer angegebenen $10^{12} \times 1 \cdot 107$. Da nach verläßlichen Angaben das spezifische Gewicht des Palladiums 11·4 und die spezifische Wärme desselben 0·0593 ist, so rechnet sich τ aus

$$\tau = \frac{292 \times \varepsilon \times (M_e^2 - M_a^2)}{11 \cdot 4 \times 0 \cdot 0593 \times 419 \times 10^5 \times 1 \cdot 123 \times 10^{12} \times \frac{\pi^2}{2} r^6}$$

oder

$$\log \tau = 0 \cdot 0896 - 11 + \log \varepsilon + \log (M_e^2 - M_a^2). \tag{2}$$

Im Anfangszustande hingen stets 24 *g* an den Mittelhaken, so daß sich hiemit findet:

$$M_a^2 = 10^{11} \times 0 \cdot 05.$$

Wurden

100 *g* angehängt, d. h. zogen 124 *g*, so war $M_e^2 = 1 \cdot 29 \times 10^{11}$,
150 » » » » 174 » » $M_e^2 = 2 \cdot 51 \times 10^{11}$,
200 » » » » 224 » » $M_e^2 = 4 \cdot 10 \times 10^{11}$,
250 » » » » 274 » » $M_e^2 = 6 \cdot 02 \times 10^{11}$.

Demnach gelten für diese vier Fälle die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \text{Für } 2p &= 100 \ldots\ldots \log \tau_1 = 0 \cdot 1830 + \log \varepsilon. \\ \text{» } 2p &= 150 \ldots\ldots \log \tau_2 = 0 \cdot 4805 + \log \varepsilon. \\ \text{» } 2p &= 200 \ldots\ldots \log \tau_3 = 0 \cdot 6971 + \log \varepsilon. \\ \text{» } 2p &= 250 \ldots\ldots \log \tau_4 = 0 \cdot 8656 + \log \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Hatte man τ_1, τ_2, τ_3 und τ_4 durch Beobachtung bestimmt, so sollte sich ein nahezu konstanter Wert für ε ergeben. Daß dies tatsächlich trotz der Kleinheit der Temperaturänderungen τ

der Fall ist, zeigen die ersten Beobachtungen vom 23. Juni 1904. Dabei war $w = 0 \cdot 545$, $T = 4 \cdot 34$, $R = 2007$ und wurde das beobachtete τ gefunden aus

$$\log \tau = 0 \cdot 4339 - 4 + \log X. \qquad (1)$$

$2p$	A	$\kappa_1-\kappa_2$	$\kappa_3-\kappa_2$	X	Mittel X	τ nach (1)	ε nach (2)	Mit dem Mittelwerte $\varepsilon = 2 \cdot 013 \times 10^{-4}$ berechnet
100	2·9	2·0	1·7	1·7	1·15	0·000312°	$2 \cdot 050 \times 10^{-4}$	0·000307°
	2·3	3·0	—	0·6				
150	2·8	1·5	—	1·9	2·30	0·000625°	$2 \cdot 066 \times 10^{-4}$	0·000609°
	3·0	0·5	—	2·7				
200	4·1	0·9	—	3·6	3·75	0·00102°	$2 \cdot 046 \times 10^{-4}$	0·00100°
	5·1	2·2	—	3·9				
250	5·6	2·1	1·5	4·4	5·1	0·00139°	$1 \cdot 888 \times 10^{-4}$	0·00148°
	6·7	1·5	1·3	5·8				

Als Mittel aus allen vier Reihen ergibt sich

$$\varepsilon = 2 \cdot 013 \times 10^{-4},$$

mit welchem Werte die letzte Reihe berechnet wurde.

Deutlich zeigt uns die letzte Beobachtung, daß mit der Belastung $2p = 250$ die Grenze der Leistungsfähigkeit des Stabes erreicht ist; nur beim Abheben der Gewichte, wo die volle Wirkung sofort zu Tage tritt, ist der Ausschlag der normale. Die drei ersten Beobachtungen zeigen ein sehr konstantes ε, da die Abweichung vom Mittel $2 \cdot 054 \times 10^{6}$ unter $0 \cdot 6\%$ liegt.

Einige spätere Beobachtungen ergaben ähnliche, wenn auch nicht so regelmäßig verlaufende Zahlen. So die vom 2. Juli 1904.

$2p$	A	x_1-x_2	X	Mittel X	Beobachtetes τ	ε
100	2·1	1·4	1·3	1·25	0·000339°	$2 \cdot 23 \times 10^{-4}$
	2·1	1·6	1·2			

Ebenso eine Beobachtungsreihe vom 6. Oktober 1904 mit

$$w = 0 \cdot 545, \quad T = 4 \cdot 56, \quad R = 2216.$$

$2p$	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel X	Beobachtetes τ	ε
100	2·7	0·8	—	2·2	1·8	0·000443°	$2 \cdot 91 \times 10^{-4}$
	2·0	1·0	—	1·4			
200	4·1	0·4	1·8	3·4	3·40	0·000837°	$1 \cdot 68 \times 10^{-4}$
	4·0	0·2	2·0	3·2			
	4·4	1·1	2·6	3·2			
	4·3	0·5	1·1	3·8			
250	6·0	0·9	0·5	5·7	5·10	0·00126°	$1 \cdot 71 \times 10^{-4}$
	6·1	2·8	—	4·5			

Mittel: $\varepsilon = 2 \cdot 10 \times 10^{-4}$.

Man wird nicht fehlgehen, wenn im ganzen mit Rücksicht auf das Gewicht der Beobachtungen

$$\varepsilon = 2 \cdot 05 \times 10^{-4}$$

genommen wird. Hiemit fallen auch die drei sichersten Beobachtungen vom 23. Juni 1904 zusammen.

Als wahrscheinlicher Fehler aller 18 Beobachtungen resultiert $\pm 0 \cdot 08 \times 10^{-4}$, d. i. 4%; läßt man aber die (dem kleinsten Gewichte $2p = 100$) entsprechenden zwei Beobachtungen, die ein absonderliches $\varepsilon = 2 \cdot 91 \times 10^{-4}$ lieferten, aus, so ist der wahrscheinliche Fehler nur $\pm 0 \cdot 051$, also unter $2 \cdot 5$%.

Zink.

Für dieses Metall ist bisher nur »ungefähr« die thermische Änderung des Torsionsmoduls bekannt, indem Katzenelson hiefür die Zahl 40×10^{-4} und Schaefer die Zahl $47\cdot92\times10^{-4}$ angeben. Die thermische Änderung des Elastizitätsmoduls konnte bisher noch nicht ermittelt werden, da — wie Schaefer hervorhebt — wegen der außerordentlich niedrigen Festigkeits- und Elastizitätsgrenze es nicht möglich war, eine sichere Messung auszuführen, obwohl Drähte bis zu 1 *mm* Radius genommen wurden.

Bei so schwierigen Verhältnissen, wo selbst bei der geringsten Torsion eine dauernde Verschiebung des Nullpunktes auf der Skala eintrat, war nicht zu hoffen, daß sich die bisherige Anordnung der gleichförmigen Biegung eines Zinkstabes bewähren werde. Dagegen ergab sich, wie sich zeigen wird, die Möglichkeit, aus dem Verhalten der Legierungen des Zinks mit Kupfer — von genau bestimmter Zusammensetzung — auf das thermische Verhalten von Zink einen innerhalb gewisser Grenzen gültigen Schluß zu ziehen. Es wurde angenommen, daß in diesem hier vorliegenden Falle die Mischungsregel gelte. Wenn demnach in der Legierung (Messing) x% Cu und $(100-x)$% Zn vorhanden waren und ε_1 sowie ε_2 die thermischen Änderungen des Elastizitätsmoduls jedes dieser Metalle vorstellte, so sollte das ε der Legierung die Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{x\cdot\varepsilon_1+(100-x)\varepsilon_2}{100}$$

erfüllen. Gaben verschiedenartige Zusammensetzungen (verschiedene x) nahe das gleiche ε_2, so war dieser Ansatz gerechtfertigt.

Zur Verwendung gelangten zuerst eine ganze Reihe von Messingstäben, die ich dem Entgegenkommen der Achenrainer Messingwerke (C. Kulmiz, Kramsach-Achenrain) in Tirol verdanke. Die Analyse dieser und anderer Messingstäbe erfolgte im hiesigen chemischen Institute dnrch den Herrn Privatdozenten Dr. Kremann, dem ich hiefür zu Dank verpflichtet bin.

Die erste Gruppe des Achenrainer Messings, mit S. &. B. bezeichnet, bestand aus $67 \cdot 2\%$ Cu und $32 \cdot 9\%$ Zn, hatte also schon einen bedeutenden Gehalt an Zn. Ein Stab dieser Gattung hatte eine Dicke von 2 *mm*, ein direkt bestimmtes spezifisches Gewicht $s = 8 \cdot 541$ und wies einen Elastizitätsmodul

$$E = 10^{12} \times 0 \cdot 9966 \; C.G.S$$

auf; für die spezifische Wärme wurde (mit hier hinreichender Sicherheit)[1] der aus den Zahlen für Cu und Zn berechnete Wert $0 \cdot 0942$ genommen. Mit diesen Daten und der Temperatur $t = 17 \cdot 5°$ ergibt die Voigt'sche Formel:

$$\log \tau = 0 \cdot 2434 - 12 + \log \varepsilon + \log M^2.$$

Die Arme waren hier etwas größer wie sonst, indem jeder die Länge von

$$\frac{1}{2}[25 \cdot 85 - 14 \cdot 0] = 5 \cdot 925 \, cm$$

hatte. Hiemit rechnet man für

$$(\log M^2 + 0 \cdot 2434 - 12)$$

die Werte:

	$(\log M^2 + 0 \cdot 2434 - 12)$
$2p = 300 \ldots.$	$0 \cdot 1016$
$400 \ldots.$	$0 \cdot 3338$
$450 \ldots.$	$0 \cdot 4280$
$500 \ldots.$	$0 \cdot 5094$
$600 \ldots.$	$0 \cdot 5834$,

indem bei so starken Zugkräften das bleibende Anhängegewicht vernachlässigt wurde.

Nun lieferten die Beobachtungen vom 23. Februar 1904 bei $T = 4 \cdot 57$, also

$$R = \left(\frac{4 \cdot 57}{4 \cdot 41}\right)^2 2071 = 2224, \quad w = 1 \text{ Ohm};$$

$$\log \tau = lX + 0 \cdot 6528 - 4, \quad X = A - \frac{1}{3}[(x_1 - x_2) + (x_3 - x_4)]$$

---

[1] Die spezifische Wärme des Cu ist $0 \cdot 094$ und die des Zn $0 \cdot 095$.

$2p$	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel X	Beobachtetes τ
300	7·5	1·4	4·6	4·5		
	5·1	1·6	2·5	3·7	4·17	0·00188°
	5·9	1·6	3·2	4·3		
	5·7	1·5	2·9	4·2		
400	9·3	0·6	4·0	7·8	7·4	0·00333°
	9·5	2·8	4·8	7·0		
450	10·0	2·8	5·9	7·1	7·7	0·00346°
	10·9	2·2	5·6	8·3		
500	11·9	3·4	6·4	8·6	8·3	0·00373°
	10·7	2·4	5·8	8·0		
550	15·8	2·6	7·6	12·4		
	20·5	7·2	8·1	15·4	13·6	0·00611°
	16·0	2·7	6·0	13·1		
	18·8	8·4	7·6	13·5		

Zieht man von dem beobachteten log τ die Summe:

$$(\log M^2 + 0\cdot 2434 - 12)$$

ab, so erhält man log ε und findet für ε die Werte:

für	$\varepsilon =$
$2p = 300$....	$14\cdot 83 \times 10^{-4}$,
400....	$15\cdot 42 \times 10^{-4}$,
450....	$12\cdot 92 \times 10^{-4}$,
500....	$11\cdot 55 \times 10^{-4}$,
550....	$15\cdot 95 \times 10^{-4}$,

so daß sich als Mittel:

$$\underline{\varepsilon = 14\cdot 13 \times 10^{-4}}$$

ergibt.

Den Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung zeigt die Tafel:

	Berechnetes τ	Beobachtetes τ
$2p = 300\ldots$	$0\cdot00179°$	$0\cdot00188°$,
$400\ldots$	$0\cdot00305$	$0\cdot00333$
$450\ldots$	$0\cdot00379$	$0\cdot00348$
$500\ldots$	$0\cdot00457$	$0\cdot00373$
$550\ldots$	$0\cdot00541$	$0\cdot00611$

die mindestens für die drei niedrigsten Belastungen eine gute Übereinstimmung dartun. Nimmt man demnach für den untersuchten Messingstab

$$\varepsilon = 14\cdot13 \times 10^{-4}$$

und für Cu die von Schaefer gegebene Zahl:

$$\varepsilon_1 = 3\cdot627 \times 10^{-4},$$

so kann man das für Zink geltende ε_2 berechnen aus der Formel:

$$\varepsilon = \frac{67\cdot1 \times \varepsilon_1 + 32\cdot9 \times \varepsilon_2}{100}$$

und findet:

$$\boldsymbol{\varepsilon_2 = 35\cdot6 \times 10^{-4}}.$$

Wie schwierig es hält, Messingstäbe von im vorhinein bestimmten Zinkgehalte herzustellen, zeigen die zweite und dritte Gruppe, bei denen leider, obwohl dies nicht beabsichtigt war, sich ähnliche Verhältnisse wie bei dem eben betrachteten Stabe der ersten Gruppe (S.&B.) vorfanden. So gab die Analyse eines Stabes der zweiten Gruppe (S. & M.) an Cu $64\cdot4\%$, Zn $35\cdot3\%$ und SiO_2 $0\cdot4\%$.

Ebenso zeigte die Analyse eines Stabes der dritten Gruppe (P. & M.) daß sich darin $65\cdot3\%$ Cu und $35\cdot1\%$ Zn befanden.

Beide Gruppen wiesen also einen nur etwas wenig höheren Zinkgehalt als wie die erste Gruppe (S. & B.) auf, bei der $32\cdot9\%$ Zn vorkamen. Obwohl die Beobachtungen nicht so regelmäßig wie bei der ersten Gruppe verliefen, so ließ sich doch auch hier ein Schluß auf die Größe von ε_2 ziehen.

Für einen Stab der zweiten Gruppe (S. & M.) — Dicke 2 *mm* — wurde zuerst der Elastizitätsmodul bestimmt; da

den Anhängegewichten	die Höhen
$2p = 200\,g$	$h = 0\cdot 175\,cm$
300	0·253
400	0·330
500	0 400
600	0·481
700	0·560

entsprachen, so lieferte die Differenzmethode (Gleichung 1, p. 234) die Werte:

$$E = 10^{12}\times 1\cdot 081,$$
$$= 10^{12}\times 1\cdot 086,$$
$$= 10^{12}\times 1\cdot 182,$$
$$= 10^{12}\times 0\;998,$$
$$= 10^{12}\times 1\cdot 00,$$

d. i. es war im Mittel:

$$E = 10^{12}\times 1\cdot 071;$$

das spezifische Gewicht, direkt bestimmt, war 8·508 und die spezifische Wärme (berechnet) 0·0943.

Die Beobachtungen vom 1. März 1904 ergaben $w = 0\cdot 479$, $T = 4\cdot 72$, also

$$R = \left(\frac{4\cdot 72}{4\cdot 41}\right) 2071 = 2372, \quad \log\tau = 0\cdot 3052 - 4 + lX.$$

$2p$	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	$x_3 - x_4$	X	Mittel X	Beobachtetes τ
300	15·4 14·5	1·2 2·0	5·8 5·6	— 2·0	13·1 12·0	12·55	0·00253°
400	23 2 21·7	2·7 2·8	9 9 8·2	3·0 —	19·0 18·0	18·5	0·00374°
500	27·8 27·8	5·1 3·8	13·9 10·9	4·6 2 5	21·5 22·9	22·2	0·00448°
600	34·2 34 9	5·4 8·3	15·0 16·5	3·3 5·2	27·4 26·6	27·0	0·00545°

Hieraus berechnet man für die vier verschiedenen Belastungen:

$$10^4 \times \varepsilon = 19 \cdot 9, \quad 16 \cdot 7, \quad 13 \cdot 0, \quad 11 \cdot 2,$$

deren Mittel für

$$\varepsilon = 15 \cdot 2 \times 10^{-4}$$

ergibt.[1]

Hätte man mit $\varepsilon_2 = 35 \cdot 6$ für Zn nach der Mischungsregel gerechnet, so wäre $\varepsilon = 14 \cdot 95 \times 10^{-4}$ herausgekommen; insoweit dient also auch dieser Stab zur Rechtfertigung für

$$\varepsilon_2 = 35 \cdot 6 \times 10^{-4}.$$

Eine spätere Beobachtung am 2. März 1904 mit $w = 0 \cdot 498$ und $R = 2342$ an demselben Stabe ergab für $2p = 400$:

A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel X	Beobachtetes τ
20·6	3·3	11·0	15·8	14·55	0·00309°
16·6	1·9	7·9	13·3		

und für $2p = 300$:

15·9	1·6	8·0	12·7	11·95	0·00254°
13·9	1·3	6·7	11·2		

Die Verschiedenheit (bei $2p = 400$) gegen früher rührt davon her, daß diesmal mit der höchsten Belastung begonnen wurde.

Auch die dritte Gruppe (P. & M.) lieferte für ε_2 einen an die obige Zahl $35 \cdot 6 \times 10^{-4}$ nahe herankommenden Wert.

Die Beobachtung vom 4. März 1904 an einem solchen Stabe — Dicke wiederum 2 *mm* — lieferte:

$$w = 0 \cdot 475, \quad T = 4 \cdot 23$$

1 Das Mittel der beiden inneren Zahlen ist 14·85, das der beiden äußersten 15·55; man merkt das gleichmäßige Abfallen von ε.

d. i.

$$R = \left(\frac{4 \cdot 23}{4 \cdot 57}\right)^2 \times 2224 = 1906$$

und

$$\log \tau = \log X + 0 \cdot 3967 - 4$$

und:

$2p$	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	$x_3 - x_4$	X	Mittel X	Beobachtetes τ
400	16·3	2·1	7·9	—	13·0	13·75	0·00343°
	18·5	3·5	8·4	—	14·5		
500	24·3	4·2	11·0	3·6	19·2	18·85	0·00470°
	23·8	4·8	11·1	4·1	18·5		
600	30·9	8·1	15·3	6·3	23·1	23·65	0·00590°
	31·4	7·1	14·6	—	24·2		

Der Vergleich mit der Theorie zeigt uns, daß sich für diese drei Belastungen für ε die Werte:

$$15 \cdot 3 \times 10^{-4}, \quad 13 \cdot 6 \times 10^{-4}, \quad 12 \cdot 1 \times 10^{-4}$$

ergeben, so daß als Mittel der beiden ersten, da die für $2p = 300$ fehlt,

$$\underbrace{14 \cdot 45 \times 10^{-4}}$$

hervorgeht.

Rechnet man nun an der Hand der Mischungsregel mit $\varepsilon = 15 \cdot 2 \times 10^{-4}$ für die zweite Gruppe und $\varepsilon = 14 \cdot 45$ für die dritte Gruppe die zugehörigen Werte für Zink, d. i. ε_2, so findet man aus den Beobachtungen in der zweiten Gruppe:

$$\varepsilon_2 = 36 \cdot 3 \times 10^{-4}$$

und aus denen in der dritten Gruppe:

$$\varepsilon_2 = 34 \cdot 6 \times 10^{-4}.$$

Im Gegensatze zu den drei bisher besprochenen Messinggruppen, die untereinander einen wenig verschiedenen Zink-

gehalt (etwa 34·4%) aufwiesen, zeigte die vierte Gruppe einen erheblich niedrigeren Zinkgehalt von nur 25·7% Zink und dementsprechend einen höheren Kupfergehalt von 74·4%. Bei den gleichen Belastungen (Drehmomenten) und gleicher Stabdicke (2 *mm*) ergaben sich nun wesentlich kleinere Temperaturänderungen τ.

So wurde am 9. März 1904 an einem solchen Messingstabe — in der Mitte das Thermoelement: Konstantan—Eisen — beobachtet:

$$T = 4 \cdot 4, \quad R = \left(\frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 64}\right)^2 2410 = 2168,$$

$$w = 0 \cdot 553, \quad \log \tau = \log X + 0 \cdot 4067 - 1.$$

2p	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel X	τ	ε	Mittl. ε
300	7·0	1·2	0·2	6·5	6·4	0·00163°	$12 \cdot 8 \times 10^{-4}$	$11 \cdot 35 \times 10^{-4}$
	8·2	1·7	3·7	6·3				
400	12·0	0·2	3·7	10·7	8·7	0·00221°	$9 \cdot 9 \times 10^{-4}$	
	8·8	2·2	4·2	6·7				

Derselbe Stab wurde am 12. März 1904 abermals untersucht, nachdem in der Mitte ein Konstantandraht und links seitwärts ein Kupferstreifen angebracht worden war; die thermoelektrische Kraft war demnach kleiner und wegen

$$T = 4 \cdot 32, \quad R = \left(\frac{4 \cdot 32}{4 \cdot 38}\right)^2 1621 \cdot 3 = 1576, \quad w = 0 \cdot 553$$

wurde

$$\log \tau = \log X + 0 \cdot 5449 - 1$$

und erhalten bei fallender Belastung:

$2p$	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel X	τ	ε	Mittl. ε
500	10·8	0·8	3·0	9·5	9·45	0·00331°	$9·59\times10^{-4}$	$11·36\times10^{-4}$
	11·2	2·7	5·8	9·4				
400	8·2	1·7	4·7	6·1	7·05	0·00247°	$11·03\times10^{-4}$	
	10·1	1·6	4·7	8·0				
300	8·3	0·9	4·8	6·4	4·9	0·00172°	$13·47\times10^{-4}$	
	6·1	2·1	6·0	3·4				

Desgleichen gab eine mit dem wiederholt gebogenen Stab am 3. Juni 1904 durchgeführte Beobachtung — in der Mitte Konstantan—Eisen — für

$$2p = 300: \quad \tau_1 = 0·00132°$$

und für

$$2p = 400: \quad \tau_2 = 0·60232°$$

was auf ein kleineres $\varepsilon = 10·4\times10^{-4}$ hinwiese; noch weiter fortgeführte Versuche wiesen auch für höhere Belastungen kleinere Werte von τ auf. Mit $\varepsilon = 11·35\times10^{-4}$ für das Messing der vierten Gruppe ergibt sich nach der Mischungsregel für Zink ein $\varepsilon_2 = 33·7\times10^{-4}$.

Zum Schlusse mögen noch Versuche besprochen werden, die vor Ankunft des Achenrainer Messings mit in Graz selbst aus größeren Mengen Kupfer und Zink hergestellten Messingstäben durchgeführt wurden. Ein solcher am 3. November 1903 untersuchter Stab mit der Dicke 1·55 *mm*, der nach den beim Guß angewandten Mengen einen Zinkgehalt von 20% haben sollte, wies, wie aus den Versuchen auf der folgenden Seite hervorgeht, nur ein

$$\varepsilon = 8·7\times10^{-4}$$

auf. Hieraus ließ sich vermuten, daß der Prozentgehalt an Zink kleiner als 20 sein dürfte; die später an zwei Stücken durchgeführte Analyse ergab nun in der Tat für das erste Stück 16·5% Zn (und 83·5% Cu) und für das zweite Stück 16·8% (mit 83·2% Cu).

$2p$	A	x_1-x_2	$X = A - \frac{4}{7}(x_1-x_2)$	Mittel	τ	ε	Mittel ε
70+150 = 220 *g*,	11·8	3·6	9·74				
dazu: $h = 4·04$ *mm*	13·2	4·8	10·44	10·56	0·00237°	$10·96 \times 10^{-4}$	
	15·2	3·2	12·23				
	11·7	3·3	9·81				
70+200	15·4	5·7	12·14				
$h = 4·48$	17·2	3·4	15·26	14·32	0·00321°	$9·52 \times 10^{-4}$	
	16·6	4·2	13·91				
	18·6	4·1	15·97				$8·7 \times 10^{-4}$
70+250	19·8	7·9	15·29				
$h = 5·91$	18·6	7·4	14·34	15·94	0·00357°	$7·44 \times 10^{-4}$	
	20·0	7·2	15·89				
	23·0	8·3	18·24				
70+300	27·5	13·6	19·73				
$h = 6·55$	25·3	10·1	19·53	19·94	0·00447°	$6·89 \times 10^{-4}$	
	25·6	12·1	18·69				
	28·5	11·7	21·81				

Bei den Versuchen p. 298 war

$$T = 4\cdot 30,\quad R = \left(\frac{4\cdot 30}{4\cdot 51}\right)^2 \times 2470 = 2246,\quad w = 0\cdot 484$$

und, bei vorheriger Bestimmung des z, das beobachtete τ aus

$$\log \tau = \log X + 0\cdot 3503 - 4$$

und für $t = 17°$

$$\log \tau = 0\cdot 7857 - 12 + \log \varepsilon + \log (M_2^2 - M_0^2),$$

worin $M_0^2 = 10^{11} \times 0\cdot 402$ war.

Sucht man mit diesem so erhaltenen $\varepsilon = 8\cdot 7 \times 10^{-4}$ nach der Analyse mittels der Mischungsregel:

$$8\cdot 7 = \frac{83\cdot 35 \times 3\cdot 627 + 16\cdot 63 \times \varepsilon_2}{99\cdot 98}$$

das dem Zink entsprechende ε_2, so findet man

$$\varepsilon_2 = 34\cdot 2 \times 10^{-4},$$

also in guter Übereinstimmung mit dem Obigen.

Die nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Resultate der Messungen an den Messingstäben:

Gattung	Gehalt an Cu (in Prozenten)	Gehalt an Zn (in Prozenten)	Beobachtetes ε für dieses Messing	Hieraus für Zn berechnetes ε_2
Achenrainer Messing				
Gruppe I . .	67·2	32·9	$14\cdot 13 \times 10^{-4}$	$35\ 6 \times 10^{-4}$
» II . .	64·4	35·3	$15\cdot 2 \times 10^{-4}$	$36\cdot 3 \times 10^{-4}$
» III . .	65·3	35·1	$14\cdot 45 \times 10^{-4}$	$34\ 6 \times 10^{-4}$
» IV . .	74·4	25·7	$11\cdot 35 \times 10^{-4}$	$33\cdot 7 \times 10^{-4}$
Grazer Messing	83·35	16·63	$8\cdot 7 \times 10^{-4}$	$34\cdot 2 \times 10^{-4}$

woraus sich als schließlicher Mittelwert für Zink

$$\varepsilon = \mathbf{34\cdot 9 \times 10^{-4}}$$

ergibt. Da diese unter sich gut stimmenden Resultate (die letzte Kolonne liefert einen wahrscheinlichen Fehler $\pm 0 \cdot 47$, d. i. $1 \cdot 9\%$) unter Anwendung der Mischungsregel erhalten wurden, so wird es wahrscheinlich, daß der Gebrauch dieser Regel zur Bestimmung eines unbekannten ε_2 aus den gemessenen Werten von ε und ε_1 auch in anderen Fällen gestattet sein wird; man wird indes — worauf hier ausdrücklich hingewiesen werden soll — immer nachzusehen haben, ob die vorhandenen Versuche, wie in den vorliegenden Fällen, für ε_2 nahe konstante Werte liefern.

Schluß.

Die vorliegenden Versuche — rund 450 an der Zahl — lassen erkennen, daß der wahrscheinliche Fehler des Wertes eines ε unter den möglichen Beobachtungsfehlern zu liegen kommt, d. h., daß sich für ε Werte ergeben, die als hinreichend konstant anzusehen sind. Die vorgeschlagene Methode, die thermische Änderung ε des Elastizitätsmoduls zu bestimmen, erscheint somit gerechtfertigt.

Im großen und ganzen stimmen die nach diesem Verfahren erhaltenen Werte von ε mit jenen überein, die andere Forscher nach ganz anderen Methoden erhalten haben.

Prüft man die obigen Beobachtungsreihen eingehender, so sieht man, daß bei einzelnen Metallen — wozu insbesondere Aluminium und Silber gehören — die Größen ε von offenbar zu hohen Werten nahe gleichmäßig bis zu allzu niedrigen Beträgen herabsinken. Dieses letztere Verhalten der ε, das Sinken derselben, tritt bei verhältnismäßig großen Belastungen ein und hat seinen Grund im Überschreiten der Grenze der vollkommenen Elastizität, wozu noch in einzelnen Fällen die elastische Nachwirkung dazukommt. Beide Einflüsse verhindern das volle Entstehen der den angewandten Kräften entsprechenden Deformationen, respektive der zugehörigen positiven oder negativen Wärmetönung.

Ganz andere Ursachen liegen jenen Erscheinungen zu Grunde, bei denen für kleine Belastungen die ersten Aus-

schläge A etwas zu hoch ausfielen. Eigene Versuche zeigten, daß auch dann, wenn das Thermoelement mit Wachs an den Stab angeklebt und hierauf mit dem Stabe gehoben und gesenkt wurde, sich (allerdings) kleine Ausschläge ergaben, d. h. also schwache Ströme unbekannter Herkunft vorhanden waren, die übrigens im gleichen Sinne wie die eigentlichen Biegungsströme verliefen. So wurde z. B. am 17. Oktober 1903 das Thermoelement (Konstantan—Eisen; $w = 0{\cdot}512$, $T = 4{\cdot}51$) an einem Nickelstab mit Wachs befestigt und hierauf bei einer Gesamtbelastung von $770\,g$ ein mittleres $A' = 2{\cdot}8\,mm$ und bei einer von $1370\,g$ ein solcher von $6{\cdot}1\,mm$ beobachtet. Demnach wären die wirklich beobachteten Ausschläge A . um diese Beträge A'. . ,. die allerdings etwas unbestimmt blieben, zu vermindern gewesen; dies konnte indes nur bei kleinen Belastungen von merklichem Einflusse sein, denn nur da kam diese Korrektur gegen A in Betracht und so erklärt es sich, warum A, τ und entsprechend ε gerade bei schwachen Biegungen zu groß ausfielen.

Um diesen Übelstand wenigstens teilweise zu beheben, wurde mehrmals die Differenzmethode angewendet. Da nämlich nach Voigt's Formel die Differenz $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ von zwei aufeinander folgenden, beobachteten Größen τ proportional sein mußte der Differenz der zugehörigen Quadrate der Drehungsmomente, d. i. $\Delta M^2 = M_2^2 - M_1^2$, so ließ sich nach dieser Beziehung:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta M^2} = C.\varepsilon$$

ebenfalls ε bestimmen. Auf diese Art mußte die erwähnte Fehlerquelle mindestens teilweise eliminiert werden, da nicht anzunehmen war, daß sie sich zwischen naheliegenden Belastungen erheblich ändern konnte.

Eine Bestätigung dieser Ideen finden wir z. B. in Versuchen, die am 13. November 1903 mit einem Stahlstabe ($2r = 1{\cdot}86\,mm$) durchgeführt wurden und die in der nachfolgenden Tafel p. 302 wiedergegeben sind.

$2p$	M^2	A	x_1-x_2	X	Mittel X	Beobachtetes τ	$\Delta\tau = \tau_2-\tau_1$	$\Delta M = M_2^2-M_1^2$
170+ 500	$10^{12}\times 3\cdot757$	8·9	5·3	5·9	6·05	0·00115°		
		9·1	5·0	6·2				
170+ 750	$10^{12}\times 6\cdot918$	15·2	7·4	11·0	10·55	0·00201°	0·00086°	$10^{12}\times 3\cdot161$
		16·0	10·0	10·3				
		15·4	8·3	10·3				
		15·7	9·0	10·6				
170+1000	$10^{12}\times 10\cdot945$	23·3	13·2	15·7	16·2	0·00309°	0·00108°	$10^{12}\times 4\cdot027$
		25·0	15·3	16·2				
		24·0	12·7	16·8				
		24·1	13·8	16·2				
170+1250	$10^{12}\times 15\cdot595$	31·8	16·8	22·2	22·8	0·00435°	0·00126°	$10^{12}\times 4\cdot650$
		33·7	18·0	23·4				
170+1500	$10^{12}\times 20\cdot980$	39·1	20·6	27·3	27·3	0·00520°	0·00085°	$10^{12}\times 5\cdot385$
		42·4	25·4	27·9				
		39·6	21·6	27·2				
		42·7	27·6	26·9				
170+1750	$10^{12}\times 26\cdot983$	48·2	26·6	33·0	33·1	0·00631°	0·00111°	$10^{12}\times 6\cdot003$
		52·5	32·8	33·7				
		49·0	27·8	33·1				
		50·7	31·6	32·7				

Es war:

$$t = 18^\circ \text{ C.}, \quad w = 0\cdot 542, \quad T = 4\cdot 84, \quad R = 2845,$$
$$\log \tau = 0\cdot 2801 - 4 + \log X, \qquad (1)$$
$$E = 21940 \, kg/mm^2 = 2\cdot 152 \times 10^{12},$$
$$M_a^2 = 10^{12} \times 0\cdot 247 \quad \text{für } 2p = 170 \, g.$$

Die Formel

$$\log \varepsilon = 11\cdot 9893 + \log \frac{\Delta\tau}{\Delta M} \qquad (1)$$

liefert nach diesen Versuchen für ε:

$$\varepsilon = 2\cdot 655 \times 10^{-4}, \quad 2\cdot 616 \times 10^{-4}, \quad 2\cdot 644 \times 10^{-4},$$
$$1\cdot 540 \times 10^{-4}, \quad 1\cdot 804 \times 10^{-4}.$$

Deutlich erkennen wir, wie die vier ersten Versuche ($2p =$ 670, 920, 1170, 1420, für drei sehr nahe konstante Werte $\varepsilon = 2\cdot 655 \times 10^{-4}$, $2\cdot 616 \times 10^{-4}$ und $2\cdot 644 \times 10^{-4}$) mit dem Mittelwerte $\varepsilon = 2\cdot 638 \times 10^{-4}$ lieferten und wie dann bei noch stärkerer Biegung ein starker Abfall der ε mit dem Überschreiten der Grenzen der vollkommenen Elastizität eintrat. Hätten wir nach der Formel

$$\log \varepsilon = 11\cdot 9893 + \log \tau - \log (M^2 - M_a^2)$$

die Größen ($10^4 \times \varepsilon$) berechnet, so hätten wir dafür die Werte 3·20, 2·94, 2·82, 2·77, 2·45 und 2·35 mit dem Mittelwert 2·75 erhalten. Man erkennt deutlich den Vorteil der angewandten Methode.[1]

Die Versuche, an denen Herr Wilhelm Egerer regen und ersprießlichen Anteil nahm, sind, soweit sie nicht allgemeiner Natur sind, in ihren Ergebnissen durch die nachfolgende Tafel dargestellt.

---

[1] Wurden die Enden des Konstantan- und Eisendrahtes dort, wo sie an den Kupferblechen anlagen, durch ein dünnes Kupferblech (Brücke) vom Widerstande 0·0038 verbunden, so ging nur der berechnete, vom Thermoelemente herrührende Teilstrom durch das Galvanometer. So war z. B. der Ausschlag ohne Brücke 50 *mm*, mit Brücke 2·3; nun sollte nach den Widerstandsmessungen nur der 23. Teil des früheren Stromes durch das Galvanometer gehen und es gibt $\frac{50}{23} = 2\cdot 2$, nahe entsprechend der Beobachtung. Wäre in der Leitung außerhalb der Brücke und außerhalb des Thermoelements irgend eine elektromotorische Kraft vorhanden gewesen, so hätte sich der Ausschlag anders gestalten müssen.

Tafel.

Metall	Zahl der Versuche	Aus den Biegungen erhaltenes ε	Wahrscheinlicher Fehler $\times 10^{-4}$	Schaefer	Katzenelsohn	Grey
Platin	12	$1 \cdot 07 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 07 = 6 \cdot 5\%$	$0 \cdot 732 \times 10^{-4}$	$0 \cdot 89 \times 10^{-4}$	—
Palladium......	18	$2 \cdot 05 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 05 = 2 \cdot 5\%$	$1 \cdot 979 \times 10^{-4}$	—	—
Stahl	18	$2 \cdot 64 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 012 = 0 \cdot 5\%$	$2 \cdot 25 \times 10^{-4}$ Eisen	$2 \cdot 33 \times 10^{-4}$ Eisen	$2 \cdot 47 \times 10^{-4}$ Stahl
Nickel	176	$3 \cdot 247 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 043 = 1 \cdot 32\%$	$2 \cdot 463 \times 10^{-4}$	$3 \cdot 24 \times 10^{-4}$ Neusilber	—
Kupfer	46	$3 \cdot 59 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 05 = 1 \cdot 44\%$	$3 \cdot 627 \times 10^{-4}$	—	—
Gold..........	32	$4 \cdot 09 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 187 = 4 \cdot 57\%$	—	—	—
Silber.........	42	$7 \cdot 48 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 31 = 4 \cdot 2\%$	$7 \cdot 65 \times 10^{-4}$	—	—
Aluminium.....	39	$19 \cdot 98 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 32 = 1 \cdot 6\%$	$21 \cdot 32 \times 10^{-4}$	$19 \cdot 5 \times 10^{-4}$	—
Zink..	60	$34 \cdot 9 \times 10^{-4}$	$\pm 0 \cdot 47 = 1 \cdot 4\%$	—	—	—

Die Resultate der vorliegenden Untersuchung drücken sich in folgenden Sätzen aus:

I. Die Methode, aus den bei der gleichförmigen Biegung beobachteten Temperaturänderungen von Metallstäben die thermische Änderung ε des Elastizitätsmoduls E zu bestimmen, liefert für ε Werte, die innerhalb der Beobachtungsfehler als konstant anzusehen sind.

II. Wenn bei starken Biegungen ein Sinken des Wertes von ε eintrat, so lag dies darin, daß die Grenzen der vollkommenen Elastizität überschritten wurden und mitunter — insbesondere bei Silber und Aluminium — die elastische Nachwirkung dazutrat. Die nähere Untersuchung beider Einflüsse soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

III. Innerhalb gewisser Grenzen hat sich für die Legierungen des Zinks mit Kupfer die Mischungsregel für die betreffenden ε als richtig erwiesen.

IV. Die nach dem obigen Verfahren (I) erhaltenen Werte der ε decken sich vielfach mit jenen Angaben, wie sie von anderen Beobachtern nach anderen Methoden erhalten wurden.

V. Durch diese Erfahrungen sowie durch die experimentell (p. 235 bis 240) erhärteten Sätze über allgemeine Fragen findet die von Voigt so glücklich gegebene Erweiterung des thermodynamischen Potentials elastischer Körper ihre Bestätigung.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. IV. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK

Über das elastische Gleichgewicht einer Hohlkugel, beziehungsweise eines Hohlzylinders,

wenn auf die äußere und innere Oberfläche ein gleichmäßiger Druck p_a, beziehungsweise p_i wirksam ist, unter Berücksichtigung von Gliedern in den Spannungen, die bezüglich der Deformationselemente von zweiter Ordnung sind

von

Dr. techn. **Alfons Leon.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1906.)

I.

In den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien erschien im Jahre 1894 die zweiteilige Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Josef Finger: »Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind« (Bd. CIII, Abt. II, Jänner, p. 163, und April, p. 231).

»In dem ersten Teile dieser Abhandlung wurden die Beziehungen zwischen den Komponenten der Spannung und den Deformationen, sowie auch der Ausdruck für das Potential der elastischen Kräfte lediglich aus zwei Grundannahmen deduziert. Es wurde nämlich vorausgesetzt, daß erstens das in Betracht gezogene Körperelement vor der betrachteten Deformation isotrop ist, und zweitens, daß für die inneren Kräfte, die innerhalb dieses Körperelementes wirksam sind, ein Potential existiert, ohne daß jedoch über die Art der zwischen den einzelnen materiellen Punkten dieses Elementes wirkenden Kräfte irgend eine Annahme gemacht worden wäre.«

»Es ergab sich hiedurch, wofern man bei der Bestimmung des Potentials, beziehungsweise der Spannungen, von Gliedern absieht, die in Bezug auf die neun Verschiebungsderivationen von höherer als der dritten, beziehungsweise zweiten Ordnung

sind, die Notwendigkeit, bei jeder isotropen Substanz außer der Integrationskonstanten A_0 der Potentialfunktion noch sechs konstante, bloß von dem anfänglichen Zustande des betrachteten Körperelementes abhängige Koeffizienten, also sechs Elastizitätskonstanten, in Rechnung zu ziehen. In aller Kürze wurde jedoch bemerkt, daß diese sechs Konstanten nicht voneinander unabhängig sein müssen, sondern daß zwischen denselben noch gewisse Beziehungen stattfinden können, deren Ermittlung eine Aufgabe der Molekulartheorie ist.«

Im zweiten Teile wurde gezeigt, »daß in der Tat bei der Beschränkung auf die oberwähnten Glieder sich diese sechs Koeffizienten durch bloß drei Elastizitätskonstanten ausdrücken lassen, wofern man von der üblichen besonderen Annahme ausgeht, daß die zwischen je zwei materiellen Punkten wirksamen inneren Kräfte entweder anziehend oder abstoßend wirken und lediglich Funktionen der veränderlichen Entfernung dieser Punkte sind«.

Im folgenden sollen nun, ausgehend von den Finger'schen Grundgleichungen, zwei der wichtigsten Aufgaben der Elastizitätslehre behandelt werden, nämlich das elastische Gleichgewicht einer Hohlkugel, beziehungsweise eines Hohlzylinders, wenn auf die äußere und innere Oberfläche ein gleichmäßiger Druck p_a, beziehungsweise p_i wirksam ist. Es läßt sich zeigen, daß beide Aufgaben in elementarer Weise exakt lösbar sind. In beiden Fällen lehrt uns schon die Anschauung die Richtungen der bloß von den Hauptdilatationen λ_1, λ_2 und λ_3 abhängigen Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 erkennen, für welche Herr Prof. Finger folgende Formeln entwickelt hat:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 = {} & A_1+(2A_2+A_1)[2\lambda_1+(\lambda_2+\lambda_3)^2]+\\
& +(2A_2-A_1)[\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2]+\\
& +3(A_3-A_2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-4(A_3+A_2)(\lambda_2\lambda_3-3\lambda_1^2),\\
\sigma_2 = {} & A_1+(2A_2+A_1)[2\lambda_2+(\lambda_3+\lambda_1)^2]+\\
& +(2A_2-A_1)[\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2]+\\
& +3(A_3-A_2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-4(A_3+A_2)(\lambda_3\lambda_1-3\lambda_2^2),\\
\sigma_3 = {} & A_1+(2A_2+A_1)[2\lambda_3+(\lambda_1+\lambda_2)^2]+\\
& +(2A_2-A_1)[\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2]+\\
& +3(A_3-A_2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-4(A_3+A_2)(\lambda_1\lambda_2-3\lambda_3^2).
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

A_1, A_2 und A_3 sind die Elastizitätskonstanten.

Die Hohlkugel.

Eine Hauptspannungsrichtung ist offenbar die Richtung der Geraden, welche den betrachteten materiellen Punkt mit dem Mittelpunkte der Hohlkugel verbindet. In der auf diesen Radiusvektor normalstehenden Ebene sind alle Richtungen gleichwertig. Die radiale Hauptdilatation λ_1 ist gleich $\frac{d\rho}{dr}$, wenn man die Verrückung des materiellen Punktes in radialer Richtung mit ρ und seine ursprüngliche Entfernung vom Mittelpunkte mit r bezeichnet. Die Dilatation des Punktes in der darauf senkrechten Ebene ist $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\rho}{r}$. Jeder Punkt bewegt sich nur in radialer Richtung. Die radiale Hauptspannung bezeichnen wir nun mit σ_r, die darauf senkrecht stehende mit σ_t. Somit lauten nun die Formeln (1):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r = {} & A_1 + (2A_2 + A_1)\left[2\frac{d\rho}{dr} + 4\frac{\rho^2}{r^2}\right] + \\
& + (2A_2 - A_1)\left[\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2} + 2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right] + \\
& + 3(A_3 - A_2)\left[\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r}\right]^2 - 4(A_3 + A_2)\left[\frac{\rho^2}{r^2} - 3\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2\right], \\
\sigma_t = {} & A_1 + (2A_2 + A_1)\left[2\frac{\rho}{r} + \left(\frac{\rho}{r} + \frac{d\rho}{dr}\right)^2\right] + \\
& + (2A_2 - A_1)\left[\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2} + 2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right] + \\
& + 3(A_3 - A_2)\left[\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r}\right]^2 - 4(A_3 + A_2)\left[\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr} - 3\frac{\rho^2}{r^2}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Gleichgewichtsbedingung für ein Volumelement in polaren Koordinaten ist bekanntlich die folgende:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_t) = 0.^1 \qquad (3)$$

[1] Formänderungen vorausgesetzt, welche klein sind im Verhältnis zu den Dimensionen des Körpers. Ist diese Annahme nicht mehr zulässig, so ist Gleichung (3) zu ersetzen durch

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_t) + \frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{d\rho}{dr}(\sigma_r - \sigma_t) = 0.$$

(Siehe A. Leon: Über die Wärmespannungen in runden Schornsteinen. Verlag Fromme, 1906.)

Ersetzt man in dieser Gleichung die Spannungen durch die relativen Längenänderungen (Gleichung 2), so erhält man die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} 0 = (A_1+6A_2)\left[r\frac{d^2\rho}{dr^2}+2\frac{d\rho}{dr}-2\frac{\rho}{r}\right]- \\ -2A_1\left[\rho\frac{d^2\rho}{dr^2}+2\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right]+ \\ +2A_2\left[-4\rho\frac{d^2\rho}{dr^2}+9r\frac{d\rho}{dr}\cdot\frac{d^2\rho}{dr^2}+\right. \\ \left.+6\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}-4\frac{\rho^2}{r^2}\right]+ \\ +6A_3\left[2\rho\frac{d^2\rho}{dr^2}+5r\frac{d\rho}{dr}\cdot\frac{d^2\rho}{dr^2}+\right. \\ \left.+6\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2+2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}-8\frac{\rho^2}{r^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Aus dieser Gleichung ist ρ als Funktion von r zu ermitteln. Trotzdem sie ziemlich kompliziert aussieht, besitzt sie gewisse Schwächen, welche man durch Einführung neuer Variablen ausnützen kann, um sie zunächst durchsichtiger zu gestalten und dann elementar zu integrieren. Wir ersetzen sowohl die Unabhängige r als auch die Abhängige ρ durch x, beziehungsweise durch y, und zwar mit Hilfe der Gleichungen:

$$x = \operatorname{logn} r, \quad (5)$$

$$y = \frac{\rho}{r}. \quad (6)$$

Es ist nicht schwer, aus den vorstehenden Beziehungen die folgenden abzuleiten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dr} &= y+\frac{dy}{dx} = y+y', \\ r\frac{d^2\rho}{dr^2} &= \frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2} = y'+y''. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (4) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} 0 = (A_1+6A_2)(y''+3y')-2A_1(yy''+2y'^2+3yy')+ \\ +2A_2(9y'y''+5yy''+15y'^2+15yy')+ \\ +6A_3(5y'y''+7yy''+11y'^2+21yy'); \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

y kommt in dieser Gleichung nur als Koeffizient eines Differentialquotienten, x überhaupt nicht vor; man kann sie auch in folgender Weise schreiben:

$$0 = 6(3A_2+5A_3)y'y''+2(-2A_1+15A_2+33A_3)y'^2+$$
$$+[2(-A_1+5A_2+21A_3)y+(A_1+6A_2)](y''+3y').$$

Dividiert man die einzelnen Glieder dieser Gleichung durch $6(3A_2+5A_3)$, so schreibt sie sich, wofern man im folgenden

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{-2A_1+15A_2+33A_3}{3(3A_2+5A_3)}, \\ a_2 &= \frac{-A_1+5A_2+21A_3}{3(3A_2+5A_3)}, \\ a_3 &= \frac{A_1+6A_2}{6(3A_2+5A_3)} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

setzt, wie folgt:

$$y'y''+a_1y'^2+(a_2y+a_3)(y''+3y') = 0. \quad (10)$$

a_1, a_2 und a_3 sind konstante Größen, welche lediglich abhängig sind von den Elastizitätskoeffizienten A_1, A_2 und A_3, beziehungsweise von den Verhältnissen $\frac{A_2}{A_1}$ und $\frac{A_3}{A_1}$.

Um die Gleichung (10) noch einfacher zu gestalten, setzen wir

$$a_2y+a_3 = Y. \quad (11)$$

Es ist daraus

$$y = \frac{Y}{a_2}-\frac{a_3}{a_2},$$

$$y' = \frac{Y'}{a_2}$$

und

$$y'' = \frac{Y''}{a_2}.$$

Man erhält somit:

$$0 = Y'Y''+a_1Y'^2+a_2Y(Y''+3Y').^1 \quad (12)$$

[1] Für Formänderungen, welche gegenüber den Dimensionen des Körpers nicht zu vernachlässigen sind, erhält man

$$0 = YY'Y''+a_1Y'^3+a_2YY'^2+a_3Y^2(Y''+3Y')+Y'Y''+a_4Y'^2+a_5Y(Y''+3Y').$$

Dividiert man diese Gleichung durch Y'^2, so erhält man:

$$0 = \frac{Y''}{Y'} + a_1 + a_2 \frac{Y}{Y'}\left(\frac{Y''}{Y'} + 3\right).$$

Setzt man nun

$$\frac{Y}{Y'} = z, \tag{13}$$

so, daß

$$\frac{Y''}{Y'} = \frac{1 - \frac{dz}{dx}}{z},$$

so reduziert sich die vorstehende Differentialgleichung zweiter Ordnung in eine solche der ersten Ordnung, welche lautet

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3a_2 z^2 + (a_1 + a_2)z + 1}{a_2 z + 1}. \tag{14}$$

Somit ist

$$dx = \frac{a_2 z + 1}{3a_2 z^2 + (a_1 + a_2)z + 1} dz$$

und

$$x = \operatorname{logn} C_1 + \int \frac{a_2 z + 1}{3a_2 z^2 + (a_1 + a_2)z + 1} dz, \tag{15}$$

wobei logn C_1 eine willkürliche Konstante ist. Gelingt es nach Ausführung der hier angedeuteten Integration, z als Funktion von x zu bestimmen, so liegt der weitere Weg zur Lösung des Problems klar vor Augen. Es ist (Gleichung 13)

$$z = \frac{Y}{Y'} = \frac{Y}{dY} \cdot dx = f(x)$$

und daher

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dx}{f(x)},$$

also

$$\operatorname{logn} Y = \operatorname{logn} C_2 + \int \frac{dx}{f(x)}$$

oder

$$Y = C_2 . e^{\int \frac{dx}{f(x)}}.$$

logn C_2 ist die zweite, willkürliche Integrationskonstante.

In den meisten Fällen wird es jedoch schwierig sein, z explizit als Funktion von x zu bestimmen, so daß man von dem soeben angedeuteten Wege der Integration abgedrängt wird. Dann wird man auch Y als eine Funktion von z darstellen. Nach Gleichung (14) ist

$$\frac{3a_2z^2+(a_1+a_2)z+1}{a_2z+1} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dY}\cdot\frac{dY}{dx} = \frac{dz}{dY}\cdot Y'.$$

Aus der Gleichung (13) erhält man

$$Y' = \frac{Y}{z},$$

daher ist

$$\frac{3a_2z^2+(a_1+a_2)z+1}{a_2z+1} = \frac{dz}{z}\cdot\frac{Y}{dY}$$

oder

$$\frac{dY}{Y} = \frac{a_2z+1}{z[3a_2z^2+(a_1+a_2)z+1]}\,dz.$$

Es ist also

$$\text{logn}\,Y = \text{logn}\,C_2 + \int\frac{a_2z+1}{z[3a_2z^2+(a_1+a_2)z+1]}\,dz. \qquad (16)$$

Die Gleichung (15) stellt x, die Gleichung (16) Y als Funktion von z dar. Betrachtet man z als willkürlichen Parameter, so ist durch diese Gleichungen der Zusammenhang zwischen x und Y, beziehungsweise zwischen r und $\frac{\rho}{r}$, also auch zwischen r und ρ gegeben, und unsere Differentialgleichung integriert.

Die Funktion $\frac{a_2z+1}{3a_2z^2+(a_1+a_2)z+1}$ hat bestimmenden Einfluß auf den Gang der Integration, weshalb sie die »charakteristische« Funktion genannt werden soll. Diese echte, gebrochene, rationale Funktion kann reduzibel oder irreduzibel sein. Sie ist reduzibel, wenn Zähler und Nenner einen gemeinsamen, von z abhängigen Faktor besitzen.

Ist die »charakteristische« Funktion irreduzibel, so kann ihr Nenner reelle oder imaginäre Nullstellen besitzen. Im ersteren Falle ist eine weitere Zerlegung in Partialbrüche möglich, im letzteren nicht. Ob das eine oder das andere der Fall ist, hängt von der Größe der Koeffizienten a_1 und a_2 ab. Diese beeinflussen daher die Art der Integration.

Wir wollen nun darangehen, die hier angedeuteten Fälle zu behandeln. Wenn durch Versuche die drei Elastizitätskonstanten A_1, A_2 und A_3 für die einzelnen Materialien bestimmt sein werden, wird es vielleicht möglich sein, einen einheitlichen Gang in die Berechnungen zu bringen.

1. Ein Sonderfall. Die »charakteristische« Funktion sei reduzibel.

Ist

$$a_1 = 3, \tag{17}$$

genügen also die Elastizitätskonstanten der Bedingung

$$A_1 + 6(A_2 + A_3) = O. \tag{18}$$

so ist

$$x = \text{logn}\, C_1 + \int \frac{dz}{3z+1} = \text{logn}\, C_1 + \frac{1}{3}\, \text{logn}\,(3z+1)$$

und

$$z = \frac{Y}{Y'} = \frac{e^{3x} - C_1^3}{3\,C_1^3}.$$

Somit erhält man

$$\text{logn}\, Y = \text{logn}\, C_2 + C_1^3 \int \frac{3\,dx}{e^{3x} - C_1^3} = \text{logn}\, C_2 + \text{logn}\, \frac{e^{3x} - C_1^3}{e^{3x}}$$

oder

$$Y = C_2 \frac{e^{3x} - C_1^3}{e^{3x}}. \tag{19}$$

Nach den Gleichungen (5), (6) und (11) kann man dafür auch setzen:

$$a_2 \frac{\rho}{r} + a_3 = C_2 - \frac{C_2 C_1^3}{r^3}.$$

Es ist also

$$\frac{\rho}{r} = \frac{C_2 - a_3}{a_2} - \frac{C_2 C_1^3}{a_2 \cdot r^3}.$$

Nennt man

$$\frac{C_2 - a_3}{a_2} = C',$$

$$-\frac{C_2 C_1^3}{a_2} = C'',$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho}{r} &= C' + \frac{C''}{r^3}, \\ \frac{d\rho}{dr} &= C' - \frac{2C''}{r^3}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Diese Lösung bekommt man auch, wenn man die vorliegende Aufgabe behandelt, aber in den Spannungen nur Glieder berücksichtigt, die bezüglich der Deformationselemente von erster Ordnung sind.

Setzt man für die Dilatationen die vorstehenden Formeln in die Gleichungen (2) ein, so erhält man folgende Ausdrücke für die Spannungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r = A_1 + 2(2A_2 + A_1)\Big[C'(2C'+1) + \\ + 2C''(2C'-1)\frac{1}{r^3} + 2\frac{C''^2}{r^6}\Big] + \\ +3(2A_2 - A_1)\Big[C'(C'+1) - \frac{C''^2}{r^6}\Big] + 27(A_3 - A_2)C'^2 - \\ -4(A_3 + A_2)\Big[-2C'^2 + 14\frac{C'C''}{r^3} - 11\frac{C''^2}{r^6}\Big], \\ \sigma_t = A_1 + (2A_2 + A_1)\Big[2C'(2C'+1) + \\ + 2C''(-2C'+1)\frac{1}{r^3} + \frac{C''^2}{r^6}\Big] + \\ +3(2A_2 - A_1)\Big[C'(C'+1) - \frac{C''^2}{r^6}\Big] + 27(A_3 - A_2)C'^2 + \\ +4(A_3 + A_2)\Big[2C'^2 + 7\frac{C'C''}{r^3} + 5\frac{C''^2}{r^6}\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Zur Bestimmung der Konstanten dienen die Oberflächenbedingungen, nach welchen für $r = r_a$ die radiale Spannung den Wert p_a und für $r = r_i$ den Wert p_i annimmt.

$$
\left.
\begin{aligned}
p_a = {} & A_1 + 2(2A_2 + A_1)\Big[C'(2C'+1) + \\
& \qquad + 2C''(2C'-1)\frac{1}{r_a^3} + 2\frac{C''^2}{r_a^6}\Big] + \\
& + 3(2A_2 - A_1)\Big[C'(C'+1) - \frac{C''^2}{r_a^6}\Big] + 27(A_3 - A_2)C'^2 - \\
& - 4(A_3 + A_2)\Big[-2C'^2 + 14\frac{C'C''}{r_a^3} - 11\frac{C''^2}{r_a^6}\Big], \\
p_i = {} & A_1 + 2(2A_2 + A_1)\Big[C'(2C'+1) + \\
& \qquad + 2C''(2C'-1)\frac{1}{r_i^3} + 2\frac{C''^2}{r_i^6}\Big] + \\
& + 3(2A_2 - A_1)\Big[C'(C'+1) - \frac{C''^2}{r_i^6}\Big] + 27(A_3 - A_2)C'^2 - \\
& - 4(A_3 + A_2)\Big[-2C'^2 + 14\frac{C'C''}{r_i^3} - 11\frac{C''^2}{r_i^6}\Big].
\end{aligned}
\right\} \quad (22)
$$

2. Ein anderer Sonderfall. Die »charakteristische« Funktion sei wieder reduzibel.

Ist

$$a_2 = 0, \tag{23}$$

genügen also die Elastizitätskonstanten der Bedingung

$$A_1 = 5A_2 + 21A_3, \tag{24}$$

so ist

$$x = \operatorname{logn} C_1 + \frac{1}{a_1}\operatorname{logn}(a_1 z + 1)$$

und

$$z = \frac{e^{a_1 x} - C_1^{a_1}}{a_1 C_1^{a_1}} = \frac{Y}{dY}\,dx.$$

Somit bekommt man

$$\operatorname{logn} Y = \operatorname{logn} C_2 + C_1^{a_1} \int \frac{a_1 dx}{e^{a_1 x} - C_1^{a_1}} = \operatorname{logn} C_2 + \operatorname{logn} \frac{e^{a_1 x} - C_1^{a_1}}{e^{a_1 x}}$$

oder

$$Y = C_2 \frac{e^{a_1 x} - C_1^{a_1}}{e^{a_1 x}}. \tag{25}$$

Nun ist aber $Y = a_2 \frac{\rho}{r} + a_3$ und $e^x = r$, so daß man aus der vorstehenden Gleichung $\frac{\rho}{r}$ als Funktion von r angeben kann. Es ist

$$\frac{\rho}{r} = \frac{C_2 - a_3}{a_2} - \frac{C_2 C_1^{a_1}}{a_2 r^{a_1}}.$$

3. Ein allgemeiner Fall. Die »charakteristische« Funktion sei nicht reduzibel. Ihr Nenner besitze zwei reelle und voneinander verschiedene Nullstellen z_1 und z_2.

Setzt man den Nenner der »charakteristischen« Funktion gleich Null, also

$$3 a_2 z^2 + (a_1 + a_2) z + 1 = 0,$$

so erhält man folgende Wurzeln:

$$z_1 = \frac{1}{6 a_2} \left[-(a_1 + a_2) + \sqrt{(a_1 + a_2)^2 - 12 a_2} \right],$$

$$z_2 = \frac{1}{6 a_2} \left[-(a_1 + a_2) - \sqrt{(a_1 + a_2)^2 - 12 a_2} \right].$$

z_1 und z_2 sind reell, wenn

$$(a_1 + a_2)^2 > 12 a_2 \tag{26}$$

ist oder wenn, wie aus den Gleichungen (9) hervorgeht,

$$(-3A_1 + 20A_2 + 54A_3)^2 > 36(-A_1 + 5A_2 + 21A_3)(3A_2 + 5A_3). \tag{27}$$

In den allgemeinen Gleichungen (15) und (16) können wir den Nenner der »charakteristischen« Funktion durch das Produkt der Wurzelfaktoren ersetzen und erhalten:

$$x = \operatorname{logn} C_1 + \int \frac{a_2 z + 1}{3 a_2 (z - z_1)(z - z_2)} dz =$$

$$= \operatorname{logn} C_1 + \frac{1 + a_2 z_1}{3 a_2 (z_1 - z_2)} \operatorname{logn}(z - z_1) -$$

$$- \frac{1 + a_2 z_2}{3 a_2 (z_1 - z_2)} \operatorname{logn}(z - z_2), \quad (28)$$

$$\operatorname{logn} Y = \operatorname{logn} C_2 + \int \frac{a_2 z + 1}{3 a_2 z (z - z_1)(z - z_2)} dz =$$

$$= \operatorname{logn} C_2 - \frac{a_1 + 3 a_2 z_1}{3 a_2 (z_1 - z_2)} \operatorname{logn}(z - z_1) +$$

$$+ \frac{a_1 + 3 a_2 z_2}{3 a_2 (z_1 - z_2)} \operatorname{logn}(z - z_2). \quad (29)$$

Setzt man der Einfachheit halber:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1 + a_2 z_1}{3 a_2 (z_1 - z_2)}, \\ \alpha_2 &= \frac{1 + a_2 z_2}{3 a_2 (z_1 - z_2)}, \\ \beta_1 &= \frac{a_1 + 3 a_2 z_1}{3 a_2 (z_1 - z_2)}, \\ \beta_2 &= \frac{a_1 + 3 a_2 z_2}{3 a_2 (z_1 - z_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

so ist

$$e^x = r = C_1 \frac{(z - z_1)^{\alpha_1}}{(z - z_2)^{\alpha_2}}, \quad (31)$$

$$Y = a_2 \frac{\rho}{r} + a_3 = C_2 z \frac{(z - z_1)^{-\beta_1}}{(z - z_2)^{-\beta_2}}. \quad (32)$$

α_1, α_2, β_1 und β_2 sind nur von den Elastizitätskoeffizienten abhängig.

4. Ein Grenzfall. Die »charakteristische« Funktion sei nicht reduzibel. Ihr Nenner besitze zwei reelle und gleiche Nullstellen.

Soll $z_1 = z_2$ sein, so muß

$$(a_1 + a_2)^2 = 12 a_2 \quad (33)$$

und

$$(-3A_1+20A_2+54A_3)^2 =$$
$$= 36(-A_1+5A_2+21A_3)(3A_2+5A_3). \quad (34)$$

Es ist dann

$$x = \text{logn}\, C_1 + \int \frac{a_2 z+1}{3a_2(z-z_1)^2}\, dz =$$
$$= \text{logn}\, C_1 - \frac{1+a_2 z_1}{3a_2} \cdot \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{3} \text{logn}\,(z-z_1),$$

$$\log Y = \text{logn}\, C_2 + \int \frac{a_2 z+1}{3a_2 z(z-z_1)^2}\, dz =$$
$$= \text{logn}\, C_2 + \text{logn}\, z - \frac{1+3z_1}{3} \cdot \frac{1}{z-z_1} - \text{logn}\,(z-z_1)$$

und

$$e^x = r = C_1 \sqrt[3]{z-z_1} \cdot e^{-\frac{1+a_2 z_1}{3a_2(z-z_1)}}, \quad (35)$$

$$Y = a_2 \frac{\rho}{r} + a_3 = C_2 \frac{z}{z-z_1} e^{-\frac{1+3z_1}{3(z-z_1)}}. \quad (36)$$

5. Ein allgemeiner Fall. Die »charakteristische« Funktion sei nicht reduzibel. Ihr Nenner besitze keine reellen Nullstellen.

Wenn

$$(a_1+a_2)^2 < 12a_2, \quad (37)$$

also

$$(-3A_1+20A_2+54A_3)^2 < 36(-A_1+5A_2+21A_3)(3A_2+5A_3), \quad (38)$$

so ist eine Zerlegung der »charakteristischen« Funktion in Partialbrüche nicht mehr möglich. Es ist daher

$$x = \text{logn}\, C_1 + \int \frac{a_2 z+1}{3a_2 z^2+(a_1+a_2)z+1}\, dz =$$
$$= \text{logn}\, C_1 + \frac{1}{6} \text{logn}\,[3a_2 z^2+(a_1+a_2)z+1] +$$
$$+ \frac{6-a_1-a_2}{3\sqrt{12a_2-(a_1+a_2)^2}} \operatorname{arctg} \frac{6a_2 z+a_1+a_2}{\sqrt{12a_2-(a_1+a_2)^2}},$$

$$\operatorname{logn} Y = \operatorname{logn} C_2 + \int \frac{a_2 z + 1}{z[3a_2 z^2 + (a_1 + a_2)z + 1]} dz =$$

$$= \operatorname{logn} C_2 + \operatorname{logn} z - \frac{1}{2} \operatorname{logn} [3a_2 z^2 + (a_1 + a_2)z + 1] +$$

$$+ \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{12a_2 - (a_1 + a_2)^2}} \operatorname{arctg} \frac{6a_2 z + a_1 + a_2}{\sqrt{12a_2 - (a_1 + a_2)^2}}.$$

Daraus erhält man nun:

$$e^x = r =$$
$$= C_1 \sqrt[6]{3a_2 z^2 + (a_1 + a_2)z + 1} . e^{\frac{6 - a_1 - a_2}{3\sqrt{12a^2 - (a_1 + a_2)^2}} \operatorname{arctg} \frac{6a_2 z + a_1 + a_2}{\sqrt{12a_2 - (a_1 + a_2)^2}}}, \tag{39}$$

$$Y = a_2 \frac{\rho}{r} + a_3 =$$
$$= C_2 \frac{z}{\sqrt{3a_2 z^2 + (a_1 + a_2)z + 1}} \cdot e^{\frac{a_2 - a_1}{\sqrt{12a_2 - (a_1 + a_2)^2}} \operatorname{arctg} \frac{6a_2 z + a_1 + a_2}{\sqrt{12a_2 - (a_1 + a_2)^2}}}. \tag{40}$$

Der Hohlzylinder.

Der Untersuchung sei ein halbpolares Koordinatensystem zu Grunde gelegt. Die achsialen, tangentialen und radialen Richtungen seien durch die Buchstaben a, t und r bezeichnet. Es kann sich ein Punkt unter dem Einfluß eines gleichmäßigen Druckes p_a nur in radialer und achsialer Richtung verschieben. Ist der Hohlkörper so dimensioniert, daß man vom Einflusse der Rohrabschlüsse (des Zylinderdeckels und Zylinderbodens) absehen (wie dies bei allen Berechnungen geschieht) und einen zur Achse normalen Querschnitt auch nach der Formänderung als eben betrachten kann, so sind a, t und r die Richtungen der bloß von den Hauptdilatationen λ_a, λ_t und λ_r abhängigen Hauptnormalspannungen σ_a, σ_t und σ_r. Für die radiale, spezifische Längenänderung λ_r ist, wofern man die radiale Verrückung mit ρ bezeichnet, $\frac{d\rho}{dr}$, für die tangentiale λ_t bekanntlich $\frac{\rho}{r}$ zu setzen; die achsiale Dilatation ist (voraussetzungsmäßig) konstant und durch C gekennzeichnet. Setzen wir diese Werte in die Gleichung (1) ein, so erhält man:

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r = A_1 + (2A_2+A_1)\left[2\frac{d\rho}{dr} + \left(\frac{\rho}{r}+C\right)^2\right] + \\
+(2A_2-A_1)\left[(1+C)\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}\right)+C+\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right]+ \\
+3(A_3-A_2)\left[\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}+C\right]^2- \\
-4(A_3+A_2)\left[C\frac{\rho}{r}-3\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2\right], \\
\sigma_t = A_1 + (2A_2+A_1)\left[2\frac{\rho}{r} + \left(C+\frac{d\rho}{dr}\right)^2\right] + \\
+(2A_2-A_1)\left[(1+C)\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}\right)+C+\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right]+ \\
+3(A_3-A_2)\left[\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}+C\right]^2- \\
-4(A_3+A_2)\left[C\frac{d\rho}{dr}-3\frac{\rho^2}{r^2}\right], \\
\sigma_a = A_1 + (2A_2+A_1)\left[2C + \left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}\right)^2\right] + \\
+(2A_2-A_1)\left[(1+C)\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}\right)+C+\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right]+ \\
+3(A_3-A_2)\left[\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}+C\right]^2- \\
-4(A_3+A_2)\left[\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}-3C^2\right].
\end{aligned}\right\} \quad (41)
$$

Die Gleichgewichtsbedingung für ein Element eines zylinderförmigen Tonnengewölbes ist bekanntlich die folgende:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_t = 0.^{1} \qquad (42)$$

Führt man für σ_r und für σ_t die Formänderungen ein, so erhält man folgende Differentialgleichung:

[1] Für Formänderungen, welche gegenüber den Dimensionen des Körpers nicht mehr zu vernachlässigen sind, gilt

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_t)+\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{d\rho}{dr}(\sigma_r-\sigma_t)=0.$$

$$
\left.\begin{aligned}
0 = A_1 \Big[&(1-C)\left(r\frac{d^2\rho}{dr^2}+\frac{d\rho}{dr}-\frac{\rho}{r}\right)+\\
&+3\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}-\frac{\rho^2}{r^2}-2\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{dr^2}\Big]+\\
+2A_2\Big[&(3-2C)\left(r\frac{d^2\rho}{dr^2}+\frac{d\rho}{dr}-\frac{\rho}{r}\right)+\\
&+\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}-4\frac{\rho^2}{r^2}+3\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2-2\rho\frac{d^2\rho}{dr^2}+\\
&\qquad+9r\frac{d\rho}{dr}\cdot\frac{d^2\rho}{dr^2}\Big]+\\
+6A_3\Big[&C\left(r\frac{d^2\rho}{dr^2}+\frac{d\rho}{dr}-\frac{\rho}{r}\right)-3\frac{\rho^2}{r^2}+\\
&+3\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2+\rho\frac{d^2\rho}{dr^2}+5r\frac{d\rho}{dr}\cdot\frac{d^2\rho}{dr^2}\Big].
\end{aligned}\right\} \quad (42)
$$

Wir führen wieder mit Hilfe der Gleichungen (5) und (6) neue Variable ein und erhalten nach einer einfachen Umformung:

$$
\begin{aligned}
0 = 6(3A_2+5A_3)y'y''+2(-A_1+12A_2+24A_3)y'^2+\\
+[(-A_1+14A_2+36A_3)y+A_1+6A_2+\\
+C(-A_1-4A_2+6A_3)](y''+2y'). \quad (43)
\end{aligned}
$$

Setzt man der Abkürzung und Übersichtlichkeit halber

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{-A_1+12A_2+24A_3}{3(3A_2+5A_3)},\\
a_2 &= \frac{-A_1+14A_2+36A_3}{6(3A_2+5A_3)},\\
a_3 &= \frac{A_1+6A_2+C(-A_1-4A_2+6A_3)}{6(3A_2+5A_3)},
\end{aligned}\right\} \quad (44)
$$

so ist

$$
0 = y'y''+a_1y'^2+(a_2y+a_3)(y''+2y'). \quad (45)
$$

a_1 und a_2 sind Koeffizienten, welche lediglich von A_1, A_2 und A_3 abhängig sind, während a_3 die erst später zu bestimmende Konstante C linear enthält.

Setzt man ferner

$$a_2 y + a_3 = Y, \tag{11}$$

so erhält man

$$0 = Y'Y'' + a_1 Y'^2 + a_2 Y.(Y'' + 2Y')^{1} \tag{46}$$

eine Gleichung, die bis auf den Faktor 2 im letzten Gliede der Gleichung (12) entspricht. Auch die Integration vollzieht sich in derselben Weise und die Einführung von

$$\frac{Y}{Y'} = z \tag{13}$$

ist ein Schlüssel hiezu. Man erhält

$$x = \operatorname{logn} r = \operatorname{logn} C_1 + \int \frac{a_2 z + 1}{2 a_2 z^2 + (a_1 + a_2) z + 1} dz, \tag{47}$$

$$\log Y = \operatorname{logn}\left(a_2 \frac{\rho}{r} + a_3\right) =$$

$$= \operatorname{logn} C_2 + \int \frac{a_2 z + 1}{z[2 a_2 z^2 + (a_1 + a_2) z + 1]} dz. \tag{48}$$

Die weitere Integration hängt ab von den Werten, welche a_1 und a_2 annehmen; da a_1 und a_2 Funktionen der Elastizitätskonstanten sind, so wird sie von diesen beeinflußt; welchen Wert hiebei die Konstante C hat, ist gleichgültig.

Nun ist $\frac{a_2 z + 1}{2 a_2 z^2 + (a_1 + a_2) z + 1}$ das, was wir im Früheren die »charakteristische« Funktion nannten. Wir gehen nun daran, einige ganz spezielle und auch die allgemeinen Fälle zu betrachten.

1. Ein Sonderfall. Die »charakteristische« Funktion sei reduzibel.

Es sei

$$a_1 = 2, \tag{49}$$

es bestehe also zwischen A_1, A_2 und A_3 [siehe Gleichungen (44)] die Beziehung

$$0 = A_1 + 6(A_2 + A_3). \tag{50}$$

[1] Beziehungsweise

$$0 = YY'Y'' + a_1 Y'^3 + a_2 YY'^2 + a_3 Y^2 (Y'' + 2Y') + Y'Y'' + a_4 Y'^2 + a_5 Y(Y'' + 2Y').$$

Man erhält auf ganz analoge Weise wie bei der Hohlkugel die folgende Lösung:

$$\frac{\rho}{r} = C' + \frac{C''}{r^2}. \tag{51}$$

Behandelt man das elastische Gleichgewicht eines durch gleichmäßigen inneren und äußeren Druck beanspruchten Hohlzylinders in der gewöhnlichen Weise, indem man die Spannungen als lineare Funktionen der Dilatationen ausdrückt, so kommt man auch auf diese Lösung. Die Gleichung (50) ist identisch mit der Gleichung (18).

Nun setzen wir diese Lösung in die Gleichungen für die Hauptnormalspannungen ein:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r = {} & A_1 + (2A_2 + A_1)\Big[2C' + (C'+C)^2 + \\
& \qquad + 2C''(C'+C-1)\frac{1}{r^2} + \frac{C''^2}{r^4}\Big] + \\
& + (2A_2 - A_1)\Big[2(1+C)C' + C + C'^2 - \frac{C''^2}{r^4}\Big] + \\
& \qquad + 3(A_3 - A_2)(2C'+C)^2 - \\
& - 4(A_3 + A_2)\Big[(C-3C')C' + C''(C+6C')\frac{1}{r^2} - 3\frac{C''^2}{r^4}\Big], \\
\sigma_t = {} & A_1 + (2A_2 + A_1)\Big[2C' + (C'+C)^2 + \\
& \qquad + 2C''(1-C'-C)\frac{1}{r^2} + \frac{C''^2}{r^4}\Big] + \\
& + (2A_2 - A_1)\Big[2(1+C)C' + C + C'^2 - \frac{C''^2}{r^4}\Big] + \\
& \qquad + 3(A_3 - A_2)(2C'+C)^2 - \\
& - 4(A_3 + A_2)\Big[(C-3C')C' - C''(C+6C')\frac{1}{r^2} - 3\frac{C''^2}{r^4}\Big], \\
\sigma_a = {} & A_1 + 2(2A_2 + A_1)[C + 2C'^2] + \\
& + (2A_2 - A_1)\Big[2C'(1+C) + C + C'^2 - \frac{C''^2}{r^4}\Big] + \\
& + 3(A_3 - A_2)(2C'+C)^2 - 4(A_3 + A_2)\Big[C'^2 - 3C^2 - \frac{C''^2}{r^4}\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Für $r = r_a$ nimmt σ_r den Wert p_a, für $r = r_i$ den Wert p_i an:

$$p_a = A_1 + (2A_2 + A_1)\left[2C' + (C' + C)^2 + \right.$$
$$\left. + 2C''(C' + C - 1)\frac{1}{r_a^2} + \frac{C''^2}{r_a^4}\right] +$$
$$+ (2A_2 - A_1)\left[2(1 + C)C' + C + C'^2 - \frac{C''^2}{r_a^4}\right] +$$
$$+ 3(A_3 - A_2)(2C' + C)^2 -$$
$$- 4(A_3 + A_2)\left[C'(C - 3C') + C''(C + 6C')\frac{1}{r_a^2} - 3\frac{C''^2}{r_a^4}\right],$$

$$p_i = A_1 + (2A_2 + A_1)\left[2C' + (C' + C)^2 + \right.$$
$$\left. + 2C''(C' + C - 1)\frac{1}{r_i^2} + \frac{C''^2}{r_i^4}\right] +$$
$$+ (2A_2 - A_1)\left[2(1 + C)C' + C + C'^2 - \frac{C''^2}{r_i^4}\right] +$$
$$+ 3(A_3 - A_2)(2C' + C)^2 -$$
$$- 4(A_3 + A_2)\left[C'(C - 3C') + C''(C + 6C')\frac{1}{r_i^2} - 3\frac{C''^2}{r_i^4}\right].$$

In jedem Querschnitte des Hohlzylinders muß zwischen inneren und äußeren Kräften Gleichgewicht herrschen. $\pi r_a^2 p_a - \pi r_i^2 p_i$ ist die resultierende Kraft der auf die innere und äußere Oberfläche des Rohrabschlusses in achsialer Richtung wirkenden äußeren Kräfte, welche gleich sein muß der Resultanten der auf die Elemente des Querschnittes wirkenden, achsialen Spannungen $= \int_{r_i}^{r_a} \sigma_a . 2\pi r dr$. Nach Ausführung der Integration und geringer Umformungen erhält man die Gleichung:

$$\frac{r_a^2 p_a - r_i^2 p_i}{r_a^2 - r_i^2} = A_1 + 2(2A_2 + A_1)(C + 2C'^2) +$$
$$+ (2A_2 - A_1)[2C'(1 + C) + C + C'^2] +$$
$$+ 3(A_3 - A_2)(2C' + C)^2 - 4(A_3 + A_2)(C'^2 - 3C^2) +$$
$$+ \frac{C''^2}{r_a^2 r_i^2}(A_1 + 2A_2 + 4A_3).$$

In den letzten drei Gleichungen sind nur C, C' und C'' unbekannt.

2. Ein Sonderfall. Die »charakteristische« Funktion sei reduzibel.

Wenn

$$a_2 = 0 \tag{53}$$

ist, also zwischen den Elastizitätskoeffizienten die Beziehung

$$A_1 = 2(7A_2 + 18A_3) \tag{54}$$

besteht, so ist

$$\frac{\rho}{r} = C' + \frac{C''}{r^{a_1}}. \tag{55}$$

(Siehe Fall 2 der Hohlkugel.)

3. Ein allgemeiner Fall. Die »charakteristische« Funktion sei nicht reduzibel. Ihr Nenner besitze zwei reelle und voneinander verschiedene Nullstellen z_1 und z_2.

Die Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{4a_2}\left[-(a_1+a_2)+\sqrt{(a_1+a_2)^2-8a_2}\right], \\ z_2 &= \frac{1}{4a_2}\left[-(a_1+a_2)-\sqrt{(a_1+a_2)^2-8a_2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

sind reell, wenn

$$(a_1+a_2)^2 > 8a_2, \tag{57}$$

also

$$(-3A_1+38A_2+84A_3)^2 > 48(-A_1+14A_2+36A_3)(3A_2+5A_3) \tag{58}$$

ist. Somit erhält man

$$x = \operatorname{logn} r = \operatorname{logn} C_1 + \int \frac{a_2 z + 1}{2a_2(z-z_1)(z-z_2)}\,dz =$$

$$= \operatorname{logn} C_1 + \frac{1+a_2 z_1}{2a_2(z_1-z_2)} \operatorname{logn}(z-z_1) -$$

$$- \frac{1+a_2 z_2}{2a_2(z_1-z_2)} \operatorname{logn}(z-z_2),$$

$$\operatorname{logn} Y = \operatorname{logn}\left(a_2 \frac{\rho}{r} + a_3\right) =$$

$$= \operatorname{logn} C_2 + \int \frac{a_2 z + 1}{2 a_2 z (z - z_1)(z - z_2)} dz =$$

$$= \operatorname{logn} C_2 + \operatorname{logn} z - \frac{a_1 + 2 a_2 z_1}{2 a_2 (z_1 - z_2)} \operatorname{logn}(z - z_1)$$

$$+ \frac{a_1 + 2 a_2 z_2}{2 a_2 (z_1 - z_2)} \operatorname{logn}(z - z_2)$$

und daraus, wofern man

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1 + a_2 z_1}{2 a_2 (z_1 - z_2)}, \\ \alpha_2 &= \frac{1 + a_2 z_2}{2 a_2 (z_1 - z_2)}, \\ \beta_1 &= \frac{a_1 + 2 a_2 z_1}{2 a_2 (z_1 - z_2)}, \\ \beta_2 &= \frac{a_1 + 2 a_2 z_2}{2 a_2 (z_1 - z_2)}, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

setzt

$$r = C_1 \frac{(z - z_1)^{\alpha_1}}{(z - z_2)^{\alpha_2}}, \tag{60}$$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{a_2}\left[C_2 z \frac{(z - z_1)^{-\beta_1}}{(z - z_2)^{-\beta_2}} - a_3\right]. \tag{61}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen für die Hauptnormalspannungen ein, so erhält man letztere als Funktionen von z. Um die drei Gleichungen zu bekommen, welche C, C_1 und C_2 bestimmen, hat man für $z = z_a$ und $z = z_i$ die radiale Spannung gleich Null zu setzen, wobei

$$r_a = C_1 \frac{(z_a - z_1)^{\alpha_1}}{(z_a - z_2)^{\alpha_2}},$$

$$r_i = C_1 \frac{(z_i - z_1)^{\alpha_1}}{(z_i - z_2)^{\alpha_2}}$$

ist. Außerdem ist $\pi(r_a^2 p_a - r_i^2 p_i) = \int_{r_i}^{r_a} \sigma_a . 2 \pi r dr.$

4. Ein Grenzfall. Die »charakteristische« Funktion sei nicht reduzibel. Ihr Nenner besitze zwei reelle und gleiche Nullstellen.

Soll

$$z_1 = z_2$$

sein, so muß

$$(a_1 + a_2)^2 = 8 a_2 \tag{62}$$

und

$$z_1 = -\frac{a_1 + a_2}{4 a_2} = -\frac{2}{a_1 + a_2} = \frac{1}{\sqrt{2 a_2}}$$

sein. In diesem Fall erhält man:

$$r = C_1 \sqrt{z - z_1} . e^{-\frac{1 + a_2 z_1}{2 a_2 (z - z_1)}}, \tag{63}$$

$$a_2 \frac{\rho}{r} + a_3 = C_2 \frac{z}{z - z_1} . e^{-\frac{1 + 2 z_1}{2 (z - z_1)}}. \tag{64}$$

5. Ein allgemeiner Fall. Die »charakteristische« Funktion sei nicht reduzibel. Ihr Nenner besitze keine reellen Nullstellen.

Wenn

$$(a_1 + a_2)^2 < 8 a_2 \tag{65}$$

ist, so kommt man zu folgendem Resultate:

$$e^x = r = \\ = C_1 \sqrt[4]{2 a_2 z^2 + (a_1 + a_2) z + 1} . e^{\frac{4 - a_1 - a_2}{2\sqrt{8 a_2 - (a_1 + a_2)^2}} \operatorname{arctg} \frac{4 a_2 z + a_1 + a_2}{\sqrt{8 a_2 - (a_1 + a_2)^2}}}, \tag{66}$$

$$Y = a_2 \frac{\rho}{r} + a_3 = \\ = C_2 \frac{z}{\sqrt{2 a_2 z^2 + (a_1 + a_2) z + 1}} \cdot e^{\frac{a_2 - a_1}{\sqrt{8 a_2 - (a_1 + a_2)^2}} \operatorname{arctg} \frac{4 a_2 z + a_1 + a_2}{\sqrt{8 a_2 - (a_1 + a_2)^2}}}. \tag{67}$$

II.

Wie eingangs schon erwähnt, gelten die Grundformeln (1) unter der Voraussetzung, daß die zwischen je zwei materiellen Punkten wirksamen inneren Kräfte entweder anziehend oder abstoßend wirken und lediglich Funktionen der variablen Entfernung dieser Punkte sind. Macht man diese Voraussetzung nicht und nimmt nur an, daß das in Betracnt gezogene Körperelement vor der Deformation isotrop ist und daß ferner die inneren Kräfte ein Potential besitzen, von dessen Gliedern, die in Bezug auf die Verschiebungsderivationen von höherer als der dritten Ordnung sind, man absieht, so haben die Hauptspannungen, wie Herr Prof. Finger nachweist (I. Teil, Gleichungen 56) folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 = {} & A_1+4B_2\lambda_1+(C_1-A_1)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+ \\
& +(3A_1'-4B_{21})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2+2B_2(\lambda_2+\lambda_3)^2+ \\
& +(C_1-A_1)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)-4A_{21}\lambda_2\lambda_3+B_{21}\lambda_1^2, \\
\sigma_2 = {} & A_1+4B_2\lambda_2+(C_1-A_1)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+ \\
& +(3A_1'-4B_{21})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2+2B_2(\lambda_3+\lambda_1)^2+ \\
& +(C_1-A_1)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)-4A_{21}\lambda_3\lambda_1+4B_{21}\lambda_2^2, \\
\sigma_3 = {} & A_1+4B_2\lambda_3+(C_1-A_1)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+ \\
& +(3A_1'-4B_{21})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2+2B_2(\lambda_1+\lambda_2)^2+ \\
& +(C_1-A_1)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)-4A_{21}\lambda_1\lambda_2+4B_{21}\lambda_3^2.
\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

A_1, A_{21}, A_1', B_2, B_{21} und C_1 sind die sechs Elastizitätskoeffizienten.

Legt man diese Formeln, welche sechs verschiedene Koeffizienten besitzen, statt der Gleichungen (1), in welchen nur deren drei vorkommen, den Betrachtungen zu Grunde, so bedingt dies keine besondere Erschwerung der hier behandelten Aufgaben, denn die Differentialgleichungen, auf deren Lösung es nun ankommt, sind ebenso gebaut wie die mit (10) und (45) bezeichneten, so daß ihre Lösungen auf dem in den vorstehenden Zeilen angegebenen Wege vorgenommen werden können.

Die Hohlkugel.

Es ist $\lambda_1 = \frac{d\rho}{dr}$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\rho}{r}$, daher

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= A_1 + 4B_2 \frac{d\rho}{dr} + (C_1 - A_1)\left(\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r}\right) + \\
&\quad + (3A_1' - 4B_{21})\left(\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r}\right)^2 + 8B_2\frac{\rho^2}{r^2} + \\
&\quad + (C_1 - A_1)\left(2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho^2}{r^2}\right) - 4A_{21}\frac{\rho^2}{r^2} + 4B_{21}\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2, \\
\sigma_t &= A_1 + 4B_2\frac{\rho}{r} + (C_1 - A_1)\left(\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r}\right) + \\
&\quad + (3A_1' - 4B_{21})\left(\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r}\right)^2 + 2B_2\left(\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r}\right)^2 + \\
&\quad + (C_1 - A_1)\left(2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho^2}{r^2}\right) - 4A_{21}\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr} + 4B_{21}\frac{\rho^2}{r^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Setzt man diese Formeln in die Gleichgewichtsbedingung (3) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
0 = \left[r\frac{d^2\rho}{dr^2} + 2\frac{d\rho}{dr} - 2\frac{\rho}{r}\right]\left[2(3A_1' - 4B_{21})\left(\frac{d\rho}{dr} + 2\frac{\rho}{r}\right) + \right. \\
\left. + (4B_2 + C_1 - A_1)\right] + \\
+ 4B_2\left[2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr} - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 - \frac{\rho^2}{r^2}\right] + \\
+ 2(C_1 - A_1)\left[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 + \rho\frac{d^2\rho}{dr^2} - \frac{\rho^2}{r^2}\right] + \\
+ 8B_{21}\left[r\frac{d\rho}{dr}\cdot\frac{d^2\rho}{dr^2} + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 - \frac{\rho^2}{r^2}\right].
\end{aligned}$$

Führt man wieder für die Abhängige ρ eine Größe y, für die Unabhängige r die Variable x mit Hilfe der Gleichungen (5) und (6) ein, so geht die vorstehende Gleichung nach Ausführung einiger Umformungen in die folgende über:

$$0 = 6A_1'y'y''+2(-2B_2+C_1-A_1+9A_1'-4B_{21})y'^2+$$
$$+[2(9A_1'-8B_{21}+C_1-A_1)y+(4B_2+C_1-A_1)](y''+3y').$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{-2B_2+C_1+9A_1'-4B_{21}-A_1}{3A_1'}, \\ b_2 &= \frac{C_1+9A_1'-8B_{21}-A_1}{3A_1'}, \\ b_3 &= \frac{4B_2+C_1-A_1}{6A_1'}, \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

so ist

$$0 = y'y''+b_1y'^2+(b_2y+b_3)(y''+3y'). \qquad (71)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich nur durch die Werte für die Koeffizienten von der Gleichung (10). Unter der beschränkenden Voraussetzung, daß die zwischen zwei materiellen Punkten wirksamen inneren Kräfte entweder anziehend oder abstoßend wirken und lediglich Funktionen der variablen Entfernung dieser Punkte sind, haben folgende Beziehungen zwischen den Elastizitätskonstanten B_2, C_1, A_1', B_{21}, A_{21}, B_1' und A_1, A_2, A_3 Gültigkeit [siehe die oben erwähnte Finger'sche Abhandlung, II. Teil, Gleichungen (31)]:

$$\left.\begin{aligned} 2B_2 &= A_1+2A_2, \\ C_1 &= 2A_2, \\ A_1' &= 3A_2+5A_3, \\ B_{21} &= 3(A_2+A_3), \\ A_{21} &= A_2+A_3, \\ B_1' &= A_2+3A_3. \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Benützt man diese Formeln, um unter der erwähnten Voraussetzung b_1, b_2 und b_3 durch A_1, A_2 und A_3 auszudrücken, so erhält man

$$b_1 = \frac{-2A_1 + 15A_2 + 33A_3}{3(3A_2 + 5A_3)},$$

$$b_2 = \frac{-A_1 + 5A_2 + 21A_3}{3(3A_2 + 5A_3)},$$

$$b_3 = \frac{A_1 + 6A_2}{6(3A_2 + 5A_3)}$$

Dies sind aber, wie aus den Gleichungen (9) ersichtlich ist, die Werte für die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3.

Der Hohlzylinder.

Es ist $\lambda_1 = \frac{d\rho}{dr}$, $\lambda_2 = \frac{\rho}{r}$, $\lambda_3 = C$ und daher

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r = {} & A_1 + 4B_2\frac{d\rho}{dr} + (C_1 - A_1)\left(\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r} + C\right) + \\
& + (3A_1' - 4B_{21})\left(\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r} + C\right)^2 + 2B_2\left(\frac{\rho}{r} + C\right)^2 + \\
& + (C_1 - A_1)\left(C\frac{d\rho}{dr} + C\frac{\rho}{r} + \frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right) - \\
& - 4A_{21}C\frac{\rho}{r} + 4B_{21}\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2, \\
\sigma_t = {} & A_1 + 4B_2\frac{\rho}{r} + (C_1 - A_1)\left(\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r} + C\right) + \\
& + (3A_1' - 4B_{21})\left(\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r} + C\right)^2 + 2B_2\left(\frac{d\rho}{dr} + C\right)^2 + \\
& + (C_1 - A_1)\left(C\frac{d\rho}{dr} + C\frac{\rho}{r} + \frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right) - \\
& - 4A_{21}C\frac{d\rho}{dr} + 4B_{21}\frac{\rho^2}{r^2},
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_a = A_1+4B_2C+(C_1-A_1)\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}+C\right)+ \\ +(3A_1'-4B_{21})\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}+C\right)^2+2B_2\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}\right)^2+ \\ +(C_1-A_1)\left(C\frac{d\rho}{dr}+C\frac{\rho}{r}+\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right)- \\ -4A_{21}\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}+4B_{21}C^2.\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Setzt man diese Werte in die Gleichgewichtsbedingung (42) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}0=\left[r\frac{d^2\rho}{dr^2}+\frac{d\rho}{dr}-\frac{\rho}{r}\right]\Big[2(3A_1'-4B_{21})\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}+C\right)+ \\ +4B_2+C_1-A_1+C(C_1-A_1)\Big]+ \\ +2B_2\left[-\frac{\rho^2}{r^2}+2\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}-\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2\right]+ \\ +(C_1-A_1)\left[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2+\rho\frac{d^2\rho}{dr^2}-\frac{\rho}{r}\cdot\frac{d\rho}{dr}\right]+ \\ +4B_{21}\left[2r\frac{d\rho}{dr}\cdot\frac{d^3\rho}{dr^2}+\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2-\frac{\rho^2}{r^2}\right].\end{aligned}$$

Durch Einführung von x und y erhält man:

$$\begin{aligned}0=6A_1'y'y''+[-2B_2-4B_{21}+12A_1'+C_1-A_1]y'^2+ \\ +[(12A_1'-8B_{21}+C_1-A_1)y+4B_2+C_1-A_1+ \\ +C(C_1-A_1)+2C(3A_1'-4B_{21})](y''+2y'). \quad (74)\end{aligned}$$

Setzt man wieder

$$\left.\begin{aligned}b_1 &= \frac{-2B_2-4B_{21}+12A_1'+C_1-A_1}{6A_1'}, \\ b_2 &= \frac{12A_1'-8B_{21}+C_1-A_1}{6A_1'}, \\ b_3 &= \frac{4B_2+C_1-A_1+C(C_1-A_1+6A_1'-8B_{21})}{6A_1'},\end{aligned}\right\} \quad (75)$$

so erhält man die folgende, der Formel (45) analoge Gleichung:

$$0 = y'y'' + b_1 y'^2 + (b_2 y + b_3)(y'' + 2y'). \tag{76}$$

b_1 und b_2 sind von C unabhängig; b_3 hingegen enthält diese Konstante in linearer Form. Auch diesmal gehen natürlich b_1, b_2, b_3 in die durch die Gleichungen (44) definierten Werte a_1, a_2, a_3 über, wenn man die durch (72) ausgedrückten Beziehungen benützt, um A_1, A_2 und A_3 einzuführen.

Elektromagnetische Vorgänge in bewegten Medien

(II. Mitteilung)

von

G. Jaumann,
k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. März 1906.)

Die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen, welche in meiner ersten Mitteilung[1] aufgestellt wurde, unterscheidet sich dadurch ganz wesentlich von allen früheren Theorien, daß derselben weder das Gesetz der ponderomotorischen Wirkungen noch das Faraday'sche Induktionsgesetz zu Grunde gelegt wurde.

Man kann die Maxwell-Heaviside'schen Gleichungen für ruhende Medien direkt aus der Fresnel-Faraday'schen Lichthypothese ableiten. Ich habe a. a. O. die Gleichungen meiner Theorie für bewegte Medien ausschließlich auf Grund der Kundt'schen Doppelbrechung rasch deformierter Medien aufgestellt. Dort wurden die Methoden, nach welchen bei Aufstellung dieser Gleichungen vorgegangen wurde, genau angegeben. Da ich den heuristischen Wert dieser Methoden besonders betonen möchte, betrachte ich es für einen glücklichen Zufall, daß ich nun in der Lage bin, überzeugend nachzuweisen, daß ich wirklich so, wie es dort dargestellt ist, dachte und nicht etwa uneingestandenermaßen mich von dem Faraday'schen Induktionsgesetz oder von der Hertz'schen Theorie leiten ließ.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CXIV, p. 1635, Dezember 1905.

Ich machte nämlich bei Ableitung der Deduktionen aus meinen Gleichungen, auf einem mir fremden Gebiete nach neuen Rechenmethoden rechnend, mehrere ganz wesentliche Rechenfehler. Zufolgedessen schien meine Theorie einen falschen Wert des Rowland'schen Effektes und der Unipolarinduktion zu ergeben, sie schien das Faraday'sche Induktionsgesetz nur unter der Voraussetzung zu ergeben, daß das den induzierten Stromkreis umgebende Medium inkompressibel und wirbelfrei bewegt ist und auch dieses nur deshalb, weil ich ein Integralgesetz, welches nicht allgemein dem Faraday-schen Gesetz entspricht, für den genauen Ausdruck dieses Gesetzes hielt. Deshalb behauptete ich sogar, daß die Hertz'sche Theorie dieses Gesetz nicht richtig darstelle und daß sie auf fortwährende Produktion freier Ladungen schließen lasse. Als ich endlich die Hertz'sche Theorie richtig auffaßte, erkannte ich, daß allerdings an diesen zwei Punkten die Schwäche dieser Theorie liegt, daß dieselbe jedoch eine sehr schöne und widerspruchsfreie Form hat, welche aber gar nicht dem Charakter der elektromagnetischen, sondern der Gravitationserscheinungen angemessen ist, auf welche ich dieselbe demnächst anzuwenden gedenke.

Nun fand ich auch die Rechenfehler in meinen Deduktionen auf und es zeigte sich, daß nur diese es waren, welche die Konsequenzen meiner Differentialgleichungen in minder günstigem Licht erscheinen ließen. Aus den nun wohl exakten Rechnungen, welche im folgenden mitgeteilt werden, geht hervor, daß meine Theorie in vollkommenster, durch keine Bedingungen eingeschränkter Weise den Erscheinungen gerecht wird.

Erster Teil.

I. Aufstellung der Grundgleichungen.

Die Differentialgleichungen, zu welchen ich in der ersten Mitteilung gelangte und von welchen hier ausgegangen werden soll, lauten:

$$[\varepsilon] \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \varphi^{-1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma_0 \right) \cdot \mathfrak{e} = c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \qquad 1)$$

$$[\mu]\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\psi^{-1}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial t}+\xi_0\right)\cdot\mathfrak{m}\overset{9}{=}-c_0 \operatorname{rot}\mathfrak{e}, \qquad 2)$$

$$\sigma\overset{9}{=}\varphi\cdot\varepsilon,\quad \tau\overset{9}{=}\psi\cdot\mu, \qquad 3)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+a_1(\varepsilon-\varepsilon_0)\overset{9}{=}a\nabla,\mathfrak{e}, \qquad 4)$$

$$\frac{d\mu}{dt}+b_1(\mu-\mu_0)\overset{9}{=}b\nabla,\mathfrak{e}, \qquad 5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\overset{9}{=}\varphi\cdot(m\nabla,\mathfrak{v}), \qquad 6)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\overset{9}{=}\psi\cdot(n\nabla,\mathfrak{v}). \qquad 7)$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{e}$ den elektrischen Vektor, $\mathfrak{m}$ den magnetischen Vektor, ε und μ die dielektrische, beziehungsweise diamagnetische Dyade des Mediums, welches wir stets als im allgemeinen anisotrop voraussetzen. Ferner bedeuten ε_c und μ_c die konjugierten Dyaden und

$$[\varepsilon]\overset{9}{=}\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon_c,$$

$$[\mu]\overset{9}{=}\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu_c$$

den symmetrischen Teil der dielektrischen, beziehungsweise diamagnetischen Dyade, endlich ε_0 und μ_0 deren statische Werte.

c_0 ist die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium, für welches $\varepsilon_0=\mu_0=I$, worin I die Einheitsdyade ist. Wir setzen ferner für den Weltäther $\varepsilon_0=\mu_0=\frac{1}{4\pi}$, um nach Heaviside die Mitführung der Zahl 4π zu vermeiden, und messen im übrigen die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{m}$ in Gauß'schem Maße, indem wir die ponderomotorischen Wirkungen zu Grunde legen.

γ_0 ist die elektrische Leitfähigkeit des Mediums, ξ_0 ist die magnetische Leitfähigkeit des Mediums. Ich halte es für wahrscheinlich, daß alle oder doch die meisten festen Stoffe eine (äußerst kleine) magnetische Leitfähigkeit haben, will dies aber nicht bestimmt behaupten, ebensowenig aber auch diese Möglichkeit ganz außer acht lassen.

Ferner erwies es sich heuristisch sehr wertvoll, allgemeine dyadische Derivationen der Geschwindigkeitsverteilung einzuführen. Es bedeutet:

$$m\nabla, \mathfrak{v} \overset{9}{=} m_1\nabla ; \mathfrak{v} + m_2 \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{v} + m_3 I \operatorname{div} \mathfrak{v},$$

$$n\nabla, \mathfrak{v} \overset{9}{=} n_1\nabla ; \mathfrak{v} + n_2 \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{v} + n_3 I \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

Die Zahlen $m_1 m_2 m_3$ und $n_1 n_2 n_3$ dürften nahezu universelle Werte für alle Medien haben. Es ist Aufgabe der folgenden Deduktionen, die passendsten Werte dieser Zahlen zu bestimmen, und zwar ergab sich:

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 = -2, \\ n_2 &= m_2 = -2, \\ n_3 &= m_3 = 0. \end{aligned} \qquad \text{I)}$$

Man erhält diese Werte in folgender Weise:

1. Die Grundvorstellung meiner Theorie ist, daß die Bewegung überhaupt keinen direkten Einfluß auf irgend einen elektromagnetischen Vorgang hat, die Bewegung des Mediums wirkt nur insofern indirekt, als sie die Ursache der Deformation des Mediums ist. Die Rotation des Mediums hat überhaupt keinen weder direkten noch indirekten Einfluß auf irgend einen elektromagnetischen Vorgang, was allerdings eine wesentlich neue Auffassung ist. Die Rotation rot $\mathfrak{v}$ wird aber durch die antisymmetrische Dyade der Geschwindigkeitsverteilung bestimmt. Deshalb müssen die Dyaden $m\nabla, \mathfrak{v}$ und $n\nabla, \mathfrak{v}$ unbedingt symmetrisch sein. Die notwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist aber:

$$m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2.$$

2. Das Energieprinzip fordert die Beziehungen

$$m_1 - m_2 + 2m_3 = n_1 - n_2 + 2n_3 = 0.$$

Es ist also:

$$m_3 = n_3 = 0.$$

3. Der quantitative Ausfall des Rowland'schen Versuches fordert den Wert:

$$m_1 = -2.$$

Hiedurch sind alle drei Konstanten m bestimmt und den Konstanten n gleich, wie in I) angegeben wurde.

Die drei Konstanten $a_1 a_2 a_3$ der noch unbestimmten Dyade $a\nabla, \mathfrak{e}$, ebenso die drei Konstanten $b_1 b_2 b_3$ der Dyade $b\nabla, \mathfrak{e}$ und die Konstanten a_4 und b_4 haben in verschiedenen Medien verschiedene Werte, welche sich durch die Strahlungserscheinungen in starken elektromagnetischen Feldern bestimmen, worauf wir hier nicht eingehen.

Es gibt drei verschiedene symmetrische Dyaden, welche man durch Multiplikation zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bilden kann. Hievon hat die erste:

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\, I$$

die einfachste geometrische Bedeutung und diese ist sogar isotrop symmetrisch. Die zweite symmetrische Dyade

$$\mathfrak{a};\mathfrak{b} + \mathfrak{b};\mathfrak{a} = [\mathfrak{a};\mathfrak{b}]$$

hat analytisch die einfachste Form, aber die dritte symmetrische Dyade:

$$\mathfrak{a};\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\underset{;}{\times}\mathfrak{b} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \qquad 8)$$

hat weitaus die wichtigste physikalische Bedeutung, wie wir weiter unten ersehen werden.

Dementsprechend gibt es auch drei symmetrische derivierte Dyaden einer Vektorverteilung: die isotrop symmetrische

$$I \operatorname{div} \mathfrak{a} = \nabla\cdot\mathfrak{a}\, I,$$

jene von einfachster analytischer Form

$$\nabla;\mathfrak{a} + \mathfrak{a};\nabla \overset{6}{=} [\nabla;\mathfrak{a}]$$

und endlich jene, welche, wie wir ersehen werden, die größte physikalische Bedeutung hat. Es ist dies die symmetrische derivierte Dyade:

$$\nabla;\mathfrak{a} + \nabla\underset{;}{\times}\mathfrak{a} \overset{6}{=} [\nabla, \mathfrak{a}].$$

Nach I) haben die derivierten Dyaden der Geschwindigkeitsverteilung, $m\nabla, \mathfrak{v}$ und $n\nabla, \mathfrak{v}$, welche die elektromagnetischen Vorgänge mitbestimmen, die Form:

$$m\nabla, \mathfrak{v} \overset{2}{=} n\nabla, \mathfrak{v} \overset{2}{=} -2[\nabla, \mathfrak{v}] = -2\nabla ; \mathfrak{v} - 2\nabla \times \mathfrak{v}. \qquad \text{II)}$$

II. Elimination der Hilfsvariablen.

Die Variablen σ, τ, φ und ψ, deren physikalische Bedeutung im zweiten Teile dieser Abhandlung erörtert werden soll, lassen sich leicht aus dem Gleichungssystem 1) bis 7) eliminieren, wodurch sich die elektromagnetischen Grundgleichungen meiner Theorie:

$$[\varepsilon] \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \mathfrak{e} + (\gamma_0 - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon) \cdot \mathfrak{e} \overset{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \qquad A)$$

$$[\mu] \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \mathfrak{m} + (\xi_0 - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu) \cdot \mathfrak{m} \overset{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e} \qquad B)$$

ergeben, welche wir den Deduktionen zunächst zu Grunde legen.

Wir betrachten ferner vorerst nur gewöhnliche Medien, welche keine elektrische Doppelbrechung, keine starke magnetische Drehung der Polarisationsebene zeigen und in welchen Kathodenstrahlen nicht auftreten können. In solchen Medien darf mit hinreichender Annäherung

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \overset{2}{=} \frac{d\mu}{dt} \overset{2}{=} 0$$

gesetzt werden, so daß nur die zwei Variablen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{m}$ verbleiben, zu deren Bestimmung obige Gleichungen *A)* und *B)* ausreichen.

Sind diese Medien außerdem mindestens in der Bewegungsrichtung hinreichend homogen, so reduziert sich das ganze Gleichungssystem auf die zwei Gleichungen:

$$[\varepsilon] \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + (\gamma_0 - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon) \cdot \mathfrak{e} \overset{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \qquad 9)$$

$$[\mu] \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + (\xi_0 - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu) \cdot \mathfrak{m} \overset{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \qquad 10)$$

Man erkennt, daß in diesen Medien außer dem Maxwellschen Verschiebungsstrom $[\varepsilon]\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}$, beziehungsweise $[\mu]\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}$, welcher auch in dem unbewegten Medium vorhanden wäre, und dem Leitungsstrome $\gamma_0\cdot\mathfrak{e}$ beziehungsweise $\xi_0\cdot\mathfrak{m}$ nur noch der Deformationsstrom

$$-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\mu\cdot\mathfrak{m},$$

beziehungsweise

$$-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}$$

auftritt. Der Deformationsstrom ist die mittels der Deformationsdyade $-[\nabla, \mathfrak{v}]$ aus dem elektrischen Vektor $\varepsilon\cdot\mathfrak{e}$, beziehungsweise dem magnetischen Vektor $\mu\cdot\mathfrak{m}$ abgeleitete Vektorfunktion.

Der gesamte Einfluß der Bewegung des Mediums läßt sich also so darstellen, daß man angibt, daß die Leitfähigkeit γ' beziehungsweise ξ' desselben in bewegten Medien nicht den normalen Wert γ_0, beziehungsweise ξ_0 hat, sondern einen abnormalen dyadischen Wert, welcher sich zusammensetzt aus dem (in Kristallen ebenfalls dyadischen) normalen Werte γ_0, beziehungsweise ξ_0 und der Deformationsdyade $-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon$, beziehungsweise $-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\mu$. Es ist diese abnorme oder fingierte Leitfähigkeit rasch deformierter Medien beziehungsweise:

$$\gamma' \overset{9}{=} \gamma_0 - [\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon,$$

$$\xi' \overset{9}{=} \xi_0 - [\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\mu.$$

Die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte, gewöhnliche, homogene und im Ruhezustand isotrope Medien haben also die sehr einfache Form:

$$[\varepsilon]\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \gamma'\cdot\mathfrak{e} \overset{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \tag{11}$$

$$[\mu]\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \xi'\cdot\mathfrak{m} \overset{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \tag{12}$$

III. Die Wärmeproduktion im elektromagnetischen Felde.

Es entsteht nun die für die Zukunft dieser Theorie wichtige Frage, in welchem Maß es gestattet ist, die fingierten Leitfähigkeiten γ' und ξ' als tatsächliche Leitfähigkeiten aufzufassen. Diese Frage entscheidet sich bestimmt, wenn man die beobachteten Energieänderungen in elektromagnetischen Feldern zuzieht. Da meine Theorie ausschließlich auf das Kundt'sche Phänomen gegründet ist, kann man unmöglich aus den Grundgleichungen *A)* und *B)* derselben entnehmen, ob im elektromagnetischen Felde überhaupt Wärmeproduktion und Arbeitsleistung stattfindet. Man muß also der Erfahrung diese Tatsache entnehmen, d. h. man muß durch direkte (oder äquivalente indirekte) Beobachtung entscheiden, daß keine anderen Energieänderungen als Wärme und Arbeit auftreten und ferner, in welchem Verhältnisse diese beiden Energien auftreten, ob vielleicht niemals Wärme, also stets nur Arbeit oder umgekehrt stets nur Wärme oder allgemein: zu welchem Teile Wärme, beziehungsweise Arbeit auftritt.

Ist aber diese unerläßliche Beobachtung gemacht und gelingt es, das Resultat derselben in universell gültiger Form auszusprechen, d. h. ist das Verhältnis der Wärme- zur Arbeitsproduktion im elektromagnetischen Felde durch eine universell gültige Zahl bestimmt, so ergeben meine Grundgleichungen ohne Zuziehung anderer Voraussetzungen als der Kenntnis dieser bestimmten universellen Zahl, die genauen Gesetze aller Energieproduktionen bei elektromagnetischen Vorgängen und den Wert der potentiellen elektromagnetischen Energie.

Wäre diese universelle Zahl gleich Null, d. h. würde keine Arbeit geleistet, so müßte die ganze fingierte Leitfähigkeit $(\gamma'-\gamma_0)$ ebensogut als die Ohm'sche Leitfähigkeit γ_0 als wahre Leitfähigkeit aufgefaßt werden, da sodann folgen würde, daß die ganze Leitfähigkeit γ' nach dem Joule'schen Gesetze die Wärmeproduktion bestimmt.

Wäre hingegen diese universelle Zahl gleich 1, d. h. wäre nur die Ohm'sche Leitfähigkeit γ_0 als wahre Leitfähigkeit zu

betrachten, da nur sie nach dem Joule'schen Gesetze die Wärmeproduktion bestimmt, dann wäre die Deformation des Mediums im elektromagnetischen Felde von keiner besonderen Wärmeproduktion begleitet, dafür würde das Auftreten sehr hoher elektromagnetischer Kräfte folgen, welche die entsprechende hohe Arbeit leisten. Dieser Fall entspricht ebenfalls den einfachsten Tatsachen nicht. Die beobachteten elektromagnetischen Kräfte sind fast oder völlig genau halb so groß, als aus dieser Annahme folgen würde. Diese Annahme widerspricht auch den Grundlagen der Gleichungen 3) meiner Theorie (vergl. hierüber a. a. O., p. 1649 und 1667). Es fällt selbst die der inneren Reibung zugeschriebene Wärmeproduktion im unelektrischen Feld in den Gesichtskreis meiner Theorie oder liegt vielmehr vorläufig am Horizonte desselben. Nichts könnte zu dem Charakter dieser Theorie in besserer Übereinstimmung stehen als die Erkenntnis, daß die Deformation des Mediums im elektromagnetischen Felde von einer besonderen Wärmeproduktion begleitet ist, welche pro Volums- und Zeiteinheit den Wert

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{e}\cdot[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}-\frac{1}{2}\mathfrak{m}\cdot[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\mu\cdot\mathfrak{m} \qquad \text{III)}$$

hat. Durch direkte Beobachtung könnte diese Wärmeproduktion allerdings nicht konstatiert werden, da sie einen ganz verschwindend kleinen Wert hat. Der größte Tensor einer starken Deformation $[\nabla, \mathfrak{v}]$ hat den Wert 100 sec^{-1}; hat das elektrische Feld den Wert $\mathfrak{e} = 3000$ Volt/*cm*, so hat die elektromagnetische Deformationswärme doch nur den Wert 400 Erg. $= 10^{-5}$ Grammkalorien pro Sekunde und Kubikzentimeter. In dünnen Schiebungsschichten kann eine stärkere Deformation vorhanden sein, dort verläuft aber der Deformationsstrom senkrecht zu dem Feldvektor und deshalb ist die elektromagnetische Deformationswärme dort sogar präzis gleich Null. Überhaupt ist dieselbe der ersten Potenz der Deformation proportional, kann also auch negativ sein und verschwindet bei stärkeren Deformationen gegen die gewöhnliche Reibungswärme, welche der zweiten Potenz der Deformation proportional ist.

Wir bezeichnen deshalb den Wert

$$\gamma \overset{2}{=} \gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma_0) \overset{2}{=} \gamma_0 - \frac{1}{2}[\nabla; \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon$$

als die wahre Leitfähigkeit, welche nicht nur nach Art der Ohm'schen Leitfähigkeit in den Gleichungen für bewegte Medien auftritt, was nur eine formale Ähnlichkeit wäre, sondern welche wirklich nach dem Joule'schen Gesetze die Wärmeproduktion bestimmt. Die Grundgleichungen *A)* und *B)* müssen also, wenn es sich um die Berechnung der Energieveränderungen handelt, in der Form geschrieben werden:

$$[\varepsilon] \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \mathfrak{e} - \frac{1}{2} [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e} + \gamma \cdot \mathfrak{e} \overset{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \qquad A')$$

$$[\mu] \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \mathfrak{m} - \frac{1}{2} [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu \cdot \mathfrak{m} + \xi \cdot \mathfrak{m} \overset{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \qquad B')$$

Multipliziert man nun nach dem Vorgange von Poynting diese Gleichungen mit $\mathfrak{e}$, beziehungsweise $\mathfrak{m}$ und addiert, so ergeben die Glieder mit γ und ξ die gesamte Wärmeproduktion; alle Glieder, welche die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ enthalten, ergeben die gegen die elektromagnetischen Kräfte geleistete Arbeit, so daß die potentielle elektromagnetische Energie nur als Funktion von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, ε und μ erscheint, nicht aber von der Geschwindigkeit des Mediums abhängt.

IV. Die Begrenzung des elektromagnetischen Feldes.

Wir gehen von dem Axiom aus, daß jeder physikalische Vorgang, sofern er Objekt (Problem) einer Theorie sein kann, im Endlichen begrenzt sein muß.

Es ist dies freilich eine Abstraktion, denn in Wirklichkeit hängen alle Vorgänge im ganzen Weltraume zusammen, aber dieser Zusammenhang darf außer acht gelassen werden. Es ist diese Abstraktion notwendig und die Voraussetzung jeder Theorie, denn es kann keineswegs das Ziel der Theorie sein, alle Naturvorgänge gleichzeitig zu untersuchen.

Bei der Beschreibung jedes physikalischen Vorganges muß eine bestimmte Grenzschale desselben angegeben werden

und der Nachweis erbracht werden, daß alle außerhalb dieser Grenzschale verlaufenden Vorgänge ohne Einfluß auf den betrachteten Vorgang innerhalb der Schale sind. Es ist diese Angabe immer so leicht, daß sie meist nicht ausdrücklich erwähnt zu werden braucht.

Ferner gehen wir von dem Nahewirkungsprinzip aus, welches besagt, daß die Werte der physikalischen Variablen und ihrer räumlichen und zeitlichen Derivationen in einem sehr kleinen Teile des Mediums sich gegenseitig vollkommen bestimmen. Die Fortpflanzung einer Wirkung auf größere Entfernung kann also nicht ohne wesentliche Veränderungen in dem dazwischenliegenden Medium gedacht werden.

Nun ersehen wir die Bedingung, welche die Grenzschale eines physikalischen Problems immer erfüllen muß. Sie kann nicht als eine mathematische, geschlossene Grenzfläche gedacht werden, denn von einer solchen könnte man niemals behaupten, daß sie alle äußeren Wirkungen abhält. Die Grenzschale muß vielmehr eine bestimmt anzugebende materielle Schale von endlicher Dicke sein. Für dieselbe muß nachgewiesen werden, daß alle für den betrachteten Vorgang wesentlichen Eigenschaftsveränderungen ihres Materials Null sind. Dann pflanzt die Grenzschale keine Wirkung der äußeren Vorgänge in den Innenraum und keine Wirkung des untersuchten Vorganges im Innenraum nach außen fort.

Da die Deformation der Teile des Mediums jeden physikalischen Vorgang wesentlich beeinflußt, muß die Grenzschale jedenfalls hinreichend starr sein. Sie bildet also eine geeignete Grundlage für alle Orts- und Richtungsmessungen.

Alle physikalischen Gesetze müssen invariante Form haben, so daß die Lage des Koordinatenursprunges und die Wahl der Koordinatenrichtungen gleichgültig ist. Es reicht also jedenfalls aus, einen bestimmten starren Körper aufzuweisen, auf welchen sich alle Messungen zu beziehen haben und es ist gleichgültig, wie man das Koordinatensystem in diesem Körper festlegt.

Da aber (mit Ausnahme der ungültigen Maxwell-Hertzschen Gleichungen) kein früher bekanntes Gesetz, welches Fluxionen einer Richtungsgröße enthält, eine solche Form hat,

daß auch die Translationsgeschwindigkeit und Rotationsgeschwindigkeit des Koordinatensystems ohne Einfluß ist, darf nicht ein beliebiger, sondern muß ein bestimmter starrer Körper als Träger des Koordinatensystems ausdrücklich bezeichnet werden und dies muß so geschehen, daß das betreffende Naturgesetz eine universell gültige Form hat.

Nun halte ich es für ganz unrichtig, deshalb zu verlangen, daß dieser starre Körper für jedes Problem derselbe Körper sein müsse. Dann bleibt nichts übrig, als den Fixsternhimmel zur Festlegung des Koordinatensystems zu benützen. Diese Lösung ist aber durchaus nicht universeller, als wenn man das Koordinatensystem in irgend einem anderen starren System festlegt, denn außerhalb unseres Fixsternsystems gibt es andere anders bewegte Fixsternsysteme und man kann doch die Vorgänge in diesen nicht auf unseren Fixsternhimmel beziehen.

Die einzig denkbare, wirklich universelle Festsetzung ist, daß man das Koordinatensystem immer in der Grenzschale des betrachteten Problems festzulegen hat; dies ist einleuchtend und man tut es ohnehin meist unwillkürlich.

Deshalb weil die Planeten- und Erdbewegung, ja ganz streng genommen jede Bewegung, in kosmischen Dimensionen abläuft und also für solche Probleme nur der Fixsternhimmel die Abschlußschale bilden kann, folgt nicht, daß man das Licht einer irdischen Lichtquelle nicht vollkommen genau durch die Zimmerwände und Fensterläden abschließen kann. Die Wände sind eben undurchsichtig genug, um kein Licht aus dem Beobachtungszimmer herauszulassen, hingegen lassen sie die Gravitationswirkungen völlig durch.

Der Michelson'sche Versuch, welcher zeigt, daß der Ausfall eines optischen Experimentes, bei welchem Lichtquelle, Aufstellung und Beobachter im selben Beobachtungsraume sich befinden, nicht von der Bewegung des Fixsternhimmels (von den Weltrichtungen) abhängt, folgt also aus der Undurchsichtigkeit der Zimmerwände nach dem Nahewirkungsprinzip. Er folgt als selbstverständlich, wenn man das Koordinatensystem für jeden realen physikalischen Vorgang stets in der tatsächlichen Grenzschale desselben festlegt.

Die Aberration des Lichtes und der Fizeau'sche Versuch zeigen aber, daß die Translationsgeschwindigkeit des Mediums in Bezug auf das Koordinatensystem nicht gleichgültig ist und daß also die elektromagnetischen Gesetze sich nicht auf ein beliebig bewegtes Koordinatensystem beziehen lassen dürfen.

Wir beziehen die Orts- und Richtungsmessungen immer auf ein beliebig in der bestimmten realen Abschlußschale des betrachteten Vorganges festgelegtes Koordinatensystem. Mit $\mathfrak{v}$ bezeichnen wir die Geschwindigkeit in Bezug auf die Grenzschale. Mit $\frac{\partial}{\partial t}$ bezeichnen wir die Fluxion einer Variablen an einem so bestimmten Orte und in Bezug auf die so bestimmten Richtungen, falls es eine gerichtete Eigenschaft ist. Zum Unterschiede von dieser lokalen Fluxion bezeichne $\frac{d'}{dt}$ die totale Fluxion, d. i. die Fluxion einer Eigenschaft in einem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Punkte. Endlich bezeichne $\frac{d}{dt}$ die materielle Fluxion, d. i. die Fluxion der Eigenschaft eines materiellen Teiles in Bezug auf ein mit diesem nicht nur mitbewegtes, sondern auch mitrotierendes Koordinatensystem. Wenn eine Gleichung nur solche materielle Fluxionen enthält wie die Hertz'schen Gleichungen, sowie die Gleichungen 4) und 5) meiner Theorie, so kann man sie auf jedes beliebig gleichförmig bewegte und gleichförmig rotierende Koordinatensystem beziehen. Es gilt, wenn e einen Skalar, $\mathfrak{e}$ einen Vektor und $\mathfrak{s}$ eine Dyade darstellt:

$$\frac{d}{dt} e = \frac{d'}{dt} e = \frac{\partial}{\partial t} e + \mathfrak{v} \cdot \nabla e, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{e} \overset{3}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{e} + \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{e} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{e}, \tag{14}$$

$$\frac{d'}{dt} \mathfrak{e} \overset{3}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{e} + \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{e}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{s} \overset{9}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{s} + \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{s} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{s}, \tag{16}$$

$$\frac{d'}{dt}\varepsilon \overset{9}{=} \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + \mathfrak{v}\cdot\nabla;\varepsilon. \qquad 17)$$

Es kommt ferner in Betracht die totale Fluxion eines Raumelementes $\boldsymbol{w}$, dessen Punkte die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ haben, und eines bewegten Flächenelementes $\dot{\mathfrak{f}}$. Es ist

$$\frac{d'}{dt} w = w \operatorname{div} \mathfrak{v}, \qquad 18)$$

$$\frac{d'}{dt} \mathfrak{f} \overset{3}{=} \mathfrak{f}\cdot\nabla \times_{;} \mathfrak{v}. \qquad 19)$$

Es bestimmen sich hiedurch die totalen Fluxionen (Variationen) von Raum- und Flächenintegralen mit materiellem Träger:

$$\frac{d'}{dt}(ew) = w\frac{d'}{dt}e + we \operatorname{div} \mathfrak{v}, \qquad 20)$$

$$\frac{d'}{dt}(\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{e}) = \mathfrak{f}\cdot\frac{d'}{dt}\mathfrak{e} + \mathfrak{f}\cdot\nabla\times_{;}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{e}. \qquad 21)$$

V. Die Prinzipien der Mechanik.

Sämtliche Bewegungsvorgänge werden durch Gleichungen von der Form:

$$s\frac{d'}{dt}\mathfrak{v} \overset{3}{=} \nabla\cdot\theta,$$

bestimmt. Hierin ist s eine Materialkonstante, die Dichte, welche durch diese Bewegungsgleichungen definiert ist und für welche das Gesetz der Erhaltung der Masse:

$$\frac{d'}{dt}(ws) = 0 \qquad 22)$$

gilt. θ ist die Spannungsdyade. Diese ist die dyadische Summe mehrerer speziell bestimmter Spannungsdyaden θ_1, θ_2, von welchen jede für jeden Punkt des Mediums durch spezielle, dort vorhandene Zustände und Eigenschaften nach direkten Gesetzen bestimmt ist. Die Kraft pro Volumseinheit, welche das

Medium erfährt, ist hingegen nicht durch direkte Gesetze bestimmt, sondern nichts anderes als die vektorische Derivation der direkt gegebenen Verteilung der Spannungsdyade θ. Das Gegenwirkungsprinzip hat bei dieser Auffassung die Form:

$$\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o}\cdot\theta \overset{3}{\underset{\cdot}{=}} 0. \qquad 23)$$

Der Flächensatz hat die Form:

$$\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o}\cdot\theta\times\mathfrak{r} \overset{3}{=} 0. \qquad 24)$$

Hierin ist $\mathfrak{o}$ eine völlig in der Grenzschale des betrachteten Vorganges verlaufende Oberfläche und $\mathfrak{r}$ der Abstand von einem beliebig gewählten Nullpunkte.

Die in den Bewegungsgleichungen auftretende Beschleunigung $\frac{d'\mathfrak{v}}{dt}$ ist nicht die materielle, sondern die totale Fluxion der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Deshalb ist wohl eine gleichförmige Translation des Koordinatensystems gleichgültig, nicht aber eine Rotation desselben.

Als Bewegungsenergie pro Volumseinheit bezeichnet man den Wert:

$$B = \frac{1}{2} s\mathfrak{v}^2.$$

Es ist also die totale Fluxion der in dem kleinen Volum w enthaltenen Bewegungsenergie unter Zuziehung des Satzes 22) der Erhaltung der Masse:

$$\frac{d'}{dt}(Bw) = \frac{1}{2} sw \frac{d'}{dt}\mathfrak{v}^2 = w(\nabla\cdot\theta)\cdot\mathfrak{v}. \qquad 25)$$

Berücksichtigen wir nun die Rechenregel, welche die Zerlegung der Divergenz einer linearen Vektorfunktion ermöglicht:

$$\operatorname{div}(\theta\cdot\mathfrak{v}) = (\nabla\cdot\theta)\cdot\mathfrak{v} + (\mathfrak{v};\nabla):\theta. \qquad 26)$$

Bilden wir das Raumintegral dieser Gleichung, so können wir jenes der linken Seite leicht in ein Oberflächenintegral

verwandeln. Dieses wechselt sein Vorzeichen, wenn man diese Oberfläche des ausgeschlossenen Raumes betrachtet und stellt daher einen von dem äußeren an den inneren Raum abgegebenen Energiebetrag vor. Man kann den Vektor $-\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{v}$ als den Fluß der Bewegungsenergie bezeichnen, weil er in unbewegten Medien Null ist. Auf der rechten Seite steht zunächst die Fluxion der Bewegungsenergie, also muß, wenn das Energieprinzip erfüllt ist, das skalare Doppelprodukt:

$$(\mathfrak{v};\nabla):\mathfrak{G}, \tag{27}$$

die von der Volumseinheit pro Zeiteinheit gewonnene sonstige Energie darstellen. Ist $\mathfrak{G}$ die Spannungsdyade der elastischen Wirkungen, so ist der Wert 27) die Fluxion der potentiellen elastischen Energie. Ist $\mathfrak{G}$ die Spannungsdyade der Zähigkeit, so ist der Wert 27) der entwickelten Reibungswärme äquivalent u. s. f. Wenn das Energieprinzip erfüllt ist, muß die Spannungsdyade $\mathfrak{G}$ derart durch die Variablen des Feldes bestimmt sein, daß der Wert 27) (mindestens nach Hinzufügung der Divergenz eines beliebig durch die Variablen des Feldes zu bestimmenden Vektors als integrierendem Summanden) sich als die Fluxion einer Funktion der Feldvariablen darstellen lasse. Dann nennt man diese Funktion eine potentielle Energie. Gelingt dies nicht, so muß dieser Wert einer Wärmeproduktion oder chemischen Energieänderung äquivalent sein.

VI. Die elektromagnetische Energiegleichung.

Es ist bei der Prüfung jedes vorgeschlagenen Gleichungssystems für die elektromagnetischen Vorgänge vor allem notwendig, zu untersuchen, ob dasselbe dem Energieprinzip nicht widerspricht, wenn man alle bekannten Veränderungen der elektromagnetischen Variablen berücksichtigt. Insbesondere muß auf die Variabilität der dielektrischen Dyade ε Rücksicht genommen werden, da diese zweifellos (zum mindesten bei allen Volumsänderungen des Mediums nach Boltzmann) eintritt, man also von ihr nicht abstrahieren kann.

Es muß ferner gefordert werden, daß die potentielle elektromagnetische Energie E durch den Ausdruck:

$$E = \frac{1}{2}(\mathfrak{e}\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}+\mathfrak{m}\cdot\mu\cdot\mathfrak{m}) \qquad 27)$$

bestimmt ist, denn nur dieser entspricht der Erfahrung. Insbesondere liegt es nicht im Charakter des Energieprinzips, wenn angenommen wird, daß diese potentielle Energie außer von den Feldvariabeln auch von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Mediums abhänge, denn dann wäre sie eine Art Bewegungsenergie.

Wir multiplizieren die Grundgleichungen *A')* und *B')* nach dem Vorgange von Poynting mit $\mathfrak{e}$, beziehungsweise $\mathfrak{m}$ und addieren, so erhalten wir die Energiegleichung unserer Theorie. Die Glieder, welche die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ enthalten, unterwerfen wir hiebei in anderer Weise derselben Operation. Wir multiplizieren sie dyadisch mit $\mathfrak{e}$, beziehungsweise $\mathfrak{m}$ und nehmen von den so erhaltenen Dyaden den Skalar.

Wir setzen vorläufig:

$$S = \frac{1}{2}[\nabla, \mathfrak{v}] : ((\varepsilon\cdot\mathfrak{e});\mathfrak{e} + (\mu\cdot\mathfrak{m});\mathfrak{m})$$

und berücksichtigen, daß

$$[\varepsilon]\cdot\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t} \overset{s}{=} \frac{1}{2}\varepsilon\cdot\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}\cdot\varepsilon$$

und erhalten die Energiegleichung:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - S + \mathfrak{e}\cdot\gamma\cdot\mathfrak{e} + \mathfrak{m}\cdot\xi\cdot\mathfrak{m} = c_0 \operatorname{div}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{e}). \qquad 28)$$

Nun ist:

$$(\nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{v}) : (\varepsilon\cdot\mathfrak{e};\mathfrak{e}) = (\mathfrak{v};\nabla) : (\varepsilon\cdot\mathfrak{e} \underset{;}{\times} \mathfrak{e}),$$

also ergibt sich:

$$S = \frac{1}{2}(\mathfrak{v};\nabla) : ([\varepsilon\cdot\mathfrak{e}, \mathfrak{e}] + [\mu\cdot\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]),$$

worin wir jedoch die dielektrische und diamagnetische Dyade als symmetrisch angesehen haben, weil dies einfacher ist und in allen untersuchten Fällen auf das genaueste zutrifft.

Bezeichnen wir ferner mit θ den Wert

$$\theta \stackrel{9}{=} \frac{1}{2}[\varepsilon \cdot \mathfrak{e}, \mathfrak{e}] + \frac{1}{2}[\mu \cdot \mathfrak{m}, \mathfrak{m}]. \qquad 29)$$

so folgt nach der Rechenregel 26):

$$S = \mathrm{div}\,(\theta \cdot \mathfrak{v}) - (\nabla \cdot \theta) \cdot \mathfrak{v}$$

und die Energiegleichung nimmt die Form an:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (\nabla \cdot \theta) \cdot \mathfrak{v} + \mathrm{div}\,(c_0 \mathfrak{e} \times \mathfrak{m} - \theta \cdot \mathfrak{v}) + \mathfrak{e} \cdot \gamma \cdot \mathfrak{e} + \mathfrak{m} \cdot \xi \cdot \mathfrak{m} = 0. \qquad 30)$$

VII. Die ponderomotorischen Wirkungen.

Sämtliche mechanischen Wirkungen im variablen inhomogenen anisotropen elektromagnetischen Felde, also auch in Strahlungsfeldern, werden bekanntlich durch die Maxwell-Hertz'schen Spannungen, präziser ausgedrückt durch die Maxwell-Hertz'sche Spannungsdyade in der vollkommensten Weise dargestellt, deren Wert sich in folgender Form darstellen läßt:

$$\theta \stackrel{9}{=} \frac{1}{2}(\varepsilon \cdot \mathfrak{e}; \mathfrak{e} + \varepsilon \cdot \mathfrak{e} \times \mathfrak{e} + \mu \cdot \mathfrak{m}; \mathfrak{m} + \mu \cdot \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}) \stackrel{9}{=} \frac{1}{2}[\varepsilon \cdot \mathfrak{e}, \mathfrak{e}] + \frac{1}{2}[\mu \cdot \mathfrak{m}, \mathfrak{m}]. \qquad \mathrm{IV})$$

Wir müssen nun zeigen, daß man den Wert $(\nabla \cdot \theta) \cdot \mathfrak{v}$ in der Energiegleichung 30) als die Fluxion der Bewegungsenergie ansprechen darf. Jedenfalls ist aber dann nach Gleichung 25) $(\nabla \cdot \theta) \cdot \mathfrak{v}$ die totale Fluxion des Raumintegrals der Dichte der Bewegungsenergie B mit materiellem Träger w:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{w} \frac{d'}{dt}(Bw) = (\nabla \cdot \theta) \cdot \mathfrak{v}.$$

Wir müssen also zunächst dieselbe Fluxion der potentiellen elektromagnetischen Energie E in die Gleichung 30) einführen. Es ist nach der Regel Gleichung 20), 18) und 13):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{w} \frac{d'}{dt}(Ew) = \frac{\partial E}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla E + E\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}.$$

Nach der Rechenregel

$$\operatorname{div} E\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\cdot\nabla E + E \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

erhält man nun folgende leicht zu deutende Form der Energiegleichung:

$$\frac{\delta E}{\delta t} + \frac{\delta B}{\delta t} + \mathfrak{e}\cdot\gamma\cdot\mathfrak{e} + \mathfrak{m}\cdot\xi\cdot\mathfrak{m} + \operatorname{div}(c_0\mathfrak{e}\times\mathfrak{m} - \theta\cdot\mathfrak{v} - E\mathfrak{v}) = 0. \qquad V)$$

Das erste Glied stellt die Fluxion der potentiellen elektromagnetischen Energie E eines bestimmten Teiles der Materie dar und diese Energie hat nach Gleichung 27) den Maxwell-Hertz'schen Wert.

Das zweite Glied stellt die Fluxion der Bewegungsenergie B desselben materiellen Teiles dar.

Die folgenden zwei Glieder stellen nach Kapitel III die Wärmeproduktion dar. Alle diese Werte sind auf die Volumseinheit bezogen.

Endlich folgt eine Divergenz eines Vektors $\mathfrak{q}$, welcher also den Energiefluß

$$\mathfrak{q} \stackrel{?}{=} -\theta\cdot\mathfrak{v} + c_0\mathfrak{e}\times\mathfrak{m} - E\mathfrak{v} \qquad VI)$$

darstellt.

Da sonach das Energieprinzip erfüllt ist, ist $(\nabla\cdot\theta)\cdot\mathfrak{v}$ tatsächlich die Fluxion der Bewegungsenergie und also stellt der Wert θ die auch aus meiner Theorie folgende elektromagnetische Spannungsdyade dar, welche nach 29) genau den Wert IV) der Maxwell'schen Spannungsdyade hat. Meine Theorie ergibt also sämtliche ponderomotorische Wirkungen genau in derselben Weise wie die Maxwell-Hertz'sche Theorie und stimmt mit ihr in mechanischer Beziehung völlig überein. Daß sie auch das Gegenwirkungsprinzip und das Prinzip der Relativität der Bewegung erfüllt, folgt aus Kapitel IV.

Die pro Volums- und Zeiteinheit an das umgebende Medium übertragene Bewegungsenergie bestimmt sich durch

$$-\operatorname{div}(\theta\cdot\mathfrak{v}).$$

Der Fluß $-\theta.\mathfrak{v}$ der Bewegungsenergie kann auch als die Arbeit aufgefaßt werden, welche die an der Oberfläche des betrachteten Teiles des Mediums wirkenden Maxwell'schen Flächenspannungen leisten.

VIII. Die Aberration des Lichtes.

Der Rest der Energieübertragung hat elektromagnetische Bestimmungsstücke.

Der elektromagnetische Energiefluß $\mathfrak{s}$, welchen wir mit der Strahlrichtung in elektromagnetischen Wellen identifizieren dürfen, hat nach Gleichung VI) den Wert:

$$\mathfrak{s} = c_0 \mathfrak{e} \times \mathfrak{m} - E \mathfrak{v}. \qquad \text{VII)}$$

Die erste Komponente dieses Energieflusses ist der Poynting'sche Vektor, aber die zweite Komponente $-E\mathfrak{v}$ ist neu und meiner Theorie eigentümlich.

Nach den Grundgleichungen 9) und 10) für homogene und isotrope Medien, in welchen nur lokale Fluxionen und Deformationen vorkommen, sind die elektromagnetischen Vorgänge von der Geschwindigkeit des Mediums ganz unabhängig und, wenn noch die Deformationen klein sind, ist überhaupt die Bewegung des Mediums völlig ohne Einfluß auf den elektromagnetischen Vorgang.

Gerade deshalb muß der Energiefluß durch jede materielle Fläche von der Geschwindigkeit derselben abhängen, denn die Energiegleichung bezieht sich auf einen von einer materiellen Fläche umschlossenen Raum. Wenn der Energiefluß Null ist, so erfüllt die Energie die Kontinuitätsgleichung, d. h. sie bewegt sich mit der Materie. Da aber der elektromagnetische Vorgang von der Bewegung der Materie ganz unabhängig ist, so muß der Energiefluß die Komponente $-E\mathfrak{v}$ enthalten, welche den Transport der Energie mit der Materie wieder rückgängig macht.

Dies gilt auch für die Lichtfortpflanzung im Weltraume. Wir beziehen uns nun auf ein im Fixsternhimmel festgelegtes Koordinatensystem. Die von einem ruhenden Stern ausgesendeten Lichtwellen sind von der Bewegung des Weltäthers, den ich als ganz gewöhnliche Materie ansehe, und der Bewegung der Atmosphäre völlig unabhängig. Eben deshalb muß der Energiefluß $\mathfrak{s}$ in diesen Lichtwellen nach Gleichung VII) die Komponente $-E\mathfrak{v}$ haben und deshalb hängt auch die Strahlrichtung $\mathfrak{s}$ in gleich hohem Maße von der Geschwindigkeit des Mediums ab.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_0$ des Lichtes in Richtung der Wellennormalen erhält man, wenn man den Poynting'schen Energiefluß durch die Energiedichte E dividiert:

$$\mathfrak{c}_0 \overset{3}{=} c_0 \frac{\mathfrak{e} \times \mathfrak{m}}{E}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ des Lichtes in der Strahlrichtung erhält man, wenn man den ganzen elektromagnetischen Energiefluß $\mathfrak{s}$ durch die Energiedichte dividiert. Es ist also

$$\mathfrak{c} \overset{3}{=} \mathfrak{c}_0 - \mathfrak{v}. \qquad \text{VIII)}$$

Man erhält die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$, wenn man zu der Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}_0$ die negative Geschwindigkeit des Mediums vektorisch addiert.

Damit ist die Aberration des Lichtes erklärt.

Damit man diese Abweichung der Strahlrichtung von der Wellennormalen beobachten kann, ist aber erst notwendig, den Strahl zu begrenzen, denn die Strahlrichtung kann ja keinen anderen Sinn haben als den einer Grenzbedingung an der Strahloberfläche. Begrenzte Strahlen verlaufen je nach der ungleichförmigen Bewegung des Weltäthers und der Atmosphäre gekrümmt, die Wellenflächen und Vektorverteilungen in denselben sind aber ganz ungestört, von der Bewegung des Mediums und von der Strahlbegrenzung unabhängig.

IX. Die Faraday'sche Induktion.

Wir betrachten nun ein Medium, welches in Bezug auf die diamagnetische Dyade μ homogen ist. Da abgesehen von den stark ferromagnetischen Substanzen für alle Stoffe fast genau

$$\mu = \frac{1}{4\pi},$$

so erstreckt sich unsere Betrachtung auch auf die Bewegung beliebiger Metallkörper in beliebigen Flüssigkeiten, z. B. von Kupferdrähten in Luft, und es kann die Gleichung 10) in der Form:

$$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mathfrak{m} \overset{3}{=} -4\pi c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e} \qquad 31)$$

der Rechnung zu Grunde gelegt werden.

Der Geschwindigkeitsverteilung dieses im übrigen ganz inhomogenen Mediums legen wir gar keine Bedingung auf, es können die stärksten Volumsänderungen, Wirbelbewegungen und Deformationen zugelassen werden.

Das anfänglich gegebene magnetische Feld $\mathfrak{m}$ kann ebenfalls fast ganz beliebig verteilt sein, doch müssen wir demselben die Bedingung auferlegen:

$$\operatorname{rot}((\operatorname{rot} \mathfrak{m}) \times \mathfrak{v}) \overset{2}{=} 0, \qquad 32)$$

wenn wir zu einem anschaulichen Resultat unserer Rechnung gelangen wollen. Es empfiehlt sich diese Vereinfachung, weil diese Bedingung bei Induktionsversuchen immer mit weitaus hinreichender Annäherung erfüllt ist. Denn das magnetische Feld $\mathfrak{m}$ ist bei den Induktionsversuchen mit bewegten Leitern immer als nahezu statisches Feld gegeben, so daß außerhalb von starkstromführenden Drähten sogar rot $\mathfrak{m} \overset{2}{=} 0$ ist. Aber wollte man auch die Bewegung der Drahtringe, welche der Induktion unterworfen werden sollen, im Inneren von Starkströmen, etwa in vom galvanischen Strome durchflossenem Quecksilber ausführen, so wäre immer noch die Bedingung 32) so oft erfüllt, daß sich tatsächlich kaum ein Induktionsexperiment ausdenken läßt, bei welchem diese Bedingung nicht erfüllt ist. Ein solches Experiment könnte, wenn es ausführbar ist, die Bedeutung eines »experimentum crucis« für meine Theorie haben.

Es sollen folgende Rechenregeln benutzt werden:

$$\mathfrak{m} \underset{;}{\times} \nabla \overset{2}{=} \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{m} + (\operatorname{rot} \mathfrak{m}) \times I \overset{2}{=} \nabla ; \mathfrak{m} - \operatorname{div} \mathfrak{m}\, I, \qquad 33)$$

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v}) = \nabla ; \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v} + \nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{m}, \qquad 34)$$

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{v}) \overset{3}{=} \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v} - \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{m}, \qquad 35)$$

ferner der sehr verwendbare, dem Stokes'schen Satz analoge, von mir aufgestellte Integralsatz:

$$\int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f} \cdot \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{u}} d\,\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}. \qquad 36)$$

Hierin ist $\mathfrak{f}$ eine beliebige Fläche, welche von dem Umfang $\mathfrak{u}$ begrenzt wird. Wir haben diesen Integralsatz, welcher sich nicht bloß auf die Geschwindigkeitsverteilung, sondern auf beliebige Vektorverteilungen anwenden läßt, bereits der Gleichung 19) zu Grunde gelegt.

Die symmetrische Deformationsdyade $[\nabla, \mathfrak{v}]$ kann nach Gleichung II) in folgender Weise zerlegt werden:

$$[\nabla, \mathfrak{v}] \overset{2}{=} \nabla ; \mathfrak{v} + \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{v}. \tag{37}$$

Die Grundgleichung 31) kann also in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} - \nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{m} - \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{m} \overset{3}{=} -4 \pi c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \tag{38}$$

Wir können das zweite Glied $-\nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{m}$ drei aufeinanderfolgenden Umformungen unterwerfen, wir verwandeln dasselbe nach 34) unter Ausscheidung des Wertes $-\operatorname{grad}(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v})$ in die Form $+\nabla ; \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v}$, diese verwandeln wir nach 33) unter Ausscheidung des Wertes $+\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{m}$ in die Form $\mathfrak{m} \underset{;}{\times} \nabla \cdot \mathfrak{v}$ und diese endlich unter Ausscheidung des Wertes $\mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{m}$ in die Form $\nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v}$.

Die Grundgleichung 38) kann also auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v} - \nabla \underset{;}{\times} \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{m} + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{m} - \operatorname{grad}(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v}) + \\ + \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{m} \overset{3}{=} -4 \pi c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \tag{39}$$

Nun führen wir die Bedingung 32) ein, deren Bedeutung ist, daß $\mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{m}$ ein eindeutiges skalares Potential hat. Dann können wir setzen:

$$-\operatorname{grad}(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{v}) + \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{m} \overset{3}{=} \operatorname{grad} s, \tag{40}$$

worin s ein skalares Potential, und erhalten endlich nach 35) folgende Form der Grundgleichung:

$$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{m} + \operatorname{grad} s \overset{3}{=} -4 \pi c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \tag{41}$$

Wir hätten aber auch die Rechnung in folgender Weise führen können:

Wir verwandeln das Glied $-\nabla;\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{m}$ wieder unter Ausscheidung des Wertes $-\mathrm{grad}\,(\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{v})$ in die Form $\nabla;\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{m}$, diese aber unter Anwendung der Rechenregel:

$$\nabla;\mathfrak{m} \overset{2}{=} \mathfrak{m};\nabla + (\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}) \times I \tag{42}$$

in die Form $\mathfrak{m};\nabla\cdot\mathfrak{v}$, wobei das Glied $\mathfrak{v}\times\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}$ ausgeschieden wird. So erhalten wir folgende Form der Grundgleichung:

$$\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t} + \mathfrak{m};\nabla\cdot\mathfrak{v} - \nabla;\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{m} + \mathrm{grad}\,s \overset{3}{=} -4\pi c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{c}, \tag{43}$$

welche nach den Regeln 15) und 21) die Bedeutung hat:

$$\frac{d'}{dt}(\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{m}) + \mathfrak{f}\cdot\mathrm{grad}\,s \overset{3}{=} -4\pi c_0\,\mathfrak{f}\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{c}. \tag{44}$$

Hierin ist $\mathfrak{f}$ ein kleines materielles Flächenelement, dessen Punkte mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ bewegt sind.

Um die in einer beliebigen (materiell ausgezeichneten oder bloß gedachten) geschlossenen Linie $\mathfrak{u}$ in diesem Feld induzierte elektromotorische Kraft zu berechnen, haben wir diese Gleichung 44) über eine beliebige (materiell ausgezeichnete oder bloß gedachte) Fläche $\mathfrak{f}$ zu erstrecken, welche aber von diesem Umfang $\mathfrak{u}$ und nur von diesem Umfang und nur einmal von diesem Umfange begrenzt wird.

Es würde nun die Rechnung sehr erleichtern, wenn man irgend eine Fläche fände, die diesen Bedingungen entspricht und auf welcher das Flächenintegral des Vektors grad s verschwindet, da man dann diesen Vektor gar nicht zu berücksichtigen brauchte. Tatsächlich verschwindet das skalare Flächenintegral jedes Vektors mit Notwendigkeit auf jedem Teile der Oberflächen seiner Vektorröhren. Es fragt sich also nur, ob diese stets die geeignete Form haben. Dies wäre sicher nicht der Fall, wenn die Vektorröhren ringförmig geschlossen wären. Alle Vektorlinien, welche den Umfang $\mathfrak{u}$ schneiden, umhüllen dann einen körperlichen Ring und die Oberfläche desselben, welche zweifach zusammenhängend ist,

wird durch den Umfang **u** nicht in zwei Teile getrennt. Der Umfang **u** begrenzt eine solche Fläche gar nicht, zweimal, viermal, kurz: in gerader Zahl, aber nicht einmal.

Die Vektorlinien des Gradienten eines eindeutigen Potentials verlaufen von niedrigeren Potentialwerten zu höheren, jeder Potentialwert kann auf einer so definierten Vektorlinie nur einmal vorkommen, dieselbe muß von einem Punkte, beziehungsweise Gebiete des Feldes, in welchem ein Minimum des Potentials, also der Wert Null des Gradienten vorhanden ist, zu einem Punkt oder Gebiete maximalen Potentials, wo der Gradient wieder Null ist, verlaufen, sie kann sich gabeln, indem sie mehrere Potentialminima mit mehreren Maximalstellen verbindet, in welchem Falle natürlich derselbe Potentialwert auf jedem gleichlaufenden Aste der Linie vorkommen kann, aber sie kann sich niemals ringförmig schließen. Eine Vektorröhre des Gradienten eines eindeutigen Potentials kann ebenfalls niemals einen Raum von zweifachem Zusammenhang einschließen, sie verläuft von minimalen zu maximalen Potentialwerten des Feldes, beginnt und endet in diesen ausgezeichneten Punkten des Feldes im allgemeinen in Spitzen, in welchen der Gradient den Wert Null hat, und bildet also stets eine geschlossene, einfach zusammenhängende Fläche, auf welcher das Flächenintegral des Gradienten Null ist. Eine solche Vektorröhre kann sich gabeln, keiner ihrer Äste kann sich aber ringförmig schließen. Die maximalen und minimalen Potentialwerte brauchen nicht gerade in Punkten, sondern können auch in ausgedehnten Gebieten konstanten Potentials vorkommen. Um so mehr ist dort der Gradient Null, die Vektorröhre endet in einem solchen Gebiete nicht in einer Spitze, kann aber immer dort durch ein Flächenstück abgeschlossen werden, auf welchem der Gradient Null ist.

Die Oberfläche jeder Vektorröhre eines Gradienten wird durch jede auf ihr liegende geschlossene Linie **u** in zwei Teile getrennt, von welchen jeder nur einmal von dem Umfang **u** begrenzt wird. Jeder dieser zwei Teile bildet eine für unsere Integration geeignete Fläche, auf welcher das Flächenintegral des Gradienten Null ist.

Da die Wahl dieser Integrationsfläche, wenn sie nur obige geometrische Bedingung erfüllt, im übrigen ganz beliebig ist, erhalten wir folgenden Satz:

Zu der elektromagnetischen Grundgleichung kann man den Gradienten eines beliebigen eindeutigen skalaren Potentials hinzufügen, ohne daß aus derselben andere Werte für die auftretenden elektrischen Wirbel rot $\mathfrak{e}$ oder elektromotorischen Kräfte folgen.

Deshalb bildet das Faraday'sche Induktionsgesetz keine geeignete Grundlage für die Aufstellung elektromagnetischer Differentialgesetze und ist die Absicht Maxwell's und Hertz' im Prinzip ohne Aussicht auf Erfolg, dieses Integralgesetz der elektromagnetischen Theorie zu Grunde zu legen. Das Faraday'sche Gesetz hat nach dem eben bewiesenen Satz eine willkürliche Form. Ein jedes Induktionsgesetz bestimmt die Stärke von rot $\mathfrak{e}$ (beziehungsweise rot $\mathfrak{m}$), diese Wirbeldichten sind aber keine allgemein verteilten Vektoren, sondern haben keine Divergenz. Will man also eine vektorische Grundgleichung aus einem Induktionsgesetz ableiten, so hat man noch eine willkürliche Annahme frei, nämlich die Annahme eines beliebigen eindeutigen Potentials s, dessen Gradient zu der Grundgleichung gefügt werden darf.

Wenn es sich also nur um die Berechnung der vorhandenen elektrischen Wirbel (oder auftretenden elektromotorischen Kräfte) handelt, so kann man das Glied grad s in Gleichung 41) oder auch in Gleichung 44) völlig weglassen. Hiedurch erhält man:

$$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{m} \overset{s}{=} -4\pi c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}, \tag{45}$$

$$\frac{d'}{dt}(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{m}) \overset{s}{=} -4\pi c_0 \mathfrak{f} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \tag{46}$$

Dies sind aber zwei bekannte Formen, in welchen man die Hertz'schen Gleichungen darstellen kann.

Meine Theorie stellt also sämtliche Induktionserscheinungen in derselben Weise dar wie die Maxwell-Hertz'sche Theorie, was die induzierten Wirbel

betrifft, während sie bezüglich der auftretenden Ladungen (oder Leitungsströme) zu wesentlich anderer Auffassung der betreffenden Vorgänge führt.

Den Wert des im obigen abgeleiteten Satzes erkennt man sehr wohl, wenn man denselben auf spezielle Beispiele anwendet. Er räumt dann alle Rechnungsschwierigkeiten aus dem Wege. Wenn ein Kupferdraht z. B. sich in einem beliebigen magnetostatischen Felde beliebig bewegt und dabei deformiert, so wäre es schwer, nach meiner Theorie zu berechnen, welche elektromagnetische Wirkung die Deformationen der Luftteile in der Umgebung des Drahtes haben. Bildet man aber das Produkt $\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{m}$, so erhält man in der Nähe des Drahtes eine eindeutige Potentialverteilung, welche schon in einiger Entfernung von demselben überall Null ist, und man erkennt sofort die Gültigkeit des Faraday'schen Gesetzes für diesen Fall.

Die hier vorgetragene Theorie erklärt das Auftreten der elektromotorischen Kräfte in galvanischen Elementen nicht. Zu diesem Ende muß der Grundgleichung *B)* ein besonderes Glied beigefügt werden, welches ich in einer früheren Abhandlung angegeben habe.[1] Es ist dieses Glied gleich dem Kreuzgefälle der Leitfähigkeiten und hat nur in den Grenzlinien, in welchen drei verschiedene Stoffe zusammentreffen, einen von Null verschiedenen Wert, ist also sogar in den Grenzflächen zwischen zwei verschiedenen Stoffen Null. Ich würde aber sogar in diesen Grenzflächen bedeutende Abweichungen von jeder für einigermaßen homogene Medien aufgestellten Gesetzmäßigkeit zulassen, weil die außerordentlich starken Eigenschaftsgefälle in diesen Grenzschichten jedenfalls besondere Wirkungen haben.

Unter der Voraussetzung, daß man der Grenzschicht zwischen Eisen und Luft nicht besondere Beachtung zu schenken braucht, gelten obige Ableitungen ganz allgemein für inhomogene Medien, z. B. für die Induktionswirkungen in einem Feld, in welchem beliebig bewegte Eisenmassen vorhanden sind. Jedenfalls gelten sie aber für rotierende Eisenkerne (in

[1] Jaumann, Zur Theorie der Lösungen; diese Sitzungsber., Bd. CIX (1900). — Ann. der Phys., Bd. III, p. 601.

Wechsel- und Gleichstrommaschinen), da dann die Geschwindigkeit des Eisenkernes keine Komponente in die Normale der Eisenoberfläche sendet.

X. Das Rowland'sche und Röntgen'sche Phänomen.

Für das Auftreten magnetischer Wirbel gilt alles im vorigen Kapitel Gesagte in gleicher Weise. Da aber das einzige bekannte, den magnetischen Induktionsexperimenten entsprechende elektrische Experiment das sehr anschauliche und einfache Rowland'sche Experiment ist, so wollen wir dieses noch speziell berechnen.

Die Rotation der Metallplatten bei dem Rowland'schen Versuch und der nichtleitenden Platte bei dem Röntgen'schen Versuch hat nach meiner Theorie gar keinen direkten Einfluß auf das elektromagnetische Feld. Es kommt also auf das Material dieser starren Platten überhaupt nicht an und hienach ist der Röntgen'sche Versuch überhaupt nicht wesentlich von dem Rowland'schen Versuch verschieden. Die von beiden Forschern beobachteten Kreisströme rühren von der raschen Torsion her, welche die Luft- oder Flüssigkeitsschichten, die zwischen den parallelen, mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit rotierenden Platten notwendig vorhanden sind, erfahren.

Wir gehen von der Grundgleichung 9) aus, in welcher wir $\gamma_0 = 0$ und ε konstant annehmen, wie es den Verhältnissen in der Torsionsschicht entspricht:

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e} \overset{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}. \qquad 47)$$

Da hier der elektrische Vektor $\mathfrak{e}$ stets senkrecht zu den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ in der Torsionsschicht ist, oder aber weil die Geschwindigkeitsverteilung divergenzfrei ist und sich der (gleichförmig verteilte) Feldvektor $\mathfrak{e}$ in der Richtung der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ nicht ändert, berechnet sich hier der gesamte Deformationsstrom in sehr einfacher Weise.

Die Deformationsgeschwindigkeit ist

$$[\nabla, \mathfrak{v}] \overset{9}{=} \left[(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2), \frac{1}{\mathfrak{n}}\right] \overset{9}{=} \left[\mathfrak{r} \times (\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1), \frac{1}{\mathfrak{n}}\right], \qquad 48)$$

worin $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ die Geschwindigkeiten gegenüberliegender Punkte der Grenzplatten im Abstande $\mathfrak{r}$ von der gemeinsamen Rotationsachse derselben und $\mathfrak{u}$ die Distanz der Platten (die Dicke der Torsionsschicht) ist. $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ sind die Winkelgeschwindigkeiten der Platten.

Der Deformationsstrom in der Schicht hat also den vektorischen Wert:

$$-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e} \stackrel{3}{=} -\mathfrak{v};\nabla\cdot(\varepsilon\cdot\mathfrak{e}) \stackrel{3}{=} (\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_2)\left(\frac{1}{\mathfrak{u}}\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}\right). \qquad 49)$$

Derselbe verläuft also in geschlossenen peripheren, koaxialen Ringen. Er ist der partiellen Änderung von $\mathfrak{v}$ in der Richtung $\varepsilon\cdot\mathfrak{e}$ (d. i. die Bedeutung von $\mathfrak{v};\nabla\cdot(\varepsilon\cdot\mathfrak{e})$) gleich und entgegengesetzt, also entspricht auch sein Vorzeichen der Beobachtung.

Multiplizieren wir 49) mit dem Raumelement

$$\mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{u}\times d\mathfrak{r}) = \mathfrak{u}\cdot d\mathfrak{f} = \mathfrak{u}\cdot d\mathfrak{q} = \mathfrak{u}\cdot(d\mathfrak{r}\times\mathfrak{u}),$$

worin $d\mathfrak{f}$ ein von zwei Kreisbogenstücken $\mathfrak{u}$, deren radiale Distanz $d\mathfrak{r}$ ist, begrenztes Flächenstück der Grenzplatten, und $d\mathfrak{q}$ der Querschnitt des anliegenden Stromfadens ist. Es ergibt sich:

$$(\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_2)(d\mathfrak{f}\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}) \stackrel{3}{=} c_0\,\mathfrak{u}\,(\text{rot}\,\mathfrak{m}\cdot d\mathfrak{q}). \qquad 50)$$

Da $\varepsilon\cdot\mathfrak{e}$ die Ladung der Flächeneinheit der Platten ist, so ist der Deformationsstrom in der tordierten Schicht genau so groß als der von Rowland beobachtete, aber durch »Bewegung der Elektrizitätsmengen« erklärte Strom.

Jedoch hat der Deformationsstrom nicht die Lage des von Rowland angenommenen Stromes. Bei gleichmäßiger Torsion der Luftschicht zwischen den rotierenden Platten erfüllt er dieselbe gleichmäßig; damit er in unmittelbarer Nähe der Plattenoberflächen auftritt, müßte die Luftschicht ruhen und an den Plattenoberflächen gleiten, so daß die Deformation nur dort und um so stärker dort eintreten würde. Ich halte die vorliegenden Beobachtungen in diesem Punkte für nicht genau genug.

Eine beliebig rotierende oder ruhende Glasplatte, welche nach Röntgen zwischen die Rowland'schen Platten geschaltet

wird, hat, wenn sie ungeladen ist und das elektrische Feld genau denselben Wert $\varepsilon\cdot\mathfrak{e}$ hat, keinen anderen Einfluß, als daß sie die Torsion der Zwischenschichten mitbewirkt und daß sie die Dicke und Lage dieser Torsionsschichten bestimmt, was zwar gleichgültig für die Stärke des Deformationsstromes ist, aber dessen Wirkung auf eine zur Seite aufgestellte Magnetnadel beeinflußt.

XI. Die Unipolarinduktion und der Wilson'sche Versuch.

Obwohl alle Induktionsexperimente im magnetischen Feld in Kapitel IX bereits im Prinzip erledigt wurden, wollen wir doch die Unipolarinduktion, welche das anschaulichste und einfachste Induktionsexperiment darstellt, ausführlich berechnen. Sie stellt das genaue Analogon des Rowland'schen Versuches oder präziser: des Röntgen'schen Versuches dar.

Das Medium zerfalle in zwei Teile von beliebigem Material, welche durch eine Rotationsfläche voneinander getrennt werden und um die Achse derselben mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ rotieren. Hiebei wird nur das Medium in dieser Grenzschicht, deren Dicke $\mathfrak{n}$ sehr klein sei, deformiert, und zwar mit der Geschwindigkeit:

$$[\nabla, \mathfrak{v}] = \left[\mathfrak{r} \times (\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1),\ \frac{1}{\mathfrak{n}}\right]. \qquad 51)$$

Besteht die Rotationsfläche aus zylindrischen und ebenen Teilen und ist der magnetische Vektor $\mu\cdot\mathfrak{m}$ des Feldes der Rotationsachse parallel, so hat der Deformationsstrom in den zylindrischen Teilen der Schiebungsschicht den Wert Null, in den ebenen Torsionsschichten der Trennungsfläche aber den Wert:

$$-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\mu\cdot\mathfrak{m} \overset{3}{=} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2)\left(\frac{1}{\mathfrak{n}}\cdot\mu\cdot\mathfrak{m}\right). \qquad 52)$$

Bei dem Unipolarinduktionsexperimente hat der rotierende Magnet die Form eines Zylinders. Integrieren wir 52) über einen radialen Schnitt der Torsionsschicht an einer Polfläche, so erhalten wir die elektromotorische Kraft in irgend einem Ring $\mathfrak{n}$, welcher von der Mantelfläche des Magnets zu dem

Mittelpunkt der Polfläche führt und im Magnet sich schließt. Es ist nach Gleichung 31)

$$-[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu \cdot \mathfrak{m} \stackrel{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}, \tag{53}$$

also, wenn $\mathfrak{r}_0$ der Radius der Polfläche ist:

$$\int_u d\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e} = \frac{1}{2c_0} \mathfrak{r}_0^2 (\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1) \cdot \mu \cdot \mathfrak{m}. \tag{54}$$

Es entspricht dies genau der Beobachtung.

Bei dem Wilson'schen Versuche[1] bestand der rotierende Körper aus Glas, was keinen Unterschied macht, wenn dafür gesorgt ist, daß der Feldvektor $\mu \cdot \mathfrak{m}$ denselben Wert hat, ferner wurde die Messung elektrometrisch gemacht. Daß Wilson noch einen Kondensator einschaltet, der im magnetischen Felde mitrotiert, ist vom Standpunkte meiner Theorie ohne Einfluß.

XII. Die Erhaltung der elektrischen und magnetischen Ladungen.

Eine charakteristische Seite aller früheren Theorien, insbesondere der Maxwell-Hertz'schen sowie der Lorentz'schen Theorie, ist, daß die wahren Ladungen div $\varepsilon \cdot \mathfrak{e}$, beziehungsweise div $\mu \cdot \mathfrak{m}$ die Kontinuitätsgleichung erfüllen, also in der bewegten Materie erhalten bleiben, wie man sofort erkennt, wenn man die Divergenz der Grundgleichungen dieser in Bezug auf diesen Punkt ganz identischen Theorien bildet. Die elektrische Grundgleichung der Hertz'schen Theorie lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \cdot \mathfrak{e}) + \operatorname{div} \varepsilon \cdot \mathfrak{e} + \operatorname{rot}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{v}) = c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}. \tag{55}$$

Hieraus folgt durch Divergenzbildung unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\varepsilon \cdot \mathfrak{e}) + \operatorname{div}(\mathfrak{v} \cdot \operatorname{div} \varepsilon \cdot \mathfrak{e}) = 0. \tag{56}$$

Setzt man hierin statt div $\varepsilon \cdot \mathfrak{e}$ die Dichte, so ergibt sich die die Erhaltung der Masse aussprechende Kontinuitätsgleichung,

[1] Vergl. M. Abraham, Theorie der Elektr., Bd. II, p. 322 (1905).

die elektrische und magnetische Menge bleibt also jedem Teil der Materie ebenso unbedingt erhalten als seine Masse. Es entspricht dies oft der Beobachtung, ist aber in dieser Allgemeinheit sicher unrichtig. Hertz bezeichnet Vorgänge, bei welchen in Nichtleitern die Ladung nicht erhalten bleibt, als »nicht lediglich« elektromagnetische Vorgänge. Doch scheint es mir wünschenswert, auch solche Vorgänge, besonders die Elektrisierung durch Reibung, welche doch die Grundlage der Elektrizitätslehre geliefert hat, einer elektromagnetischen Theorie bewegter Medien unmittelbar anzugliedern. Die notwendige Bedingung hiefür ist aber, daß eine Theorie, welche dieses leisten soll, welche auch die ladende Wirkung der Kathodenstrahlen darstellen soll und eine Grundlage der Theorie der elektrischen Entladung in Gasen bieten soll, nicht unbedingt jede Änderung der Ladungen in Nichtleitern ausschließen darf. Deshalb habe ich gleich im ersten Beginn dieser Untersuchung[1] sehr gern auf die prinzipielle Erhaltung der Ladungen verzichtet.

Mit dieser Erhöhung des Zieles der Theorie erwachsen derselben aber neue Schwierigkeiten insofern, als nachgewiesen werden muß, daß dieselbe in jenen Fällen, in welchen Erhaltung der Ladungen beobachtet wurde, zu gleichem Resultate führt.

Diese Frage erledigt sich für meine Theorie sehr einfach. Die Grundgleichungen 9) und 10) derselben lauten für Nichtleiter:

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e} \stackrel{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \qquad 57)$$

$$\mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu \cdot \mathfrak{m} \stackrel{3}{=} - c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \qquad 58)$$

Sie unterscheiden sich also von den Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Nichtleiter nur durch den Deformationsstrom und wir müssen zunächst die Größenordnung dieses Stromes bestimmen. Die fingierte Leitfähigkeit hat den Wert $-[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon$. Der größte Tensor der Deformationsdyade

[1] Vergl. die erste Mitteilung dieser Sitzungsber., Bd. CXIV, Abt. IIa., p. 1639.

$[\nabla, \mathfrak{v}]$ hat auch in heftig bewegter und deformierter Flüssigkeit oder Luft höchstens den Wert $10^2(\mathrm{sec}^{-1})$, d. h. es haben dann zwei um 1 *cm* voneinander abstehende Flüssigkeitsteile eine Geschwindigkeitsdifferenz von 100 *cm*/sec. Die fingierte Leitfähigkeit $[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon$ hat also für $\varepsilon = \frac{1}{4\pi}$ höchstens den Wert $8(\mathrm{sec}^{-1})$. Da die elektrostatische Einheit der Widerstände in gleichem Maße gemessen $\frac{1}{4\pi}\cdot 9\cdot 10^{11}$ Ohm beträgt und das im Vakuum destillierte Wasser nach Kohlrausch $4\cdot 10^{10}$mal schlechter leitet als das Quecksilber, so hat es in unserem Maßsystem die Leitfähigkeit 18000 sec^{-1}. Das im Vakuum destillierte Wasser verhält sich schon fast wie ein Nichtleiter und doch ist seine Leitfähigkeit 2000mal größer als die stärksten fingierten Leitfähigkeiten $[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon$ meiner Theorie in heftig deformierter Luft oder Flüssigkeit. Nun wird im allgemeinen noch ein großer Teil des Deformationsstromes divergenzfrei verlaufen. Der restliche Teil des Deformationsstromes kann aber jedenfalls nur sehr langsame Ladungen oder Entladungen bewirken. Es kann vielen festen Medien eine echte Ohm'sche Leitfähigkeit γ_0, welche von gleicher Größenordnung (also 10^{11}mal kleiner als die des Quecksilbers) ist, Gasen und Flüssigkeiten eine konvektive Leitung zugeschrieben werden, um ein übermäßiges Anwachsen der durch den Deformationsstrom bewirkten Ladungen auszuschließen.

Dieselbe Überlegung muß auch bezüglich der Änderungen der magnetischen Ladungen div $\mu\cdot\mathfrak{m}$, welche die Deformationsströme $-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\mu\cdot\mathfrak{m}$ meiner Theorie im magnetischen Felde bewirken, angestellt werden. Auch diese sind von derselben kleinen Größenordnung und auch hier reicht es aus, eine magnetische Leitfähigkeit ξ_0 der festen Medien anzunehmen, welche 10000mal kleiner ist als die elektrische Leitfähigkeit des Kohlrausch'schen, im Vakuum destillierten Wassers, um jede Anhäufung magnetischer Ladungen auszuschließen.

Jedenfalls schreibe ich dem Eisen eine solche, vielleicht sogar viel größere echte magnetische Leitfähigkeit ξ_0 mit einiger Bestimmtheit zu. In magnetostatischer Hinsicht bringt dies

keine Schwierigkeiten mit sich, wenn man nur annimmt, daß in einem durch Eisen geschlossenen Stromkreis eines permanenten Magneten die gesamte magnetomotorische Kraft Null ist, wenn der ganze Kreis gleiche Temperatur hat, gerade so wie die elektromotorische Kraft in einem aus gleichtemperierten Leitern erster Ordnung gebildeten Kreise gleich Null angenommen werden muß.

Es gilt ferner nach meiner Theorie mit Exaktheit der Satz: Die gesamte Ladung eines nichtleitenden Mediums, das von einer Fläche umschlossen wird, für welche das Flächenintegral des Deformationsstromes Null ist, bleibt erhalten.

Es trifft dies zu, wenn in dieser Grenzfläche z. B. überall keine Deformation stattfindet oder überall in dieser Fläche der Feldvektor Null ist.

Beides gilt für die Grenzschale jedes Vorganges, so daß im ganzen durch jeden Vorgang gleich viel positive und negative Ladung produziert wird.

Werden geladene Konduktoren im elektrostatischen Felde bewegt, so dürfen sie sich bekanntlich nicht zu nahe kommen, wenn ihre Ladungen erhalten bleiben sollen. Dann kann man um jeden derselben in größerer Entfernung eine Fläche schließen, in welcher alle Deformationen so klein sind, daß innerhalb dieser Fläche, also in der Umgebung des Konduktors, die gesamte Ladung erhalten bleibt. Bei elektrostatischen Experimenten mit isolierten Konduktoren bleibt allerdings, der mangelhaften Isolation wegen, die Ladung derselben nie mit solcher Genauigkeit erhalten, als aus meiner Theorie folgt.

Bei diesen langsamen Bewegungen von Konduktoren, welche weit voneinander in einem Dielektrikum eingebettet sind, das in größerer Entfernung von den Konduktoren wenig deformiert wird, bleibt also die Ladung der Konduktoren (und der unmittelbaren Umgebung derselben) erhalten und treten außer in der unmittelbaren Umgebung der Konduktoren nirgends im Dielektrikum Ladungen auf. Deshalb sind die Potentiale der Konduktoren als lineare Funktionen der Ladungen durch die für jede Lage derselben berechenbaren Kapazitätskoeffizienten bestimmt und es folgen also aus meiner Theorie dieselben

Veränderungen des elektrischen Feldes als Folge der Bewegung der Konduktoren wie aus der Maxwell'schen Theorie.

Während aber die ponderomotorischen elektrostatischen Wirkungen nach meiner Theorie mit höchster Präzision den Maxwell'schen Wert haben, gelten jene Sätze der Elektrostatik, welche die Erhaltung der Ladungen voraussetzen, nach meiner Theorie nur mit hinreichender Annäherung, und dies scheint mir den tatsächlich zu beobachtenden Erscheinungen wohl zu entsprechen. Es ist damit der Widerspruch beseitigt, daß man in der Theorie der elektrischen Vorgänge in Nichtleitern stets mit unerschaffbaren Ladungen gerechnet hat und wenn es zu den Experimenten kommt, diese Ladungen sofort aus ungeladenen Körpern gewinnt. Der Versuch, die Reibungselektrisierung als einen nicht lediglich elektrischen Vorgang zu erklären, um diesen Widerspruch weniger fühlbar zu machen, hat wenig Wert, da es sich um einen sehr wichtigen und ausgiebigen elektrischen Vorgang, ja um den Grundversuch der Elektrizitätslehre und um eine prinzipielle Frage handelt.

Zweiter Teil.

I. Die Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern.

Wir haben im obigen die beiden Grundgleichungen

$$[\varepsilon]\cdot\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e}+(\gamma_0-[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon)\cdot\mathfrak{e}\overset{s}{=}c_0\operatorname{rot}\mathfrak{m}, \qquad A)$$

$$[\mu]\cdot\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m}+(\xi_0-[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\mu)\cdot\mathfrak{m}\overset{s}{=}-c_0\operatorname{rot}\mathfrak{e} \qquad B)$$

geprüft und nachgewiesen, daß dieselben die gewöhnlichen elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Medien ebenso gut wie die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen darstellen, außerdem aber die Aberration des Lichtes erklären und das Energieprinzip auch für Medien erfüllen, deren dielektrische und diamagnetische Dyade ε und μ nach beliebigem Gesetze variabel ist.

Der Lorentz'schen Theorie gegenüber hat meine Theorie den Vorzug der Natürlichkeit ihrer Grundvorstellungen. Nach meiner Theorie hat die Bewegung des Mediums nur insofern Einfluß auf die elektromagnetischen Vorgänge, als sie die Ursache der Deformation desselben ist. Die Wirkungen der Deformation im elektromagnetischen Felde hängen, wie wir noch sehen werden, außerdem mit den Wirkungen der Deformation im unelektrischen und unmagnetischen Felde (Kundt'sches Phänomen, Zähigkeit der Flüssigkeiten, Elastizität) zusammen. Meine Theorie erfüllt die Prinzipien der zwar alten, aber einigermaßen bewährten Mechanik, ist unabhängig von Korpuskularhypothesen, von der Annahme des Lichtäthers und erklärt das Michelson'sche Experiment, das die Lorentz'sche Theorie zu einer völlig absurden Zusatzannahme (Abhängigkeit der Form eines Körpers von seiner absoluten Geschwindigkeit und Unmöglichkeit ausreichend richtiger Längenmessungen) genötigt hat.

Die Lorentz'sche Theorie ist nicht fortschrittlich, sondern reaktionär. Sie hat die barbarischen Vorstellungen der Emissionstheorie der Strahlen von neuem erweckt. Meine Theorie achtet hingegen die Undulationstheorie des Lichtes als eine wesentliche Grundlage der ganzen heutigen Physik, insbesondere der ganzen Elektrizitätslehre und der ganzen Elastizitätslehre. Deshalb betrachte ich es als den größten Vorzug meiner Theorie, daß sie die Undulationstheorie der Kathodenstrahlen, die Theorie der elektrischen Doppelbrechung und der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes umfaßt.

Diese Strahlungserscheinungen in starken elektromagnetischen Feldern werden dargestellt durch die Gleichungen:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + a_4(\varepsilon - \varepsilon_0) \overset{9}{=} a\nabla, \mathfrak{e}, \qquad 4)$$

$$\frac{d\mu}{dt} + b_4(\mu - \mu_0) \overset{9}{=} b\nabla, \mathfrak{c} \qquad 5)$$

des eingangs angeführten Gleichungssystems. Da die Erscheinungen aber nur in ruhenden Medien beobachtet wurden,

gestatte ich mir, die Deduktionen aus diesen zwei Gleichungen einer späteren Mitteilung vorzubehalten. Die Gleichungen 4) und 5) haben sich bewährt für undeformierte Medien, eine Verallgemeinerung derselben für beliebig bewegte Medien wird sogleich weiter unten angegeben werden.

Nun wäre noch zu prüfen, ob der gesamte Einfluß starker Inhomogenität des Mediums dadurch schon hinreichend berücksichtigt ist, daß in 4) und 5) die materiellen Fluxionen der Variablen ε und μ eingesetzt wurden, oder ob ein spezifischer Einfluß der starken Eigenschaftsgefälle in scharfen Grenzflächen zwischen zwei Medien zu konstatieren ist. Dies ließe sich durch Beobachtung der Grenzbedingungen, welche bei der Brechung des Lichtes an der Grenzfläche verschiedener, verschieden bewegter Medien erfüllt sind, am sichersten entscheiden. Solche Beobachtungen liegen aber nicht vor.

Hingegen haben sich die Gleichungen 4) und 5) für die Optik eines rasch gegen die Lichtquelle bewegten und nahezu homogenen Mediums bewährt, wie sogleich gezeigt werden soll.

II. Der Fizeau'sche Versuch.

Der Gangunterschied der Lichtstrahlen, welche in der Richtung der Wasserströmung, beziehungsweise in entgegengesetzter Richtung fortschreiten, ist eine ganz wesentlich von der Aberration verschiedene Erscheinung, da bei dem Fizeauschen Versuche die Wasserströmung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Wellennormalen, also auf den elektromagnetischen Vorgang selbst, Einfluß hat, während bei der Aberration nur die Strahlrichtung, also nur eine Grenzbedingung an den Strahloberflächen geändert erscheint.

Da die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Wassers, wenn man dieses als homogenes Medium ansehen darf, nach den elektromagnetischen Grundgleichungen *A)* und *B)* keinen Einfluß hat, handelt es sich um Einflüsse der Inhomogenität oder der Deformation des strömenden Wassers. Doch müssen die raschen Deformationen, welche das Wasser während des Durchströmens durch die durchleuchteten Röhren erfährt, ohne Einfluß auf

den Gangunterschied der Strahlen sein, weil ein solcher Einfluß nur durch eine Wirkung hervorgebracht werden kann, welche der ersten Potenz der Strömungsgeschwindigkeiten proportional ist, während die rasche Streckung des in der Röhrenachse durch ein großes Druckgefälle strömenden Wassers der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Es handelt sich also um einen Einfluß der Deformation des Wassers an der Eintrittstelle desselben und des Lichtes, also um einen Vorgang an der Grenzfläche zweier verschieden bewegter Medien, und zwar um eine Veränderung, welche das Licht oder das Wasser in der Eintrittstelle erfährt, aber in der ganzen Röhrenlänge beibehält, da der beobachtete Gangunterschied den Röhrenlängen proportional ist.

Welchen abnormalen Wert nun aber auch der dielektrische Koeffizient ε des Wassers in der beleuchteten Eintrittstelle annehmen mag, jedenfalls ist in der ganzen Röhrenlänge

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0.$$

Da nach der Euler'schen Regel für rot $\mathfrak{v} \overset{\mathfrak{a}}{=} 0$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \overset{\mathfrak{a}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \varepsilon,$$

so gilt in der ganzen Achse der Röhre

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \overset{\mathfrak{a}}{=} -\mathfrak{v} \cdot \nabla ; \varepsilon. \tag{59}$$

Dies kann unmöglich bestritten werden. Setzen wir aber die selbstverständliche Gleichung 59) in die Gleichung 4') ein, so ergibt sich:

$$a_4 (\varepsilon - \varepsilon_0) \overset{\mathfrak{a}}{=} a \nabla, \mathfrak{e}, \tag{60}$$

d. h. wenn in einer strömenden Flüssigkeit die materielle Fluxion von ε gleich Null ist, dieselbe also während des Durchströmens keine Veränderung erfährt, dann kann, wenn ein ungleichförmiges elektrisches Feld in derselben vorhanden ist, ε nicht den normalen Wert haben.

In einem Lichtstrahl ist $\nabla, \mathfrak{e} \neq 0$, also ist nach 60) auch $(\varepsilon - \varepsilon_0) \neq 0$. Es ist unmöglich, daß in einem bewegten und durchleuchteten Medium ε an den Stellen der Lichtwelle, wo $\mathfrak{s}$ gleich Null, also $\nabla, \mathfrak{e}$ im positiven, beziehungsweise nach einer halben Wellenlänge negativen Sinne von Null verschieden ist, den normalen Wert ε_0 hat.

Setzen wir ferner 59) in die elektromagnetischen Grundgleichungen *A)* und *B)* ein, so ergibt sich:

$$[\varepsilon] \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\mathfrak{v} \cdot \nabla ; \varepsilon) \cdot \mathfrak{e} \overset{\mathfrak{s}}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \tag{61}$$

$$[\mu] \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mu) \cdot \mathfrak{m} \overset{\mathfrak{s}}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \tag{62}$$

Man erkennt, daß das zweite Glied dieser Grundgleichungen nicht nur, wie oben ausgeführt, für das Energieprinzip in Medien, in welchen ε variabel ist, unentbehrlich, sondern auch für die Optik bewegter Medien von Wichtigkeit ist.

Die Gleichungen 61) und 62) sind leicht für unseren Fall zu integrieren und es zeigt sich, daß das erwähnte zweite Glied dieser Gleichungen einen Einfluß der ersten Potenz der Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf die Lichtgeschwindigkeit bewirkt, womit das Fizeau'sche Experiment erklärt ist.

Der quantitative Ausfall desselben liefert nur ein Bestimmungsstück für die vier Konstanten a_1, a_2, a_3, a_4.

III. Verallgemeinerung der Gleichungen für die Fluxion der dielektrischen und diamagnetischen Dyade.

In der ersten Mitteilung wurden die elektromagnetischen Grundgleichungen für ein bewegtes Medium in folgender Weise gewonnen: Die Maxwell-Heaviside'schen Gleichungen für ein ruhendes Medium wurden mit Rücksicht auf das Energieprinzip durch Hinzufügung des mehrerwähnten zweiten Gliedes in die Form:

$$[\varepsilon] \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \mathfrak{e} \overset{\mathfrak{s}}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m},$$

$$[\mu] \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \mathfrak{m} \overset{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}$$

gebracht.

Die Gleichung 3) ergibt für ein ruhendes Medium:

$$\varphi^{-1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} \overset{9}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \tag{63}$$

Da nun σ eine physikalisch wichtige, mit der Energieänderung in nahem Zusammenhange stehende Variable ist (vergl. die erste Mitteilung, p. 1649), während ε nur eine Materialkonstante ist, ging ich von den elektromagnetischen Gleichungen für ruhende Medien in der Weise zu den für bewegte Medien geltenden Grundgleichungen:

$$[\varepsilon] \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{1}{2} \varphi^{-1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} \overset{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \tag{1}$$

$$[\mu] \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \frac{1}{2} \psi^{-1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \overset{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e} \tag{2}$$

über, daß ich aus 63) statt $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ die wichtigere Fluxion $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ in dieselben einführte (vergl. a. a. O., p. 1650), was vollen Erfolg hatte. Doch habe ich vergessen, dieselbe Änderung auch an den Gleichungen 4) und 5) vorzunehmen, welche ja auch die Fluxionen $\frac{d\varepsilon}{dt}$, beziehungsweise $\frac{d\mu}{dt}$ enthalten und also nur für ruhende Medien, für welche ich sie allerdings bis dahin ausschließlich geprüft hatte, gelten.

Wir holen dies nun nach, indem wir nach 63) statt $\frac{d\varepsilon}{dt}$ die wichtigere Fluxion $\frac{d\sigma}{dt}$ in die Gleichung 4) und 5) einführen, wodurch sich statt dieser eingangs angegebenen die allgemein gültigen Gleichungen 64) und 65) ergeben:

$$\varphi^{-1} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + a_4(\varepsilon - \varepsilon_0) \overset{9}{=} a \nabla, \mathfrak{e}, \tag{64}$$

$$\psi^{-1} \cdot \frac{d\tau}{dt} + b_4(\mu - \mu_0) \overset{9}{=} b \nabla, \mathfrak{e}. \tag{65}$$

Im folgenden werden wir aber der Einfachheit wegen die lokalen Fluxionen von σ und τ an die Stelle der materiellen Fluxionen setzen, wir verzichten also auf die Betrachtung scharfer Grenzflächen zwischen zwei Medien und von Medien, welche sich rasch in der Richtung einer Inhomogenität bewegen.

Aus Gleichung 3) folgt hingegen unter Zuziehung von 6)

$$\sigma \stackrel{\mathfrak{g}}{=} \varphi \cdot \varepsilon, \tag{3)}$$

$$\varphi^{-1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} \stackrel{\mathfrak{g}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (m \nabla, \mathfrak{v}) \cdot \varepsilon. \tag{66)}$$

Zunächst erkennt man, daß $\varphi^{-1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ in sämtlichen drei elektrischen Grundgleichungen vorkommt und also eine ungemein wichtige physikalische Variable darstellen muß, über deren Bedeutung wir weiter unten noch einigen Aufschluß erhalten werden. Eliminieren wir aber zunächst diese unbekannte Variable, so erhalten wir außer den bereits eingehend diskutierten elektromagnetischen Grundgleichungen *A)* und *B)* noch eine dritte für die Variable ε, beziehungsweise bei analogem Vorgehen eine vierte Gleichung für die Variable μ, und zwar:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - (m \nabla, \mathfrak{v}) \cdot \varepsilon \stackrel{\mathfrak{g}}{=} - a_4 (\varepsilon - \varepsilon_0) + a \nabla, \mathfrak{e}, \tag{C)}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - (n \nabla, \mathfrak{v}) \cdot \mu \stackrel{\mathfrak{g}}{=} - b_4 (\mu - \mu_0) + b \nabla, \mathfrak{e}. \tag{D)}$$

Die Gleichung *D)* hat aus einem besonderen Grunde keine größere Bedeutung als Gleichung 5). Aus der Tatsache, daß die meisten Medien die magnetische Drehung der Polarisationsebene zeigen, folgt, wie dies in einer späteren Mitteilung ausgeführt werden soll, daß die Konstanten $b_1 b_2 b_3 b_4$ sehr große Werte haben, so daß die linke Seite von *D)* verschwindet. Um so wichtiger ist aber Gleichung *C)*, da die Konstanten $a_1 a_2 a_3 a_4$ oft kleine Werte haben, ja für die gewöhnlichen Medien mit Annäherung gleich Null gesetzt werden können, so daß einerseits von der Fluxion der Variablen σ abgesehen werden kann, andrerseits die geringste Veränderung dieser

Variablen mit großen Abweichungen der elektromagnetischen Werte $\mathfrak{s}$ und $\nabla, \mathfrak{e}$ von den statischen Werten verbunden ist. Die Folgerungen aus Gleichung *C)*, in welcher nur die elektrischen Variablen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{e}$, sowie die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ vorkommen, müssen deshalb charakteristischen, rein elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Medien entsprechen, welche wir nun zunächst betrachten wollen.

IV. Die Doppelbrechung ruhender deformierter Medien.

Wir betrachten zunächst gewöhnliche Medien, deren sämtliche vier Konstanten $a_1 a_2 a_3 a_4$ mit hinreichender Annäherung gleich Null gesetzt werden dürfen. Dann ist nach *C)*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (m \nabla, \mathfrak{v}) \cdot \varepsilon \overset{2}{=} 0.$$

Das Medium erfahre nur kleine Verschiebungen $\mathfrak{u}$ seiner Punkte aus der Ruhelage. Da mit Genauigkeit

$$\mathfrak{v} \cdot (I - \nabla ; \mathfrak{u}) \overset{3}{=} \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}, \tag{67}$$

so gilt für kleine Deformationen $[\nabla ; \mathfrak{u}]$ mit hinreichender Annäherung

$$\mathfrak{v} \overset{3}{=} \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}$$

und

$$m \nabla, \mathfrak{v} = \frac{\partial}{\partial t} (m \nabla, \mathfrak{u}).$$

Damit können wir Gleichung 65) integrieren und erhalten:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 \overset{2}{=} -m \nabla, \mathfrak{u} \cdot \varepsilon_0 . \tag{68}$$

Das Medium hat also im deformierten Zustande nicht den normalen Wert seiner dielektrischen Dyade, sondern einen abnormalen dyadischen Wert, auch dann, wenn es im Ruhezustand isotrop sein sollte. Dann fallen die Hauptrichtungen der Dyade ε mit jenen der Deformation $[\nabla ; \mathfrak{u}]$ zusammen. Das deformierte Medium muß also das optische Verhalten eines Kristalles zeigen, und zwar müssen die optischen Haupt-

richtungen mit den Hauptrichtungen der Deformation zusammenfallen. Die Stärke dieser Doppelbrechung und ihr Vorzeichen ist das weitaus beste Mittel, um den Wert der Konstanten $m_1 m_2 m_3$ der allgemeinen derivierten Dyade in festen Stoffen zu bestimmen. Gase und Flüssigkeiten lassen sich ihrer leichter Beweglichkeit halber nicht auf die Doppelbrechung jedes einzelnen schwach deformierten Teiles derselben untersuchen, man erkennt also nur eine Veränderung des Skalars der Dyade $\mathfrak{s}$, d. h. der Größe des dielektrischen Koeffizienten derselben, welche nach Boltzmann insbesondere bei Volumsänderungen eintritt. Hieraus kann man nichts über die Werte $m_1 m_2 m_3$ schließen und wir haben diese deshalb in Kapitel I des ersten Teiles aus anderen Gesichtspunkten bestimmen müssen.

Für feste Stoffe und Gallerten, deren bald positive, bald negative Doppelbrechung im deformierten Zustande Mach konstatiert hat, ist nicht der geringste Grund abzusehen, warum die Konstanten $m_1 m_2 m_3$ denselben Wert haben sollten, wie in Flüssigkeiten und Gasen. Man kann keine einzige elektromagnetische Wirkung der Deformation fester Medien direkt beobachten, als die Doppelbrechung und die Piëzoelektrizität, welche beide so verschiedene Werte in verschiedenen Medien haben, daß sie von Materialkonstanten abhängen müssen. Die Doppelbrechung hängt aber nach 68) ausschließlich von den Konstanten $m_1 m_2 m_3$ ab, also sind diese stets als Materialkonstante aufzufassen. Daß die gewöhnlichen elektromagnetischen Wirkungen in Flüssigkeiten und Gasen auf universelle Werte $m_1 m_2 m_3$ führen, muß also ebenfalls als nur angenähert richtig angesehen werden und dürfte durch genauere Beobachtungen vielleicht noch ganz beträchtliche Korrektion erfahren.

An der Festsetzung, daß $m \nabla, \mathfrak{v}$ eine symmetrische Dyade ist, muß allerdings auch für feste Medien unbedingt festgehalten werden; also ist:

$$m_1 = m_2$$

auch an der Bedingung

$$m_3 = 0,$$

welche nach Kapitel I unmittelbar aus dem Energieprinzip folgt, muß festgehalten werden. Aber der Wert $\mathfrak{m}_1$ ist für feste Stoffe noch vollständig frei verfügbar. Das Gesetz der Doppelbrechung deformierter fester Medien lautet also:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \mathfrak{m}_1 [\nabla, \mathfrak{u}] \cdot \varepsilon_0, \tag{69}$$

worin $\mathfrak{m}_1$ eine Materialkonstante ist, die in manchen Medien positiven, in anderen negativen Wert hat und aus den Messungen Mach's leicht berechnet werden kann.

Es bestätigt sich hier wieder, daß die Optik weitaus die beste Grundlage der Elektrizitätslehre ist.

V. Die Piëzoelektrizität.

Meine Theorie sieht die Deformation des Mediums als alleinige Ursache aller beobachteten Wirkungen der Bewegung im elektromagnetischen Feld an, auch in jenen wichtigen Fällen, wie z. B. bei der Faraday'schen Induktion, wo diese Auffassung durchaus neu ist. Um so mehr muß man erwarten, daß auch jene Erscheinungen, bei welchen der Einfluß der Deformation auf elektrische Vorgänge unverkennbar ist, von meiner Theorie einfach erklärt werden. Es sind dies besonders das Kundt'sche Phänomen, die Reibungselektrizität und die Piëzoelektrizität.

Im statischen Zustand ist $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ und also nach Gleichung 4):

$$0 \stackrel{\circ}{=} -a_4 (\varepsilon - \varepsilon_0) + a \nabla, \mathfrak{e}. \tag{70}$$

Wir haben im vorigen Kapitel ein gewöhnliches Medium betrachtet, dessen sämtliche vier Konstanten $a_1 a_2 a_3 a_4$ sehr kleine Werte haben, und wir setzen die Deduktionen für dieses Medium hier fort. Da die Grundgleichung 4) jedenfalls so weit exakt gilt, daß nicht etwa kleine additive Zusatzglieder unterdrückt sind, sondern daß sie höchstens in der Form des Gliedes $a \nabla, \mathfrak{e}$ (welches wohl auch $a \nabla (\varepsilon \cdot \mathfrak{e})$ oder $(a \nabla, \mathfrak{e}) \cdot \varepsilon$ lauten könnte) einer Verbesserung fähig ist, so muß die Gleichung 70) trotz der Kleinheit der Konstanten a ganz exakt erfüllt sein, denn es kommen in derselben nur die Verhältnisse der Konstanten $a_1 a_2 a_3 a_4$ vor und diese haben bestimmte, große Werte.

Setzen wir den Wert $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ aus 69) ein, d. h. berücksichtigen wir, daß nur ein deformiertes Medium eine abnormale Doppelbrechung haben kann (wenn die Konstanten a klein sind), so ergibt sich:

$$a_4 m_1 [\nabla, \mathfrak{u}] \cdot \varepsilon_0 \stackrel{9}{=} a \nabla, \mathfrak{e}. \qquad 71)$$

In einem deformierten Medium müßte also ein ungleichförmiges elektrisches Feld vorhanden sein, dessen derivierte Dyade $\nabla, \mathfrak{e}$ sich sogar direkt durch die Deformation $[\nabla, \mathfrak{u}]$ bestimmt. Wenn aber nur überhaupt ein elektrisches Feld auftritt, so muß auch ein Deformationsstrom $[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e}$ auftreten, welcher die piëzoelektrischen Ladungen, welche während der Deformation auftreten, bewirkt.

VI. Das Kundt'sche Phänomen.

Wir betrachten nun eine stationär strömende Flüssigkeit, in welcher also $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$. Dann folgt aus der Gleichung *C)*, da für Flüssigkeiten $m_1 = -2$ ist:

$$2[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \stackrel{9}{=} -a_4(\varepsilon - \varepsilon_0) + a \nabla, \mathfrak{e}. \qquad 72)$$

Je nach dem Verhältnisse der Konstanten $a_1 a_2 a_3$ zu der Konstanten a_4 treten also in einer stationär strömenden Flüssigkeit zwei verschiedene elektrische Wirkungen in verschiedener Stärke auf.

Sind sämtliche Konstanten $a_1 a_2 a_3$ nur kleine Bruchteile der Konstanten a_4, so nimmt Gleichung 72) die Form an:

$$2[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon = -a_4(\varepsilon - \varepsilon_0). \qquad 73)$$

Diese Gleichung spricht das Gesetz der Kundt'schen Doppelbrechung aus: In einer stationär strömenden und dabei die rasche Deformation $[\nabla, \mathfrak{v}]$ erfahrenden Flüssigkeit zeigt ε einen abnormalen dyadischen Wert, die deformierte Flüssigkeit zeigt also die optischen Eigenschaften eines Kristalles, dessen Hauptrichtungen den Hauptrichtungen der Deformationsdyade $[\nabla, \mathfrak{v}]$ gleich sind.

In einer Schiebungsschicht, wie sie zwischen zwei parallelen, mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit um eine

gemeinsame, zu ihnen senkrechte Achse rotierenden Platten, oder wie sie zwischen zwei konaxialen, mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit rotierenden Zylindern vorhanden ist, hat eine Flüssigkeit die Deformationsdyade [vergl. Gleichung 48)]:

$$[\nabla, \mathfrak{v}] \doteq \left[\mathfrak{v}, \frac{1}{\mathfrak{n}}\right]. \qquad 74)$$

Hierin ist $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeitsdifferenz gegenüberliegender Punkte der starren Grenzflächen, $\mathfrak{n}$ deren Distanz, also der vektorische Wert der Dicke der Schiebungsschicht. Die Hauptrichtungen dieser Deformationsdyade liegen bekanntlich senkrecht zu $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{n}$, beziehungsweise in der Ebene der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{n}$, so daß sie den Winkel dieser Vektoren halbieren. Tatsächlich liegen die optischen Hauptrichtungen bei dem Kundt'schen Versuche 45gradig gegen Radius und Peripherie der zylindrischen Schiebungsschicht.

Die Kundt'sche Doppelbrechung ist nach 74) desto stärker, je kleiner a_4 ist, immer vorausgesetzt, daß die Konstanten $a_1 a_2 a_3$ gegen a_4 verschwinden.

VII. Die Reibungselektrisierung.

Im allgemeinen werden die Konstanten a_2 und a_3 aber gegen die Konstante a_4 nicht zu vernachlässigen sein, nur die Konstante a_1 dürfte stets sehr klein sein, wie aus dem hier nicht zu besprechenden Charakter der Strahlungserscheinungen in starken elektromagnetischen Feldern hervorgeht.

Es darf also das Glied $a \nabla, \mathfrak{e}$ in Gleichung 72) nicht völlig vernachlässigt werden und somit ergibt sich, daß in einer stationär strömenden, rasch deformierten Flüssigkeit stets ein elektrisches Feld vorhanden sein muß, dessen derivierte Dyade durch Gleichung 72) mitbestimmt ist. Es hängt dies mit der Reibungselektrisierung ohne Zweifel zusammen, bildet aber an sich keine Erklärung derselben.

Es ist ein charakteristischer Vorzug meiner Theorie, daß nach derselben durch jede Deformation des Mediums im elektrischen Felde Ladungen auftreten müssen, als direkte Folge der elektromagnetischen Grundgleichungen *A)* und *B)* dieser Theorie (vergl. Kapitel XII des ersten Teiles). Der Deformations-

strom $-[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e}$ ist nicht notwendig divergenzfrei verteilt, zufolgedessen ist auch der Maxwell'sche Verschiebungsstrom $[\varepsilon] \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}$ (in nichtleitenden Medien $\gamma_0 = 0$) nicht notwendig divergenzfrei und es ist also im allgemeinen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} [\varepsilon] \mathfrak{e} \neq 0,$$

d. h. es tritt im allgemeinen überall Reibungselektrisierung auf.

Jedoch sind die so bewirkten Ladungen meist unmerklich schwach und werden durch die geringste Leitfähigkeit γ_0 des Mediums ausgeglichen.

Stärkere Reibungselektrisierung könnte man nur erwarten in Schiebungsschichten, welche eine rasche Deformation erfahren. Aber der in solchen Schiebungsschichten fließende Deformationsstrom ist im allgemeinen kein anderer als der Rowland'sche Strom und dieser hat, wie sogleich gezeigt werden soll, keine ladende Wirkung und auch keine Wärmewirkung.

Die Deformationsdyade in der Schiebungsschicht ist durch 74) angegeben; der Deformationsstrom in derselben hat also den Wert:

$$-[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{e}} \stackrel{3}{=} \varepsilon \cdot \mathfrak{v} \left(\frac{1}{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{e} \right) + \varepsilon \cdot \frac{1}{\mathfrak{n}} (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{e}). \qquad 75)$$

Wenn ein gleichförmiges elektrisches Feld in der Schiebungsschicht vorhanden ist, was allerdings nach den eingangs dieses Kapitels angeführten Ursachen nie genau, stets aber mit Annäherung der Fall sein wird, so ist auch der Deformationsstrom in der Schiebungsschicht gleichförmig, er geht nach 75) im allgemeinen schief von einer Platte zur anderen und diese müßten sich also, da der Vorgang stationär ist, bald beträchtlich laden.

Dies erklärt aber die Reibungselektrisierung nicht. Denn in einer so dünnen, von starren, entweder etwas leitfähigen oder bald gleichförmig elektrisierten Platten begrenzten Schicht

geht der Feldvektor $\mathfrak{e}$ stets **senkrecht** zwischen den Platten über, es ist:

$$\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{e} = 0$$

und also hat nach 75) der Deformationsstrom den Wert

$$-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e} \stackrel{3}{=} \varepsilon\cdot\mathfrak{v}\left(\frac{1}{\mathfrak{n}}\cdot\mathfrak{e}\right),$$

steht also auf dem Feldvektor $\mathfrak{e}$ senkrecht, weshalb auch die elektromagnetische Deformationswärme dieses (Rowland'schen) Stromes gleich Null ist (vergl. Kapitel III des ersten Teiles).

Da also der Deformationsstrom die Grenzplatten nicht verbindet, sondern zu denselben parallel verläuft, bewirkt er keine Ladung dieser Platten.

Ferner ist aber dieser Deformationsstrom der **ersten** Potenz der Deformationsdyade proportional, bei Umkehrung aller Geschwindigkeiten müßte sich auch das Vorzeichen aller etwa noch bewirkten kleinen Ladungen umkehren, was ganz entschieden dem Charakter der eigentlichen Reibungselektrisierung nicht entspricht.

In einer solchen stark deformierten Schicht tritt aber oft das Kundt'sche Phänomen ein, welches nach meiner Theorie auf einer Veränderung der dielektrischen Dyade ε des Mediums zufolge der Deformation nach Gleichung 73) beruht.

Es ist also mit hinreichender Annäherung:

$$\varepsilon \stackrel{2}{=} \varepsilon_0 - 2\frac{\varepsilon_0}{a_4}[\nabla, \dot{\mathfrak{v}}]. \qquad 76)$$

Die fingierte Leitfähigkeit (siehe Kapitel III des ersten Teiles) hat den Wert:

$$-[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon = -[\nabla, \mathfrak{v}]\cdot\varepsilon_0 + 2\frac{\varepsilon_0}{a_4}[\nabla, \mathfrak{v}]^2.$$

Zufolge dieser durch Multiplikation beider Deformationswirkungen geänderten Leitfähigkeit hat der Deformationsstrom nun eine weitere Komponente vom Werte:

$$2\frac{\varepsilon_0}{a_4}[\nabla, \mathfrak{v}]^2\cdot\mathfrak{e} = \frac{2}{\mathfrak{c}^2}\frac{\varepsilon_0}{a_4}\mathfrak{v}^2(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e})\frac{1}{\mathfrak{n}}. \qquad 77)$$

Dieser Strom geht senkrecht zwischen den Platten über und bewirkt eine entgegengesetzte Ladung derselben. Ferner ist dieser Deformationsstrom durch das Quadrat der Deformationsdyade bestimmt, bewahrt also bei Umkehrung aller Geschwindigkeiten sein Vorzeichen.

Hiemit ist die Reibungselektrisierung erklärt und gezeigt, daß dieselbe eng mit dem Kundt'schen Phänomen zusammenhängt. Es kommt sehr auf die spezifische Konstante a_4 des deformierten Mediums an, also auch auf die Natur der sich reibenden Platten, da auch die Gleitschichten in unmittelbarer Nähe der Plattenoberflächen in hohem Grade an der Schiebung beteiligt sind.

Wenn a_4 positiv ist, so hat die Komponente 77) des Deformationsstromes dieselbe Richtung, wie der Feldvektor $\mathfrak{e}$ und löscht also ein etwa vorhandenes elektrisches Feld aus, worauf keine weitere Elektrisierung eintritt.

Wenn aber a_4 negativ ist, so verstärkt der Deformationsstrom unausgesetzt das anfangs (etwa zufolge der eingangs dieses Kapitels erwähnten Wirkung) vorhandene Feld und es tritt unbegrenzte Entwicklung von Reibungselektrisierung ein.

Eine analoge Reibungsmagnetisierung kann nicht eintreten, weil nach Kapitel III des zweites Teiles die Konstante b_4 einen sehr hohen Wert hat und alle angeführten Wirkungen dieser Konstanten verkehrt proportional sein müssen.

VIII. Beziehung zur Elastizitätstheorie.

Alle im obigen mitgeteilten Folgerungen wurden aus den drei Grundgleichungen:

$$[\varepsilon]\cdot\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e}-[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}+\gamma_0\cdot\mathfrak{e}\overset{3}{=}c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}, \qquad A)$$

$$[\mu]\cdot\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m}-[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\mu\cdot\mathfrak{m}+\xi_0\cdot\mathfrak{m}\overset{3}{=}-c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{e}, \qquad B)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+m_1[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon\overset{9}{=}-a_4(\varepsilon-\varepsilon_0)+a\nabla,\mathfrak{e} \qquad C)$$

gewonnen, welche also meine Theorie, soweit rein elektromagnetische Vorgänge in Betracht kommen, vollständig darstellen. Daneben behält aber das vollständige Gleichungssystem 1) bis 7), aus welchem die Gleichungen *A)*, *B)*, *C)* durch Elimination der Hülfsvariablen σ, τ, φ und ψ gewonnen wurden, seinen grundlegenden Charakter und heuristischen Wert. So wie die Theoretiker älterer Art im Verfolg ihrer Theorien Korpuskeln merkwürdigster Art entdeckt zu haben glauben und den heuristischen Wert dieser Vermutungen betonen, so haben sich nach meiner Methode Hinweise auf eine neue physikalische Variable σ ergeben, welche in dreifacher Hinsicht nach Gleichung 1), 3) und 64) direkten Einfluß auf elektrische Vorgänge hat und deren selbständige physikalische Bedeutung zu entdecken man nun immerhin hoffen kann. Direkt läßt sich dieser steile Weg des Fortschrittes allerdings nicht in Angriff nehmen.

Die Bedeutung der vier Variablen σ, τ, φ, ψ für ein festes elastisches Medium läßt sich aber leicht angeben, wenn das Medium nur kleine Deformationen $[\nabla, \mathfrak{u}]$ erfährt, worin $\mathfrak{u}$ die Verschiebung seiner Punkte aus ihrer Ruhelage bedeutet. Die Gleichung 6) hat die Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \overset{\circ}{=} m_1 \varphi \cdot [\nabla, \mathfrak{v}]. \qquad 78)$$

Da mit hinreichender Annäherung

$$[\nabla, \mathfrak{v}] \overset{\circ}{=} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla, \mathfrak{u}],$$

so folgt

$$\varphi \overset{\circ}{=} \varphi_0 + m_1 \varphi_0 \cdot [\nabla, \mathfrak{u}]. \qquad 79)$$

Hierin kann die Integrationskonstante φ_0 als eine Materialkonstante des Mediums aufgefaßt werden und es ist also φ als ein bestimmter Deformationszustand des Mediums, d. h. als eine Funktion der Materialkonstanten und der Deformationsdyade, nun bekannt. Das gleiche gilt in diesem Fall auch für die Variable σ.

Wir setzen nun voraus, daß das Medium ein gewöhnliches, ohne elektromagnetische Besonderheiten sei, dessen vier Kon-

stanten $a_1 a_2 a_3 a_4$ also sämtlich verschwindend klein sind. Für ein solches festes Medium hat nun allerdings auch σ eine geringere Bedeutung, da diese Variable nach Gleichung 64) nun von höherer Ordnung als die Deformation $[\nabla, \mathfrak{u}]$ klein sein muß. Für dieses gewöhnliche Medium gilt Gleichung 68), dasselbe wird durch Deformation nur doppelbrechend und es ist:

$$\varepsilon \overset{2}{=} \varepsilon_0 - m_1 \varepsilon_0 [\nabla, \mathfrak{u}]. \tag{80}$$

Nach Gleichung 3) ist:

$$\sigma \overset{2}{=} \varphi \cdot \varepsilon.$$

Man erhält also durch Multiplikation von 79) und 80):

$$\sigma = \sigma_0 - m_1^2 \varepsilon_0 \varphi_0 \cdot [\nabla, \mathfrak{u}]^2. \tag{81}$$

Die Variable σ ist durch das Quadrat der Deformationsdyade $[\nabla, \mathfrak{u}]$ bestimmt. Der Skalar der Dyade σ ist eine lineare Funktion der potentiellen elastischen Energie des Mediums.

Bezeichne $d\sigma \overset{2}{=} \sigma - \sigma_0$ die Abweichung der Dyade σ von ihrem Ruhewert, so könnte der Skalar S der Dyade $-(\varphi_0^{-1} \cdot d\sigma)$ der potentiellen elastischen Energie geradezu gleich gesetzt werden:

$$S = -(\varphi_0^{-1} \cdot d\sigma)_S = + m_1^2 \varepsilon_0 [\nabla, \mathfrak{u}]_S^2,$$

falls $m_1^2 \varepsilon_0$ dem Elastizitätsmodul gleichgesetzt wird.

Nehmen wir als gegeben an, daß dieser Skalar eine Energieänderung darstellt und daß nur Änderungen der Bewegungsenergie zu erwarten sind, so folgen auch die elastischen Bewegungsgleichungen aus meiner Theorie. Es ist für ein inkompressibles Medium

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla, \mathfrak{u}]_S^2 = 2(\mathfrak{v}; \nabla) : [\nabla, \mathfrak{u}]$$

und also

$$\frac{\partial S}{\partial t} - 2 m_1^2 \varepsilon_0 (\mathfrak{v}; \nabla) : [\nabla, \mathfrak{u}] = 0.$$

Da dies die Energiegleichung dieser Bewegungswirkung ist, so folgt für die Spannungsdyade θ_1 derselben:

$$\theta_1 \overset{2}{=} 2 m_1^2 \varepsilon_0 [\nabla, \mathfrak{u}]$$

und dies ist die elastische Spannungsdyade. Die Elastizitätstheorie ist also nicht ohne Beziehungen zu meiner Theorie.

IX. Beziehung zur Elektrolyse und zum Peltiereffekt.

Daß ich alle Abweichungen, welche die elektromagnetischen Vorgänge in Medien von allgemeinem Verhalten und allgemeiner Bewegungsform von den einfachen Maxwell'schen Gleichungen für ruhende gewöhnliche Medien zeigen, auf chemische und Wärmewirkungen zurückzuführen bestrebt bin, geht aus meinen sämtlichen früheren theoretischen Arbeiten hervor und die thermochemische Bedeutung der Variablen σ bildet eine Grundlage der hier mitgeteilten Theorie (vergl. die erste Mitteilung, p. 1649).

Direkte Beziehung zu den elektrischen Vorgängen hat nur die Variable

$$\left(\varphi^{-1}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right),$$

welche in allen drei Grundgleichungen 1), 3) und 64) vorkommt. Diese Variable kann nicht als eine Eigenschaft oder ein Zustand des Mediums betrachtet werden, auch nicht als die Fluxion eines solchen, da sie nach einem Kreisprozeß im allgemeinen nicht auf den Anfangswert zurückkehren wird. Ihr Skalar

$$S = -\left(\varphi^{-1}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_S \qquad 82)$$

entspricht also keinesfalls der Fluxion einer potentiellen Energie, falls die Deformation eine fortschreitende ist, oder die Konstanten a nicht verschwinden. Doch dürfte dieser Skalar S der pro Zeit- und Volumseinheit abgegebenen Wärme und chemischen Energie entsprechen.

An früherem Orte[1] habe ich dargelegt, daß die Elektrolyse ganz allgemein in nichts anderem bestehen dürfte, als in dem Auftreten von Sauerstoff an der Anode und der gleich-

[1] Jaumann, Zur Theorie der Lösungen; diese Sitzungsber., Bd. CIX (1900); — Ann. der Phys., Bd. III, p. 603.

zeitigen Vernichtung der gleichen Menge Sauerstoff an der Kathode. Diese Wirkung sowohl, als der Peltiereffekt treten dort in Leitern auf, wo die elektrische Vektorverteilung eine Divergenz hat und sind der Stärke dieser Divergenz proportional, außerdem nur von Materialkonstanten abhängig.

Wenn das Medium in normalem Zustand erhalten wird, wie dies bei der Elektrolyse und beim Peltiereffekt der Fall ist, wenn die produzierte Wärme, beziehungsweise chemische Energie nach außen abgeleitet wird, so ist:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = 0$$

und es folgt aus Gleichung 64):

$$-S = (a_1 - 2a_2 + 3a_3)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{e}. \qquad 83)$$

Diese Gleichung läßt sich nach obigem als das Gesetz der Elektrolyse und des Peltiereffektes deuten.

X. Beziehung zur Wärmeproduktion in zähen Flüssigkeiten.

Endlich kommt die Variable $\varphi^{-1}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ auch in der durch Differentiation aus Gleichung 3) abgeleiteten Gleichung:

$$\varphi^{-1}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t} \overset{\mathfrak{g}}{=} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - 2[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon$$

vor. Betrachten wir eine zähe Flüssigkeit, welche in stationärer Bewegung begriffen ist und das Kundt'sche Phänomen zeigt. Es ist $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0$ und deshalb

$$\varphi^{-1}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t} \overset{\mathfrak{g}}{=} -2[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon;$$

ferner ist nach Gleichung 73):

$$\varepsilon \overset{\mathfrak{g}}{=} \varepsilon_0 - 2\frac{\varepsilon_0}{a_4}[\nabla,\mathfrak{v}],$$

also:

$$\varphi^{-1}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t} \overset{\mathfrak{g}}{=} -2[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon_0 + 4\frac{\varepsilon_0}{a_4}[\nabla,\mathfrak{v}]^2.$$

Nehmen wir den Skalar aller Dyaden dieser Gleichung. Für eine inkompressible Flüssigkeit verschwindet der Skalar der ersten Potenz der Deformationsdyade und wir erhalten:

$$-S = 4 \frac{\varepsilon_0}{a_4} [\nabla, \mathfrak{v}]^2_S. \tag{84}$$

Diese Gleichung stellt das Gesetz der Wärmeproduktion in zähen Flüssigkeiten genau richtig dar, wenn man $-\frac{4\varepsilon_0}{a_4}$ dem Zähigkeitsmodul gleichsetzt. Hieraus folgt in Übereinstimmung mit den Tatsachen, daß die Kundt'sche Doppelbrechung und die Reibungselektrisierung in zähen Flüssigkeiten stärker auftritt. Auf Grund der Energiegleichung dieses Vorganges:

$$S - (\mathfrak{v}; \nabla) : \theta_2 = 0, \quad \theta_2 = 4 \frac{\varepsilon_0}{a_4} [\nabla, \mathfrak{v}]$$

gelangt man zu dem Werte θ_2 der Spannungsdyade zäher, rasch deformierter Flüssigkeiten, deren Bewegungstheorie also gleichfalls Beziehungen zu der hier mitgeteilten elektromagnetischen Theorie hat.

Über die Störung des homogenen elektrischen Feldes durch ein leitendes dreiachsiges Ellipsoid

von

Dr. **Hans Benndorf.**

Aus dem physikalischen Institut der Universität Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. März 1906.)

In der vorliegenden Arbeit werden Ausdrücke für die Potential-, Kraft- und Dichtenverteilung entwickelt, wenn ein beliebig orientiertes Ellipsoid, das eine Eigenladung besitzt, sich in einem homogenen elektrischen Felde befindet. Ich habe dabei besonderen Wert auf eine streng systematische Bezeichnungsweise gelegt, um die Anwendung der Formeln auf spezielle Fälle zu erleichtern.

Eine Formelzusammenstellung, die das Verteilungsproblem im allgemeinen Falle behandelt, existiert meines Wissens nicht; dagegen sind spezielle Fälle oder Teile des allgemeinen Problems[1] in verschiedenen Lehrbüchern und Abhandlungen untersucht.

Wenn daher in dieser Abhandlung im wesentlichen nur Verallgemeinerungen bereits bekannter Gleichungen entwickelt werden, so erscheint mir eine einheitliche und übersichtliche Darstellung doch der Veröffentlichung wert, um anderen die mühsame und zeitraubende Arbeit zu ersparen, die das Zusammensuchen und Vergleichen der in verschiedenen Arbeiten

[1] A. Lampa, Zur Theorie der Dielektrika, diese Sitzungsberichte, *104* (1895), p. 681, behandelt streng die Ladungsdichtenverteilung auf einem ungeladenen Ellipsoid, das beliebig im Felde orientiert ist; das Potential im Außenraum dagegen wird nur für Entfernungen entwickelt, die groß sind gegen das Ellipsoid.

gegebenen Ausdrücke macht, um so mehr als die Bezeichnungsweise derselben Größen bei den einzelnen Autoren so verschiedenartig ist, als es die Kombination von fünf Alphabeten mit ungezählten Indices nur zuläßt.

Dem Hauptteil der Arbeit angefügt sind einige Tabellen über die Kapazität von Rotations- und dreiachsigen Ellipsoiden. Im letzten Abschnitt werden Transformationen und Reihenentwicklungen für die im allgemeinen Problem auftretenden Integrale gegeben, die zur Ausrechnung bei numerischen Beispielen dienen können. Über Anwendung der hier entwickelten Formeln in gewissen praktischen Fällen wird eine folgende Abhandlung berichten.

Erklärung der Bezeichnungsweise.

Vorausgesetzt wird ein rechtwinkeliges Koordinatensystem *OX*, *OY*, *OZ*. Im homogenen elektrischen Feld herrsche die Intensität $\mathfrak{E}^u$, deren Komponenten $\mathfrak{X}^u$, $\mathfrak{Y}^u$, $\mathfrak{Z}^u$ seien.

Bezeichnet Φ^u das Potential der durch den Ursprung gehenden Niveaufläche, so ist die allgemeine Gleichung der Niveauflächen

$$\varphi^u = \Phi^u - x\mathfrak{X}^u - y\mathfrak{Y}^u - z\mathfrak{Z}^u, \qquad \ldots 1)$$

die Kraftkomponenten sind also positiv gerechnet, wenn sie in die Richtung der positiven Achsen fallen.

Alle Größen, die sich auf dieses ursprünglich vorhandene Feld beziehen, werden rechts oben durch den Index *u* gekennzeichnet.

In dieses Feld werde nun ein ungeladenes leitendes Ellipsoid mit den Halbachsen *a*, *b*, *c* so gesetzt, daß seine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \ldots 2)$$

wird, wobei wir stets $a \leqq b \leqq c$ voraussetzen wollen.

Alle Größen, die sich nur auf den Innenraum des Ellipsoides, die Oberfläche oder den Außenraum beziehen, werden, wenn es nötig erscheint, rechts unten durch die Indices *i*, 0, *a* versehen, mit Ausnahme der Flächendichten der Ladung an den

Achsenenden des Ellipsoides, die mit σ_a, σ_b, σ_c bezeichnet werden sollen.

Durch das ursprüngliche Feld werden auf dem Ellipsoid Ladungen induziert.

Alle nur von diesen Ladungen abhängigen Größen tragen rechts oben den Index i, wenn es sich um die Induktion durch das Gesamtfeld $\mathfrak{E}^u$ handelt, dagegen die Indices i_x, i_y, i_z, wenn nur die Induktion der Komponenten $\mathfrak{X}^u$, $\mathfrak{Y}^u$, $\mathfrak{Z}^u$ betrachtet wird.

Alle Größen, die durch Superposition des ursprünglichen Feldes und des Feldes der induzierten Ladungen hervorgehen, erhalten rechts oben den Index I, respektive I_x, I_y, I_z.

Nun möge schließlich dem Ellipsoid eine Ladung E erteilt werden, die sich mit der Dichte σ^E über die induzierten Ladungen superponiert. Alle Größen, die nur von dieser Ladung abhängen, tragen rechts oben den Index E.

Schließlich sollen alle Größen, die durch die Superposition der Felder (u, i, E) erhalten werden, rechts oben den Index g führen.

Als gegeben betrachten wir die Größen a, b, c, Φ^u, $\mathfrak{X}^u$, $\mathfrak{Y}^u$, $\mathfrak{Z}^u$, E, durch die die zu suchenden (das Potential an der Oberfläche φ_0, im Außenraum φ_a, die elektrischen Kräfte $\mathfrak{X}_a$, $\mathfrak{Y}_a$, $\mathfrak{Z}_a$ $\mathfrak{E}_a$, $\sigma = \frac{\mathfrak{E}_0}{4\pi}$) auszudrücken sind.

Es bezeichnen daher im folgenden:

x, y, z, respektive (x_i, y_i, z_i, x_0, y_0, z_0, x_a, y_a, z_a) die Koordinaten des Aufpunktes;

$a \leqq b \leqq c$ die Halbachsen des Ellipsoides;

u die größte (immer positive) Wurzel der Gleichung;

$\frac{x_a^2}{a^2+u} + \frac{y_a^2}{b^2+u} + \frac{z_a^2}{c^2+u} = 1$, die ein dem gegebenen konfokales Ellipsoid darstellt;

$u_0 = 0$ den Wert für u an der Oberfläche des gegebenen Ellipsoides;

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \sqrt{a^2+u} \\ \beta = \sqrt{b^2+u} \\ \gamma = \sqrt{c^2+u} \end{array}\right\} \text{die Halbachsen des konfokalen Ellipsoides;}$$

Φ^{u} das Potential im ursprünglichen Felde in der Niveaufläche, die durch den Koordinatenanfangspunkt geht;

φ^{u}, respektive φ^{u}_{i}, φ^{u}_{0}, φ^{u}_{a} das Potential im ursprünglichen homogenen Felde;

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{X}^{u}, & \text{respektive} & \mathfrak{X}^{u}_{i}, & \mathfrak{X}^{u}_{0}, \mathfrak{X}^{u}_{a} \\ \mathfrak{Y}^{u}, & \text{»} & \mathfrak{Y}^{u}_{i}, & \mathfrak{Y}^{u}_{0}, \mathfrak{Y}^{u}_{a} \\ \mathfrak{Z}^{u}, & \text{»} & \mathfrak{Z}^{u}_{i}, & \mathfrak{Z}^{u}_{0}, \mathfrak{Z}^{u}_{a} \\ \mathfrak{E}^{u}, & \text{»} & \mathfrak{E}^{u}_{i}, & \mathfrak{E}^{u}_{0}, \mathfrak{E}^{u}_{a} \end{array}\right\} \text{die Kräfte im ursprünglichen homogenen Felde;}$$

φ^{ix} Potential der durch $\mathfrak{X}^{u}$ auf dem Ellipsoid induzierten Ladungen;

φ^{iy} Potential der durch $\mathfrak{Y}^{u}$ auf dem Ellipsoid induzierten Ladungen;

φ^{iz} Potential der durch $\mathfrak{Z}^{u}$ auf dem Ellipsoid induzierten Ladungen;

φ^{i} Potential der durch $\mathfrak{E}^{u}$ auf dem Ellipsoid induzierten Ladungen;

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{X}^{ix}, \mathfrak{Y}^{ix}, \mathfrak{Z}^{ix}, \mathfrak{E}^{ix}, \sigma^{ix} \\ \mathfrak{X}^{iy}, \mathfrak{Y}^{iy}, \mathfrak{Z}^{iy}, \mathfrak{E}^{iy}, \sigma^{iy} \\ \mathfrak{X}^{iz}, \mathfrak{Y}^{iz}, \mathfrak{Z}^{iz}, \mathfrak{E}^{iz}, \sigma^{iz} \\ \mathfrak{X}^{i}, \mathfrak{Y}^{i}, \mathfrak{Z}^{i}, \mathfrak{E}^{i}, \sigma^{i} \end{array}\right\} \text{analog Kräfte und Ladungsdichten;}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \varphi^{I} = \varphi^{u} + \varphi^{i} & \varphi^{Ix} = \varphi^{u} + \varphi^{ix} & \varphi^{Iy} = \varphi^{u} + \varphi^{iy} & \varphi^{Iz} = \varphi^{u} + \varphi^{iz} \\ \mathfrak{X}^{I} = \mathfrak{X}^{u} + \mathfrak{X}^{i} & \dots\dots\dots & \text{analog} & \dots\dots\dots \\ \mathfrak{Y}^{I} = \mathfrak{Y}^{u} + \mathfrak{Y}^{i} & \dots\dots\dots & \text{»} & \dots\dots\dots \\ \mathfrak{Z}^{I} = \mathfrak{Z}^{u} + \mathfrak{Z}^{i} & \dots\dots\dots & \text{»} & \dots\dots\dots \\ \mathfrak{E}^{I} = \sqrt{(\mathfrak{X}^{I})^2 + (\mathfrak{Y}^{I})^2 + (\mathfrak{Z}^{I})^2} & & & \\ \sigma^{I} = \sigma^{i} & & & \end{array}\right\}$$

Potential, Kräfte, Ladungen des ursprünglichen Feldes + dem induzierten;

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^{I}_{a}, \sigma^{I}_{b}, \sigma^{I}_{c} \\ \sigma^{Ix}_{a}, \sigma^{Iy}_{b}, \sigma^{Iz}_{c} \end{array}\right\} \text{Dichten an den Achsenenden des Ellipsoides;}$$

φ^{E}, $\mathfrak{X}^{E}$, $\mathfrak{Y}^{E}$, $\mathfrak{Z}^{E}$, $\mathfrak{E}^{E}$, σ^{E}, σ^{E}_{a}, σ^{E}_{b}, σ^{E}_{c} Potential, Kräfte, Dichten, herrührend von der Eigenladung;

$$\left.\begin{array}{l} E \text{ Eigenladung} \\ C \text{ Kapazität} \end{array}\right\} \text{des Ellipsoides;}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^g = \varphi^a + \varphi^i + \varphi^E = \varphi^I + \varphi^E \\ &\mathfrak{X}^g = \mathfrak{X}^a + \mathfrak{X}^i + \mathfrak{X}^E = \mathfrak{X}^I + \mathfrak{X}^E \text{ analog } \mathfrak{Y}^g, \mathfrak{Z}^g \\ &\mathfrak{E}^g = \sqrt{(\mathfrak{X}^g)^2 + (\mathfrak{Y}^g)^2 + (\mathfrak{Z}^g)^2},\ \sigma^g, \sigma^g_a, \sigma^g_b, \sigma^g_c \end{aligned}\right\} \text{Potential, Kräfte und Ladungen im Gesamtfelde;}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} = \int_0^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma} \\ I_3 &= \int_0^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3} \\ I_4 &= \int_0^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \text{Konstanten;}$$

$$M = \sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}};$$

$$M_0 = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} - 1\right)}{\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} - 1\right)} = + \frac{\dfrac{2x}{\alpha^2}}{M^2} = + \frac{2x}{\alpha^2 M^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = + \frac{2y}{\beta^2 M^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = + \frac{2z}{\gamma^2 M^2}.$$

Die Gleichungen I, II, III in jedem Abschnitt beziehen sich auf das Potential im Außenraum, an der Oberfläche, im Innenraum; die Gleichungen IV, V, VI auf die Kräfte, VII, VIII, IX auf die Ladungsdichten.

1. Das ungeladene leitende Ellipsoid im homogenen Felde.

A. Das Potential.

Es ist das Potential im Außenraum hervorgerufen durch die induzierten Ladungen

$$\varphi_a^i = \varphi_a^{ix} + \varphi_a^{iy} + \varphi_a^{iz}, \quad \text{wobei für} \quad \varphi_a^{ix}, \varphi_a^{iy}, \varphi_a^{iz}$$

folgende Ausdrücke[1] gelten:

$$\varphi_a^{ix} = \frac{x\mathfrak{X}^u}{I_1}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma}, \quad \varphi_a^{iy} = \frac{y\mathfrak{Y}^u}{I_2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma},$$

$$\varphi_a^{iz} = \frac{z\mathfrak{Z}^u}{I_3}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3}.$$

---

1 Die Ableitung dieser Formeln geschieht am einfachsten nach der Methode der Gleitschichten.

Bezeichnet V das Potential, herrührend von einem homogenen Ellipsoid, das im Inneren gleichmäßig mit Masse von der Dichte ρ erfüllt ist, und $-V$ das Potential von einem kongruenten, mit Masse von der Dichte $-\rho$ erfüllten Ellipsoid, wenn das Ellipsoid achsenparallel mit seinem Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, so ist $V + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial V}{\partial x}$, respektive $-V + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial V}{\partial x}$ das Potential in einem Punkte des Raumes, wenn die beiden Ellipsoide, das positive in der Richtung der positiven X-Achsen, das andere entgegengesetzt um das unendlich kleine Stück $\frac{\varepsilon}{2}$ verschoben gedacht werden, und die Summen beider Potentiale $\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}$.

Der Ausdruck für V lautet (z. B. Kirchhoff, Mechanik, p. 215) für einen inneren Punkt

$$V_i = \pi\rho abc\int_0^\infty du\,\frac{1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

oder mit unseren Abkürzungen

$$V_i = \pi\rho abc\int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}}{\alpha\beta\gamma}\,du$$

und für den Außenraum

$$V_a = \pi\rho abc\int_u^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}}{\alpha\beta\gamma}\,du,$$

wobei u die größte Wurzel der Gleichung

$$1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \text{ ist.}$$

Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -2\pi\rho abcx\int_0^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} \quad \text{und}$$

Es ist daher

$$\varphi_a^i = \frac{x\mathfrak{X}''}{I_1}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} + \frac{y\mathfrak{Y}''}{I_2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}''}{I_3}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3}$$

im Außenraum,

$$\varphi_0^i = x_0\mathfrak{X}'' + y_0\mathfrak{Y}'' + z_0\mathfrak{Z}''$$

an der Oberfläche,

$$\varphi_i^i = x_i\mathfrak{X}'' + y_i\mathfrak{Y}'' + z_i\mathfrak{Z}''$$

im Inneren.

Diese Potentiale φ^i superponieren sich den Potentialen φ'', Gleichung 1), so daß $\varphi^I = \varphi^i + \varphi''$ wird. Man erhält so:

$$\frac{\partial V_a}{\partial x} = -2\pi\rho abcx\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} +$$

$$+\pi\rho abc\frac{\partial}{\partial u}\int_u^\infty \frac{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}\right)du}{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= -2\pi\rho abcx\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} + \pi\rho abc\frac{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}}{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= -2\pi\rho abcx\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma}.$$

In dem den verschobenen Ellipsoiden gemeinschaftlichen Raume (Dichte $=0$) ist das Potential $\varepsilon\frac{\partial V_i}{\partial x} = -2\pi abc\varepsilon x\rho\int_0^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma}$ im Außenraum $\varepsilon\frac{\partial V_a}{\partial x} = -2\pi abc\varepsilon x\rho\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma}$. Im Inneren herrscht aber ein homogenes Feld von der Intensität $-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial V_i}{\partial x}\right) = 2\pi abc\varepsilon\rho\int_0^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma}$; setzt man nun $2\pi abc\varepsilon\rho\int_0^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} = -\mathfrak{X}''$, so ist

$$\varphi_i^{ix} = x\mathfrak{X}'' \quad \text{und} \quad \varphi_a^{ix} = \frac{x\mathfrak{X}''}{\int_0^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma}}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma}$$

das Potential eines leitenden, vom homogenen Felde induzierten Ellipsoides.

$$\varphi_a^I = \Phi'' - x\mathfrak{X}'' - y\mathfrak{Y}'' - z\mathfrak{Z}'' + \\ + \frac{x\mathfrak{X}''}{I_1}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} + \frac{y\mathfrak{Y}''}{I_2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}''}{I_3}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3} \quad \ldots \mathrm{I}_1)$$

$$\varphi_0^I = \Phi'' \quad \ldots \mathrm{II}_1)$$

$$\varphi_i^I = \Phi''. \quad \ldots \mathrm{III}_1)$$

B. Die Kräfte.

Es ist

$$\mathfrak{X}^I = -\frac{\partial \varphi^I}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y}^I = -\frac{\partial \varphi^I}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z}^I = -\frac{\partial \varphi^I}{\partial z}$$

und daher

$$\mathfrak{X}_a^I = -\frac{\partial \varphi_a^I}{\partial x} = \mathfrak{X}'' - \frac{\mathfrak{X}''}{I_1}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x\mathfrak{X}''}{I_1}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} + \right. \\ \left. + \frac{y\mathfrak{Y}''}{I_2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}''}{I_3}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$

und da nun

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1\right)}{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1\right)} = \frac{\frac{2x}{\alpha^2}}{\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}} = \frac{2x}{\alpha^2 M^2},$$

so folgt für $\mathfrak{X}_a^I$ und analog für die anderen Komponenten

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_a^I &= \mathfrak{X}'' - \frac{\mathfrak{X}''}{I_1}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} + \left(\frac{x\mathfrak{X}''}{I_1}\frac{1}{\alpha^3\beta\gamma} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{y\mathfrak{Y}''}{I_2}\frac{1}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}''}{I_3}\frac{1}{\alpha\beta\gamma^3}\right)\frac{2x}{\alpha^2 M^2} \\
\mathfrak{Y}_a^I &= \mathfrak{Y}'' - \frac{\mathfrak{Y}''}{I_2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma} + \left(\frac{x\mathfrak{X}''}{I_1}\frac{1}{\alpha^3\beta\gamma} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{y\mathfrak{Y}''}{I_2}\frac{1}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}''}{I_3}\frac{1}{\alpha\beta\gamma^3}\right)\frac{2y}{\beta^2 M^2} \\
\mathfrak{Z}_a^I &= \mathfrak{Z}'' - \frac{\mathfrak{Z}''}{I_3}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3} + \left(\frac{x\mathfrak{X}''}{I_1}\frac{1}{\alpha^3\beta\gamma} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{y\mathfrak{Y}''}{I_2}\frac{1}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}''}{I_3}\frac{1}{\alpha\beta\gamma^3}\right)\frac{2z}{\gamma^2 M^2} \\
\mathfrak{E}_a^I &= \sqrt{(\mathfrak{X}_a^I)^2 + (\mathfrak{Y}_a^I)^2 + (\mathfrak{Z}_a^I)^2}
\end{aligned}\right\} \ldots \mathrm{IV}_1)$$

im Außenraum, für die Oberfläche wird

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_0' &= \left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1} \frac{1}{a^3 b c} + \frac{y_0 \mathfrak{Y}''}{I_2} \frac{1}{a b^3 c} + \frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3} \frac{1}{a b c^3}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{2 x_0}{a^2} \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}} \\
\mathfrak{Y}_0' &= \left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1} \frac{1}{a^3 b c} + \frac{y_0 \mathfrak{Y}''}{I_2} \frac{1}{a b^3 c} + \frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3} \frac{1}{a b c^3}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{2 y_0}{b^2} \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}} \\
\mathfrak{Z}_0' &= \left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1} \frac{1}{a^3 b c} + \frac{y_0 \mathfrak{Y}''}{I_2} \frac{1}{a b^3 c} + \frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3} \frac{1}{a b c^3}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{2 z_0}{c^2} \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}} \\
\mathfrak{E}_0' &= \sqrt{(\mathfrak{X}_0')^2 + (\mathfrak{Y}_0')^2 + (\mathfrak{Z}_0')^2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \mathrm{V}_1)$$

und für das Innere ist

$$\mathfrak{X}_i' = \mathfrak{Y}_i' = \mathfrak{Z}_i' = \mathfrak{E}_i' = 0. \qquad \ldots \mathrm{VI}_1)$$

C. Die Ladungen.

Für die Dichte σ' der elektrischen Ladung an einer Stelle (x_0, y_0, z_0) des Ellipsoides folgt

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}_0' = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1} \frac{1}{a^3 b c} + \frac{y_0 \mathfrak{Y}''}{I_2} \frac{1}{a b^3 c} + \right.$$
$$\left. + \frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3} \frac{1}{a b c^3}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}, \quad \ldots \mathrm{VII}_1)$$

woraus die Werte der Dichte an den Enden der Halbachsen $\sigma_a', \sigma_b', \sigma_c'$ sich ergeben

$$\left.\begin{aligned}\sigma_a^l &= \frac{\mathfrak{X}^u}{2\pi I_1 abc}\\ \sigma_b^l &= \frac{\mathfrak{Y}^u}{2\pi I_2 abc}\\ \sigma_c^l &= \frac{\mathfrak{Z}^u}{2\pi I_3 abc}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \mathrm{VIII}_1)$$

Setzt man die Werte VIII$_1$) in die Formel VII$_1$), so erhält man schließlich:

$$\sigma^l = \left(\frac{x_0 \sigma_a^l}{a^2} + \frac{y_0 \sigma_b^l}{b^2} + \frac{z_0 \sigma_c^l}{c^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \cdot \quad \ldots \mathrm{IX}_1)$$

2. Das geladene leitende Ellipsoid im kräftefreien Felde.

A. Das Potential.

Bezeichnet E die Ladung des Ellipsoides, so ist das Potential[1]

$$\varphi_a^E = \frac{E}{2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma}, \quad \ldots \mathrm{I}_2)$$

woraus für die Oberfläche folgt

$$\varphi_0^E = \frac{E}{2}\int_0^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma} = \frac{E}{C} \quad \ldots \mathrm{II}_2)$$

und für das Innere

$$\varphi_i^E = \varphi_0^E = \frac{E}{2}\int_0^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma} = \frac{E}{C}, \quad \ldots \mathrm{III}_2)$$

---

[1] Siehe z. B. Kirchhoff's Vorlesungen über Elektrizität, p. 34 und 35. Die Formel Kirchhoff's $\varphi = \frac{e}{2}\int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)u}}$, gilt für ein Ellipsoid, dessen Gleichung $\frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist, und geht in unsere über, wenn statt u, c^2+u als Variable eingeführt und daher $\alpha = a^2+c^2+u$, $\beta = b^2+c^2+u$, $\gamma = c^2+u$ gesetzt wird.

wenn man die Kapazität

$$C = \frac{2}{\int_0^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma}}$$

einführt.

B. Die Kräfte.

Aus I_2) folgt

$$\mathfrak{X}_a^E = -\frac{\partial \varphi_a^E}{\partial x} = -\frac{E}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma}\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E}{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{x}{\alpha^2 M^2},$$

daher

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_a^E &= \frac{E}{\alpha^3\beta\gamma}\,\frac{x}{M^2}\\
\mathfrak{Y}_a^E &= \frac{E}{\alpha\beta^3\gamma}\,\frac{y}{M^2}\\
\mathfrak{Z}_a^E &= \frac{E}{\alpha\beta\gamma^3}\,\frac{z}{M^2}\\
\mathfrak{E}_a^E &= \sqrt{(\mathfrak{X}_a^E)^2+(\mathfrak{Y}_a^E)^2+(\mathfrak{Z}_a^E)^2} = \frac{E}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{1}{M}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\mathrm{IV}_2)$$

für den Außenraum, ferner an der Oberfläche im Außenraum

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_0^E &= \frac{E}{a^3bc}\,\frac{x_0}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}\\
\mathfrak{Y}_0^E &= \frac{E}{ab^3c}\,\frac{y_0}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}\\
\mathfrak{Z}_0^E &= \frac{E}{abc^3}\,\frac{z_0}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}\\
\mathfrak{E}_0^E &= \sqrt{(\mathfrak{X}_0^E)^2+(\mathfrak{Y}_0^E)^2+(\mathfrak{Z}_0^E)^2} = \frac{E}{abc}\,\frac{1}{M_0}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\mathrm{V}_2)$$

und im Inneren

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}_i^E &= 0 \\ \mathfrak{Y}_i^E &= 0 \\ \mathfrak{Z}_i^E &= 0 \\ \mathfrak{E}_i^E &= 0 \end{aligned}\right\} . \qquad \ldots \mathrm{VI}_2)$$

C. Die Ladungen.

Aus V_2) ergibt sich sofort die Ladungsdichte σ^E

$$\sigma^E = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}_0^E = \frac{1}{4\pi} \frac{E}{abc} \frac{1}{M_0}$$

$$\sigma^E = \frac{1}{4\pi} \frac{E}{abc} \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}, \qquad \ldots \mathrm{VII}_2)$$

ferner die Ladungen an den Achsenenden

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a^E &= \frac{1}{4\pi} \frac{E}{bc} \\ \sigma_b^E &= \frac{1}{4\pi} \frac{E}{ac} \\ \sigma_c^E &= \frac{1}{4\pi} \frac{E}{ab} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \mathrm{VIII}_2)$$

oder auch für σ^E

$$\left.\begin{aligned} \sigma^E &= \frac{\sigma_a^E}{a} \frac{1}{M_0} = \frac{\sigma_b^E}{b} \frac{1}{M_0} = \frac{\sigma_c^E}{c} \frac{1}{M_0} \\ \sigma^E &= \frac{1}{3}\left(\frac{\sigma_a^E}{a} + \frac{\sigma_b^E}{b} + \frac{\sigma_c^E}{c}\right) \frac{1}{M_0} . \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \mathrm{IX}_2)$$

3. Das geladene leitende Ellipsoid im homogenen Felde.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall des geladenen leitenden Ellipsoides im homogenen Felde, so findet sich die Lösung des Problems durch Superposition der bereits im ersten und zweiten Abschnitt abgeleiteten Größen, die durch Addition der mit gleichen römischen Ziffern bezeichneten Gleichungen erhalten werden.

A. Das Potential.

Es ist $\varphi^g = \varphi^I + \varphi^E$, daher aus I_1) und I_2)

$$\varphi_a^g = \Phi^u - x\mathfrak{X}^u - y\mathfrak{Y}^u - z\mathfrak{Z}^u + \frac{x\mathfrak{X}^u}{I_1}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} + \\ + \frac{y\mathfrak{Y}^u}{I_2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}^u}{I_3}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3} + \frac{E}{2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma}, \quad \ldots I_3)$$

aus II_1) und II_2)

$$\varphi_0^g = \Phi^u + \frac{E}{C} \quad \ldots II_3)$$

wobei

$$C = \frac{2}{\int_0^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma}},$$

aus III_1) und III_2)

$$\varphi_i^g = \Phi^u + \frac{E}{C}. \quad \ldots III_3)$$

B. Die Kräfte.

Aus den ersten drei Gleichungen von IV_1) und IV_2) folgt

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_a^g &= \mathfrak{X}^u - \frac{\mathfrak{X}^u}{I_1}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} + \left(\frac{x\mathfrak{X}^u}{I_1}\frac{1}{\alpha^3\beta\gamma} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{y\mathfrak{Y}^u}{I_2}\frac{1}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}^u}{I_3}\frac{1}{\alpha\beta\gamma^3}\right)\frac{2x}{\alpha^2 M^2} + \frac{E}{\alpha^3\beta\gamma}\frac{x}{M^2} \\
\mathfrak{Y}_a^g &= \mathfrak{Y}^u - \frac{\mathfrak{Y}^u}{I_2}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma} + \left(\frac{x\mathfrak{X}^u}{I_1}\frac{1}{\alpha^3\beta\gamma} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{y\mathfrak{Y}^u}{I_2}\frac{1}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}^u}{I_3}\frac{1}{\alpha\beta\gamma^3}\right)\frac{2y}{\beta^2 M^2} + \frac{E}{\alpha\beta^3\gamma}\frac{y}{M^2} \\
\mathfrak{Z}_a^g &= \mathfrak{Z}^u - \frac{\mathfrak{Z}^u}{I_3}\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3} + \left(\frac{x\mathfrak{X}^u}{I_1}\frac{1}{\alpha^3\beta\gamma} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{y\mathfrak{Y}^u}{I_2}\frac{1}{\alpha\beta^3\gamma} + \frac{z\mathfrak{Z}^u}{I_3}\frac{1}{\alpha\beta\gamma^3}\right)\frac{2z}{\gamma^2 M^2} + \frac{E}{\alpha\beta\gamma^3}\frac{z}{M^2} \\
\mathfrak{E}_a^g &= \sqrt{(\mathfrak{X}_a^g)^2 + (\mathfrak{Y}_a^g)^2 + (\mathfrak{Z}_a^g)^2}
\end{aligned}\right\}, \quad \ldots IV_3)$$

aus V_1) und V_2)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_0^g &= \left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1}\frac{1}{a^2} + \frac{y_0 \mathfrak{Y}''}{I_2}\frac{1}{b^2} + \frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3}\frac{1}{c^2} + \frac{E}{2}\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \frac{2x_0}{a^3bc}\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}} \\
\mathfrak{Y}_0^g &= \left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1}\frac{1}{a^2} + \frac{y_0 \mathfrak{Y}''}{I_2}\frac{1}{b^2} + \frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3}\frac{1}{c^2} + \frac{E}{2}\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \frac{2y_0}{ab^3c}\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}} \\
\mathfrak{Z}_0^g &= \left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1}\frac{1}{a^2} + \frac{y_0 \mathfrak{Y}''}{I_2}\frac{1}{b^2} + \frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3}\frac{1}{c^2} + \frac{E}{2}\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \frac{2z_0}{abc^3}\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}} \\
\mathfrak{E}_0^g &= \sqrt{(\mathfrak{X}_0^g)^2 + (\mathfrak{Y}_0^g)^2 + (\mathfrak{Z}_0^g)^2}
\end{aligned}\right\}, \quad \ldots V_3)$$

aus VI_1) und VI_2)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_i^g &= 0 \\
\mathfrak{Y}_i^g &= 0 \\
\mathfrak{Z}_i^g &= 0 \\
\mathfrak{E}_i^g &= 0
\end{aligned}\right\}. \qquad \ldots VI_3)$$

C. Die Ladungen.

Analog findet sich aus VII_1 und VII_2)

$$\sigma^g = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1}\frac{1}{a^2} + \frac{y_0 \mathfrak{Y}''}{I_2}\frac{1}{b^2} + \frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3}\frac{1}{c^2} + \frac{E}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{abc}\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}, \quad \ldots VII_3)$$

aus VIII_1) und VIII_2)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_a^g &= \frac{1}{2\pi abc}\left(\frac{\mathfrak{X}''}{I_1} + \frac{E}{2}a\right)\\ \sigma_b^g &= \frac{1}{2\pi abc}\left(\frac{\mathfrak{Y}''}{I_2} + \frac{E}{2}b\right)\\ \sigma_c^g &= \frac{1}{2\pi abc}\left(\frac{\mathfrak{Z}''}{I_3} + \frac{E}{2}c\right)\end{aligned}\right\} \qquad \ldots VIII_3)$$

und schließlich aus IX_1) und IX_2)

$$\sigma^g = \left(\frac{3x_0\sigma_a^I + a\sigma_a^E}{3a^2} + \frac{3y_0\sigma_b^I + b\sigma_b^E}{3b^2} + \frac{3z_0\sigma_c^I + c\sigma_c^E}{3c^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \cdot \qquad \ldots IX_3)$$

Die Formeln I_3) bis IX_3) enthalten alle gesuchten Größen φ^g, $\mathfrak{X}^g$, $\mathfrak{Y}^g$, $\mathfrak{Z}^g$, $\mathfrak{E}^g$, σ^g im Außenraum, an der Oberfläche und im Inneren als Funktion der bekannten Größen a, b, c, Φ'', $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Z}''$, E.

Im folgenden sollen noch einige, öfters praktischer Anwendung fähige Spezialfälle behandelt und der Vollständigkeit halber auch die Kugel mitaufgenommen werden.

4. Die geladene leitende Kugel im homogenen Felde.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{Z}''$, $\mathfrak{X}'' = 0$, $\mathfrak{Y}'' = 0$ setzen. Als Koordinaten soll entweder z und $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ oder $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und ϑ, $\left(\cos\vartheta = \frac{z}{r}\right)$ verwendet werden; die entsprechenden Kräfte seien $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2}$.

Für den Fall der Kugel ist ferner:

$$a = b = c, \quad \alpha = \beta = \gamma = \sqrt{c^2+u} = r,$$

$$u = x^2+y^2+z^2-c^2 = \rho^2+z^2-c^2 = r^2-c^2,$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = \int_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)^{5/2}} = \frac{2}{3c^3},$$

$$\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3\beta\gamma} = \int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta^3\gamma} = \int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma^3} = \int_u^\infty \frac{du}{(c^2+u)^{5/2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{(c^2+u)^{3/2}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}^{\,3}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{r^3},$$

$$\int_u^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma} = \int_u^\infty \frac{du}{(c^2+u)^{3/2}} = 2\,\frac{1}{(c^2+u)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{2}{r},$$

$$C = \frac{2}{\int_0^\infty \frac{du}{\alpha\beta\gamma}} = c,$$

$$M = \frac{1}{c^2+u}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad M_0 = \frac{1}{c}.$$

Für das Potential außen ergibt sich aus I_3)

$$\varphi_a^g = \Phi'' - z\,\mathfrak{Z}'' + z\,\mathfrak{Z}''\left(\frac{c}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)^3 + \frac{E}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \quad \ldots I_4')$$

oder

$$\varphi_a^g = \Phi'' - \mathfrak{Z}'' r \cos\vartheta + \mathfrak{Z}''\frac{c^3}{r^2}\cos\vartheta + \frac{E}{r}, \quad \ldots I_4'')$$

auf der Oberfläche aus II_3)

$$\varphi_0^g = \Phi'' + \frac{E}{\sqrt{\rho_0^2+z_0^2}} = \Phi'' + \frac{E}{c}. \quad \ldots II_4)$$

Für die Kräfte aus IV_3)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_a^g &= \frac{3xz\,\mathfrak{Z}''\cdot c^3}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}^{\,5}} + \frac{Ex}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}^{\,3}} \\
\mathfrak{Y}_a^g &= \frac{3yz\,\mathfrak{Z}''\cdot c^3}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}^{\,5}} + \frac{Ey}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}^{\,3}} \\
\mathfrak{Z}_a^g &= \mathfrak{Z}'' - \mathfrak{Z}''\frac{c^3}{\sqrt{(\rho^2+z^2)}^{\,3}} + \frac{3z^2\,\mathfrak{Z}''\cdot c^3}{\sqrt{(\rho^2+z^2)}^{\,5}} + \frac{Ez}{\sqrt{(\rho^2+z^2)}^{\,3}}
\end{aligned}\right\} \ldots IV_4')$$

und

$$\mathfrak{E}_a^g = \sqrt{(\mathfrak{X}_a^g)^2 + (\mathfrak{Y}_a^g)^2 + (\mathfrak{Z}_a^g)^2},$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R}_a^g &= \frac{3\rho z \mathfrak{Z}'' c^3}{\sqrt{(\rho^2+z^2)}^5} + \frac{E\rho}{\sqrt{(\rho^2+z^2)}^3} = \\
&= 3 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \mathfrak{Z}'' \frac{c^3}{r^3} + \frac{E}{r^2} \sin\vartheta \\
\mathfrak{Z}_a^g &= \mathfrak{Z}'' + \mathfrak{Z}'' \frac{2z^2c^3 - \rho^2 c^3}{\sqrt{(\rho^2+z^2)}^5} + \frac{Ez}{\sqrt{(\rho^2+z^2)}^3} = \\
&= \mathfrak{Z}'' + \mathfrak{Z}''(3\cos^2\vartheta - 1)\frac{c^3}{r^3} + \frac{E}{r^2}\cos\vartheta \\
\mathfrak{E}_a^g &= \sqrt{(\mathfrak{R}_a^g)^2 + (\mathfrak{Z}_a^g)^2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \mathrm{IV}'_4)$$

für den Außenraum; auf der Oberfläche folgt aus V_3)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R}_b^g &= (3z_0 c \mathfrak{Z}'' + E)\frac{\rho_0}{c^3} = \left(3\mathfrak{Z}''\cos\vartheta + \frac{E}{c^2}\right)\sin\vartheta \\
\mathfrak{Z}_b^g &= (3z_0 c \mathfrak{Z}'' + E)\frac{z_0}{c^3} = \left(3\mathfrak{Z}''\cos\vartheta + \frac{E}{c^2}\right)\cos\vartheta \\
\mathfrak{E}_b^g &= \sqrt{(\mathfrak{R}_b^g)^2 + (\mathfrak{Z}_b^g)^2} = \left(3\mathfrak{Z}''\cos\vartheta + \frac{E}{c^2}\right)
\end{aligned}\right\}. \quad \ldots \mathrm{V}_4)$$

Die Dichte σ^g wird

$$\sigma^g = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_b^g = \frac{1}{4\pi}\left(3\mathfrak{Z}''\frac{z_0}{c} + \frac{E}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(3\mathfrak{Z}''\cos\vartheta + \frac{E}{c^2}\right), \quad \ldots \mathrm{VII}_4)$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_a^g &= \frac{E}{4\pi c^2} = \sigma_b^g \\
\sigma_c^g &= \frac{3}{4\pi}\mathfrak{Z}'' + \frac{E}{4\pi c^2}
\end{aligned}\right\}. \quad \ldots \mathrm{VIII}_4)$$

5. Das verlängerte Rotationsellipsoid im homogenen Felde parallel zur Längsachse.

Zunächst ist wieder $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{Z}''$, $\mathfrak{X}'' = 0$, $\mathfrak{Y}'' = 0$ zu setzen; da alles um die z-Achse symmetrisch ist, genügen als Koordinaten z und $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, die entsprechenden Kräfte sind $\mathfrak{Z}_a^g$

und $\mathfrak{R}_a^g = \sqrt{(\mathfrak{X}_a^g)^2 + (\mathfrak{Y}_a^g)^2}$. Es ist ferner $a = b$, $\alpha = \beta = \sqrt{a^2+u}$, $\gamma = \sqrt{c^2+u}$, u die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\rho^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1,$$

und wenn man $c^2 - a^2 = e^2$ setzt

$$I_1 = I_2 = \int_0^\infty \frac{du}{\alpha^4 \gamma} = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^2 \sqrt{c^2+u}} = \\ = \frac{c}{e^2 a^2} - \frac{1}{2e^3} \lg \frac{c+e}{c-e},$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{du}{\alpha^2 \gamma^3} = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(c^2+u)^3}} = \\ = -\frac{2}{e^2 c} + \frac{1}{e^3} \lg \frac{c+e}{c-e},$$

$$\int_u^\infty \frac{du}{\alpha^3 \beta \gamma} = \int_u^\infty \frac{du}{\alpha \beta^3 \gamma} = \int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)^2 \sqrt{c^2+u}} = \\ = \frac{\sqrt{c^2+u}}{e^2(a^2+u)} - \frac{1}{2e^3} \lg \frac{\sqrt{c^2+u}+e}{\sqrt{c^2+u}-e} = S_1,$$

$$\int_u^\infty \frac{du}{\alpha \beta \gamma^3} = \int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(c^2+u)^3}} = \\ = -\frac{2}{e^2 \sqrt{c^2+u}} + \frac{1}{e^3} \lg \frac{\sqrt{c^2+u}+e}{\sqrt{c^2+u}-e} = S_3,$$

$$\frac{2}{C} = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)(c^2+u)^{1/2}} = \frac{1}{e} \lg \frac{c+e}{c-e} = I_4,$$

$$\int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)(c^2+u)^{1/2}} = \frac{1}{e} \lg \frac{\sqrt{c^2+u}+e}{\sqrt{c^2+u}-e} = S_4,$$

$$M = \sqrt{\frac{\rho^2}{(a^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}}, \quad M_0 = \sqrt{\frac{\rho_0^2}{a^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}.$$

Für das Potential ergibt sich zunächst aus I_3)

$$\varphi_a^g = \Phi'' - z\mathfrak{Z}'' + z\mathfrak{Z}'' \frac{S_3}{I_3} + \frac{E}{2} S_4 \qquad \ldots I_5)$$

für den Außenraum und für die Oberfläche

$$\varphi_0^g = \Phi^u + \frac{E}{C}, \qquad \ldots \mathrm{II}_5)$$

wobei die Kapazität

$$C = \frac{2e}{\lg \frac{c+e}{c-e}}.$$

Die Kräfte ergeben sich

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathfrak{X}_a^g = \frac{1}{\alpha^4\gamma}\frac{1}{M^2}\left(\frac{2xz\mathfrak{Z}^u}{I_3\gamma^2} + Ex\right) \\ \mathfrak{Y}_a^g = \frac{1}{\alpha^4\gamma}\frac{1}{M^2}\left(\frac{2yz\mathfrak{Z}^u}{I_3\gamma^2} + Ey\right) \end{array}\right\} \mathfrak{R}_a^g = \frac{1}{\alpha^4\gamma}\frac{1}{M^2}\rho\left(\frac{2z\mathfrak{Z}^u}{I_3\gamma^2} + E\right) \\ \mathfrak{Z}_a^g = \mathfrak{Z}^u - \mathfrak{Z}^u\frac{S_3}{I_3} + \frac{1}{\alpha^2\gamma^3}\frac{z}{M^2}\left(\frac{2z\mathfrak{Z}^u}{I_3\gamma^2} + E\right) \\ \mathfrak{E}_a^g = \sqrt{(\mathfrak{X}_a^g)^2 + (\mathfrak{Y}_a^g)^2 + (\mathfrak{Z}_a^g)^2} \end{array}\right\} \ldots \mathrm{IV}_5)$$

Die Ladungen sind

$$\sigma^g = \frac{1}{2\pi a^2 c}\left(\frac{z_0\mathfrak{Z}^u}{I_3}\frac{1}{c^2} + \frac{E}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_0^2}{a^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \qquad \ldots \mathrm{VII}_5)$$

und daher

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_a^g = \frac{E}{4\pi a c} = \sigma_b^g \\ \sigma_c^g = \frac{1}{2\pi a^2 c}\left(\frac{\mathfrak{Z}^u}{I_3} + \frac{E}{2}c\right) \end{array}\right\} \qquad \ldots \mathrm{VIII}_5)$$

und da

$$\sigma_a^l = 0, \quad \sigma_c^l = \frac{\mathfrak{Z}^u}{2\pi I_3 a^2 c}, \quad \sigma_a^E = \frac{1}{4\pi}\frac{E}{ac}, \quad \sigma_c^E = \frac{1}{4\pi}\frac{E}{a^2}$$

kann IX_3 auch geschrieben werden

$$\sigma^g = \left(\sigma_c^l\frac{z_0}{c^2} + \frac{2\sigma_a^E}{3a} + \frac{\sigma_c^E}{3c}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_0^2}{a^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}. \qquad \ldots \mathrm{IX}_5)$$

6. Das verlängerte Rotationsellipsoid im homogenen Felde senkrecht zur Längsachse.

Es gelten hier dieselben Abkürzungen wie im Abschnitt 5, nur gibt es jetzt keine Symmetrieachse mehr, weshalb ρ und $\mathfrak{R}$ bedeutungslos sind.

$$\mathfrak{E}'' = \mathfrak{X}'', \ \mathfrak{Y}'' = \mathfrak{Z}'' = 0.$$

Für das Potential ergibt sich:

$$\varphi_a^g = \Phi'' - x\mathfrak{X}'' + x\mathfrak{X}'' \frac{S_1}{I_1} + \frac{E}{2} S_4 \qquad \ldots \mathrm{I}_6)$$

$$\varphi_0^g = \Phi'' + \frac{E}{C}, \qquad \ldots \mathrm{II}_6)$$

wo

$$C = \frac{2e}{\lg \frac{c+e}{c-e}}.$$

Die Kräfte werden

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_a^g &= \mathfrak{X}'' - \mathfrak{X}'' \frac{S_1}{I_1} + \frac{1}{\alpha^4 \gamma} \frac{1}{M^2} \left(\frac{2x^2 \mathfrak{X}''}{I_1} \frac{1}{\alpha^2} + Ex \right) \\
\mathfrak{Y}_a^g &= \frac{1}{\alpha^4 \gamma} \frac{1}{M^2} \left(\frac{2xy\mathfrak{X}''}{I_1 \alpha^2} + Ey \right) \\
\mathfrak{Z}_a^g &= \frac{1}{\alpha^2 \gamma^3} \frac{1}{M^2} \left(\frac{2xz\mathfrak{X}''}{I_1 \alpha^2} + Ez \right) \\
\mathfrak{E}_a^g &= \sqrt{(\mathfrak{X}_a^g)^2 + (\mathfrak{Y}_a^g)^2 + (\mathfrak{Z}_a^g)^2}
\end{aligned}\right\} \ldots \mathrm{IV}_6)$$

Die Ladungsdichten sind schließlich

$$\sigma^g = \frac{1}{2\pi a^2 c} \left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1} \frac{1}{a^2} + \frac{E}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{a^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \qquad \ldots \mathrm{VII}_6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_a^g &= \frac{1}{2\pi a^2 c} \left(\frac{\mathfrak{X}''}{I_1} + \frac{E}{2} a \right) \\
\sigma_b^g &= \frac{E}{4\pi a c} \\
\sigma_c^g &= \frac{E}{4\pi a^2}
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots \mathrm{VIII}_6)$$

und da

$$\sigma_a^l = \frac{\mathfrak{X}^u}{2\pi I_1 a^2 c}, \quad \sigma_c^l = \sigma_b^l = 0, \quad \sigma_a^E = \frac{1}{4\pi}\frac{E}{ac}, \quad \sigma_b^E = \frac{1}{4\pi}\frac{E}{ac},$$

$$\sigma_c^E = \frac{1}{4\pi}\frac{E}{a^2}$$

ist, wird

$$\sigma^g = \left(\sigma_a^l \frac{x_0}{a^2} + \frac{2\sigma_a^E}{3a} + \frac{\sigma_c^E}{3c}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{a^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}} \cdot \quad \ldots \mathrm{IX}_6)$$

7. Das abgeplattete Rotationsellipsoid im homogenen Felde, parallel zur kurzen Achse.

Das Feld wird charakterisiert durch $\mathfrak{E}^u = \mathfrak{X}^u$, $\mathfrak{Y}^u = \mathfrak{Z}^u = 0$. Koordinaten sind $\rho = \sqrt{z^2+y^2}$ und x, die entsprechenden Kräfte $\mathfrak{R}_a^g$ und $\mathfrak{X}_a^g$. Es ist ferner $b = c$, $\beta = \gamma = \sqrt{c^2+u}$, u die größte Wurzel der Gleichung $\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{\rho^2}{c^2+u} = 1$, und wenn wieder $c^2 - a^2 = e^2$ gesetzt wird:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{du}{\alpha^3\gamma^2} = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{3/2}(c^2+u)} =$$

$$= \frac{2}{(c^2-a^2)^{3/2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}} + \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{e^3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{e} + \frac{e}{a} - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$I_2 = I_3 = \int_0^\infty \frac{du}{\alpha\gamma^4} = \int_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)^2\sqrt{a^2+u}} =$$

$$= \frac{1}{e^3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{ae}{c^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{e}\right),$$

$$\int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{3/2}(c^2+u)} =$$

$$= \frac{2}{e^3}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a^2+u}{e^2}} + \frac{e}{\sqrt{a^2+u}} - \frac{\pi}{2}\right) = S_1,$$

$$\int_u^\infty \frac{du}{(c^2+u)^2(a^2+u)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{e^3}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{a^2+u}}{e} - \frac{e\sqrt{a^2+u}}{c^2+u}\right) = S_3,$$

$$\frac{2}{C} = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{1/2}(c^2+u)} = \frac{2}{e}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\frac{a}{e}\right) = I_4,$$

$$\int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{1/2}(c^2+u)} = \frac{2}{e}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{a^2+u}}{e}\right) = S_4,$$

$$M = \sqrt{\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{\rho^2}{(c^2+u)^2}}, \quad M_0 = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{\rho_0^2}{c^4}}.$$

Man erhält dann für das Potential

$$\varphi_a^g = \Phi^u - x\mathfrak{X}^u + x\mathfrak{X}^u\,\frac{S_1}{I_1} + \frac{E}{2}\,S_4 \qquad \ldots \text{I}_7)$$

$$\varphi_0^g = \Phi^u + \frac{E}{C}, \qquad \ldots \text{II}_7)$$

wobei

$$C = \frac{e}{\dfrac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\dfrac{a}{e}},$$

ferner für die Kräfte

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_a^g &= \mathfrak{X}^u - \mathfrak{X}^u\,\frac{S_1}{I_1} + \frac{1}{\alpha^3\gamma^2}\,\frac{1}{M^2}\left(\frac{2x^2\mathfrak{X}^u}{I_1\alpha^2} + Ex\right)\\
\mathfrak{Y}_a^g &= \frac{1}{\alpha\gamma^4}\,\frac{1}{M^2}\left(\frac{2xy\mathfrak{X}^u}{I_1\alpha^2} + Ey\right)\\
\mathfrak{Z}_a^g &= \frac{1}{\alpha\gamma^4}\,\frac{1}{M^2}\left(\frac{2xz\mathfrak{X}^u}{I_1\alpha^2} + Ez\right)\\
\mathfrak{R}_a^g &= \frac{1}{\alpha\gamma^4}\,\frac{\rho}{M^2}\left(\frac{2x\mathfrak{X}^u}{I_1\alpha^2} + E\right)\\
\mathfrak{E}_a^g &= \sqrt{(\mathfrak{X}_a^g)^2 + (\mathfrak{R}_a^g)^2}
\end{aligned}\right\} \ldots \text{IV}_7)$$

und schließlich für die Ladungen

$$\sigma^g = \frac{1}{2\pi a c^2}\left(\frac{x_0 \mathfrak{X}''}{I_1}\,\frac{1}{a^2} + \frac{E}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{\rho_0^2}{c^4}}} \qquad \ldots \mathrm{VII}_7)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a^g &= \frac{1}{2\pi a c^2}\left(\frac{\mathfrak{X}''}{I_1} + \frac{E}{2}\,a\right) \\ \sigma_b^g &= \sigma_c^g = \frac{E}{4\pi a c} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \mathrm{VIII}_7)$$

und da

$$\sigma_a^I = \frac{\mathfrak{X}''}{2\pi I_1 a c^2}, \quad \sigma_b^I = \sigma_c^I = 0, \quad \sigma_a^E = \frac{E}{4\pi c^2}, \quad \sigma_b^E = \sigma_c^E = \frac{E}{4\pi a c},$$

so wird

$$\sigma^g = \left(\sigma_a^I \frac{x_0}{a^2} + \frac{\sigma_a^E}{3a} + \frac{2\sigma_c^E}{3c}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{\rho_0^2}{b^4}}}\,. \qquad \ldots \mathrm{IX}_7)$$

8. Abgeplattetes Rotationsellipsoid im homogenen Felde, senkrecht zur kurzen Achse.

Hier ist $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{Z}''$, $\mathfrak{X}'' = 0$, $\mathfrak{Y}'' = 0$, die Symmetrie des Feldes bezüglich einer Achse fällt fort; im übrigen gelten dieselben Abkürzungen wie im Abschnitt 7.

Es ist das Potential

$$\varphi_a^g = \Phi'' - z\mathfrak{Z}'' + z\mathfrak{Z}''\frac{S_3}{I_3} + \frac{E}{2}S_4 \qquad \ldots \mathrm{I}_8)$$

$$\varphi_0^g = \Phi'' + \frac{E}{C}, \qquad \ldots \mathrm{II}_8)$$

wobei

$$C = \frac{e}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{e}},$$

die Kräfte werden

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_a^g &= \frac{1}{\alpha^3\gamma^2}\,\frac{1}{M^2}\left(\frac{2xz\mathfrak{Z}''}{I_3\gamma^2}+Ex\right)\\
\mathfrak{Y}_a^g &= \frac{1}{\alpha\gamma^4}\,\frac{1}{M^2}\left(\frac{2yz\mathfrak{Z}''}{I_3\gamma^2}+Ey\right)\\
\mathfrak{Z}_a^g &= \mathfrak{Z}''-\mathfrak{Z}''\frac{S_3}{I_3}+\frac{1}{\alpha\gamma^4}\,\frac{1}{M^2}\left(\frac{2z^2\mathfrak{Z}''}{I_3\gamma^2}+Ez\right)\\
\mathfrak{E}_a^g &= \sqrt{(\mathfrak{X}_a^g)^2+(\mathfrak{Y}_a^g)^2+(\mathfrak{Z}_a^g)^2}
\end{aligned}\right\}\quad \ldots \mathrm{IV}_8)$$

und schließlich die Ladungen

$$\sigma^g = \frac{1}{2\pi a c^2}\left(\frac{z_0\mathfrak{Z}''}{I_3}\,\frac{1}{c^2}+\frac{E}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{c^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}\quad \ldots \mathrm{VII}_8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_a^g &= \frac{E}{4\pi c^2}\\
\sigma_b^g &= \frac{E}{4\pi a c}\\
\sigma_c^g &= \frac{1}{2\pi a c^2}\left(\frac{\mathfrak{Z}''}{I_3}+\frac{E}{2}c\right)
\end{aligned}\right\}\quad \ldots \mathrm{VIII}_8)$$

und da

$$\sigma_a^I = 0,\quad \sigma_b^I = 0,\quad \sigma_c^I = \frac{\mathfrak{Z}''}{2\pi I_3 a c^2},\quad \sigma_a^E = \frac{E}{4\pi c^2},\quad \sigma_b^E = \frac{E}{4\pi a c},$$

$$\sigma_c^E = \frac{E}{4\pi a c}$$

ist, wird

$$\sigma^g = \left(\frac{z_0\sigma_c^I}{c^2}+\frac{\sigma_a^E}{3a}+\frac{2\sigma_c^E}{3c}\right)\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{c^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}\,.\quad \ldots \mathrm{IX}_8)$$

9. Die Kapazität eines gestreckten Rotationsellipsoides.

Aus Abschnitt 5 folgt für die Kapazität eines verlängerten Rotationsellipsoides mit den Halbachsen a und c

$$C = \frac{2e}{\lg\dfrac{c+e}{c-e}}, \quad \ldots 3a)$$

wobei $e = \sqrt{c^2 - a^2}$ ist oder

$$C = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{\lg \frac{c + \sqrt{c^2 - a^2}}{a}} . \qquad \ldots 3b)$$

Ist a sehr klein gegen c oder e nahezu gleich c, so ergibt sich als Grenzwert

$$C = \frac{c}{\lg \frac{2c}{a}} . \qquad \ldots 3c)$$

In folgender Tabelle sind die Werte von C, wenn man $c = 1$ setzt, ausgerechnet.

$a =$	1·0	0·9	0·8	0·7	0·6	0·5	0·4	0·3	0·2	0·1	0·05	0·02	0·01	0·001	0·000
$e = \sqrt{1-a^2}$	0	0·436	0·600	0·714	0·800	0·866	0·917	0·954	0·980	0·995	0·998	0·999	1·000	1·000	1·000
$C = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\lg\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}$	1	0·936	0·864	0·800	0·727	0·656	0·584	0·500	0·428	0·332	0·271	0·217	0·189	0·132	0

10. Die Kapazität eines abgeplatteten Rotations-ellipsoides.

Nach Abschnitt 7 ist die Kapazität

$$C = \frac{e}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{e}} \qquad \ldots 4a)$$

oder

$$C = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}}} \cdot \qquad \ldots 4b)$$

Ist a sehr klein gegen c, so wird

$$C = \frac{2c}{\pi} \cdot \qquad \ldots 4c)$$

In folgender Tabelle sind die Werte von C, wenn $c = 1$ gesetzt wird, enthalten.

$a =$	1·0	0·9	0·8	0·7	0·6	0·5	0·4	0·3	0·2	0·1	0·0
$e = \sqrt{1 - a^2}$	0·0	0·436	0·600	0·714	0·800	0·866	0·917	0·954	0·980	0·995	1·00
C	1·00	0·968	0·930	0·900	0·864	0·824	0·790	0·751	0·715	0·677	0·637

Die Kapazität ist nahezu proportional $\frac{a}{c}$ und kann auch durch die Gleichung

$$C = 0 \cdot 637 + 0 \cdot 385 \frac{a}{c} - 0 \cdot 022 \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

dargestellt werden.

10. Die Kapazität eines dreiachsigen Ellipsoides.

Aus Gleichung I_2), Abschnitt 2 ist die Kapazität eines dreiachsigen Ellipsoides durch die Gleichung

$$\frac{2}{C} = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} = I_4 \qquad \ldots 5a)$$

definiert, wobei $a < b < c$ ist.

Das Integral I_4 läßt sich durch die Substitution

$$u = \frac{c^2 \cos^2 \varphi - a^2}{\sin^2 \varphi}$$

auf das elliptische Integral erster Gattung transformieren; es wird nämlich

$$I_4 = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} F(\varphi_1, k) = \frac{2}{C} \quad \ldots 5b)$$

wo $k = \sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}$ und $\varphi_1 = \arccos \frac{a}{c} = \arcsin \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2}}$ ist.

Für eine elliptische Scheibe wird

$$\frac{2}{C} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\sin^2\varphi}} \quad \ldots 5c)$$

Im folgenden sind die Kapazitäten für einige Werte von a und b ausgerechnet, wenn $c = 1$ gesetzt wird.

$a=$	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
$b=$ 0·0	0·0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0·1	0·24	0·33	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0·2	0·33	0·38	0·43	—	—	—	—	—	—	—	—
0·3	0·38	0·42	0·46	0·50	—	—	—	—	—	—	—
0·4	0·42	0·47	0·50	0·54	0·58	—	—	—	—	—	—
0·5	0·46	0·51	0·54	0·58	0·62	0·66	—	—	—	—	—
0·6	0·50	0·54	0·58	0·62	0·66	0·69	0·73	—	—	—	—
0·7	0·53	0·57	0·62	0·65	0·69	0·73	0·77	0·80	—	—	—
0·8	0·57	0·61	0·65	0·69	0·73	0·76	0·80	0·83	0·86	—	—
0·9	0·60	0·64	0·68	0·72	0·76	0·79	0·83	0·87	0·90	0·94	—
1·0	0·64	0·68	0·72	0·75	0·79	0·82	0·86	0·90	0·93	0·97	1·00

12. Reihenentwicklung für die Integrale *I* und *S*.

Im allgemeinen Problem der Feldstörung durch ein dreiachsiges Ellipsoid treten folgende Integrale auf:

$$S_1 = \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3 (b^2+u)(c^2+u)}}$$

$$S_2 = \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)^3 (c^2+u)}}$$

$$S_3 = \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)^3}}$$

und

$$S_4 = \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}},$$

so wie die Integrale I_1, I_2, I_3, I_4, die aus den obigen hervorgehen, wenn die untere Grenze $u = 0$ wird.

Die Integrale S_1, S_2, S_3 lassen sich durch Differentiation nach a^2, b^2, c^2 aus S_4 ableiten.

Es ist nämlich

$$S_1 = -2\frac{\partial S_4}{\partial a^2}, \quad S_2 = -2\frac{\partial S_4}{\partial b^2}, \quad S_3 = -2\frac{\partial S_4}{\partial c^2};$$

das Integral S_4 aber geht durch die schon im vorhergehenden Abschnitt erwähnte Substitution $u = \frac{c^2 \cos^2 \varphi - a^2}{\sin^2 \varphi}$ in die Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung über.

Es wird

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} F(\varphi, k), \qquad \ldots 6)$$

wobei

$$\varphi = \arccos \sqrt{\frac{a^2+u}{c^2+u}} = \arcsin \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}}$$

und

$$k = \sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}$$

ist.

Infolgedessen wird

$$-\frac{S_1}{2} = +\frac{\partial S_4}{\partial a^2} = \frac{1}{\sqrt{(c^2-a^2)^3}} F(\varphi, k) + \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial a^2}$$

$$-\frac{S_2}{2} = +\frac{\partial S_4}{\partial b^2} = + \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial b^2}$$

$$-\frac{S_3}{2} = +\frac{\partial S_4}{\partial c^2} = -\frac{1}{\sqrt{(c^2-a^2)^3}} F(\varphi, k) + \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial c^2}$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} F(\varphi, k)$$

und

$$\frac{\partial k}{\partial a^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2-a^2} k, \quad \frac{\partial k}{\partial b^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(c^2-a^2)} \frac{1}{k},$$

$$\frac{\partial k}{\partial c^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2-a^2} \frac{k'^2}{k},$$

wobei der komplementäre Modul $k' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}$ ist.

Der Wert[1] $\frac{\partial F}{\partial k}$ läßt sich durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung darstellen:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{1}{k} F(\varphi, k) + \frac{1}{kk'^2} E(\varphi, k) - \frac{k}{k'^2} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wenn $\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = E(\varphi, k)$ gesetzt wird.

Setzt man diese Werte in obige Gleichung ein und berücksichtigt, daß $\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{c^2-a^2} \frac{\sqrt{a^2+u}}{\sqrt{(b^2+u)(c^2+u)}}$,

[1] Siehe z. B. Láska, Mathem. Formelsammlung, p. 328.

so wird

$$S_1 = \frac{2}{k'^2 \sqrt{(c^2 - a^2)^3}} \left[-E(\varphi, k) + \right.$$

$$\left. + k^2 \sqrt{c^2 - a^2} \frac{\sqrt{a^2 + u}}{\sqrt{(b^2 + u)(c^2 + u)}} \right] \quad \ldots 8)$$

$$S_2 = \frac{2}{k^2 k'^2 \sqrt{(c^2 - a^2)^3}} \left[-k'^2 F(\varphi_1 k) + E(\varphi_1 k) - \right.$$

$$\left. - k^2 \sqrt{c^2 - a^2} \frac{\sqrt{a^2 + u}}{\sqrt{(b^2 + u)(c^2 + u)}} \right] \quad \ldots 9)$$

$$S_3 = \frac{2}{k^2 \sqrt{(c^2 - a^2)^3}} \left[F(\varphi_1 k) - E(\varphi_1 k) + \right.$$

$$\left. + k^2 \sqrt{c^2 - a^2} \frac{\sqrt{a^2 + u}}{\sqrt{(b^2 + u)(c^2 + u)}} \right] \quad \ldots 10)$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2}} F(\varphi_1 k); \quad \ldots 11)$$

oder auch

$$S_2 = -\frac{1}{k^2} \left(S_1 + \frac{1}{(c^2 - a^2)} S_4 \right) \quad \ldots 12)$$

und

$$S_3 = \frac{1}{k^2} \left(k'^2 S_1 + \frac{S_4}{(c^2 - a^2)} \right). \quad \ldots 13)$$

Analoge Gleichungen gelten für die Integrale I_1, I_2, I_3, I_4. Es wird

$$I_1 = \frac{2}{k'^2 \sqrt{(c^2 - a^2)^3}} \left[-E\left(\arc\cos \frac{a}{c}, k \right) + \right.$$

$$\left. + k^2 \frac{a}{bc} \sqrt{c^2 - a^2} \right] \quad \ldots 14)$$

$$I_2 = \frac{2}{k^2 k'^2 \sqrt{(c^2 - a^2)^3}} \left[-k'^2 F\left(\arc\cos \frac{a}{c}, k \right) + \right.$$

$$\left. + E\left(\arc\cos \frac{a}{c}, k \right) - k^2 \frac{a}{bc} \sqrt{c^2 - a^2} \right] \quad \ldots 15)$$

$$I_3 = \frac{2}{k^2\sqrt{(c^2-a^2)^3}}\left[F\left(\arccos\frac{a}{c}, k\right) - \right.$$

$$\left. - E\left(\arccos\frac{a}{c}, k\right) + k^2\frac{a}{bc}\sqrt{c^2-a^2}\right] \quad \ldots 16)$$

$$I_4 = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2}} F\left(\arccos\frac{a}{c}, k\right). \quad \ldots 17)$$

Da nun alle acht Integrale, die beim allgemeinen Störungsproblem des Ellipsoides auftreten, auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung zurückgeführt sind, können die bekannten Reihenentwicklungen[1] für F und E verwendet werden.

1. Wenn k klein ist, wird

$$F\left(\arcsin\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}}, k\right) = \arcsin\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}}\cdot K -$$

$$- \frac{\sqrt{a^2+u}\sqrt{c^2-a^2}}{c^2+u}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot k^2 + \frac{1.3}{2.4}A_1 k^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}A_2 k^6 + \ldots\right\}, \quad \ldots 18)$$

wobei

$$A_1 = \frac{1}{4}\frac{c^2-a^2}{c^2+u} + \frac{3}{2.4}$$

$$A_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{c^2-a^2}{c^2+u}\right)^4 + \frac{5}{6.4}\left(\frac{c^2-a^2}{c^2+u}\right)^2 + \frac{5.3}{6.4.2}$$

$$A_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{c^2-a^2}{c^2+u}\right)^6 + \frac{7}{8.6}\left(\frac{c^2-a^2}{c^2+u}\right)^4 +$$

$$+ \frac{7.5}{8.6.4}\left(\frac{c^2-a^2}{c^2+u}\right)^2 + \frac{7.5.3}{8.6.4.2},$$

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right\} \quad \ldots 19)$$

---

[1] Siehe **Láska**, Mathem. Formelsammlung, p. 332, und **Schlömilch**, Kompendium der höheren Analysis, 4. Aufl., p. 322.

ist. Ebenso wird

$$E\left(\arc\sin\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}},k\right)=\arc\sin\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}}\cdot\mathrm{E}+$$

$$+\frac{\sqrt{a^2+u}\sqrt{c^2-a^2}}{c^2+u}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2.4}k^4A_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1.3}{2.4.6}k^6A_2+\ldots\right\}, \qquad \ldots 20)$$

wobei A_1, A_2, A_3 dieselbe Bedeutung haben wie oben und

$$\mathrm{E}=E\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3k^4-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5k^6+\ldots\right\} \qquad \ldots 21)$$

ist.

2. Ist dagegen k nahe gleich 1, so sind Reihenentwicklungen nach dem komplementären Modul $k'=\sqrt{1-k^2}$ bequemer.

Es wird dann

$$F\left(\arc\sin\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}},k\right)=\left[\lg\frac{\sqrt{c^2+u}+\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{a^2+u}}\right]\cdot K'-$$

$$-\sqrt{\frac{c^2+u}{c^2-a^2}}\left\{\frac{1}{2}A_1'k'^2-\frac{1.3}{2.4}A_2'k'^4+\right.$$

$$\left.+\frac{1.3.5}{2.4.6}A_3'k'^6-\ldots\right\}, \qquad \ldots 22)$$

wobei

$$A_1'=\frac{1}{2}\frac{c^2-a^2}{a^2+u}$$

$$A_2'=\frac{1}{4}\left(\frac{c^2-a^2}{a^2+u}\right)^2-\frac{3}{2.4}\frac{c^2-a^2}{a^2+u}$$

$$A_3'=\frac{1}{6}\left(\frac{c^2-a^2}{a^2+u}\right)^3-\frac{5}{6.4}\left(\frac{c^2-a^2}{a^2+u}\right)^2+\frac{5.3}{6.4.2}\left(\frac{c^2-a^2}{a^2+u}\right) \text{ etc. etc.}$$

und $K'=F\left(\frac{\pi}{2},k'\right)$ ist.

Analog

$$E\left(\arc\sin\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}}, k\right) = \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+u}} -$$

$$-\left[\lg\frac{\sqrt{c^2+u}+\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{a^2+u}}\right]E' -$$

$$-\sqrt{\frac{c^2+u}{c^2-a^2}}\left\{\frac{1}{2}A'_1 k'^2 - \frac{1}{2.4}A'_2 k'^4 +\right.$$

$$\left.+\frac{1.3}{2.4.6}A'_3 k'^6 - \ldots\right\}, \qquad \ldots 23)$$

wobei A'_1, A'_2, A'_3 dieselbe Bedeutung wie oben haben und $E' = E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)$ ist.

Die Reihenentwicklungen nach k' versagen, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird; man verwendet dann für die vollständigen Integrale K und E folgende Reihen:

$$K = \alpha_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha_2 k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \alpha_4 k'^4 + \ldots, \qquad \ldots 24)$$

wo

$$\alpha_0 = \log\left(\frac{4}{k'}\right), \quad \alpha_2 = \alpha_0 - 1,$$

$$\alpha_4 = \alpha_2 - \frac{2}{3.4}, \quad \alpha_6 = \alpha_4 - \frac{2}{5.6},$$

$$\alpha_8 = \alpha_6 - \frac{2}{7.8}$$

u. s. w. ist. Die Reihe für E lautet:

$$E = 1 + \frac{1}{2}\beta_2 k'^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4}\beta_4 k'^4 +$$

$$+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5}{6}\beta_6 k'^6 + \ldots \qquad \ldots 25)$$

wo

$$\beta_2 = l\left(\frac{4}{k'}\right) - \frac{1}{1.2},$$

$$\beta_4 = \beta_2 - \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.4},$$

$$\beta_6 = \beta_4 - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5.6}$$

u. s. w. ist.

In vielen praktischen Fällen wird es bequemer sein, statt der Reihenentwicklungen die Legendre'schen Tafeln zu verwenden.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIII.

Über gewisse Störungen des Erdfeldes mit Rücksicht auf die Praxis luftelektrischer Messungen

von

Dr. Hans Benndorf.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. März 1906.)

In der Praxis luftelektrischer Messungen stellt sich oft das Bedürfnis ein, den Betrag zu schätzen, um den das normale Erdfeld durch Unebenheiten des Bodens (Berge, Täler, Häuser, Bäume, Stangen etc.) gestört wird, besonders dann, wenn es mit Schwierigkeiten verbunden ist, Reduktionsmessungen in der Ebene auszuführen.

In einer früheren Arbeit[1] habe ich bereits derartige Störungen durch Annahme gewisser einfacher, typischer Formen für Berge und Täler berechnet.

In der vorliegenden Arbeit sollen die Störungen solcher Körper behandelt werden, die sich in genügenden Annäherungen als Ellipsoide ansehen lassen; insbesondere soll die Beeinflussung des Feldes durch den Luftballon, Stangen, Drähte und Kollektoren eingehender behandelt werden.

Die allgemeinen Formeln für Potential und Kraftverteilung in einem ursprünglich homogenen Felde, das durch ein beliebig

---

[1] H. Benndorf, Störungen des normalen atmosphärischen Potentialgefälles durch Bodenerhebungen. Diese Sitzungsber., 109, Abt. IIa, p. 923 (1900).

orientiertes, dreiachsiges, geladenes, leitendes Ellipsoid gestört ist, habe ich in einer Arbeit[1] zusammengefaßt.

Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, werde ich mich immer auf die entsprechenden Formeln berufen und dies durch [A] andeuten.

Im folgenden sollen nun die verschiedenen Störungsfälle einzeln behandelt werden.

I. Der Luftballon.

Die Störung, die ein Luftballon mit einer Eigenladung E im homogenen Felde hervorruft, der Größenordnung nach zu kennen, ist von großer Wichtigkeit für die Meßtechnik im Ballon; diese Frage praktisch durch Messungen zu lösen, trifft immer auf gewisse Schwierigkeiten, die dadurch bedingt sind, daß der Ballon einerseits durch seine Bewegung an Stellen anderer Feldintensität kommt, andrerseits z. B. durch Ballastauswerfen seine Eigenladung in nicht kontrollierbarer Weise ändert.

Es erscheint daher wünschenswert, auszurechnen, in welche Tiefe man mit den Elektroden gehen muß, damit das gemessene Potentialgefälle sich nur um einen gewissen kleinen Prozentsatz vom Potentialgefälle im freien Raum unterscheidet.

Ich habe versucht, zunächst das Störungsfeld zweier Kugeln (einer großen und einer kleinen) im homogenen Felde zu berechnen, ein Problem,[2] das in seiner Allgemeinheit bereits gelöst ist; die dazu nötigen numerischen Rechnungen aber sind infolge der verschiedenen Reihenentwicklungen so umständlich, daß die darauf verwendete Mühe in keinem Verhältnisse zum erreichten Resultat stehen würde.

Statt durch zwei Kugeln kann man den Luftballon, wenn auch mit geringerer Annäherung, durch ein Rotationsellipsoid darstellen; besonders der Einfluß der Schwankung der Eigenladung wird vermutlich beim Ballon nicht wesentlich verschieden sein von dem eines Ellipsoides.

---

[1] Siehe H. Benndorf, Über die Störung des homogenen elektrischen Feldes durch ein dreiachsiges Ellipsoid. Diese Sitzungsber.

[2] Siehe J. Weickert, Aus dem Gebiet der Influenzelektrizität. J. D., Leipzig 1879.

Schon Linke[1] hat den Versuch gemacht, das Feld eines Ballons als das eines Rotationsellipsoides zu untersuchen, indes sind seine Resultate nicht richtig, da teilweise falsche Formeln verwendet werden.[2]

Ich werde daher im folgenden diese Rechnungen noch einmal durchführen.

Die z-Achse des Koordinatensystems sei vertikal nach abwärts gerichtet, das Rotationsellipsoid mit den Achsen a und c ($c > a$) habe seinen Mittelpunkt im Ursprung und Achse c sei parallel mit z. Das Potential in der Höhe des Mittelpunktes sei im ungestörten Feld Φ'', die Intensität des Erdfeldes $\mathfrak{Z}''$ und die Z-Komponente der Intensität, die im Außenraum herrscht, wenn das Ellipsoid eine Ladung E hat, $\mathfrak{Z}_a^g$. Dann ergibt sich aus Formel IV_5 ([A], Abschnitt 5), wenn man sich auf Punkte der z-Achse beschränkt, die Gesamtintensität

$$\mathfrak{E}_a^g = \mathfrak{Z}_a^g = [\mathfrak{Z}''] + \left[\frac{\mathfrak{Z}''}{I_3}\left(-S_3 + \frac{2z^2}{\alpha^2\gamma^5}\,\frac{1}{M^2}\right)\right] + \left[\frac{Ez}{\alpha^2\gamma^3 M^2}\right], \qquad 1)$$

---

[1] F. Linke, Luftelektrische Messungen bei zwölf Ballonfahrten. Abhandl. der k. Ges. d. W. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, N. F., Bd. III, Nr. 5 (1904).

[2] Die Formeln für das Potential und die Ladungsdichte der induzierten Elektrizität sind zwar richtig, dagegen die entsprechenden für die Eigenladung falsch. Die Ursache liegt darin, daß Herr Linke den Ausdruck für das Potential eines räumlich mit Masse erfüllten Ellipsoides als Potential eines elektrisch geladenen Ellipsoides ansieht. In seiner Bezeichnungsweise hat Formel IV zu lauten

$$\varphi^E = \frac{E}{2}\,\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}}\,\lg\frac{z+\sqrt{c^2-a^2}}{z-\sqrt{c^2-a^2}}$$

statt

$$\varphi^E = \frac{3}{2}\,E\,\frac{1}{a^2-c^2}\left[\frac{a^2-c^2+z^2}{2\sqrt{c^2-a^2}}\,\lg\frac{z+\sqrt{c^2-a^2}}{z-\sqrt{c^2-a^2}} - z\right],$$

ferner Formel VI $\sigma_c^E = \dfrac{E}{4\pi a^2}$ statt

$$\sigma_c^E = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{E}{a^2-c^2}\left[\frac{c}{\sqrt{c^2-a^2}}\,\lg\frac{c+\sqrt{c^2-a^2}}{c-\sqrt{c^2-a^2}} - 2\right],$$

infolge dieses Irrtums sind auch die numerischen Werte und die daraus gezogenen Schlüsse nicht streng richtig.

wobei

$$I_3 = -\frac{2}{e^2 c} + \frac{1}{e^3} \lg \frac{c+e}{c-e}, \quad S_3 = -\frac{2}{e^2 z} + \frac{1}{e^3} \lg \frac{z+e}{z-e},$$

$$\alpha^2 = z^2 - e^2, \quad \gamma = z, \quad \frac{1}{M^2} = z^2, \quad e = \sqrt{c^2 - a^2}$$

zu setzen ist und die Klammerausdrücke der Reihe nach das ursprüngliche, das nur von den induzierten Ladungen, das nur von der Eigenladung herrührende Feld bedeuten.

Setzt man die Werte in Gleichung 1) ein, so wird

$$\mathfrak{E}_a^g = \mathfrak{Z}'' + \frac{\mathfrak{Z}''}{I_3 e^2} \left(\frac{2z}{z^2 - e^2} - \frac{1}{e} \lg \frac{z+e}{z-e} \right) + \frac{E}{z^2 - e^2} \qquad 2)$$

und daher

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_a^g}{\partial z} = -\frac{\mathfrak{Z}''}{I_3} \cdot \frac{4}{(z^2 - e^2)^2} - \frac{2Ez}{(z^2 - e^2)^2}. \qquad 3)$$

Aus Gleichung 2) sieht man zunächst, daß aus der Größe des wirklichen Feldes, nicht auf die des ungestörten Feldes geschlossen werden kann, solange nichts über die Größe der Ladung E bekannt ist; kennt man daher nicht wenigstens die obere Grenze der Ladung, die ein Ballon durch einige Zeit hindurch behalten kann, ist eine allgemeine Diskussion der Störungsfrage ausgeschlossen. Anders verhält es sich, wenn man dem Vorschlage von Linke folgt und durch Anbringung einer genügend rasch wirkenden Tropfelektrode in leitender Verbindung mit dem Ballon dafür sorgt, daß die Ladungsdichte an einem Punkte dauernd auf Null und damit die Gesamtladung bei konstantem $\mathfrak{Z}''$ dauernd konstant gehalten wird.

Wir wollen daher zunächst die Frage untersuchen, wie die Störung des Feldes an verschiedenen Punkten der Z-Achse beschaffen ist, wenn auf dem Ellipsoid in gewisser Höhe die Ladungsdichte Null ist.

Aus Gleichung VII_5 ([A], Abschnitt 5) ergibt sich für die Ladungsdichte, wenn z_0 den Abstand eines Oberflächenpunktes des Ellipsoides von der xy-Ebene bedeutet,

$$\sigma^g = \frac{1}{2\pi a c} \left(\frac{z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3} \frac{1}{c^2} + \frac{E}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - z_0^2 \frac{e^2}{c^4}}}; \qquad 4)$$

aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn man $\sigma^g = 0$ setzt, da die Wurzel nicht ∞ werden kann,

$$E = -\frac{2 z_0 \mathfrak{Z}''}{I_3 c^2} \qquad 5)$$

und, wenn man diesen Wert in Gleichung 2) einführt,

$$\mathfrak{E}_a^g = \mathfrak{Z}''\left[1 + \frac{1}{I_3}\left(\frac{1}{e^2}\,\frac{2z}{z^2-e^2} - \frac{1}{e^3}\lg\frac{z+e}{z-e} - \frac{2z_0}{c^2(z^2-e^2)}\right)\right]. \qquad 6)$$

Als Störungskoeffizienten μ kann man zweckmäßig den Quotienten $\frac{\mathfrak{E}_a^g - \mathfrak{Z}''}{\mathfrak{Z}''}$ ansehen, es ist dann

$$\mu = \frac{1}{I_3}\left(\frac{1}{e^2}\cdot\frac{2z}{z^2-e^2} - \frac{1}{e^3}\lg\frac{z+e}{z-e} - \frac{2z_0}{(z^2-e^2)}\,\frac{1}{c^2}\right) \qquad 7)$$

und nach Gleichung 3)

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}''}\,\frac{\partial \mathfrak{E}_a^g}{\partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{4}{I_3 (z^2-c^2)^2}\left(\frac{z z_0}{c^2} - 1\right). \qquad 8)$$

Aus Gleichung 8) folgt zunächst, daß μ von $z = c$ bis $z = \frac{c^2}{z_0}$ fortwährend abnimmt, für $z = \frac{c^2}{z_0}$ ein Minimum wird, für größer werdende z zunimmt, um schließlich für $z = \infty$ Null zu werden; der Wert von μ, der der Stelle des Minimums entspricht, muß daher im allgemeinen negativ sein; wählt man also z_0 so, daß μ für $z = c$ positiv wird, so muß die Gleichung $\mu = 0$ eine Wurzel haben, die zwischen c und $\frac{c^2}{z_0}$ liegt. Man kann es daher durch passende Wahl von z_0 erreichen, daß an einer bestimmten Stelle z entweder $\mu = 0$ oder $\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$ wird.

Statt die Gleichung für μ weiter allgemein zu diskutieren, wird es sich mit Rücksicht auf den praktischen Zweck der ganzen Betrachtung empfehlen, für e und c spezielle Werte anzunehmen; wir wollen ähnliche Verhältnisse der Ballondimensionen, wie sie Linke voraussetzt, zu Grunde legen, $e = 9\,m$, $c = 12\,m$ und $z_0 = \varepsilon c$ setzen, wobei ε ein vorläufig unbestimmter echter Bruch sein soll.

Unter dieser Voraussetzung wird

$$\mu = \frac{\dfrac{2zce - 2\varepsilon e^3}{c(z^2 - e^2)} - \lg \dfrac{z+e}{z-e}}{-\dfrac{2e}{c} + \lg \dfrac{c+e}{c-e}}. \qquad 9)$$

In Tabelle I sind die Werte von μ für die Werte 0·0, 0·2, 0·4, 0·6, 0·8, 1·0 von ε und für verschiedene z und $h = z - c$ ausgerechnet und in Fig. 1 graphisch dargestellt.

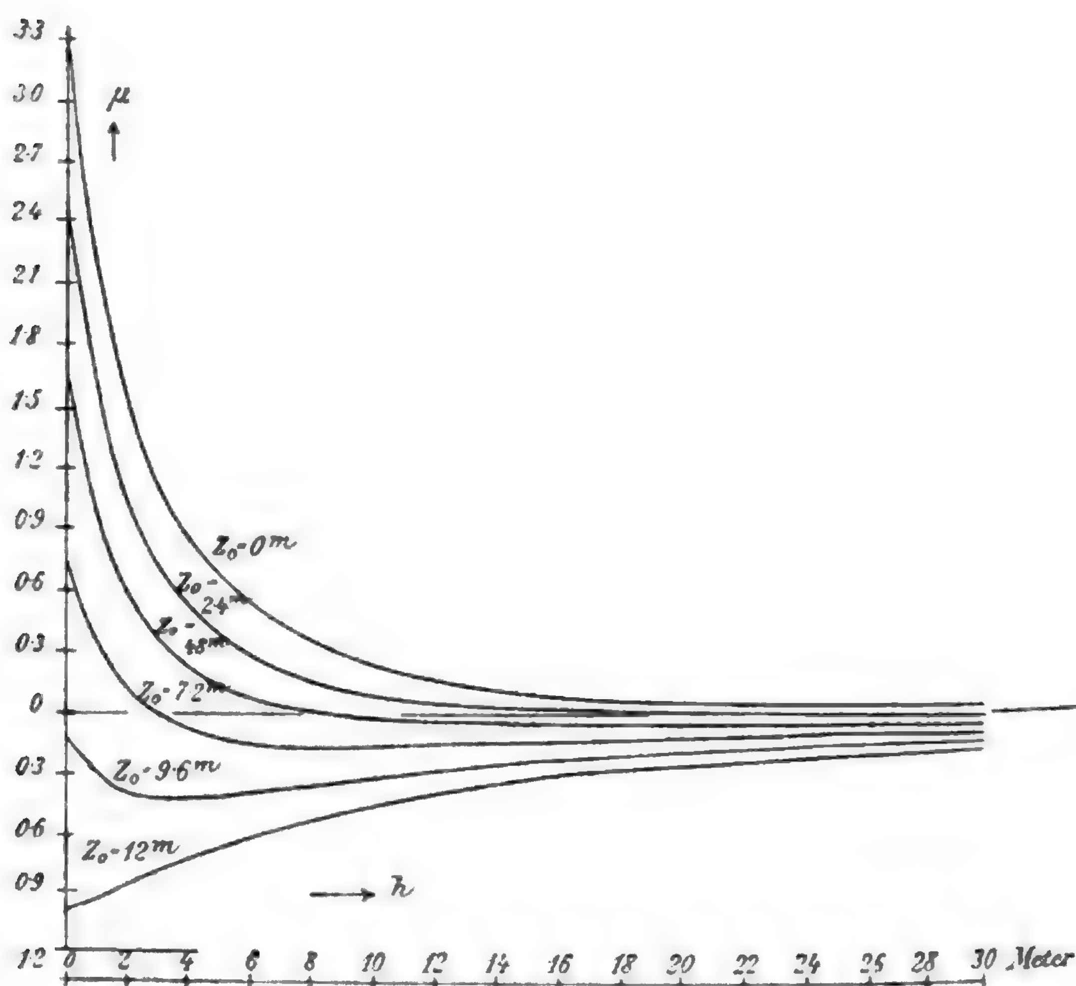


Fig. 1.

Die Abstände vom tiefsten Punkte des Ellipsoides, in denen $\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$ wird, ergeben sich aus Gleichung 8)

für	$z_0 = 0\,m$	$2\cdot4\,m$	$4\cdot8\,m$	$7\cdot2\,m$	$9\cdot6\,m$	$12\cdot0\,m$
zu	$h = \infty$	$48\,m$	$18\,m$	$8\,m$	$3\,m$	$0\,m$

Tabelle I.

z	12 m	13 m	14 m	16 m	18 m	20 m	22 m	24 m	27 m	32 m	37 m	42 m	z_0
h	0 m	1 m	2 m	4 m	6 m	8 m	10 m	12 m	15 m	20 m	25 m	30 m	
μ $\varepsilon = 0\cdot0$	3·27	2·14	1·49	0·84	0·53	0·36	0·26	0·19	0·13	0·073	0·046	0·031	0·0
0·2	2·42	1·52	1·02	0·53	0·30	0·18	0·12	0·079	0·043	0·049	0·004	—0·003	2·4
0·4	1·56	0·90	0·54	0·22	0·077	0·015	—0·029	—0·031	—0·041	—0·042	—0·038	—0·038	4·8
0·6	0·70	0·28	0·070	—0·090	—0·15	—0·15	—0·15	—0·14	—0·12	0·10	—0·080	—0·073	7·2
0·8	—0·16	—0·33	—0·40	—0·40	—0·34	—0·31	—0·29	—0·25	—0·21	—0·16	—0·12	—0·11	9·6
1·0	—1·01	—0·95	—0·88	—0·71	—0·59	—0·50	—0·42	—0·33	—0·29	—0·22	—0·17	—0·14	12·0

Bezeichnet man als Reduktionsfaktor F die Zahl, mit der die wirklich vorhandene Feldintensität multipliziert werden muß, um die störungsfreie Intensität zu erhalten, so ergibt sich $F = \frac{1}{1+\mu}$ und für kleinere Werte von μ $F = 1-\mu$.

Die in diesem Abschnitte gefundenen Resultate lassen sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Ein verlängertes Rotationsellipsoid, das mit seiner langen Achse parallel den Kraftlinien in einem homogenen Felde von der Intensität $\mathfrak{Z}''$ liegt, erzeugt im Außenraume eine Störung des elektrischen Feldes.

Bezeichnet man $\mu = \frac{\mathfrak{E}_a^g - \mathfrak{Z}''}{\mathfrak{Z}''}$ als Störungskoeffizienten und beschränkt sich in der Diskussion auf Punkte, die in der Verlängerung der langen Achse liegen, so kann man sagen:

Im allgemeinen hängt μ sowohl von der Feldintensität $\mathfrak{Z}''$ als der Ladung E des Ellipsoides ab; wenn dagegen auf einem bestimmten Parallelkreis die Ladungsdichte dauernd auf Null gehalten wird, wird μ von $\mathfrak{Z}''$ unabhängig, weil dann E proportional $\mathfrak{Z}''$ ist.

In einem bestimmten Abstande vom Endpunkte des Ellipsoides ist μ im allgemeinen um so geringer, je gestreckter das Ellipsoid ist, bei gleichbleibender Längsachse.

Für ein Ellipsoid mit den Konstanten $c = 12$, $e = 9$, $a = 7 \cdot 93$ ergeben sich Störungskoeffizienten, deren Größen in Tabelle I verzeichnet sind.

In Anwendung auf einen Luftballon läßt sich schließen: Da ein Luftballon eine von einem Rotationsellipsoid abweichende Gestalt besitzt, wird in der Nähe des Ballons μ andere Werte besitzen; in größeren Distanzen jedoch wird dieser Unterschied vermutlich praktisch unerheblich sein.

Um die Störungen[1] klein zu machen, empfiehlt es sich, bei einem Ballon von 24 *m* Gesamthöhe und 16 *m* Durchmesser in Punkten, die etwa 7 *m* über dem tiefsten Punkte des Ballons liegen, die Ladungsdichte dauernd auf Null zu halten; es wird dann zwischen $h = 8\,m$ und $h = 10\,m$ $\mu = 0$ und zwischen $h = 10\,m$ und $h = 20\,m$ $\mu = -0 \cdot 08$ bis $-0 \cdot 04$ und $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ auch sehr klein. In diesem Gebiete darf man also eine

[1] Ich will zu erwähnen nicht unterlassen, daß Herr Linke zu ähnlichen Schlüssen kommt, so daß sein falscher Weg zu praktisch richtigen Resultaten geführt hat.

verhältnismäßig gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Wirklichkeit erwarten.

Schließlich möchte ich noch bemerken, daß sich die vorangehenden Schlüsse zwar auf die Feldintensität beziehen, während bei den Ballonmessungen Potentialdifferenzen gemessen werden; indes tut dies der Gültigkeit der Schlüsse keinen Eintrag, da an den Stellen, die zur Messung empfohlen werden, die Änderung der Feldintensität mit der Tiefe unter dem Ballon nahezu Null ist.

Nebenbei bemerkt, böten Messungen an einem Fesselballon unter den nötigen Vorsichtsmaßregeln Gelegenheit, die Gültigkeit der obigen Formeln zu prüfen. Korrektionen für das Fesselseil könnten nach Berechnungen des Abschnittes II angebracht werden.

II. Stangenartige Gebilde, welche die Niveauflächen senkrecht durchsetzen.

Denken wir uns die x, y-Ebene als leitende horizontale Fläche auf dem Potential $\Phi^u =$ Null und im Ursprung die Hälfte eines verlängerten leitenden Rotationsellipsoides so aufgesetzt, daß die halbe lange Achse c vertikal nach aufwärts mit der negativen z-Achse zusammenfällt, so geben in Anwendung eines bekannten Satzes der Elektrostatik die Gleichungen ([A], 5. Abschnitt) die Potential-, Kraft- und Massenverteilung an, wenn wir darin $E = 0$ setzen.

Wir wollen zunächst wieder die Störung des homogenen Feldes durch ein derartiges Halbellipsoid untersuchen.

a) Störung der Niveauflächen.

Der Störungskoeffizient μ^φ des Potentiales ergibt sich dann aus Gleichung I_5 ([A], Abschnitt 5)

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi_a^g - \varphi_a^u}{\varphi_a^u} = -\frac{S_3}{I_3}, \tag{10}$$

wobei

$$S_3 = -\frac{2}{e^2\sqrt{c^2+u}} + \frac{1}{e^3}\lg\frac{\sqrt{c^2+u}+e}{\sqrt{c^2+u}-e},$$

I_3 den Wert von S_3 für $u = 0$, also $I_3 = -\frac{2}{e^2 c} + \frac{1}{e^3} \lg \frac{c+e}{c-e}$, c und a, $c > a$ die beiden Halbachsen, $e = \sqrt{c^2 - a^2}$ und u die positive Wurzel der Gleichung $\frac{x^2+y^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$ bedeuten.

Zunächst zeigt sich, daß μ^φ für $u =$ const. auch konstant wird; d. h. der Störungskoeffizient des Potentiales ist auf allen Punkten eines mit dem gegebenen Halbellipsoid konfokalen Halbellipsoides konstant. Bezeichnen wir mit c_1 die große Halbachse eines solchen zum Parameter u gehörigen Ellipsoides, so läßt sich schreiben:

$$\mu^\varphi = -\frac{\lg \dfrac{1+\dfrac{e}{c_1}}{1-\dfrac{e}{c_1}} - 2\dfrac{e}{c_1}}{\lg \dfrac{1+\dfrac{e}{c}}{1-\dfrac{e}{c}} - 2\dfrac{e}{c}}, \qquad 11)$$

woraus eine einfache Bestimmung für μ folgt. Bezeichnen wir die Funktion $\lg \frac{1+\xi}{1-\xi} - 2\xi$ mit $f(\xi)$, $\frac{e}{c_1}$ mit ξ_1 und $\frac{e}{c}$ mit ξ_0, so ist $\mu^\varphi = -\frac{f(\xi_1)}{f(\xi_0)}$. Fig. 2 zeigt den Verlauf der Funktion $f(\xi)$; Tabelle II gibt ihre Werte für Argumente zwischen 0 und 1 an. Will man den Störungsfaktor μ^φ für einen bestimmten Fall berechnen, bestimmt man zunächst $\xi_0 = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$ aus den Halbachsen des vorliegenden Ellipsoides und entnimmt der Tabelle $f(\xi_0)$. Für einen Punkt mit den Koordinaten $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ und z wird

$$\xi_1 = \frac{e}{c_1} = \frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{(\rho^2+z^2+e^2) + \sqrt{(\rho^2+z^2+e^2)^2 - 4z^2e^2}}};$$

für Punkte sehr nahe der xy-Ebene, also $z = 0$, wird $\xi_1 = \frac{e}{\sqrt{\rho^2+e^2}}$, für Punkte der z-Achse also $\rho = 0$, $\xi_1 = \frac{e}{z}$. Über die Anwendung dieser Formeln siehe unten.

Tabelle II.

ξ	$f(\xi)$	ξ	$f(\xi)$	ξ	$f(\xi)$	ξ	$f(\xi)$	ξ	$f(\xi)$
0·00	0·0	0·50	0·0987	0·91	1·2351	0·991	3·4167	0·9999	7·9037
0·05	0·0001	0·55	0·1367	0·92	1·3381	0·992	3·5325	0·99999	10·2061
0·10	0·0007	0·60	0·1863	0·93	1·4568	0·993	3·6640	0·999999	12·5123
0·15	0·0022	0·65	0·2506	0·94	1·5961	0·994	3·8161		
0·20	0·0055	0·70	0·3346	0·95	1·7636	0·995	4·0015		
0·25	0·0108	0·75	0·4459	0·96	1·9718	0·996	4·2226		
0·30	0·0190	0·80	0·5973	0·97	2·2446	0·997	4·5083		
0·35	0·0309	0·85	0·8123	0·98	2·7352	0·998	4·9118		
0·40	0·0473	0·90	1·1444	0·990	3·3133	0·999	5·6029		
0·45	0·0694								

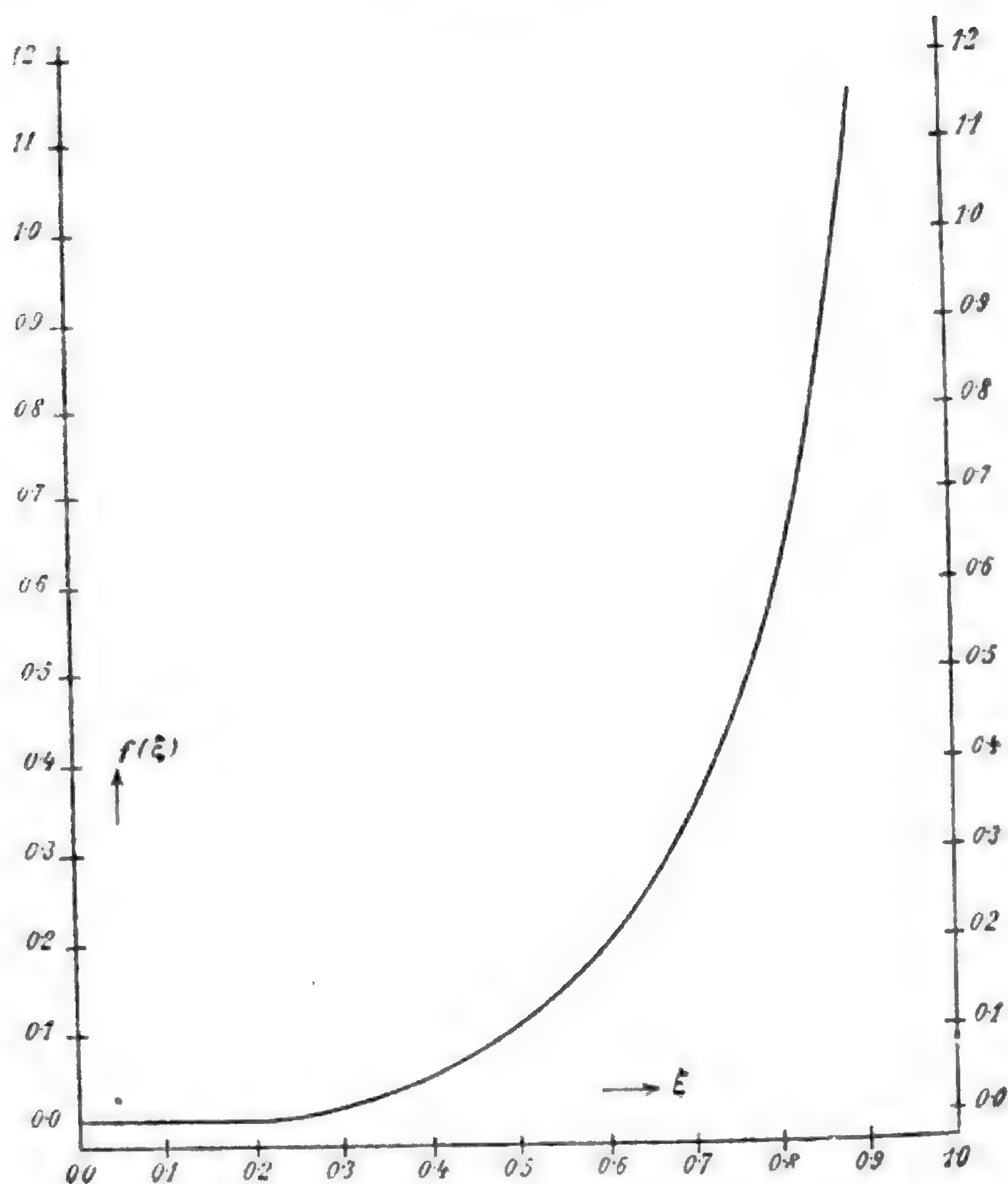


Fig. 2.

b) **Störung der Feldkomponenten.**

Der Störungskoeffizient $\mu^{\mathfrak{Z}}$ der z-Komponente ergibt sich aus Gleichung IV$_5$ ([*A*], Abschnitt 5)

$$\mu^{\mathfrak{Z}} = \frac{\mathfrak{Z}_a^{u} - \mathfrak{Z}''}{\mathfrak{Z}^{u}} =$$

$$= -\frac{S_3}{I_3} + \frac{2z^2}{(a^2+u)(c^2+u)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\dfrac{\rho^2}{(a^2+u)^2} + \dfrac{z^2}{(c^2+u)^2}} \cdot \frac{1}{I_3}. \qquad 12)$$

Betrachten wir zunächst nur Punkte der xy-Ebene, dann wird für $z = 0$ $\mu^{\mathfrak{Z}} = \mu^{\varphi}$, d. h. der Störungskoeffizient der Feldintensität ist gleich dem des Potentiales.

Für Punkte der z-Achse dagegen ($\rho = 0$) ergibt sich

$$\mu^3 = \mu^7 - \frac{2}{z(z^2 - e^2)} \frac{1}{I_3} = -\frac{f(\xi)}{f(\xi_0)} + \frac{2\xi^3}{(1-\xi^2)f(\xi_0)}, \quad 13)$$

wobei wir wieder $\xi_0 = \frac{e}{c}$ und $\xi = \frac{e}{z}$ setzen. Unter Zuhilfenahme von Tabelle II kann daher leicht die Störung der Feldintensität in der xy-Ebene und in der z-Achse berechnet werden. In allen andern Punkten des Raumes tritt zur gestörten Vertikalkomponente $\mathfrak{Z}_a^g$ noch eine Horizontalkomponente $\mathfrak{R}_a^g$ hinzu, deren Größe sich aus den Gleichungen IV$_5$ bestimmen läßt; für unseren Fall ist

$$\mathfrak{R}_a^g = \frac{2\rho z \mathfrak{Z}''}{(a^2+u)^2(c^2+u)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\frac{\rho^2}{(a^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}} \cdot \frac{1}{I_3}, \quad 14)$$

wobei sich u wieder als größte Wurzel der Gleichung $\frac{\rho^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$ bestimmt.

c) Die Feldintensität an der Ellipsoidfläche.

Aus Gleichung VII$_5$ ([A], Abschnitt 5) ergibt sich die Ladungsdichte und daraus die Kraft $\mathfrak{E}_0^g$ an einem Punkte des Ellipsoides mit den Koordinaten ρ_0 und z_0

$$\mathfrak{E}_0^g = 4\pi\sigma^g = \frac{2z_0}{a^2c^3} \frac{\mathfrak{Z}''}{I_3} \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_0^2}{a^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \qquad \left(\frac{a}{c} \leq \frac{1}{5}\right). \quad 15)$$

Für langgestreckte Ellipsoide $\left(\frac{a}{c} < \frac{1}{5}\right)$ und Punkte, für die genügend genau $\rho_0 = a$ gesetzt werden kann, wird

$$\mathfrak{E}_0^g = -\frac{2z_0}{a} \frac{e^3}{c^3} \frac{1}{f(\xi_0)} \cdot \mathfrak{Z}''$$

und von der Größenordnung

$$\frac{z_0}{a} \frac{\mathfrak{Z}''}{\lg\left(\frac{2c}{a}\right)}.$$

d) Berechnung spezieller Fälle.

1. Störung der Potentialniveauflächen in der Umgebung einer Stange.

Da ich für andere Zwecke einige Tabellen für den Störungskoeffizienten μ in der Nähe eines gestreckten Halbellipsoides ausgerechnet habe, seien die Zahlen hier mit aufgenommen.

Als Koordinaten eines Punktes dienen wieder die Entfernung ρ von der Längsachse des Ellipsoides und die Entfernung z von der xy-Ebene. In den folgenden Tabellen sind die Werte von ρ und z als Vielfache der Exzentrizität e des Ellipsoides angegeben; da aber nur sehr gestreckte Ellipsoide in Betracht gezogen sind, kann man die Werte von ρ und z auch als Vielfache der Halbachse oder Höhe des Halbellipsoides ansehen.

Tabelle III gibt zunächst die Werte von ξ_1, die nach der Formel

$$\xi_1 = \frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{(\rho^2+z^2+e^2)+\sqrt{(\rho^2+z^2+e^2)^2-4z^2e^2}}}$$

gerechnet sind, Tabelle IV die entsprechenden Werte von $f(\xi_1)$.

In den Tabellen V bis VIII sind dann die Werte des Störungskoeffizienten $\mu^?$ des Potentiales für vier verschiedene Ellipsoide aufgenommen, bei denen das Verhältnis der kleinen zur großen Halbachse der Reihe nach $\frac{a}{c} = 0\cdot28,\ 0\cdot10,\ 0\cdot05$ und $0\cdot01$ beträgt.

Die Verwendung der Tabellen ist einleuchtend; es soll z. B. ausgerechnet werden, welches Potential V in 1 *m* Entfernung von einer 1 *m* hohen und 20 *cm* dicken Stange in der Höhe von 1 *m* über der Erde vorhanden ist, wenn das Erdfeld $100 \frac{\text{Volt}}{m}$ beträgt.

Da $\frac{a}{c} = 0\cdot1$ ist, ergibt sich aus Tabelle VI für μ der Wert $-0\cdot051$; nun ist $\mu = \frac{V-100}{100}$ und daher $V = 100(1+\mu) = 94\cdot9$ Volt, das Feld also um 5% gestört.

Tabelle III.

Werte von ξ_1.

Erhebung über der Horizontalebene (z) in Vielfachen von e	ρ	Horizontale Entfernung (ρ) in Vielfachen von e 0·0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	1·5	2·0
	z = 0·0		0·981	0·926	0·855	0·781	0·704	0·556	0·446
	0·2		0·979	0·922	0·849	0·774	0·702	0·551	0·444
	0·4		0·977	0·915	0·839	0·763	0·691	0·544	0·441
	0·6		0·971	0·898	0·819	0·742	0·671	0·532	0·434
	0·8		0·953	0·870	0·788	0·712	0·647	0·516	0·423
	1·0		0·904	0·815	0·742	0·674	0·616	0·498	0·413
	1·1	0·909	0·854	0·778	0·712	0·653	0·598	0·488	0·406
	1·2	0·833	0·801	0·742	0·684	0·629	0·581	0·478	0·400
	1·4	0·714	0·691	0·666	0·626	0·582	0·543	0·455	0·386
	1·6	0·625	0·616	0·595	0·568	0·536	0·503	0·431	0·371
	1·8	0·556	0·548	0·536	0·516	0·494	0·467	0·410	0·357
	2·0	0·500	0·495	0·486	0·471	0·455	0·436	0·386	0·341
	2·5	0·400	0·398	0·393	0·386	0·376	0·367	0·337	0·305
	3·0	0·333	0·331	0·330	0·326	0·320	0·313	0·295	0·296

Tabelle IV.

Werte von $f(\xi_1)$.

Erhebung über der Horizontalebene (z) in Vielfachen von e	ρ	Horizontale Entfernung (ρ) in Vielfachen von e							
		0·0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	1·5	2·0
	z = 0·0		2·78	1·41	0·835	0·538	0·342	0·143	0·067
	0·2		2·69	1·37	0·807	0·520	0·338	0·138	0·066
	0·4		2·50	1·29	0·756	0·483	0·318	0·132	0·064
	0·6		2·22	1·13	0·667	0·428	0·284	0·122	0·061
	0·8		1·80	0·920	0·560	0·356	0·246	0·110	0·056
	1·0		1·18	0·650	0·428	0·289	0·205	0·097	0·052
	1·1	1·23	0·83	0·528	0·358	0·255	0·184	0·090	0·050
	1·2	0·74	0·601	0·428	0·304	0·222	0·166	0·084	0·047
	1·4	0·362	0·318	0·277	0·219	0·167	0·130	0·072	0·042
	1·6	0·217	0·205	0·181	0·153	0·125	0·101	0·060	0·037
	1·8	0·143	0·135	0·125	0·110	0·094	0·078	0·051	0·033
	2·0	0·099	0·095	0·089	0·080	0·072	0·062	0·042	0·028
	2·5	0·0473	0·046	0·044	0·042	0·039	0·036	0·027	0·020
	3·0	0·026	0·026	0·026	0·026	0·024	0·022	0·018	0·018

Tabelle V.

μ Störungskoeffizient der Niveauflächen. $\left(\frac{a}{c} = 0\cdot 28,\ \frac{e}{c} = \xi_0 = 0\cdot 960.\right)$

Erhebung über der Horizontalebene (z) in Vielfachen von e	ρ	Horizontale Entfernung (ρ) in Vielfachen von e							
		0·0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	1·5	2·0
	$z = 0\cdot 0$		—1·41	—0·716	—0·424	—0·273	—0·174	—0·073	—0·034
	0·2		—1·37	—0·696	—0·410	—0·262	—0·172	—0·070	—0·034
	0·4		—1·270	—0·655	—0·384	—0·245	—0·162	—0·067	—0·033
	0·6		—1·128	—0·574	—0·339	—0·217	—0·144	—0·062	—0·031
	0·8		—0·914	—0·467	—0·284	—0·181	—0·125	—0·056	—0·028
	1·0		—0·599	—0·330	—0·217	—0·147	—0·104	—0·049	—0·026
	1·1	—0·625	—0·422	—0·268	—0·182	—0·130	—0·093	—0·046	—0·025
	1·2	—0·376	—0·305	—0·217	—0·154	—0·113	—0·084	—0·043	—0·024
	1·4	—0·184	—0·162	—0·141	—0·111	—0·085	—0·066	—0·037	—0·021
	1·6	—0·110	—0·103	—0·092	—0·078	—0·064	—0·051	—0·031	—0·019
	1·8	—0·073	—0·069	—0·064	—0·056	—0·048	—0·040	—0·026	—0·017
	2·0	—0·050	—0·048	—0·045	—0·041	—0·037	—0·031	—0·021	—0·014
	2·5	—0·024	—0·023	—0·022	—0·020	—0·018	—0·018	—0·014	—0·010
	3·0	—0·013	—0·013	—0·013	—0 012	—0·012	—0·011	—0·009	—0·009

Tabelle VI.

μ Störungskoeffizient der Niveauflächen. $\left(\frac{a}{c} = 0\cdot 1,\ \frac{e}{c} = \xi_0 = 0\cdot 995.\right)$

Erhebung über der Horizontalebene (z) in Vielfachen von e	Horizontale Entfernung (ρ) in Vielfachen von e								
	ρ	0·0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	1·5	2·0
	$z =$ 0·0		—0·695	—0·353	—0·209	—0·134	—0·086	—0·036	—0·017
	0·2		—0·673	—0·343	—0·202	—0·130	—0·085	—0·035	—0·017
	0·4		—0·625	—0·323	—0·189	—0·121	—0·080	—0·033	—0·016
	0·6		—0·555	—0·280	—0·167	—0·107	—0·071	—0·031	—0·015
	0·8		—0·450	—0·230	—0·140	—0·089	—0·062	—0·028	—0·014
	1·0		—0·295	—0·163	—0·107	—0·072	—0·051	—0·024	—0·013
	1·1	—0·308	—0·208	—0·132	—0·090	—0·064	—0·046	—0·023	—0·013
	1·2	—0·185	—0·150	—0·107	—0·076	—0·056	—0·042	—0·021	—0·012
	1·4	—0·066	—0·080	—0·069	—0·055	—0·042	—0·033	—0·018	—0·011
	1·6	—0·054	—0·051	—0·045	—0·038	—0·031	—0·025	—0·015	—0·009
	1·8	—0·036	—0·034	—0·031	—0·028	—0·024	—0·020	—0·013	—0·008
	2·0	—0·024	—0·024	—0·022	—0·020	—0·018	—0·016	—0·011	—0·007
	2·5	—0·012	—0·012	—0·011	—0·011	—0·010	—0·009	—0·007	—0·005
	3·0	—0·007	—0·007	—0·007	—0·007	—0·006	—0·006	—0·005	—0·005

Tabelle VII.

μ. Störungskoeffizient der Niveauflächen. $\left(\frac{a}{c} = 0\cdot05,\ \frac{e}{c} = \xi_0 = 0\cdot9990.\right)$

Erhebung über der Horizontalebene (z) in Vielfachen von e		Horizontale Entfernung (ρ) in Vielfachen von e							
	ρ........	0·0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	1·5	2·0
	z = 0·0		—0·498	—0·252	—0·149	—0·096	—0·061	—0·026	—0·012
	0·2		—0·482	—0·245	—0·144	—0·093	—0·061	—0·025	—0·012
	0·4		—0·448	—0·231	—0·135	—0·086	—0·057	—0·024	—0·011
	0·6		—0·397	—0·200	—0·119	—0·077	—0·051	—0·022	—0·011
	0·8		—0·322	—0·165	—0·100	—0·064	—0·044	—0·020	—0·010
	1·0		—0·211	—0·116	—0·077	—0·052	—0·037	—0·017	—0·009
	1·1	—0·220	—0·149	—0·095	—0·064	—0·046	—0·033	—0·016	—0·009
	1·2	—0·132	—0·108	—0·077	—0·054	—0·040	—0·030	—0·015	—0·008
	1·4	—0·065	—0·057	—0·050	—0·039	—0·030	—0·023	—0·013	—0·008
	1·6	—0·039	—0·037	—0·032	—0·027	—0·022	—0·018	—0·011	—0·007
	1·8	—0·026	—0·024	—0·022	—0·020	—0·017	—0·014	—0·009	—0·006
	2·0	—0·018	—0·017	—0·016	—0·014	—0·013	—0·011	—0·008	—0·005
	2·5	—0·008	—0·008	—0·008	—0·008	—0·007	—0·006	—0·005	—0·004
	3·0	—0·005	—0·005	—0·005	—0·005	—0·004	—0·004	—0·003	—0·0 3

Tabelle VIII.

μ Störungskoeffizient der Niveauflächen. $\left(\frac{a}{c} = 0\cdot01,\ \frac{e}{c} \doteq \xi_0 = 0\cdot99995.\right)$

Erhebung über der Horizontalebene (z) in Vielfachen von e	Horizontale Entfernung (ρ) in Vielfachen von e								
	ρ	0·0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	1·5	2·0
	z = 0·0		—0·339	—0·172	—0·102	—0·066	—0·042	—0·017	—0·008
	0·2		—0·328	—0·167	—0·098	—0·063	—0·041	—0·019	—0·008
	0·4		—0·305	—0·157	—0·092	—0·060	—0·039	—0·016	—0·008
	0·6		—0·271	—0·137	—0·081	—0·052	—0·035	—0·015	—0·007
	0·8		—0·220	—0·112	—0·068	—0·043	—0·030	—0·013	—0·007
	1·0		—0·144	—0·079	—0·052	—0·035	—0·025	—0·012	—0·006
	1·1	—0·150	—0·101	—0·064	—0·044	—0·031	—0·022	—0·011	—0·006
	1·2	—0·090	—0·073	—0·052	—0·037	—0·027	—0·020	—0·010	—0·006
	1·4	—0·044	—0·039	—0·034	—0·027	—0·020	—0·016	—0·009	—0·005
	1·6	—0·026	—0·025	—0·022	—0·019	—0·015	—0·012	—0·007	—0·005
	1·8	—0·017	—0·016	—0·015	—0·013	—0·011	—0·010	—0·006	—0·004
	2·0	—0·012	—0·012	—0·011	—0·010	—0·009	—0·008	—0·005	—0·003
	2·5	—0·006	—0·006	—0·005	—0·005	—0·005	—0·004	—0·003	—0·002
	3·0	—0·003	—0·003	—0·003	—0·003	—0·003	—0·003	—0·002	—0·002

Um ein anschauliches Bild von der Störung einer Stange zu geben, sind in Fig. 3 die Kurven gleicher Störung für ein Ellipsoid vom Achsenverhältnisse $\frac{a}{c} = 0 \cdot 05$ eingezeichnet; die Höhe der Stange ist gleich 100 gesetzt worden.

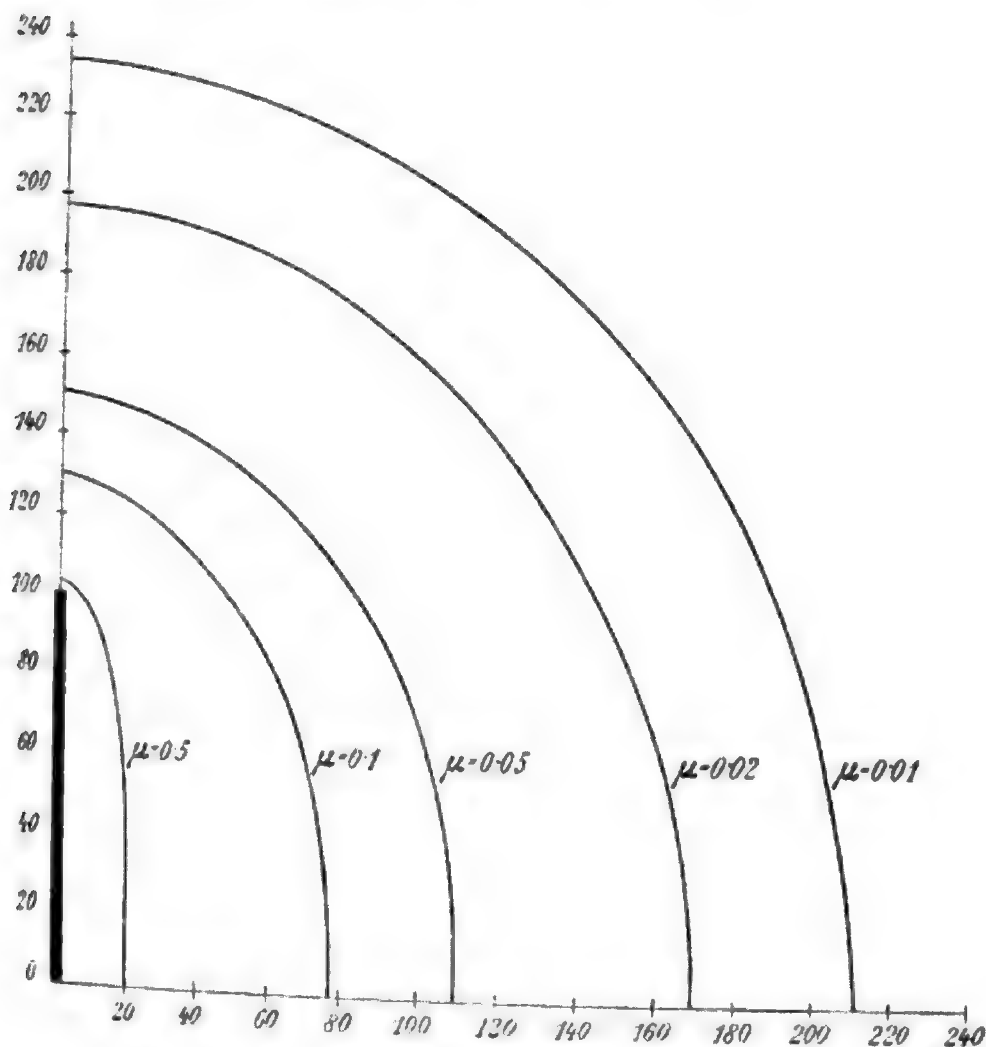


Fig. 3.

Bei absoluten Messungen des atmosphärischen Potentialgefälles in der Ebene wird es unter Umständen von Wert sein, zu wissen, daß die Störung im Umkreis eines stangenartigen Gebildes (Telegraphenstange, Pappel, Kirchturm) die Störung zirka 5%, respektive 1% beträgt, wenn man sich in einer Entfernung befindet, die gleich der einfachen, respektive doppelten Stangenhöhe gleich ist.

Eine stehende Person beeinflußt die Angaben eines Tropfenkollektors, der in 1 *m* Höhe über dem Erdboden angebracht ist,

in einer Entfernung von 2 *m*, respektive 4 *m* um 14%, respektive 3%.

Schließlich sei noch ein Punkt hervorgehoben, der in der Praxis oft übersehen wird. Man pflegt bei Messungen in der Ebene den Kollektor an einem Ebonitstabe zu befestigen, der seinerseits wieder an einer Stange angebracht ist, die in den Boden gerammt wird.

Aus Tabelle VII ergibt sich, daß oberhalb einer solchen Stange von etwa 1 *m* Höhe eine recht beträchtliche Störung der Niveauflächen eintritt, die noch 20 *cm* (40 *cm*) oberhalb des Stangenendes 13% (6%) beträgt; man muß daher Sorge tragen, den Ebonitstab genügend lang zu wählen.

2. Die Feldintensität in der Nähe einer vertikalen Stange.

Für mancherlei Zwecke ist es nicht ganz uninteressant, die Feldstärke an der Oberfläche und in der Nähe eines vertikal gespannten, mit der Erde verbundenen Drahtes zu kennen.

Wir wollen gleich einen speziellen Fall betrachten; die Länge des Drahtes sei 10 *m*, sein Durchmesser 2 *mm*, infolgedessen $\frac{a}{c} = \frac{1}{10^4}$ und

$$I_3 = -\frac{2}{e^2 c} + \frac{1}{e^3} \lg \frac{c+e}{c-e} = \frac{2}{c^3}\left(\lg \frac{2c^2}{a^2} - 1\right) = \frac{36}{c^3}.$$

Nach Abschnitt II*c*, Gleichung 15), ist die Feldstärke an der Ellipsoidfläche

$$\mathfrak{E}_0^g = \frac{2z_0}{a^2 c^3} \cdot \frac{\mathfrak{Z}''}{I_3} \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_0^2}{a^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}},$$

wobei ρ_0 und z_0 die Koordinaten des Oberflächenpunktes sind. Berücksichtigt man, daß $\frac{\rho_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ und $\frac{a}{c}$ sehr klein ist, so erhält nach Einsetzen des Wertes für I_3

$$\mathfrak{E}_0^g = \frac{\mathfrak{Z}''}{18} \cdot \frac{z_0}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)}}. \tag{16}$$

Setzt man z. B. $\mathfrak{Z}'' = 100 \frac{\text{Volt}}{m} = 1 \frac{\text{Volt}}{cm}$, so wird für

$z =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 m
$\mathfrak{E}^g_0 =$	0·0	56	114	174	242	321	416	542	743	1140	$5 \cdot 6.10^6 \frac{\text{Volt}}{cm}$

Für die Horizontal- und Vertikalkomponente der Feldstärke in der Nähe des Drahtes finden wir aus Gleichung 12) und 14) unter Berücksichtigung, daß für kleine (gegen c) Werte von u S_3 nahe gleich I_3 ist:

$$\mathfrak{Z}^g_a = \frac{2\mathfrak{Z}''}{c^3 I_3} \frac{z^2}{c^2} \frac{1}{a^2+u} \frac{1}{\frac{\rho^2}{(a^2+u)^2} + \frac{z^2}{c^4}} \tag{17}$$

und

$$\mathfrak{R}^g_a = \frac{2\mathfrak{Z}''}{c^3 I_3} \frac{\rho z}{(a^2+u)^2} \frac{1}{\frac{\rho^2}{(a^2+u)^2} + \frac{z^2}{c^4}}. \tag{18}$$

Für Punkte der z-Achse, also $\rho = 0$, ergibt sich daraus, wenn die Entfernung vom Endpunkte des Ellipsoides $\delta = z - c$ klein gegen c und $c\delta$ groß gegen a^2 ist,

$$\mathfrak{Z}^g_a = \frac{\mathfrak{Z}''}{c^3 I_3} \frac{c}{\delta}. \tag{19}$$

Drücken wir δ in Millimetern aus und setzen $\mathfrak{Z}'' = 1 \frac{\text{Volt}}{cm}$, so wird für unseren Draht $\mathfrak{Z}^g_a = \frac{c}{36 . \delta} \frac{\text{Volt}}{cm}$, woraus

für $\delta =$ 0, 1, 2, 5, 10, 100 mm

$\mathfrak{Z}^g_a = 5 \cdot 6.10^6$, 278, 139, 56, 28, $2 \cdot 8 \frac{\text{Volt}}{cm}$

folgt.

Für die Kräfte seitwärts des Drahtes ergeben sich einfachere Ausdrücke, wenn wir uns auf solche Punkte beschränken, für die ρ^2 genügend genau gleich a^2+u gesetzt werden darf, also auf solche, für die die betreffenden Ellipsoidflächen genügend genau als Zylinderflächen angesehen werden können. Es wird dann

$$\mathfrak{Z}_a^g = \frac{2\,\mathfrak{Z}''}{c^3 I_3} \cdot \frac{z^2}{c^2} = \frac{\mathfrak{Z}''}{18}\,\frac{z^2}{c^2} \tag{20}$$

$$\mathfrak{R}_a^g = \frac{2\,\mathfrak{Z}''}{c^3 I_3} \cdot \frac{z}{\rho} = \frac{\mathfrak{Z}''}{18}\,\frac{z}{\rho} \tag{21}$$

und $\dfrac{\mathfrak{R}_a^g}{\mathfrak{Z}_a^g} = \dfrac{c^2}{z.\rho}$, woraus sich leicht für alle Punkte in der Nähe des Drahtes die elektrischen Kräfte berechnen lassen.

In ganz analoger Weise läßt sich das Potentialgefälle in der Nähe der Wand eines runden Turmes berechnen, der genügend hoch ist, um mit einem gestreckten Ellipsoid verglichen zu werden.

Für einen Turm von 40 *m* Höhe und 10 *m* Durchmesser ergibt sich z. B. $I_3 = 3{\cdot}6$ und infolgedessen für die Feldintensität an der Turmwand in der Höhe von 5 *m*, 10 *m*, 20 *m* die elektrische Kraft zu 56, 115, 257 $\frac{\text{Volt}}{m}$, wenn das Potentialgefälle 100 $\frac{\text{Volt}}{m}$ in der Ebene beträgt.

III. Stangenartige Gebilde parallel den Niveauflächen.

Ich will hier nur den Fall eines horizontal gespannten dünnen Drahtes behandeln, der auf einem bestimmten Potential gehalten wird, wie es z. B. geschieht, wenn man radioaktive Induktion auf ihm niederschlagen will.

φ_0^g sei das Potential des Drahtes, Φ'' das des ungestörten Erdfeldes in der Höhe, wo der Draht gespannt ist; dann wird die Ladung

$$E = (\varphi_0^g - \Phi'')C, \tag{22}$$

wobei die Kapazität

$$C = \frac{c}{\lg \dfrac{2c}{a}},$$

wenn die Achse a klein gegen die lange Achse c ist. Hier gelten dann die Gleichungen des Abschnittes 6 [A]; die $\mathfrak{X}$-Achse fällt mit der Feldrichtung zusammen, die Z-Achse mit der des Drahtes.

Die Feldintensität in der Nähe des Drahtes wird, wenn man den Enden nicht zu nahe kommt, unabhängig von z sein.

Zunächst sieht man auch ohne Rechnung leicht ein, daß in diesem Falle die Feldintensität, herrührend von der Eigenladung des Drahtes, die des Erdfeldes und der induzierten Ladungen bei weitem übertreffen wird, wenn $\varphi_0^g - \Phi^u$ nicht gerade sehr klein wird.

Die maximale Ladungsdichte der induzierten Ladungen ist nach Gleichung VIII$_6$ [*A*] $\sigma_a^I = \frac{\mathfrak{X}^u}{2\pi I_1 a^2 c}$, wenn $\mathfrak{X}^u$ die Stärke des homogenen Feldes und I_1 eine Konstante bedeutet, die von den Dimensionen des Ellipsoides abhängt und für sehr gestreckte den Wert $\frac{1}{a^2 c}$ annimmt; infolgedessen erhalten wir für die Feldintensität an der Drahtoberfläche, herrührend von den induzierten Ladungen, den Maximalwert

$$\mathfrak{X}_0^I = 4\pi\sigma_a^I = 2\mathfrak{X}^u, \tag{23}$$

während die elektrische Kraft an der Drahtoberfläche, die von der Eigenladung E stammt,

$$\mathfrak{R}_0^E = \frac{E}{ac} \tag{24}$$

oder, wenn wir den Wert für E aus Gleichung 22) einsetzen,

$$\mathfrak{R}_0^g = \frac{C}{c} \cdot (\varphi_0^g - \Phi^u) \frac{1}{a} \tag{25}$$

wird.

$\frac{C}{c}$, die Kapazität des Drahtes pro Längeneinheit, ist (siehe [*A*], Abschnitt 9) von der Größenordnung 0·1; rechnen wir ferner Länge, Potential, Kräfte in Zentimetern, Volt und $\frac{\text{Volt}}{cm}$, setzen $a = 0{\cdot}1\,cm$, $\mathfrak{X}^u = 100\,\frac{\text{Volt}}{m} = 1\,\frac{\text{Volt}}{cm}$, $\varphi_0^g - \Phi^u$ nur zu 100 Volt an, so wird $\mathfrak{X}_0^I = 2\,\frac{\text{Volt}}{cm}$, während $\mathfrak{R}_0^E = 100\,\frac{\text{Volt}}{cm}$ beträgt.

Wir beschränken uns daher auf das Feld der Eigenladung. In der Entfernung ρ von der Drahtachse ist die Feldstärke

$$\mathfrak{R}_a^E = \frac{C}{c} \cdot \frac{\varphi_0^g - \Phi^u}{\rho}. \tag{26}$$

Um radioaktive Induktion auf Drähten in genügender Menge niederzuschlagen, pflegt man $\varphi_0^g - \Phi'' = -2000$ Volt und noch höher zu machen. Nehmen wir $\frac{C}{c} = 0 \cdot 1$ und die Drahtstärke zu 2 *mm* an, so wird die Feldstärke an der Drahtoberfläche $2000 \frac{\text{Volt}}{cm}$, in 1 *cm* Entfernung $200 \frac{\text{Volt}}{cm}$, in 10 *cm* $20 \frac{\text{Volt}}{cm}$ betragen.

Kennt man die Beweglichkeit der Induktionsträger und die Windstärke, so könnte man das Luftquantum schätzen, aus dem in einer bestimmten Zeit die Korpuskeln abgefangen werden.

Da die Feldintensität in der Nähe des Drahtes proportional ist der Differenz des Drahtpotentiales φ_0^g und des Potentiales, das in der Drahthöhe in der Atmosphäre herrscht, so ist es leicht möglich, daß die großen Unregelmäßigkeiten bei den Induktionsmessungen zum Teile durch Schwankungen des Potentialgefälles in der Atmosphäre bedingt sind.

Der Betrag $\varphi_0^g - \Phi''$ kann übrigens auch einen hohen negativen Wert erreichen, wenn man den Draht zur Erde ableitet und ihn an Orten starken Potentialgefälles, z. B. am Rand eines Turmes oder Daches, ausspannt.

IV. Störungen des Feldes durch Kollektoren.

Ein Tropfkollektor, der isoliert in einem elektrischen Felde tropft, verliert so lange an elektrischer Ladung, bis an der Stelle, wo sich die Tropfen loslösen, die Ladungsdichte Null herrscht oder, was dasselbe besagt, bis der Kollektor das Potential der Niveaufläche annimmt, die durch den Zerstäubungspunkt hindurchgeht.

Analog verhalten sich die andern Typen der bei luftelektrischen Messungen verwendeten Kollektoren.

Gewöhnlich nimmt man nun an, daß die Störung des Erdfeldes durch den Kollektor so klein ist, daß man annehmen kann, die durch die Tropfstelle hindurchgehende Niveaufläche sei dieselbe, die in dem durch den Kollektor nicht gestörten Felde durch denselben Punkt hindurchgehen würde.

Ich will nun im folgenden zeigen, daß die Störung durch gebräuchliche Kollektoren keineswegs immer zu vernachlässigen ist.

Übrigens können die folgenden Betrachtungen auch Anwendung finden auf Ausmessungen kleinerer Felder in Laboratorien.

Ich will voraussetzen, der Kollektor habe ungefähr die Form eines verlängerten Rotationsellipsoides, das mit seiner langen Achse c parallel den Kraftlinien des Feldes orientiert ist, und möge an seinem tiefsten Punkt abtropfen.

Aus [A], Abschnitt 5, Gleichung VIII_5, ergibt sich die Ladungsdichte $\sigma^{\mathfrak{E}}_{c}$ im tiefsten Punkte

$$\sigma^{\mathfrak{E}}_{c} = \frac{1}{2\pi a^2 c}\left(\frac{\mathfrak{Z}''}{I_3} + \frac{E}{2}c\right),$$

wo $\mathfrak{Z}''$ die Feldintensität des ungestörten Feldes, a die kleine Achse des Ellipsoides, E seine Gesamtladung und I_3 eine Konstante bedeutet, die nur von den Dimensionen des Ellipsoides abhängt.

Der Tropfkollektor wird nun ein konstantes Potential $\varphi^{\mathfrak{E}}_{0}$ angenommen haben, wenn $\sigma^{\mathfrak{E}}_{c} = 0$ geworden sein wird. Ist $\sigma^{\mathfrak{E}}_{c} = 0$, so ist die Gesamtladung $E = -\dfrac{2\mathfrak{Z}''}{I_3 . c}$.

Bezeichnen wir mit Φ'' das Potential, das im ungestörten Feld an der Stelle herrscht, an der sich der Mittelpunkt des Ellipsoides befindet, so besteht die Beziehung

$$\varphi^{\mathfrak{E}}_{0} = \Phi'' + \frac{E}{C} = \Phi'' - \frac{2\mathfrak{Z}''}{I_3 c} \cdot \frac{1}{C},$$

wenn C die Kapazität des Kollektors ist.

Würde der Kollektor das Feld nicht stören, so würde an der Tropfstelle das Potential $\Phi'' - c\mathfrak{Z}''$ herrschen, in Wirklichkeit ist das Potential dort niedriger.

Schreiben wir

$$\varphi^{\mathfrak{E}}_{0} = \Phi'' - (c+z)\mathfrak{Z}'',$$

wobei $z = \dfrac{2}{I_3 . c} \cdot \dfrac{1}{C} - c$ ist, so gibt uns z an, um wie viel die Potentialfläche $\varphi^{\mathfrak{E}}_{0}$ im gestörten Felde gegenüber dem ungestörten im Tropfpunkte gehoben ist.

Aus [A], Abschnitt 5, finden wir

$$I_3 = -\frac{2}{e^2 c} + \frac{1}{e^3} \lg \frac{c+e}{c-e},$$

aus Abschnitt 9

$$C = \frac{2e}{\lg \frac{c+e}{c-e}},$$

wo $e = \sqrt{c^2 - a^2}$ die Exzentrizität bedeutet; daraus berechnet sich leicht

$$z = \frac{e^2}{c-C} - c$$

oder, wenn wir c als Längeneinheit wählen,

$$z = \frac{e^2}{1-C} - 1.$$

In Tabelle IX sind für verschiedene Werte von a ($c = 1$ gesetzt) die entsprechenden von z ausgerechnet.

Tabelle IX.

a	e	C	z
1·0	0·000	1·000	2·000
0·9	0·436	0·936	1·82
0·8	0·600	0·864	1·65
0·7	0·714	0·800	1·50
0·6	0·800	0·727	1·34
0·5	0·866	0·656	1·18
0·4	0·917	0·584	1·02
0·3	0·954	0·500	0·82
0·2	0·980	0·428	0·68
0·1	0·995	0·332	0·48
0·01	1·000	0·189	0·23
0·001	1·000	0·132	0·15
0·000	1·000	0·000	0·000

Aus den Zahlen der letzten Reihe geht hervor, daß die Hebung der Niveauflächen von der Größenordnung der Vertikaldimension des Kollektors sind.

Bei absoluten Messungen in der Ebene können also mitunter recht beträchtliche Fehler begangen werden, wenn man die Beeinflussung des Feldes durch den Kollektor nicht beachtet, wie das folgende Beispiel zeigt.

Die Metallampen mit Metallzylinder, wie sie vielfach für luftelektrische Messungen in den Handel gebracht und verwendet werden, haben etwa eine Höhe von 18 *cm* und einen Durchmesser von 7 *cm*, $\frac{a}{c}$ ist also rund 0·4 und $z = 1 \cdot 0$. Als Indifferenzpunkt können wir den oberen Rand des Schutzzylinders ansehen; das Potential, das dann das mit der Lampe verbundene Elektroskop anzeigt, liegt im ungestörten Erdfeld zirka 9 *cm* über dem oberen Lampenrand.

Ist daher der Kollektor 1 *m* oder gar nur $^1/_2$ *m* über der Erde angebracht, wie man das bei kleinem Potentialgefälle oft tun muß, so begeht man einen Fehler von 10 bis 20%, wenn man den oberen Rand des Zylinders als Referenzniveaufläche ansieht. Bei unzweckmäßig konstruierten Tropfkollektoren aber kann der Fehler noch bedeutend größer werden.

Es ist daher im allgemeinen bei absoluten Messungen zu empfehlen, möglichst kleine Kollektoren zu verwenden, und wenn sich große nicht vermeiden lassen, die Ausgleichspunkte möglichst in der Mitte anzubringen.

V. Zusammenfassung der Resultate mit Rücksicht auf die Praxis.

Soweit sie einigermaßen Bedeutung für Messungen des atmosphärischen Potentialgefälles haben, lassen sich die Resultate zusammenfassen, wie folgt:

1. Da die Eigenladung eines Luftballons starken und unkontrollierbaren Schwankungen unterworfen ist, kann auch von einer gesetzmäßigen Störung des Erdfeldes durch ihn nicht die Rede sein; sorgt man jedoch nach dem Vorschlage von Linke durch Anbringung einer Tropfelektrode, die mit dem Ballon leitend verbunden ist, dafür, daß an einer Stelle dauernd die Ladungsdichte Null herrscht, dann läßt sich auch die Störung unterhalb des Ballonkorbes berechnen unter der

Voraussetzung, daß er genügend genau durch ein Rotationsellipsoid dargestellt werden kann.

Nennt man die prozentuale Änderung eines ursprünglich vorhandenen Feldes den Störungskoeffizienten μ, so wird μ im allgemeinen sowohl von der Intensität $\mathfrak{Z}''$ des Erdfeldes sowie der Eigenladung E des Ballons abhängen; herrscht jedoch dauernd an einem Punkte des Ballons die Ladungsdichte Null, dann wird μ von E und $\mathfrak{Z}''$ unabhängig und variiert nur mit der Tiefe unter dem Korb und der Lage der Stelle am Ballon, wo die Ladungsdichte Null ist.

Für einen Ballon von 24 *m* Höhe (samt Gondel) und 16 *m* Durchmesser werden die Störungskoeffizienten ausgerechnet und graphisch wiedergegeben; es zeigt sich dabei, daß es am günstigsten ist, wenn man an Punkten des Ballons die Ladungsdichte Null herstellt, die etwa 7 *m* über dem Korb, also 5 *m* unter dem Äquator liegen; unter dieser Voraussetzung ist in einer Tiefe zwischen 8 *m* und 10 *m* unter dem Korb der Störungskoeffizient der Feldintensität $\mu = 0$ zwischen 10 *m* und 20 *m* zirka $-0\cdot03$, so daß auch $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ sehr klein ist.

Da Linke gezeigt hat, daß der Luftballon als Ganzes auch unter ungünstigen Verhältnissen noch als Leiter betrachtet werden kann, ist die Vermutung wohl gerechtfertigt, daß sich die Verhältnisse in Wirklichkeit nicht weit von den hier betrachteten entfernen werden. Messungen an einem Fesselballon bieten, unter den nötigen Vorsichtsmaßregeln angestellt, Gelegenheit, die Formeln zu prüfen, da Korrektionen für das Fesselseil berechnet werden können.

2. Der zweite Abschnitt behandelt zunächst die Störung in der Nähe stangenartiger Gebilde, die die Niveauflächen senkrecht durchsetzen. Es wurden Formeln und Tabellen gegeben, die gestatten, Feldintensität und Potential für verschiedene Punkte des Raumes leicht zu bestimmen.

Für absolute Messungen des Erdfeldes sei hervorgehoben, daß die Störung des Potentialgefälles in der Nähe einer Telegraphenstange (Pappel, Kirchturm) 5%, respektive 1% beträgt, wenn man um die einfache, respektive doppelte Stangenhöhe vom Fuß entfernt ist.

Der Körper eines aufrechtstehenden Beobachters beeinflußt die Angaben eines 1 *m* über der Erde angebrachten Kollektors in einer Entfernung von 2 *m*, respektive 4 *m* um 14%, respektive 3%.

Besonders beachtenswert ist, daß die Störung der Niveauflächen über dem Ende einer vertikalen Stange recht erheblich ist, sie beträgt noch 20 *cm* (40 *cm*) ober dem Ende einer 1 *m* langen Stange 13% (6%). Es ist daher Sorge zu tragen, daß das isolierende Stück des den Kollektor tragenden Stabes nicht zu kurz bemessen wird.

Die Feldstärke an der Oberfläche eines 10 *m* langen, 2 *mm* dicken, vertikal gespannten Drahtes ist nicht unerheblich und beträgt in

2	4	6	8 *m*	Höhe
114	242	416	743	$\frac{\text{Volt}}{cm}$

bei einem Erdfelde von $\frac{1\,\text{Volt}}{cm}$; an der Spitze des Drahtes ist sie bedeutend größer.

Am Ende eines Blitzableiters, der die Form eines gestreckten Ellipsoides $\left(\frac{a}{c} = 10^{-4}\right)$ hat, ist die Feldstärke von der Größenordnung $\mathfrak{E} \cdot 10^{6}\,\frac{\text{Volt}}{cm}$, wenn $\mathfrak{E}$ die Feldintensität des Erdfeldes $\left(\frac{\text{Volt}}{cm}\right)$ an der betreffenden Stelle ist.

Ein horizontal gespannter Draht, wie er zu Messungen der radioaktiven Induktion verwendet wird, stört das Erdfeld im wesentlichen nur durch seine Eigenladung. Wird er isoliert dauernd auf konstantem Potential gehalten, so schwankt seine Eigenladung infolge des Wechsels des Erdfeldes und infolgedessen auch die Feldintensität in seiner Nähe.

Ein Teil der Variabilität der Induktionsmessungen kann unter Umständen dadurch bedingt sein. Die Feldstärke an einem langen, dünnen (2 *mm*) Draht, der auf hohes Potential geladen ist, ist in $\frac{\text{Volt}}{cm}$ ausgedrückt von der Größenordnung des Potentiales in Volt.

An Stellen genügend hohen Luftpotentiales ausgespannte und geerdete Drähte können in Ermanglung einer Hochspannungsbatterie zu Induktionsmessungen verwendet werden.

3. Schließlich werden noch die Fehler betrachtet, die an die Störung des Erdfeldes durch den Kollektor gebunden sind. Ein Tropfenkollektor, der im großen die Gestalt eines Ellipsoides hat, nimmt ein Potential an, das einer tieferen Stelle im ungestörten Feld entspricht, und zwar liegt diese Stelle unter dem Zerstäubungspunkt um ein Stück, das von der Größenordnung der Dimensionen des Kollektors ist. Fehler von 5% bis 10% können bei gebräuchlichen Kollektorentypen auftreten.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. V. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über eine Modifikation der Pulfrich'schen Formel, betreffend das Brechungsvermögen von Mischungen zweier Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der beim Mischen eintretenden Volumänderung

von

Viktor F. Hess.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. April 1906.)

I. Über die Lorentz'sche Refraktionskonstante.

Gelegentlich eines im physikalischen Konversatorium gehaltenen Referates über meine im Vorjahr ausgeführten experimentellen Untersuchungen[1] über die Gültigkeit der Pulfrich'schen Mischungsformel

$$\frac{N-1}{D} \cdot \frac{1-\alpha c}{1-c} \cdot (p_1+p_2) = \frac{n_1-1}{d_1} p_1 + \frac{n_2-1}{d_2} p_2 \qquad (1)$$

wurde der Einwand erhoben, daß die von Pulfrich benützte Refraktionskonstante

$$\frac{N-1}{D}$$

keinerlei theoretische Begründung oder Berechtigung besitze.

Dieser Einwand veranlaßte mich, zu versuchen, in den Pulfrich'schen Gedankengang eine andere, theoretisch begründbare Refraktionskonstante einzuführen.

Schon Clausius hat bei seinen Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen der Konstitution eines Isolators

[1] Hess, Diese Sitzungsberichte, CXIV, 1905.

und dessen Dielektrizitätskonstante k gefunden, daß k vom Werte der Raumerfüllung durch leitende Substanz abhängt, und zwar findet er, daß die Dielektrizitätskonstante

$$k = \frac{1+2v}{1-v}, \tag{2}$$

wobei v das Verhältnis des von einer bestimmten Menge eines Körpers wirklich okkupierten Raumes zu deren scheinbaren Volumen bedeutet. Clausius benützte als grundlegende Voraussetzung, daß die leitenden Moleküle des Isolators als kugelförmig angesehen werden können.

Obige Gleichung lautet, anders geschrieben:

$$v = \frac{k-1}{k+2}. \tag{3}$$

v bedeutet also die relative Raumerfüllung des Dielektrikums durch leitende Materie.

Maxwell's elektromagnetische Theorie des Lichtes zeigt, daß die Dielektrizitätskonstante eines Isolators gleich dem Quadrate des Brechungsexponenten ist, d. h.

$$k = n^2. \tag{4}$$

Demnach nimmt der Ausdruck für die Raumerfüllung mit leitender Materie die Form an:

$$v = \frac{n^2-1}{n^2+2}. \tag{5}$$

Wird ein Körper komprimiert, z. B. bis seine Dichte d doppelt so groß geworden ist, so steigt offenbar auch die Raumerfüllung v auf das Doppelte. Zwischen v und d herrscht somit einfache Proportionalität, d. h.

$$\frac{k-1}{k+2} \cdot \frac{1}{d} = \frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} = \text{konstant}. \tag{6}$$

Diese Refraktionskonstante wurde von H. A. Lorentz[1] aus der elektromagnetischen Lichttheorie und auf anderem Wege von L. Lorenz[2] übereinstimmend abgeleitet.

[1] H. A. Lorentz, Wiedem. Ann., Bd. 9, p. 641.

[2] L. Lorenz, Wiedem. Ann., Bd. 11, p. 70.

Die Übereinstimmung der Formel (6) mit der Erfahrung war bei kondensierbaren Gasen eine so vollkommene, daß die beiden Aggregatzustände überbrückt werden konnten (nach Bleekrode).[1]

Versucht man nun die Lorenz'sche Refraktionskonstante auf Mischungen zweier Flüssigkeiten anzuwenden, also in der Form

$$\frac{N^2-1}{N^2+2}\,\frac{1}{D}(p_1+p_2) = \frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\,\frac{p_1}{d_1} + \frac{n_2^2-1}{n_2^2+2}\,\frac{p_2}{d_2}, \tag{7}$$

und berechnet nach dieser Formel den Brechungsexponenten N irgend eines Gemisches, so ist die Übereinstimmung mit der Erfahrung eine ziemlich schlechte.

Es liegt wohl nahe, den Grund dieser Diskrepanz in der offenbar zu engen Annahme von Clausius zu suchen, daß die Moleküle des Dielektrikums kugelförmig seien.

Eine Entscheidung darüber ist kaum zu finden, jedenfalls steht fest, daß die Formel (7) kaum bessere Resultate als die alte, einfache Biot-Arago'sche Formel

$$\frac{N-1}{D}(p_1+p_2) = \frac{n_1-1}{d_1}p_1 + \frac{n_2-1}{d_2}p_2 \tag{8}$$

liefert.

Dieser Umstand bewog viele Forscher, von der theoretisch begründeten Formel (7) abzugehen, und Pulfrich[2] brachte an der rein empirischen Biot-Arago'schen Formel eine grundlegende Verbesserung an, er berücksichtigte die beim Mischen eintretende Volumänderung [siehe Gleichung (1)].

In genau analoger Weise suchte ich nun die Lorentz'sche Mischungsformel (7) durch Einführung der Volumkontraktion zu modifizieren und dieser Gedankengang ist im folgenden entwickelt.

II. Die Modifikation der Lorentz'schen Mischungsformel.

Es bezeichne v_1 das Volumen einer ersten Flüssigkeit von der Dichte $d_1 = \frac{p_1}{v_1}$, v_2 das Volumen der mit dieser gemischten

[1] Bleekrode, Wiedem. Ann., Bd. 8, p. 400.
[2] Pulfrich, Zeitschr. für physik. Chemie, IV, 1889.

zweiten Flüssigkeit von der Dichte $d_2 = \frac{p_2}{v_2}$. Die nach der Mischung stattfindende Dichte sei D, das Volumen V. Zum Unterschiede von D sei diejenige Dichte, welche die Mischung haben würde, wenn eine Volumänderung nicht stattfände, mit D_v bezeichnet. Diese ist

$$D_v = \frac{p_1 + p_2}{v_1 + v_2} = \frac{d_1 v_1 + d_2 v_2}{v_1 + v_2} = d_1 + (d_2 - d_1)\frac{v_2}{v_1 + v_2}, \tag{9}$$

wobei $\frac{v_2}{v_1 + v_2}$ den verhältnismäßigen Volumanteil der zweiten Flüssigkeit bedeutet.

Als Maß des Brechungsvermögens wähle ich den Lorentzschen Ausdruck

$$R = \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2}.$$

Seien R, R_1 und R_2 die bezüglichen Werte für die Mischung und deren Bestandteile, so lautet der analog D_v gebildete Ausdruck

$$R_v = \frac{R_1 v_1 + R_2 v_2}{v_1 + v_2} = R_1 + (R_2 - R_1)\frac{v_2}{v_1 + v_2} =$$

$$= \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} + \left[\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} - \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2}\right] \cdot \frac{v_2}{v_1 + v_2}. \tag{10}$$

Die Gesamtänderung C, welche die Summe der Volumina v_1 und v_2 durch die Mischung erfahren, ist offenbar

$$C = v_1 + v_2 - V, \tag{11}$$

wenn V das Gesamtvolumen nach der Mischung bedeutet. Ferner ist

$$V = \frac{p_1 + p_2}{D}, \tag{12}$$

wo D die beobachtete wirkliche Dichte des Gemisches bezeichnet.

Aus (9) und (12) folgt

$$V = (v_1 + v_2)\frac{D_v}{D} \tag{13}$$

und somit

$$C = (v_1 + v_2)\frac{D - D_v}{D}. \tag{14}$$

Die Kontraktion der Volumeinheit beträgt mithin

$$c = \frac{D - D_v}{D}. \tag{I}$$

Pulfrich stellte nun den Satz auf, es bestehe zwischen diesem von ihm abgeleiteten Ausdruck (I) und dem analog gebauten Ausdruck für das Brechungsvermögen

$$\frac{\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_v}{\mathfrak{N}} \tag{II}$$

($\mathfrak{N} = n - 1$ nimmt er als Maß des Brechungsvermögens)

einfache Proportionalität.

Er schreibt also

$$\frac{\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_v}{\mathfrak{N}} = \alpha \frac{D - D_v}{D} = \alpha c \tag{III}$$

und diese Beziehung hat sich bisher überall bestätigt gefunden. Der Faktor α ist nahezu konstant für alle Mischungsverhältnisse, ändert sich nur wenig bei Zu- oder Abnahme der Temperatur und wird auch von einem Wechsel der Farbe nur wenig berührt.

Wir wollen nun für den analog gebildeten Ausdruck

$$\frac{R - R_v}{R}, \tag{IV}$$

den wir in Ermanglung einer geeigneteren Bezeichnung »Kontraktion der Lorentz'schen Refraktionskonstante« nennen, eine ähnliche Proportionalitätsbeziehung aufstellen und nachsehen, ob dieselbe in Wirklichkeit erfüllt ist.

Wir behaupten also, es bestehe die Relation

$$\frac{R - R_v}{R} = \beta \cdot \frac{D - D_v}{D} = \beta . c, \tag{V}$$

welche, ausführlich geschrieben, lautet [siehe Gleichung (10)]

$$\frac{\dfrac{N^2-1}{N^2+2}-\left[\dfrac{n_1^2-1}{n_1^2+2}+\left(\dfrac{n_2^2-1}{n_2^2+2}-\dfrac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\right)\dfrac{v_2}{v_1+v_2}\right]}{\dfrac{N^2-1}{N^2+2}}=\beta.c.$$

Pulfrich hat seine Beziehung (III) so umgestaltet, daß ein direkter Vergleich mit der Biot-Arago'schen Mischungsformel (8) ermöglicht war. Wir nehmen nun mit unserer Beziehung (V) formal dieselben Umformungen vor, um einen direkten Vergleich unserer Formel mit der Lorenz'schen Mischungsformel (7)

$$\frac{N^2-1}{N^2+2}\,\frac{p_1+p_2}{D}=\frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\,\frac{p_1}{d_1}+\frac{n_2^2-1}{n_2^2+2}\,\frac{p_2}{d_2}$$

zu bewerkstelligen.

(V) lautet, anders geschrieben,

$$\frac{N^2-1}{N^2+2}[1-\beta c]=\frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}+\left(\frac{n_2^2-1}{n_2^2+2}-\frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\right)\frac{v_2}{v_1+v_2}. \quad (15)$$

Berücksichtigt man noch die beiden Gleichungen (9) und (I)

$$v_1+v_2=\frac{p_1+p_2}{D_v} \qquad D_v=D(1-c)$$

und setzt diese in (10) ein, so erhält man

$$R_v=\frac{R_1\dfrac{p_1}{d_1}+R_2\dfrac{p_2}{d_2}}{p_1+p_2}\cdot D.(1-c)=$$

$$=\frac{\dfrac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\cdot\dfrac{p_1}{d_1}+\dfrac{n_2^2-1}{n_2^2+2}\cdot\dfrac{p_2}{d_2}}{p_1+p_2}\cdot D.(1-c). \quad (16)$$

Dies mit (15) zusammengehalten, ergibt unsere Endformel

$$\frac{N^2-1}{N^2+2}\cdot\frac{1-\beta c}{1-c}\cdot\frac{p_1+p_2}{D}=\frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\cdot\frac{p_1}{d_1}+\frac{n_2^2-1}{n_2^2+2}\cdot\frac{p_2}{d_2}. \quad (17)$$

Die Lorentz'sche Formel (7) wird mit dieser dann, und zwar nur dann identisch, wenn

$$c = 0 \quad \text{oder} \quad \beta = 1.$$

Beide Fälle werden in der Wirklichkeit höchst selten auch nur näherungsweise erfüllt sein.

III. Die Anwendung der neuen Formel.

1. Will man Brechungsexponenten irgend eines Mischungsverhältnisses vorausberechnen, so kann man dies nach einer zweckmäßigen Umformung der Beziehung (V) tun. (V) lautet in anderer Schreibweise

$$R - R_v = R . \beta . c$$

oder

$$\frac{N^2-1}{N^2+2} - R_v = \frac{N^2-1}{N^2+2} \cdot \beta c,$$

mithin

$$\frac{N^2-1}{N^2+2}[1-\beta c] = R_v \quad \text{oder} \quad \frac{N^2-1}{N^2+2} = \frac{R_v}{1-\beta c}.$$

Weitere Umformungen ergeben:

$$N^2(1-\beta c) = R_v[N^2+2]+1-\beta c$$

$$N^2[1-\beta c-R_v] = 2R_v - \beta c+1$$

$$N^2 = \frac{1-\beta c+2R_v}{1-\beta c-R_v}$$

und endlich

$$N = \sqrt{\frac{1-\beta c+2R_v}{1-\beta c-R_v}}. \qquad (18)$$

Um nach dieser Formel den Brechungsexponenten N irgend eines Mischungsverhältnisses vorausberechnen zu können, bestimmt man die Volumkontraktion c, ferner R_v nach Formel (10). Wesentlich ist endlich die Kenntnis des Proportionalitätsfaktors β. Man kann entweder einen durch sorgfältige Bestimmung bei irgend einem andern Mischungsverhältnis gewonnenen Wert von β oder einen Mittelwert mehrerer solcher Bestimmungen verwenden. Über die Resultate, welche unsere Formel (18) liefert, siehe das nächste Kapitel.

2. Die Fundamentalbeziehung (V) kann ferner — immer vorausgesetzt, daß die Koeffizienten β für alle Mischungsverhältnisse nahezu konstant sind — dazu verwendet werden, die Volumkontraktion irgend eines Gemisches vorauszuberechnen nach der Formel

$$c = \frac{1}{\beta} \frac{R - R_v}{R}; \text{ wobei } R_v = R_1 + (R_2 - R_1) \frac{v_2}{v_1 + v_2}; \qquad (19)$$

gesetzt also, man habe durch eine genaue Beobachtung an irgend einem andern Prozentgehalte derselben Mischung den Faktor β ermittelt, so genügt eine rein optische Messung der Refraktionskonstante R, beziehungsweise R_1 und R_2, um nach (19) die Kontraktion des Volumens angeben zu können.

Der Genauigkeitsgrad ist fast derselbe wie bei der unter 1) beschriebenen Methode der Vorausberechnung der Brechungsexponenten.

3. Eine ungleich größere praktische Bedeutung kann unter Umständen eine andere Anwendung der Relation (V) gewinnen, nämlich die Berechnung des Prozentgehaltes einer Mischung aus den Angaben von Brechung und Dichte sowohl des Gemisches als auch seiner beiden Bestandteile.

(V) kann nämlich folgendermaßen umgeformt werden:

$$(R - R_v) D = (D - D_v) R . \beta$$

oder

$$\left[R - R_1 - (R_2 - R_1) \frac{v_2}{v_1 + v_2}\right] D = \left[D - d_1 - (d_2 - d_1) \frac{v_2}{v_1 + v_2}\right] R . \beta.$$

Daraus:

$$\frac{v_2}{v_1 + v_2} [(d_2 - d_1) R . \beta - (R_2 - R_1) D] = (D - d_1) R . \beta - (R - R_1) D .$$

Als Endformel ergibt sich mithin:

$$\frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{(D - d_1) R \beta - (R - R_1) D}{(d_2 - d_1) R \beta - (R_2 - R_1) D}. \qquad (20)$$

Kennt man also Brechungsexponent N und Dichte D der Mischung sowie die bezüglichen Werte n_1, n_2 und d_1, d_2 für die Bestandteile, aus denen die Mischung hergestellt ist, und schließlich den Proportionalitätsfaktor β, so kann man mittels

der Formel (20) den Prozentgehalt angeben, ohne bei der Herstellung des Gemisches die Bestandteile abgewogen zu haben.

IV. Die Versuchsresultate und ihre Vergleichung mit der Theorie.

Um die Gültigkeit der Relation (V) sowie der übrigen daraus oben abgeleiteten Formeln einer möglichst strengen Prüfung zu unterziehen, wählte ich aus dem vorhandenen Beobachtungsmaterial zwei Versuchsreihen aus, bei welchen die Pulfrich'sche Formel (1) und um so mehr die Biot-Arago'sche Formel (8) sehr schlechte Resultate liefern, welche die Größe der möglichen Beobachtungsfehler übersteigen.

Es sind dies die Mischung Alkohol-Schwefelkohlenstoff, welche Wüllner[1] untersucht hat, und die von mir im Vorjahr untersuchte Mischung Wasser-Alkohol (bei $t = 25°$).

Bezüglich der in den Tabellen gebrauchten Bezeichnungen ist zu bemerken:

Δ bedeutet die Differenz zwischen den beobachteten und den unter Benützung eines Mittelwertes der β nach unserer Formel (18) berechneten Brechungsexponenten in Einheiten der 5. Dezimale.

Δ_P gibt die Differenz zwischen den beobachteten und den nach der Pulfrich'schen Formel berechneten Brechungsexponenten und endlich $\Delta_{\alpha=1}$ die Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung nach der Biot-Arago'schen Formel, immer in Einheiten der 5. Dezimale.

1. Mischung.

Wasser-Alkohol.

$t = 25°$.

Die Beobachtungsdaten sind meiner auf p. 459 zitierten Arbeit entnommen. Dem geringen Unterschiede der Brechungsexponenten des Wassers und des Alkohols entsprechend, liegen die Werte der Lorentz'schen Refraktionskonstanten R zwischen den Werten 0·20784 und 0·22376.

[1] Wüllner, Pogg. Ann., 133, p. 1.

Tabelle

Wasser-

Temperatur	Gewichtsprozente $\frac{p_2}{p_1+p_2}$	Volumprozente $\frac{v_2}{v_1+v_2}$	Beobachtete Dichte D	Aus den Bestandteilen berechnete Dichte D_v	Volumkontraktion $\frac{D-D_v}{D}$	Beobachteter Brech.-Expon. n_F	Aus den Bestandteilen berechneter Brech.-Expon. n_{v_F}
25°	0	0	0·99707	0·99707	0	1·33684	1·33684
	0·20750	0·24605	0·96781	0·94860	+0·01984	1·34969	1·34391
	0·40890	0·46303	0·93605	0·90586	+0·03225	1·36019	1·35014
	0·59984	0·65148	0·89617	0·86874	+0·03060	1·36526	1·35556
	0·79989	0·83195	0·85006	0·83319	+0·01984	1·36740	1·36074
	1	1	0·80009	0·80009	0	1·36557	1·36557

Die Volumkontraktion übersteigt in maximo $^3/_{1000}$ des Gesamtvolumens, etwas geringer ist die Kontraktion des Brechungsvermögens $\frac{\mathfrak{N}-\mathfrak{N}_v}{\mathfrak{N}}$ nach Pulfrich. Daher ist α etwas kleiner als 1.

Die Kontraktion der Lorentz'schen Refraktionskonstante $R-R_v$ ist noch geringer, also sind auch die β durchwegs kleiner als die α.

Wie man sieht, ist die Konstanz der Koeffizienten β recht gut gewahrt und somit ist bewiesen, daß die von uns nach Analogie des Pulfrich'schen Ausdruckes (III) aufgestellte Gleichung (V) tatsächlich erfüllt ist.

Die graphische Darstellung des Ausdruckes $\frac{R-R_v}{R}$ liefert, wie aus der Figur p. 470 ersichtlich, eine zusammenhängende Kurve, welche vollkommen der Volumkontraktionskurve $\frac{D-D_v}{D}$

1.

Alkohol.

$\left(\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_v}{\mathfrak{R}}\right)_F$	α_F	Lorentz-sche Refraktions-konstante (beob.) R_F	Lorentz-sche Refraktions-konstante (berech.) R_{v_F}	$\left(\frac{R-R_v}{R}\right)_F$	β_F	Δ	Δ_P	$\Delta_{\alpha=1}$
0	—	0·207841	0·207841	0	—	—	—	—
+0·01653	0·878	0·215001	0·211758	+0·015084	0·760	−22	−33	−118
+0·02790	0·865	0·220803	0·215211	+0·025326	0·785	− 5	−18	−162
+0·02656	0·868	0·223589	0·218211	+0·024053	0·786	− 3	−14	−153
+0·01812	0·914	0·224763	0·221084	+0·016368	0·825	+29	+25	− 64
0	—	0·223759	0·223759	0	—	—	—	—
	Mittel: 0·881				Mittel: 0·798			

parallel verläuft, woraus unmittelbar hervorgeht, daß die Koeffizienten β für alle Prozentgehalte angenähert konstant sind. Da der Ausdruck $\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_v}{\mathfrak{R}}$ bei dieser Mischung stets größer ist als $\frac{R-R_v}{R}$, so liegt auch der Scheitelpunkt der ersteren Kurve etwas höher als bei der Kurve $\frac{R-R_v}{R}$.

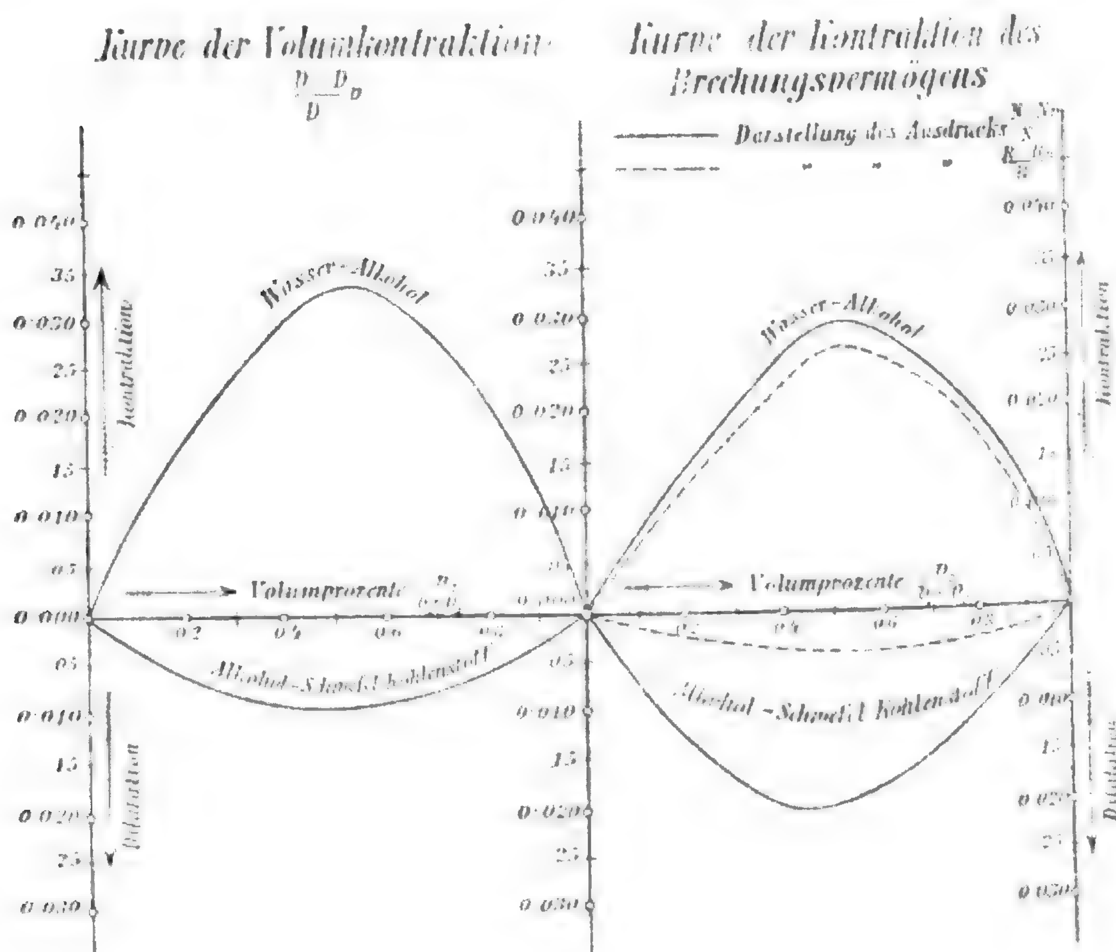
Betrachten wir nun die Resultate, welche unsere Modifikation der Lorentz'schen Mischungsformel bei Vorausberechnung von Brechungsexponenten ergibt.

Wie man aus der Kolumne Δ ersieht, sind die Abweichungen der nach Formel (18) berechneten Brechungsexponenten durchwegs erheblich geringer als bei der Pulfrich'schen Formel.

Nur beim 4. Gemisch übersteigt die Abweichung Δ die Pulfrich'sche Δ_P um geringes, d. h. beide Formeln geben keine sehr guten Resultate. Das kann auch gar nicht überraschen,

da ich schon in meiner früheren Arbeit bei diesem Gemische größere Beobachtungsfehler vermutet habe.

Was die Nachberechnung der Volumkontraktion mittels Formel (19) betrifft — bei Verwendung des Mittelwertes der β — so ist vor allem zu bemerken, daß da bei weitem nicht derselbe Genauigkeitsgrad verlangt werden kann wie bei der Formel (18). Hier genügt schon eine ganz kleine Inkonstanz der β, um die



Zahlen für die Volumkontraktion c erheblich zu ändern. Wenden wir z. B. auf das 2. Gemische die Formel (19) an, so ergibt sich

$$c = \frac{1}{\beta} \frac{R - R_v}{R} = 0 \cdot 03174,$$

welcher Wert vom beobachteten ($c = 0 \cdot 03225$) um 51 Einheiten der 5. Dezimale differiert.

Wollte man in analoger Weise aus der Pulfrich'schen Relation (III) die Volumkontraktion berechnen bei Anwendung des Mittelwertes der α, so erhielte man

$$c = \frac{1}{\alpha} \frac{\mathfrak{N}-\mathfrak{N}_v}{\mathfrak{N}} = \frac{0 \cdot 02790}{0 \cdot 881} = 0 \cdot 03167,$$

welcher Wert vom beobachteten um 58 Einheiten abweicht.

Untersuchen wir ferner die Anwendbarkeit unserer Formel (20), d. h. die Berechnung der Volumprozente aus den Angaben D, d_1, d_2, R, R_1, R_2 und eines Mittelwertes β, so finden wir z. B. bei dem 3. Gemische

$$\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{0 \cdot 031913}{0 \cdot 049015} = 0 \cdot 65109,$$

welches Resultat von dem beobachteten $\left(\frac{v_2}{v_1+v_2} = 0 \cdot 65148\right)$ nur um 39 Einheiten der 5. Dezimale differiert.

Man ersieht daraus, daß sich die Formel (20) ganz gut dazu eignet, Prozentgehalte bis auf einige Einheiten der 4. Dezimale genau nachzuberechnen.

Auch aus der Pulfrich'schen Relation (III) ließe sich in vollkommen analoger Weise, wie auf p. 466 für unsere Relation (V) dargestellt, eine Formel zur Nachberechnung der Volumprozente gewinnen.

Setzt man nämlich in der Deduktion, die zu Formel (20) führt, statt R, R_1 und R_2 die Pulfrich'schen Ausdrücke $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ ein und statt β das Pulfrich'sche α, so bekommt man eine formal ganz gleiche Formel wie (20), nämlich

$$\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{(D-d_1)\mathfrak{N} \cdot \alpha - (\mathfrak{N}-\mathfrak{N}_1)D}{(d_2-d_1)\mathfrak{N} \cdot \alpha - (\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1)D}. \qquad (20')$$

Die Anwendung zeigt jedoch wiederum, daß Formel (20) genauere Resultate liefert.

Denn man erhält z. B. für das 3. Gemisch nach Formel (20')

$$\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{0 \cdot 057938}{0 \cdot 089134} = 0 \cdot 65001;$$

beobachteter Wert $\frac{v_2}{v_1+v_2} = 0 \cdot 65148$, also eine Abweichung von 147 Einheiten der 5. Dezimale.

Wir sahen somit, daß bei allen drei im Kapitel III besprochenen Anwendungen unsere Beziehung (V) genauere Resultate liefert als die Pulfrich'sche Relation (III); für die

praktische Anwendung wird jedoch die Pulfrich'sche ihrer Handlichkeit wegen vorzuziehen sein.

2. Mischung.

Alkohol-Schwefelkohlenstoff.

$t = 20°$.

Die Beobachtungsdaten sind der auf p. 467 zitierten Arbeit Wüllner's entnommen. Diese Mischung ist von ganz besonderem Interesse. Sie bildet in gewissem Sinne ein Gegenstück zur Mischung Wasser-Alkohol, denn es zeigt sich bei ihr eine regelmäßig verlaufende Dilatation, welche in maximo $^1/_{1000}$ des Gesamtvolumens erreicht. Die Dilatation des Pulfrich'schen Ausdruckes, $\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_v}{\mathfrak{R}}$, ist etwa doppelt so groß, daher auch $\alpha > 1$. Um so interessanter erscheint da der Umstand, daß die Dilatation der Lorentz'schen Refraktionskonstante $\frac{R-R_v}{R}$ bedeutend geringer ist als die des Volumens, also $\beta < 1$.

Die β sind, wie aus Tabelle 2 ersichtlich, fast ganz konstant, somit ist die Richtigkeit unserer Beziehung (V) wiederum vollständig erwiesen.

Die Vorausberechnung der Brechungsexponenten nach unserer Formel (18) mit Hilfe eines Mittelwertes der β gibt, wie aus der Kolumne Δ hervorgeht, sehr gute Resultate. Die Abweichungen von der Beobachtung sind im Durchschnitte dreimal so klein als die, welche nach der Pulfrich'schen Formel (III) sich ergeben.

Die Abweichungen $\Delta_{\alpha=1}$ der Biot-Arago'schen Formel sind enorm, sogar die dritte Dezimale wird erheblich affiziert.

Auch die übrigen Anwendungen lassen unsere bereits bei der ersten Mischung gezogenen Schlußfolgerungen vollständig gerechtfertigt erscheinen.

Da die β fast ganz konstant sind, ergibt die Formel (19) zur nachträglichen Berechnung der Volumkontraktion

$$c = \frac{1}{\beta} \frac{R-R_v}{R} \quad \text{(für } \beta \text{ wird der Mittelwert eingesetzt)}$$

viel genauere Resultate als bei der ersten Mischung.

Tabelle 2.

Alkohol-Schwefelkohlenstoff.

Temperatur t	$\frac{p_2}{p_1+p_2}$	$\frac{v_2}{v_1+v_2}$	D	$\frac{D-D_v}{D}$	n_F	$\left(\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_v}{\mathfrak{R}}\right)_F$	α_F	Mittelwert der α_F	R_F	$\left(\frac{R-R_v}{R}\right)_F$	β	Mittelwert der β	Δ	Δ_P	$\Delta_{\alpha=1}$
	0	0	0·79628	0	1·36676	0	—		0·224412	0	—		—	—	—
	0·50766	0·39386	0·97177	−0·00880	1·47039	−0·01910	2·17		0·279201	−0·003402	0·386		− 6	+33	+480
$t = 20°$	0·68034	0·57289	1·05425	−0·00922	1·52081	−0·01870	2·03	Mittelwert $\alpha_F = 2·088$	0·304406	−0·003649	0·395	Mittelwert $\beta_F = 0·375$	−12	−27	+490
	0·79818	0·71135	1·12167	−0·00720	1·56279	−0·01430	1·98		0·324676	−0·002486	0·345		+15	−44	+394
	1	1	1·26354	0	1·65268	0	—		0·365931		—		—	—	—

Zum Beispiel für das 1. Gemische ergibt die Berechnung nach Formel (19) $c = -0 \cdot 00882$, der beobachtete Wert ist fast absolut gleich, nämlich $c = -0 \cdot 00880$.

Wendet man die Pulfrich'sche Beziehung (III) in gleicher Weise an, so findet man für das 1. Gemische (bei Benützung des Mittelwertes der α)

$$c = \frac{1}{\alpha} \frac{\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_v}{\mathfrak{N}} = -0 \cdot 00915,$$

weicht also um 35 Einheiten der 5. Dezimale vom beobachteten Wert ab.

Auch unsere Formel (20) zur Vorausberechnung der Volumprozente bewährt sich wieder besser als die analoge Formel (20'), die aus der Beziehung (III) gewonnen wurde.

Man findet nämlich z. B. für das 1. Gemische nach (20)

$$\frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{(D - d_1) R\beta - (R - R_1) D}{(d_2 - d_1) R\beta - (R_2 - R_1) D} = \frac{0 \cdot 034868}{0 \cdot 088602} = 0 \cdot 39354,$$

nach (20')

$$\frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{(D - d_1) \mathfrak{N} \alpha - (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_1) D}{(d_2 - d_1) \mathfrak{N} \alpha - (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1) D} = \frac{0 \cdot 071657}{0 \cdot 181080} = 0 \cdot 39572,$$

beobachteter Wert $= 0 \cdot 39386$;

also ergibt die Formel (20) eine Abweichung von bloß 32 Einheiten der 5. Dezimale, während (20') eine solche von 186 Einheiten liefert.

Es haben sich mithin unsere drei Berechnungsformeln (18), (19), (20) bei dieser Mischung noch schöner bewährt als bei der ersten.

V. Zusammenfassung der Resultate.

1. Die von uns nach Analogie der Pulfrich'schen Beziehung (III) aufgestellte Relation (V)

$$\frac{R - R_v}{R} = \beta \frac{D - D_v}{D}$$

befindet sich, wie wir gesehen haben, in vollständigem Einklange mit der Erfahrung. Sogar in jenen Fällen, wo die Relation (III) nur in sehr grober Annäherung erfüllt ist, bleiben die β für alle Mischungsverhältnisse fast ganz konstant. Bei jenen Mischungen, wo sich bereits die Relation (III) sehr gut erfüllt hat, trifft dies für unsere Beziehung (V) nur um so genauer zu.

Daher haben sich auch die drei Arten der Anwendung der Relation (V), nämlich die Formeln (18), (19), (20) besser bewährt als die analogen, aus der Pulfrich'schen Formel (III) abgeleiteten.

Unsere Beziehung (V) wird in folgender Weise praktisch verwertet: Man bereite ein Gemisch von bestimmtem Prozentgehalt und ermittle möglichst sorgfältig den Proportionalitätsfaktor β der betreffenden Kontraktionen. Dann kann man

a) Brechungsexponenten N irgend eines andern Prozentgehaltes derselben Mischung vorausberechnen nach Formel (18), wenn gegeben sind $\frac{v_2}{v_1+v_2}$, R_1, R_2, d_1, d_2, D und β;

b) die Volumkontraktion c berechnen nach (19), wenn bekannt sind: R_1, R_2, R, d_1, d_2 und β;

c) den Prozentgehalt $\frac{v_2}{v_1+v_2}$ nach Formel (20), wenn gegeben sind R_1, R_2, R, d_1, d_2, D und β.

2. Unsere Beziehung (V) gilt fast unabhängig von Wellenlänge und Temperatur. Einige probeweise Berechnungen an verschiedenen Versuchsreihen ergaben, daß die β sich ebenso wie die Pulfrich'schen α nur wenig, jedoch in stetiger Weise mit der Wellenlänge ändern und innerhalb eines Temperaturintervalls von etwa 10° als konstant betrachtet werden können.

3. Wir haben somit gezeigt, daß unsere neue Mischungsformel (17)

$$\frac{N^2-1}{N^2+2}\,\frac{1-\beta c}{1-c}\,\frac{p_1+p_2}{D}=\frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\,\frac{p_1}{d_1}+\frac{n_2^2-1}{n_2^2+2}\,\frac{p_2}{d_2},$$

welche ja nur eine Modifikation der Pulfrich'schen Formel (1) durch Einführung der Lorentz'schen Refraktionskonstante darstellt, mit größerer Genauigkeit erfüllt ist als die Biot-Arago'sche (8), die Lorentz'sche (7) sowie auch die Pulfrich'sche (1) und ist damit der Endzweck unserer Untersuchung erreicht.

Freilich muß bemerkt werden, daß die praktische Verwertung unserer Formel keine sehr bequeme ist, da in den Rechnungen stets die Ausdrücke $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ auftreten.

Anhang.

Bei meinen Experimentaluntersuchungen, die zunächst nur unternommen waren, um die Gültigkeit der Pulfrich'schen Formel zu prüfen, stieß ich auf einen sehr bemerkenswerten Ausnahmefall. Es war dies die Mischung Äthylenbromid-Alkohol.

Dieses Gemisch zeigte etwa bis zum Prozentgehalte $\frac{v_2}{v_1+v_2} = 0 \cdot 60$ eine äußerst geringe Volumdilatation (welche im Höchstfalle den Wert $c = \frac{D-D_v}{D} = -0 \cdot 00020$ erreichte), von da ab eine sehr geringe Kontraktion (Höchstwert $c = \frac{D-D_v}{D} = +0 \cdot 00131$), während das Brechungsvermögen eine ziemlich regelmäßige, jedoch ebenfalls sehr geringe Dilatation, in maximo $\left(\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_v}{\mathfrak{R}}\right)_D = -0 \cdot 00501$ aufwies. Also würde der Pulfrich'sche Proportionalitätsfaktor α für die ersten Prozentgehalte negativ sein, später positiv. Daß ein davon gewonnener Mittelwert für die Berechnungen keine besonders guten Resultate liefert, läßt sich voraussehen.

Bemerkenswert ist, daß die nach (V) berechneten Lorentz-schen Kontraktionen $\frac{R-R_v}{R}$ mit den betreffenden Volumkontraktionen trotzdem dem Vorzeichen nach übereinstimmten, also unsere Relation (V), wenn auch nur in grober Annäherung, erfüllt blieb.

In der Literatur fand ich mehrere Gemische erwähnt, welche bis zu einem bestimmten Prozentgehalte Dilatation, dann Kontraktion zeigten oder umgekehrt.

Buchkremer erwähnt die Mischung Alkohol-Benzol, Bussy und Buignet Alkohol-Chloroform, Meissner und Ure fanden dieselbe Erscheinung bei der Mischung Ammoniak-Wasser.

Jedenfalls tritt dies Phänomen nur ein, wenn ein Flüssigkeitsgemische sehr geringe Volumänderungen aufweist, und selbst bei derartigen ist es ein Ausnahmefall.

Eines wird uns durch diesen Ausnahmefall wieder so recht in Erinnerung gebracht: daß sowohl unsere als auch Pulfrich's Formel zwar in den meisten Fällen sehr genau gilt, daß sie aber kein allgemein gültiges Naturgesetz sind, von dem es keine Ausnahmen geben kann.

Am Schlusse meiner Mitteilungen erlaube ich mir meinen hochverehrten Lehrern Herrn Hofrat Prof. Dr. Leopold Pfaundler und Prof. Dr. Anton Wassmuth für ihre vielfach erteilten Ratschläge meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Über eine neue Konstruktion einer Leydenerbatterie mit Umschaltungsvorrichtung von Parallelanordnung auf Kaskadenanordnung

von

L. Pfaundler in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1906.)

E. Mach[1] hat eine Konstruktion der bezeichneten Art beschrieben, welche auf der Parallelverschiebung eines Rahmengestells beruht und sich gut bewährt hat. Ich habe vor mehreren Jahren versucht, eine etwas weniger voluminöse Anordnung auszuführen, welche auf gleichzeitiger Drehung sämtlicher Flaschen um ihre vertikale Achse um 90° beruht. Da auch diese Konstruktion ihren Zweck erfüllt, so will ich dieselbe kurz beschreiben.

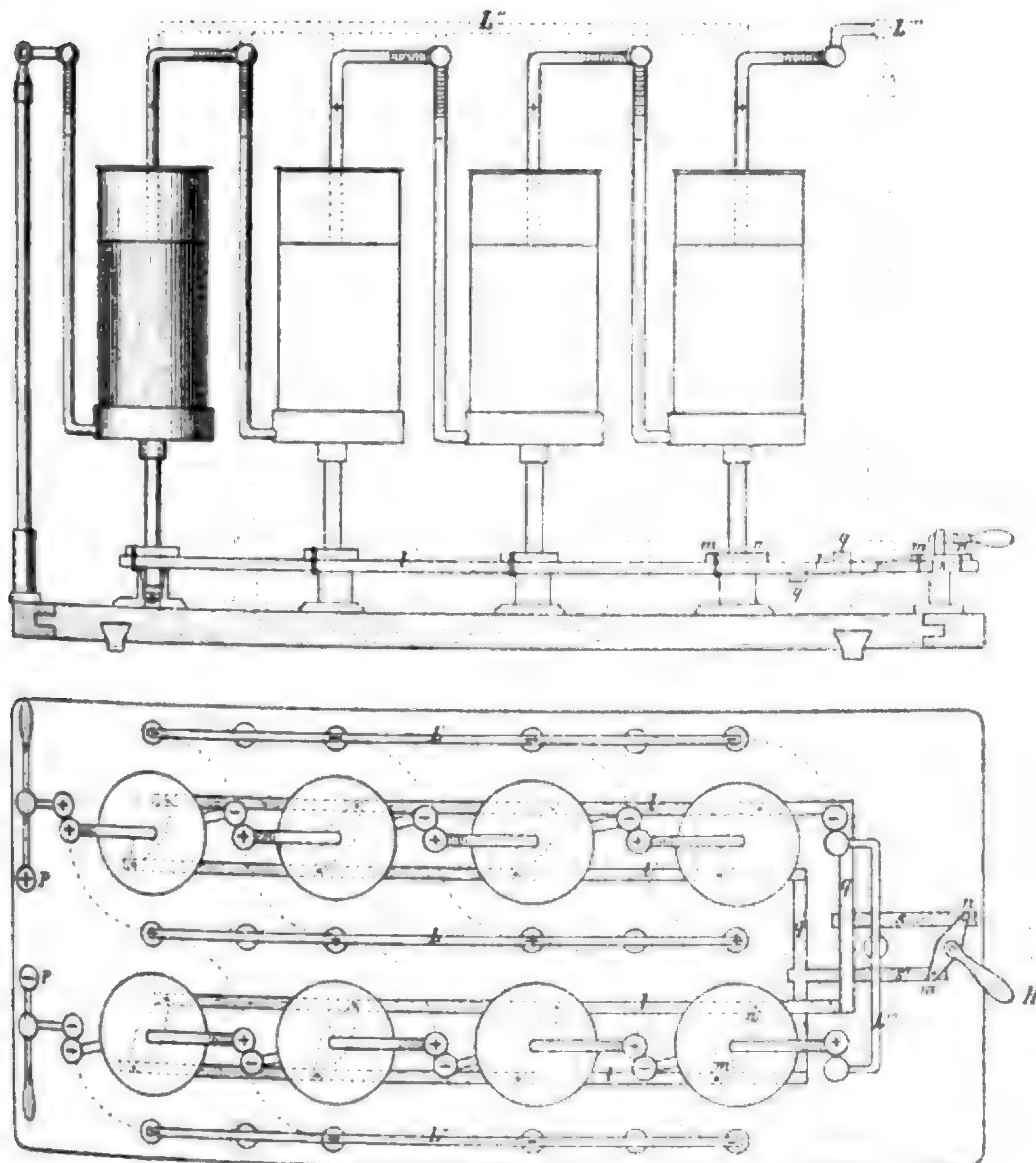
Die beigefügte Tafel zeigt den Apparat im Grundriß und in der Vorderansicht in einem Zehntel der Ausführung. Die acht Flaschen stehen in zwei Reihen zu je vier auf Glassäulen isoliert. Letztere sind in Konusse aus Messing eingekittet, welche wie Hähne in Hohlkonussen drehbar sind. Die Drehung sämtlicher Flaschen erfolgt durch zwei Gestänge, bestehend aus den Messingstäben l, l, q, s einerseits und l', l', q', s' andrerseits, deren Teile starr miteinander verbunden sind. Der Messingkonus jeder Flasche ist durch einen zweiarmigen Hebel $m'n'$ mit je zwei dieser Stangen gelenkig verbunden, ebenso der Hebel mn mit den Enden der Stangen s und s'. Durch einen Handgriff H ist man demnach im stande, sämtliche Flaschen gleichzeitig um nahe 90° zu drehen.

---

[1] Anzeiger der Wiener Akademie, Bd. XV (1876).

Die Zuleitungen der inneren Belegungen sind, wie aus der Vorderansicht der vorderen Flaschenreihe ersichtlich ist, oben rechtwinkelig umgebogen und enden mit biegsamen, enggewickelten Spiralen aus dickem blanken Neusilberdraht, welche an den Enden Kugeln tragen. Die äußeren Belegungen sind mit vertikal ansteigenden Leitern in Verbindung, welche ebenfalls mit biegsamen Spiralen und Kugeln in gleicher Höhe endigen. Außerdem stehen auf je zwei isolierenden Glassäulen die Leiter L, L' und L'', welche nach abwärts Kugeln in gleicher Höhe tragen. Endlich vermittelt noch ein isolierter Leiter L''' die Verbindung der beiden Flaschenreihen. Die Figur zeigt die Anordnung der Kaskadenschaltung. Die als positiv geladen gedachten inneren Belege sind mit den negativ geladenen äußeren Belegen der Nachbarflaschen in Berührung, P und P' sind die Pole der ganzen Kaskade, welche einander genähert werden können. Dreht man den Hebel H, so kommen durch die Drehung alle mit + bezeichneten Kugeln der Innenbelegungen mit dem Mittelleiter L in Berührung und gleichzeitig alle mit — bezeichneten Kugeln der Außenbelegungen mit den Außenleitern L' und L'', welche zur Erde abgeleitet oder mit dem — Pole der Maschine in Verbindung gebracht sind. Der + Pol der Maschine kommuniziert mit L. In dieser Parallelschaltung erfolgt die Ladung, die Entladung nach der Umschaltung. Der Apparat hat sich bewährt, nur empfiehlt es sich, das Grundbrett aus recht trockenem Holze zu nehmen, damit es sich nicht verzieht. Auch erscheint es rätlich, die Flaschendistanz sowie den Abstand der Belegungsflächen vom Flaschenrande etwas größer zu dimensionieren, um Nebenentladungen sicherer hintanzuhalten.

Neue Konstruktion einer Leydenerbatterie mit Umschaltungsvorrichtung von Parallelanordnung auf Kaskadenanordnung.



Über komplexe Einheiten

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1906.)

1.

Kummer hat in seiner Theorie der aus einer λ^{ten} Einheitswurzel α gebildeten komplexen Zahlen, wo λ eine ungerade Primzahl bezeichnet, den Satz[1] bewiesen, daß jede ganze Zahl $f(\alpha)$ in α, welche der Gleichung

$$f(\alpha)f(\alpha^{-1}) = 1$$

genügt, eine $2\lambda^{\text{te}}$ Einheitswurzel sein muß. Kronecker hat diesen Satz in etwas anderer Gestalt verallgemeinert,[2] indem er für irgend eine Einheit $E(\omega)$ des aus einer primitiven n^{ten} Einheitswurzel ω hervorgehenden Körpers nachwies, daß der Quotient $\frac{E(\omega^{-1})}{E(\omega)}$ eine n^{te} oder $2n^{\text{te}}$ Einheit ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Man kann diese Resultate in der folgenden einfachen Weise erhalten.

2.

Es sei ω eine primitive n^{te} Einheitswurzel und $f(\omega)$ eine ganze Zahl in ω, welche der Gleichung

[1] Kummer, Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten komplexen Zahlen in ihre Primfaktoren. Crelle's Journal, Bd. 35. — Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et des nombres entiers. Lionville's Journal, Bd. 16, 1851.

[2] Kronecker, Über komplexe Einheiten. Crelle's Journal, Bd. 53.

$$f(\omega)f(\omega^{-1}) = 1$$

genügt. Bezeichnet p irgend eine ungerade, zu n teilerfremde Primzahl, so ist

$$f(\omega)^p - f(\omega^p) = p\Gamma(\omega),$$

wo $\Gamma(\omega)$ eine ganze Zahl in ω ist. Nimmt man auf beiden Seiten die Norm in Bezug auf ω, so ergibt sich

$$N(f(\omega)^p - f(\omega^p)) = p^{\varphi(n)} N\Gamma(\omega).$$

Da aber auf Grund der für $f(\omega)$ gegebenen Gleichung

$$|f(\omega)| = 1$$

und infolge der Irreduktibilität der Gleichung für die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln

$$f(\omega^p)f(\omega^{-p}) = 1$$

ist, so ist auch

$$|f(\omega)^p| = 1, \quad |f(\omega^p)| = 1$$

und daher für jede primitive n^{te} Einheitswurzel

$$|f(\omega)^p - f(\omega^p)| \leqq 2.$$

Hiernach ist die ganze Zahl $N(f(\omega)^p - f(\omega^p))$ nicht größer als $2^{\varphi(n)}$ und muß demzufolge $= 0$ sein, weil sie durch $p^{\varphi(n)}$ teilbar und $p > 2$ ist. Somit ist

$$f(\omega)^p = f(\omega^p).$$

Ist q eine zweite ungerade, zu n teilerfremde Primzahl, so ist aus denselben Gründen

$$f(\omega)^q = f(\omega^q)$$

und daher auch, wenn ω durch ω^p ersetzt wird:

$$f(\omega^{pq}) = f(\omega^p)^q = f(\omega)^{pq}.$$

Setzt man diese Schlüsse nach Bedarf fort, so erhellt, daß für irgend eine ungerade, zu n teilerfremde Zahl m

$$f(\omega)^m = f(\omega^m)$$

ist. Nimmt man $m = n+1$ oder $= 2n+1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so ergibt sich

$$f(\omega)^{n+1} = f(\omega^{n+1}) = f(\omega),$$
$$f(\omega)^{2n+1} = f(\omega^{2n+1}) = f(\omega).$$

und daher beziehungsweise

$$f(\omega)^{n} = 1,$$
$$f(\omega)^{2n} = 1.$$

Wendet man die vorstehenden Gleichungen auf den Quotienten

$$f(\omega) = \frac{E(\omega^{-1})}{E(\omega)}$$

an, wo $E(\omega)$ eine Einheit in ω bezeichnet, und ist n eine Potenz einer ungeraden Primzahl λ, so kann $f(\omega)$ nur eine n^{te} Einheitswurzel sein. Denn die Gleichung

$$E(\omega^{-1}) = f(\omega)\, E(\omega)$$

ergibt die Identität

$$E(x^{n-1}) = f(x)\, E(x) + Q(x)\, \frac{x^{n}-1}{x^{\frac{n}{\lambda}}-1},$$

wo Q ganz und ganzzahlig in x ist, und es wird

$$E(1) \equiv f(1)\, E(1) \quad (\text{mod}\ \lambda),$$
$$f(1) \equiv 1 \quad (\text{mod}\ \lambda),$$

so daß nicht $f(\omega) = -\omega^{k}$ sein kann. In diesem Falle kann demnach

$$E(\omega^{-1}) = \omega^{2h} E(\omega)$$

gesetzt werden und es erhellt, daß $E(\omega)$ durch Multiplikation mit einer n^{ten} Einheitswurzel ω^{h} in eine reelle Einheit $\omega^{h} E(\omega)$ verwandelt werden kann, wie schon Kummer für eine einfache Primzahl $n = \lambda$ gezeigt hat.

Ist n eine Potenz von 2 und > 2, so kann $\frac{E(\omega^{-1})}{E(\omega)}$ nur eine $\frac{n}{2}$te Einheitswurzel sein. Denn die Gleichung

$$\left(\frac{E(\omega^{-1})}{E(\omega)}\right)^{n} = 1$$

zieht die Gleichung

$$E(\omega^{-1}) = \omega^{h} E(\omega)$$

und die Identität

$$x^{h} E(x) - E(x^{n-1}) = Q(x)\left(x^{\frac{1}{2}n} + 1\right)$$

nach sich, wo Q ganz und ganzzahlig in x ist. Differentiiert man noch x und setzt hierauf $x = 1$, so folgt

$$hE(1)+E'(1)-(n-1)E'(1) = \frac{n}{2}Q(1)+2Q'(1)$$

und hieraus

$$hE(1) \equiv 0, \quad h \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

$E(\omega)$ wird daher durch Multiplikation mit $\omega^{\frac{h}{2}}$ in eine reelle Einheit $\omega^{\frac{h}{2}} E(\omega)$ verwandelt.

Besitzt dagegen n verschiedene Primfaktoren, so zeigt das von Kronecker angeführte Beispiel $E(\omega) = 1-\omega$, daß

$$\frac{E(\omega^{-1})}{E(\omega)} = -\omega^{-1}$$

eine $2n^{\text{te}}$ oder n^{te} Einheitswurzel ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Die stereophotogrammetrische Ballonaufnahme für topographische Zwecke

von

Dr. **Anton Schell,**

k. k. Hofrat, em. o. ö. Professor der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

(Mit 12 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1906.)

Die photographische Aufnahme eines räumlich ausgedehnten Objektes an Bord eines Ballons, ist eine der wichtigsten Aufgaben der Aëronautik; denn diese Aufnahmen übertreffen durch die Einfachheit und Sicherheit der Konstruktion alles, was auf dem Gebiete der Geodäsie bis jetzt geleistet wurde.

Die Ballonphotographie kann wissenschaftlichen Diensten nutzbar gemacht werden, wenn die Ballonaufnahme mit einem photogrammetrisch eingerichteten Instrumente (Phototheodoliten) ausgeführt wird.

Die photographische Aufnahme von einem Luftballon kann unter verschiedenen Umständen erfolgen:

1. mittels eines freien und bemannten Ballons,
2. mit einem gefesselten und bemannten Ballon und endlich
3. mit einem gefesselten unbemannten Ballon, bei welchem der Momentverschluß der Kamera durch elektrische Auslösung von der Erde aus vorgenommen wird.

Die bisherigen Versuche, im freien Ballon brauchbare photographische Bilder zu erzeugen, sind gescheitert. Die erzeugten Bilder waren größtenteils ganz unbrauchbar, da die meisten nicht einmal die Spur eines Bildes zeigten und im günstigsten Falle nur verwaschene Bilder lieferten.

Die Gründe dieses Mißlingens bilden die fortwährenden Bewegungen des Ballons, welche selbst bei mäßigen Luftströmungen unregelmäßig und ziemlich heftig sind und während der Exposition störend auf die Schärfe des erzeugten Bildes einwirken.

Bei einem freien Ballon sind es vorzugsweise die nachfolgenden Bewegungen, welche die Herstellung guter und brauchbarer photographischer Bilder nicht gestatten.

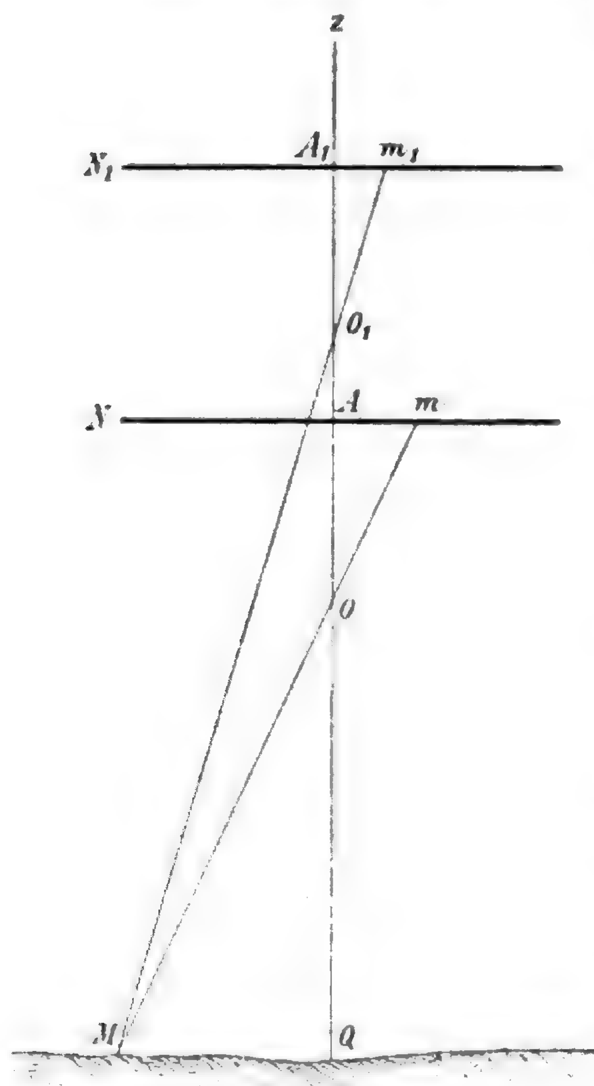


Fig. 1.

a) Eine Bewegung des Ballons in vertikaler Richtung wirkt weniger störend auf die Schärfe der Bildpunkte in der Mitte als auf jene an den Rändern, da in der Mitte die Schärfe der Bildpunkte stets dieselbe bleibt, während die Schärfe der Bildpunkte an den Rändern immer mehr abnimmt. Es sei in Fig. 1 $OQ = H$ die Höhe des optischen Mittelpunktes des Objektives der Kamera an der Erdoberfläche, N die Negativplatte, A der Hauptpunkt derselben und $OA = P$ die Bilddistanz, welche der Brennweite des Objektives entspricht.

Ist nun M ein beliebiger Punkt des Terrains, dessen Abstand $MQ = R$ ist und dessen Bild m auf der Negativplatte den Abstand $Am = r$ besitzt, so ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken OAm und OQM die Proportion

$$r : R = P : H,$$

woraus folgt,

$$r = \frac{PR}{H} \cdot \qquad \ldots 1)$$

Ist v die Geschwindigkeit des Ballons in vertikaler Richtung und E die Expositionszeit, so gelangt O nach O_1, die Negativplatte nach N_1 und das Bild von M nach m_1. Setzt man nun $A_1 m_1 = r_1$ und $A_1 Q = H_1$, so ist

$$r_1 = \frac{PR}{H_1} \cdot$$

Es sei $r_1 - r = \Delta r$ und $H_1 - H = \Delta H = vE$, so ist

$$\Delta r = -\frac{v \cdot E}{H} r. \qquad \ldots 2)$$

Wie man sieht, wächst die Unschärfe Δr, welche durch eine Bewegung des Ballons in vertikaler Richtung erzeugt wird, mit der Geschwindigkeit des Ballons, der Expositionszeit und dem Abstande des Bildpunktes von dem Hauptpunkte der Negativplatte und nimmt mit der Ballonhöhe ab.

Für $v = 5\,m$, $E = 0 \cdot 2^s$, $H = 500\,m$, $r = 150\,mm$ wird $\Delta r = -0 \cdot 3 mm$.

b) Eine Bewegung des Ballons in horizontaler Richtung hängt vorzugsweise von der herrschenden Windstärke ab. Die dadurch entstehende Unschärfe der Bilder erstreckt sich auf alle Punkte der Negativplatte. Es sei in Fig. 2 $OQ = H$, $OA = P$, $OM = R$ und $Am = r$, so ist nach dem vorhergehenden

$$r = \frac{P \cdot R}{H} \cdot$$

Bezeichnet v die Geschwindigkeit des Ballons in horizontaler Richtung und E die Expositionszeit, so ist

$$OO_1 = AA_1 = QQ_1 = D = v \cdot E.$$

Ist m_1 das Bild des Punktes M in dieser Stellung des Ballons und $A_1 m_1 = r_1$, so hat man die Proportion

$$r_1 : (R + D) = P : H,$$

woraus folgt:

$$r_1 = \frac{P\,(R+D)}{H}.$$

Setzt man $r_1 - r = \Delta r$, so ist die durch die horizontale Fortbewegung des Ballons entstehende Unschärfe des Bildes gegeben durch den Ausdruck

$$\Delta r = \frac{P.D}{H} = \frac{P.E.v}{H}. \qquad \ldots 3)$$

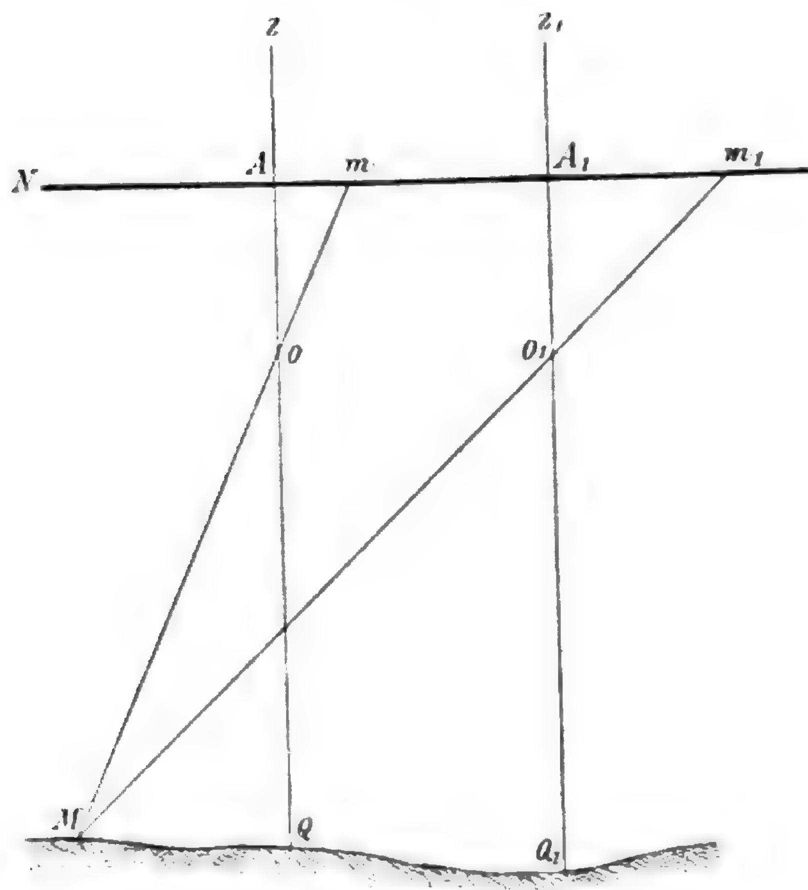


Fig. 2.

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, daß die Unschärfe sich auf alle Punkte der Negativplatte gleichmäßig erstreckt und dieselbe einen desto größeren Wert erhält, je größer die Brennweite des Objektives der Kamera, die Expositionszeit und die Geschwindigkeit des Ballons und je kleiner die Höhe desselben ist.

Für $P = 150\,mm$, $E = 0{\cdot}2^s$, $v = 5\,m$ und $H = 500\,m$, ist $\Delta r = 0{\cdot}3\,mm$.

c) Eine drehende Bewegung des Ballons um seine vertikale Achse bedingt eine beträchtliche Unschärfe der an den Rändern der Negativplatte gelegenen Punkte. Es sei in Fig. 3 m das Bild des Punktes M im Raume zu Beginn der Exposition

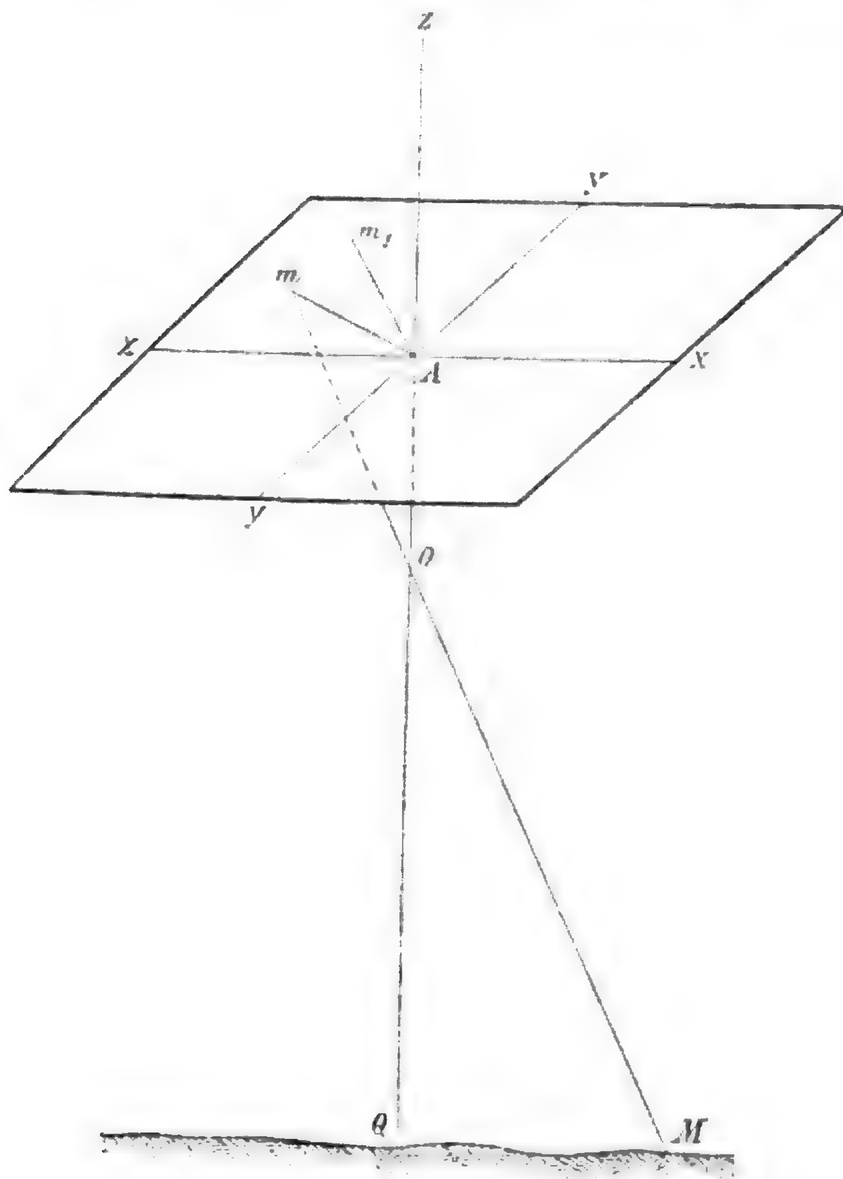


Fig. 3.

und die rechtwinkeligen Koordinaten desselben x und y in Bezug auf ein durch den Hauptpunkt A gelegtes Koordinatensystem. Die Entfernung dieses Punktes vom Ursprung ist durch den Ausdruck

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \ldots 4)$$

gegeben.

Besitzt der Ballon eine drehende Bewegung um seine vertikale Achse und ist t^s die Umdrehungszeit desselben, so

ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehungsachse $\frac{2\pi}{t}$. Ist nun m_1 das Bild des Punktes M am Ende der Exposition und ist E die Expositionszeit, in Sekunden ausgedrückt, so ist die Unschärfe $\Delta u = m m_1$ des Bildpunktes m durch die Relation

$$\Delta u = \frac{2\pi}{t} . r . E \qquad \ldots 5)$$

ausgedrückt.

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, daß die Unschärfe des Bildes mit der Expositionszeit und der Entfernung des Bildes vom Hauptpunkte zunimmt, dagegen mit der Umdrehungszeit des Ballons abnimmt.

Für $r = 150\,mm$, $E = 0 \cdot 2^s$, $t = 300^s$ beträgt

$$\Delta u = 0 \cdot 6\,mm.$$

d) Eine pendelnde Bewegung der mit dem photogrammetrischen Apparate ausgerüsteten Gondel übt den größten Einfluß auf das Gelingen scharfer Bilder aus, wenn die Schwingungen rasch aufeinander folgen.

Ist l die Pendellänge der Gondel und α^0 die Größe des Ausschlagwinkels, so ist

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

die Schwingungsdauer und

$$\lambda = l . \widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180} l . \alpha^0$$

der vom Mittelpunkt des Pendels (Hauptpunkt der Negativplatte) in der Zeit t zurückgelegte Weg; daher die Geschwindigkeit der bewegten Negativplatte

$$v = \frac{\lambda}{t} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{l}{t} \alpha^0.$$

Bezeichnet E die Expositionszeit, so ist die durch eine pendelartige Bewegung der Gondel erzeugte Unschärfe

$$\Delta u = v . E = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{l}{t} . \alpha^0 E$$

oder, da

$$\frac{l}{t} = \frac{\sqrt{g \cdot l}}{\pi}$$

ist, so hat man schließlich:

$$\Delta u = \frac{\sqrt{g \cdot l}}{180} \cdot E \cdot \alpha^0. \qquad \ldots 6)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Unschärfe des Bildes der Größe des Ausschlagwinkels und der Expositionszeit sowie der Quadratwurzel aus der Pendellänge direkt proportional ist.

Für $g = 9 \cdot 8063\, m$, $\alpha = 1^\circ$, $E = 0 \cdot 2^s$ und $l = 2\, m$ ist $\Delta u = 5\, mm$.

Die pendelartigen Schwingungen der Gondel, welche eine bedeutende Unschärfe des Bildes verursachen können, werden einerseits durch jede Bewegung des Luftschiffers in der Gondel, andrerseits durch die ungleichförmige Verteilung von Volumen und Gewicht im Ballon und in der Gondel erzeugt. Die Gondel hat in der Regel ein geringes Volumen, dagegen ein bedeutendes Gewicht (Menschen, Ballast, Instrumente u. dgl.), der Ballon dagegen ein großes Volumen und ein geringes Gewicht. Jeder Windstoß, welcher Ballon und Gondel trifft, wird an beiden einen verschiedenen Widerstand finden. Der voluminöse Ballon wird vorgetrieben, während die Gondel zurückbleibt, wodurch Schwingungen derselben erzeugt werden.

Um demnach mit einem photogrammetrischen Apparate, der in einem Luftballon entsprechend befestigt ist, gute und brauchbare photographische Bilder zu erhalten, muß der Ballon im Raume eine nahezu ruhige Lage erhalten, welche Bedingung nach dem Vorhergehenden nur durch einen unbemannten Fesselballon, der an drei Punkten auf dem Erdboden durch Leinen festgehalten wird, erzielt werden kann. Der Ballon muß ein entsprechendes Volumen und eine gehörige Steigkraft besitzen. Mittels dreier Leinen, welche an der Ballongurte g (Fig. 4a) befestigt werden, kann der Ballon B über jedem Punkt der Erdoberfläche zum Stillstande gebracht werden.

Um dem photogrammetrischen Apparat eine sichere Lage zu geben und denselben von der direkten Einwirkung des

Windes zu schützen, wird derselbe nach dem Vorschlage des Dr. A. Meydenbauer in einem zylindrischen Kasten Z aus Ebonit untergebracht, welcher im Inneren des Ballons an einem durch denselben hindurchgehenden kräftigen Bambusstabe SS_1 in der Mitte befestigt wird; an den Enden dieses Stabes ist das Schnurnetz angebracht, welches den kugelförmigen Ballon umspannt. Das obere Ende des zylindrischen Kastens ist

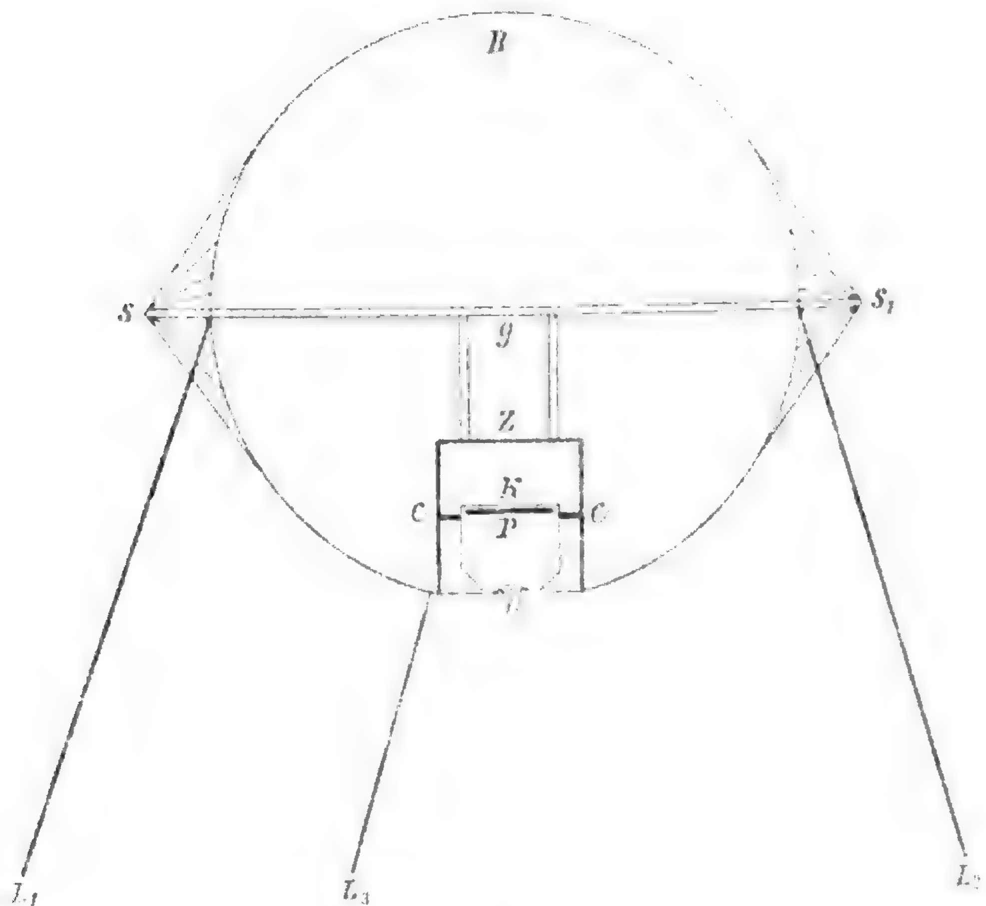


Fig. 4*a*.

geschlossen, das untere dagegen offen, an dessen Rand der Stoff des Ballons befestigt wird.

Im Inneren des zylindrischen Kastens wird der photogrammetrische Apparat an einer Cardanischen Aufhängevorrichtung C angebracht und die photographische Kamera K durch zwei aufeinander senkrecht angebrachte Laufgewichte derart belastet, daß im Zustande der Ruhe die in der Kassette befindliche Trockenplatte, welche die Bildebene P darstellt, eine horizontale Lage besitzt, was durch das Einspielen der zwei

an der Kamera angebrachten und rektifizierten Kreuzlibellen angezeigt wird.

Da jedoch der Ballon durch die unvermeidlichen kleinen Wallungen, hervorgerufen durch Windstöße oder infolge ungleicher Anspannungen der Leinen zwei aufeinander senkrecht stehende Bewegungen der Bildebene P erzeugt, muß noch eine Vorrichtung angebracht werden, welche gestattet, auf automatischem Wege die photographische Aufnahme in jenem Momente auszuführen, wenn die Bildebene eine horizontale Lage besitzt.

Dies kann dadurch zu stande gebracht werden, daß bei horizontaler Lage der Bildebene ein elektrischer Strom geschlossen wird, welcher den knapp vor der empfindlichen Trockenplatte befindlichen Verschluß in Bewegung setzt und dadurch eine momentane Belichtung stattfinden kann.

Es sei in Fig. 4 *b* der photogrammetrische Apparat A in dem zylindrischen Kasten Z in dem Cardanischen Ringe R so aufgehängt, daß die Bildebene P im Zustande der Ruhe bei einspielenden Kreuzlibellen die horizontale Lage einnimmt. An dem oberen geschlossenen Deckel des Zylinders Z ist eine rechteckige hölzerne Platte p_1 befestigt, auf welcher eine zweimal gebogene Glasröhre r_1 angebracht ist, welche mit reinem Quecksilber gefüllt ist. Die Verbindungslinie der beiden Kuppen α_1 und α_2 gibt dann stets eine horizontale Linie, mag der Ballon im Raume was immer für eine Lage haben.

An dem äußeren Deckel der Kassette, welche die empfindliche Trockenplatte P trägt, sind zwei Ständer S_1 und S_2 angebracht, welche am oberen Ende über den Öffnungen der kommunizierenden Glasröhre r_1 Plättchen enthalten, durch welche die Schräubchen σ_1 und σ_2 durchgeschraubt und deren Spitzen mit der Quecksilberoberfläche in den Punkten α_1 und α_2 in Berührung gebracht werden können. In diesem Falle ist die Verbindungslinie $\alpha_1\alpha_2$ horizontal, daher der Ebene P parallel, da die letztere bei einspielenden Kreuzlibellen eine horizontale Lage erhalten hat. In gleicher Weise ist an dem oberen Deckel des Zylinders Z eine Platte p_2 angebracht, welche auf der Richtung der Platte p_1 senkrecht steht und eine zweimal gebogene Glasröhre r_2 enthält, welche ebenfalls mit reinem

Quecksilber gefüllt ist. Die Verbindungslinie der in den beiden Schenkeln sich befindenden Quecksilberkuppen α_3 und α_4 stellt bei jeder Lage des Ballons im Raume eine horizontale Richtung dar. In der Richtung der Platte p_2 sind an dem äußeren Deckel der Kassette ebenfalls zwei Ständer S_3 und S_4 angebracht, an deren oberen Ende über den Öffnungen der kommunizierenden Glasröhre r_2 zwei Plättchen angebracht sind, durch welche die

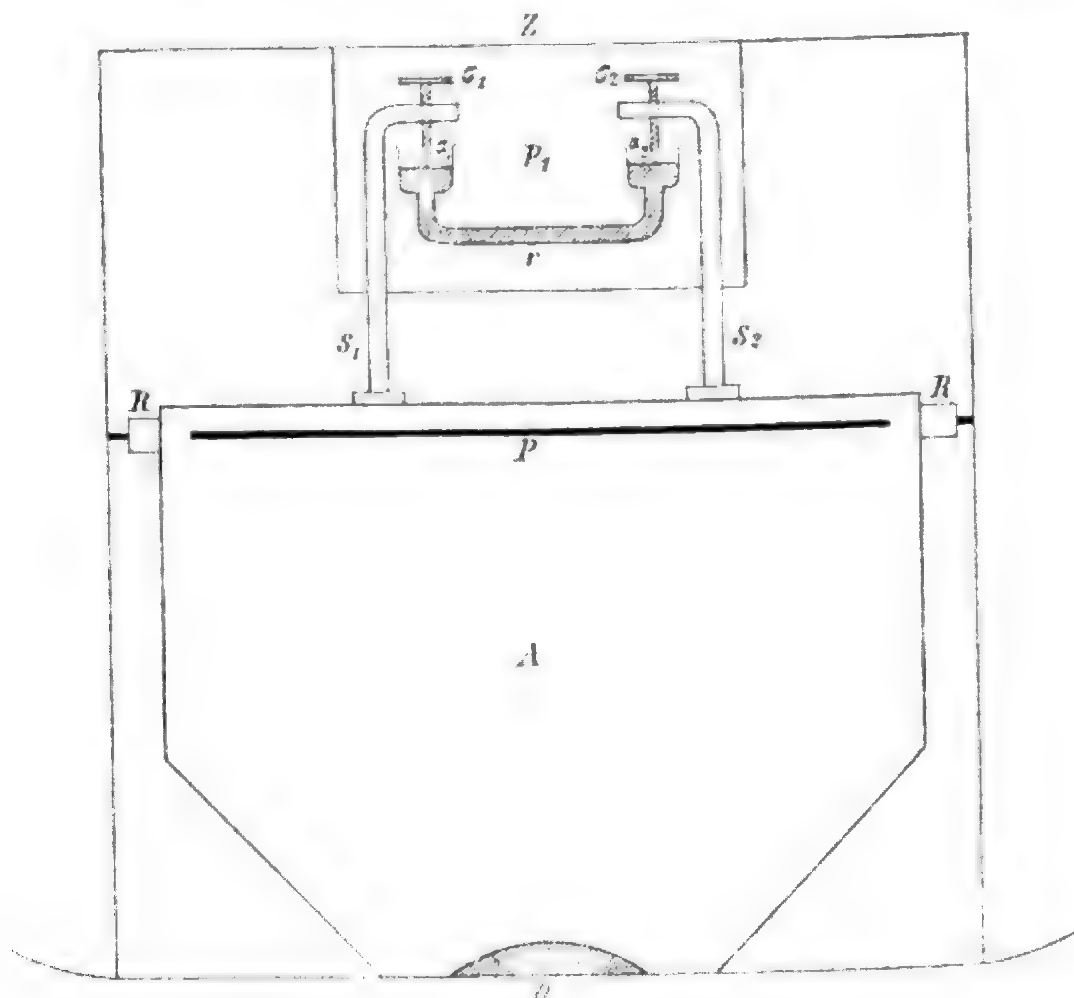


Fig. 4 *b*.

Schräubchen σ_3 und σ_4 hindurchgehen, deren Spitzen mit den Quecksilberkuppen α_3 und α_4 in Berührung gebracht werden können, so daß die Verbindungslinie der beiden Schraubenspitzen ebenfalls eine horizontale Richtung erhält und daher parallel ist der horizontal gestellten Platte S, d. i. der Bildebene.

Hieraus folgt, daß, wenn die empfindliche Trockenplatte oder die Bildebene eine horizontale Lage besitzt, die Schraubenspitzen die Quecksilberoberfläche an den kommunizierenden Röhren r_1 und r_2 berühren müssen und dadurch der von der

Batterie kommende Strom durch $S_1\sigma_1\sigma_2 S_2 S_3\sigma_3\sigma_4 S_4$ nach der Batterie zurückkehren muß. Tritt aber ein Stromschluß ein, so wird der vor der empfindlichen Platte befindliche Verschluß in Bewegung gesetzt und die photographische Aufnahme ausgeführt.

Bevor also der Ballon in dem betreffenden Punkte zum Steigen gebracht wird, hat man dem Gesagten zufolge mittels der an der Kamera angebrachten Kreuzlibellen die empfindliche Trockenplatte, d. i. die Bildebene, horizontal zu stellen und bei dieser Lage mittels der Schräubchen $\sigma_1 \ldots \sigma_4$ die Berührung der Schraubenspitzen mit der in den kommunizierenden Glasröhren enthaltenen Quecksilberoberfläche zu bewerkstelligen und die von den zwei als Leitungsdrähte wirkenden Leinen ausgehenden Drähte mit den Klemmen der Säulen S_1 und S_4 in Verbindung zu bringen.

Hat der Ballon die gewünschte Höhe erreicht, so wird die auf dem Erdboden befindliche Batterie mittels der in den beiden Leinen enthaltenen Leitungsdrähte geschlossen und eventuell in den Stromkreis noch ein Apparat eingeschaltet, welcher durch ein sichtbares oder hörbares Zeichen den vollzogenen Stromschluß oder die erfolgte photographische Aufnahme anzeigt.

Einrichtung eines photogrammetrischen Apparates für Ballonaufnahmen.

Der mit einem Fesselballon in Verbindung gebrachte photogrammetrische Apparat hat die Aufgabe, von einem Raumgebilde die perspektivische Projektion bei horizontaler Lage der Bildebene zu liefern. Zu diesem Behufe muß die Lage des perspektivischen Zentrums gegen die Bildebene durch den Hauptpunkt derselben und die Bilddistanz gegeben sein.

Die photographische Kamera, welche sich im Inneren des Ballons befindet und nur die mit dem Objektiv versehene Seite nach außen kehrt, hat in der Regel die Form eines Obelisken und wird am zweckmäßigsten aus Mahagoniholz hergestellt. Die Größe der Kamera hängt vorzugsweise von der Größe der anzuwendenden Trockenplatten und von der Brennweite des Aufnahmeobjektivs ab. Sehr wichtig bei der Herstellung eines

photogrammetrischen Apparates für Ballonaufnahmen ist die Frage nach der Beschaffenheit der Objektivlinse. Da man bei Ballonaufnahmen stets auf Momentbilder angewiesen ist, so dürfen nur lichtstarke Objektive zur Anwendung gelangen, welche ein großes Gesichtsfeld besitzen und scharfe, richtige Bilder liefern, die für photogrammetrische Zwecke brauchbar sind. Diesen Anforderungen entsprechen die Anastigmate. Die lichtstarken Serien derselben arbeiten gewöhnlich mit einer relativen Öffnung von mindestens $f/8$ und geben hiebei ein Bildfeld, dessen längste Dimensionen mindestens gleich der doppelten Brennweite P des Objektivs ist, haarscharf. Der Bild-

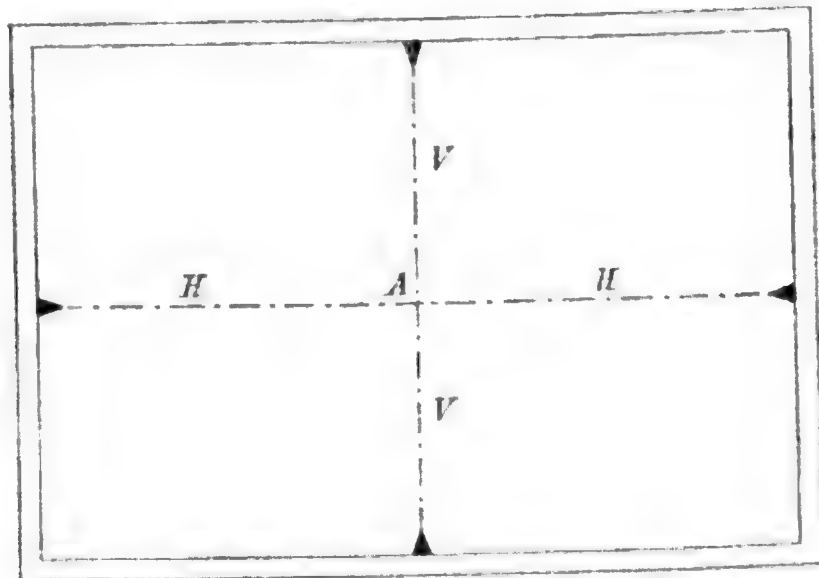


Fig. 5.

feldwinkel ist also 90° und die Seite s der quadratförmigen Negativplatte $P\sqrt{2}$. Die Größe der Brennweite hängt also von der Größe der zu verwendenden Trockenplatte ab. Es ist nämlich:

$$P = \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{s}{2}\sqrt{2}.$$

Wählt man also für Ballonaufnahmen photographische Trockenplatten von der Größe 30×30, so ist $P = 220$ *mm*.

An der dem Objektiv gegenüberliegenden Fläche der Kamera ist in dem Abstande, welcher der Brennweite des Objektivs entspricht, ein viereckiger Metallrahmen so befestigt, daß die an demselben angebrachten vier Marken, entsprechend verbunden, zwei aufeinander senkrecht stehende Linien H und

V geben, welche den Namen Horizontal- und Vertikallinien (Fig. 5) führen und in ihrem Durchschnitt den Hauptpunkt *A* des perspektivischen Bildes geben. Um diese beiden charakteristischen Linien auf das photographische Bild übertragen zu können, läßt sich an der Kamera, wo der Metallrahmen sich befindet, eine Kassette mit der lichtempfindlichen Platte einhängen und durch seitwärts angebrachte Haken, welche mit Federn versehen sind, mit der Kamera in feste Verbindung bringen. Vor dem Belichten der Trockenplatte wird die letztere durch an der Kassette angebrachte Federn an den Metallrahmen angedrückt, wodurch bei der Belichtung die Marken des Rahmens abgebildet werden. Durch diese vier Marken sind demnach auf der photographischen Platte die Horizontal- und Vertikallinie sowie der Hauptpunkt des perspektivischen Bildes gegeben. Die Verbindungsgerade des letzteren mit dem zweiten Gauß'schen Hauptpunkt des Objektivs, welche auf der photographischen Platte senkrecht stehen soll, gibt die Bilddistanz. Diese drei charakteristischen Linien des photographischen Apparates, nämlich Horizontallinie, Vertikallinie und Bilddistanz, müssen je aufeinander senkrecht stehen. Diese Eigenschaften eines jeden photogrammetrischen Apparates werden in Bezug auf ihr Vorhandensein ebenso untersucht und rektifiziert wie bei dem Phototheodoliten.[1]

Bei Ballonaufnahmen hat man jedoch auch auf die herrschenden Beleuchtungsverhältnisse Rücksicht zu nehmen, welche von dem Stande der Sonne und der Entfernung der nächstliegenden Objekte auf der Erdoberfläche abhängig sind, weshalb man auch verschieden große Blendungen in Anwendung bringen wird.

Außerdem wendet man bei Ballonaufnahmen mit großem Vorteil farbenempfindliche Platten unter Benützung einer Gelbscheibe an; denn selbst an den klarsten Tagen werden die Details der Erdoberfläche des feinen, bläulichen Dunstes wegen, welcher auf ihnen lagert, auf einer gewöhnlichen Platte nur mangelhaft, wie durch einen Schleier hindurch, dargestellt.

---

[1] Siehe: »Der Phototheodolit von Prof. Dr. Schell« in Eder's Handbuch der Photographie, I. Bd., 2. Hälfte, 2. Auflage.

Mit Hilfe einer passend gewählten Gelbscheibe, welche nur das blaue Licht abdrosselt, kann jedoch bei voller Öffnung nur dann eine Momentaufnahme gemacht werden, wenn die Expositionszeit bis auf 0·2 Sekunden verlängert wird.

Bestimmung der Lage des Ballonortes.

Wenn mittels eines photogrammetrischen Apparates, welcher an einem Fesselballon befestigt ist, bei horizontaler

Fig. 6.

Lage der Negativplatte mit einem Objektiv von der Brennweite P ein Bild von einem räumlichen Objekt erzeugt wird, so lassen sich, wenn die perspektivischen Konstanten, d. i. Horizontal-Vertikallinie und Bilddistanz, bekannt sind, für jeden Punkt M (Fig. 6) im Raume der Winkel α, welcher die orthogonale Projektion des Sehstrahls auf der Bildebene mit der

Horizontallinie und der Winkel β ermitteln, welchen der Sehstrahl dieses Punktes im Raume mit der Distanzlinie einschließt.

Es sei B das von der Negativplatte erzeugte positive Bild, o das perspektivische Zentrum, welches mit dem ersten Gauß-schen Hauptpunkt des Objektivs zusammenfällt, A der Hauptpunkt des perspektivischen Bildes, $oA = P$ die Distanzlinie, welche der Brennweite des Objektivs entspricht, Ax und Ay die durch die Horizontal- und Vertikalmarken der Positivplatten gegebenen Abszissen- und Ordinatenachsen, endlich $Ap = x$ und $mp = y$ die rechtwinkeligen Koordinaten des Bildpunktes m, welcher dem Punkte M im Raume entspricht. Aus den rechtwinkeligen Dreiecken Apm und oAm ergeben sich die Relationen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \qquad \ldots a)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{P}. \qquad \ldots b)$$

Ist Q die orthogonale Projektion des ersten Gauß'schen Hauptpunktes o des Objektivs auf die durch den Punkt M im Raume gelegte Horizontalebene, so ist, wenn die Entfernung $QM = D$ und die Höhe des Punktes o über der Horizontalebene $oQ = E$ gesetzt wird,

$$E = D \operatorname{cotg} \beta = \frac{P.D}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad \ldots c)$$

Wird bei horizontaler Lage der Negativplatte des mit dem Ballon fest verbundenen photogrammetrischen Apparates von einem Terrain, auf welchem sich drei der Lage nach bekannte Punkte M_1, M_2, M_3 befinden, eine photographische Aufnahme gemacht, so lassen sich die rechtwinkeligen Bildkoordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ und $x_3 y_3$ der drei gegebenen Punkte im Raume durch Messung bestimmen und mittels derselben die Horizontalwinkel α sowie die Zenithdistanzen β aus den Gleichungen *a)* und *b)* berechnen.

Sind alsdann in Fig. 7 m_1, m_2 und m_3 die Bilder der drei gegebenen Punkte im Raume auf der Positivplatte, A der Hauptpunkt, in welchem sich die rechtwinkeligen Koordinaten-

achsen X und Y (Horizontal- und Vertikallinie) schneiden, und die aus den gemessenen Bildkoordinaten berechneten Winkel $m_1 Ax = \alpha$, $m_2 Ax = \alpha_2$ und $m_3 Ax = \alpha_3$, so sind die Winkel

$$m_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \text{ und } m_2 = \alpha_1 - \alpha_3$$

als bekannt anzusehen.

Mit Hilfe dieser Winkel läßt sich die horizontale Projektion des Ballonortes o im Raume durch analytisches Rückwärtseinschneiden ermitteln.

Sind in Fig. 8 M_1', M_2' und M_3' die horizontalen Projektionen der durch ihre rechtwinkeligen Koordinaten $X_1 Y_1 Z_1$, $X_2 Y_2 Z_2$

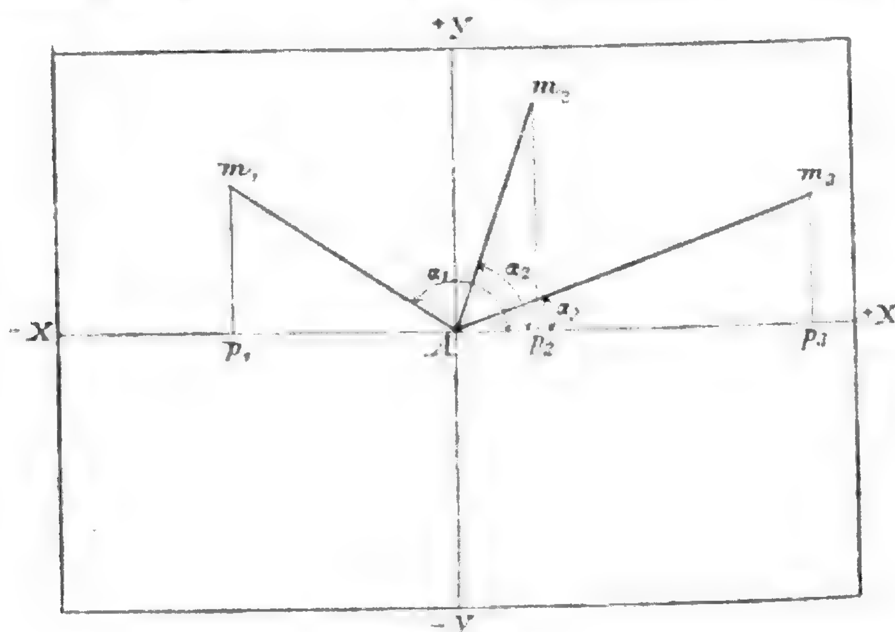


Fig. 7.

und $X_3 Y_3 Z_3$ gegebenen Punkte M_1, M_2 und M_3 im Raume, bezogen auf ein bestimmtes rechtwinkeliges Koordinatensystem $O_0 X_0$ und $O_0 Y_0$, so lassen sich die Seiten $M_1' M_2' = a_1$ und $M_1' M_3' = a_2$ sowie die Azimute dieser Seiten $\eta M_1' M_2' = \omega_1$ und $\eta M_1' M_3' = \omega_2$ aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \\ a_2 &= \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots 1)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \omega_1 &= \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \\ \operatorname{tg} \omega_2 &= \frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots 2)$$

berechnen.

Sind alsdann $X_0 Y_0$ die zu ermittelnden Koordinaten der horizontalen Projektion A_0 des Ballonortes, so sind diese bekannt, wenn die Seite $M_1' A_0 = S_1$ und der Richtungswinkel $\eta M_1' A_0 = R_1$ gegeben sind. Denn es ist:

$$X_0 = X_1 + S_1 \sin R_1 \qquad \ldots a)$$

$$Y_0 = Y_1 + S_1 \cos R_1. \qquad \ldots b)$$

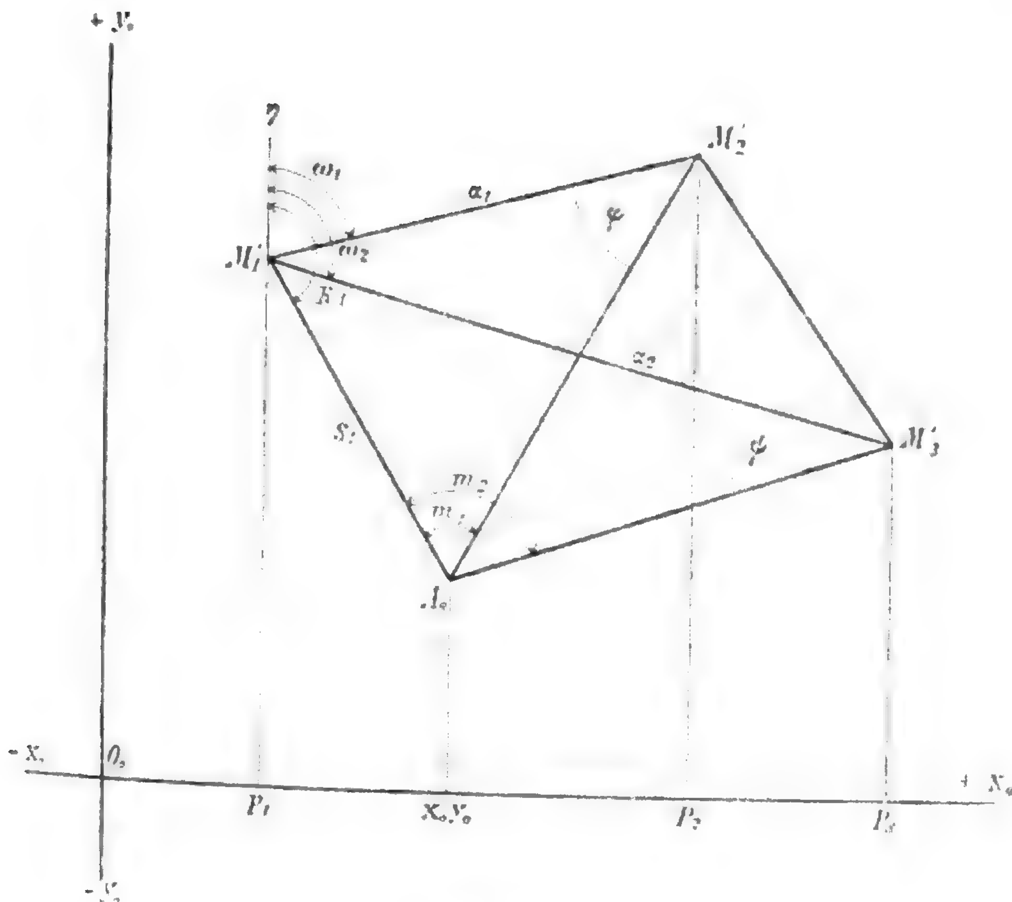


Fig. 8.

Aus den Dreiecken $M_1' M_2' A_0$ und $M_1' M_3' A_0$ folgt:

$$a_1 : S_1 = \sin m_1 : \sin (R_1 - (\omega_1 - m_1))$$

$$a_2 : S_1 = \sin m_2 : \sin (R_1 - (\omega_2 - m_2)).$$

Aus diesen beiden Proportionen lassen sich die Unbekannten R_1 und S_1 bestimmen. Es ist nämlich:

$$S_1 \sin m_1 = a_1 \sin R_1 \cos (\omega_1 - m_1) - a_1 \cos R_1 \sin (\omega_1 - m_1)$$

$$S_1 \sin m_2 = a_2 \sin R_1 \cos (\omega_2 - m_2) - a_2 \cos R_1 \sin (\omega_2 - m_2).$$

Setzt man:

$$p = \frac{\sin R_1}{S_1} \qquad \ldots 3)$$

$$q = \frac{\cos R_1}{S_1}, \qquad \ldots 4)$$

so erhält man:

$$\frac{\sin m_1}{a_1} = p \cos(\omega_1 - m_1) - q \sin(\omega_1 - m_1)$$

$$\frac{\sin m_2}{a_2} = p \cos(\omega_2 - m_2) - q \sin(\omega_2 - m_2).$$

Hieraus folgt:

$$p = \frac{a_2 \sin m_1 \sin(\omega_2 - m_2) - a_1 \sin m_2 \sin(\omega_1 - m_1)}{a_1 a_2 \sin\{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}} \qquad \ldots 5)$$

$$q = \frac{a_2 \sin m_1 \cos(\omega_2 - m_2) - a_1 \sin m_2 \cos(\omega_1 - m_1)}{a_1 a_2 \sin\{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}. \qquad \ldots 6)$$

Da jedoch

$$\operatorname{tg} R_1 = \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad S_1^2 = \frac{1}{p^2 + q^2}$$

ist, so erhält man durch Substitution der obigen Werte die Relationen:

$$\operatorname{tg} R_1 = \frac{a_2 \sin m_1 \sin(\omega_2 - m_2) - a_1 \sin m_2 \sin(\omega_1 - m_1)}{a_2 \sin m_1 \cos(\omega_2 - m_2) - a_1 \sin m_2 \cos(\omega_1 - m_1)} \quad \ldots \text{I)}$$

$$S_1^2 = \frac{a_1^2 a_2^2 \sin^2 \{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}{a_1^2 \sin^2 m_2 + a_2^2 \sin^2 m_1 - 2 a_1 a_2 \sin m_1 \sin m_2 \cos \{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}} \quad \ldots \text{II)}$$

Sind R_1 und S_1 aus diesen Gleichungen berechnet, so können die Koordinaten X_0 und Y_0 mittels der Gleichungen *a)* und *b)* ermittelt werden.

Sind alsdann S_2 und S_3 die Entfernungen der Punkte M_2' und M_3' von der horizontalen Projektion A_0 des Ballonortes, so ist:

$$S_2 = \sqrt{(X_2 - X_0)^2 + (Y_2 - Y_0)^2}$$

$$S_3 = \sqrt{(X_3 - X_0)^2 + (Y_3 - Y_0)^2}.$$

Da die Höhen Z_1, Z_2 und Z_3 der drei gegebenen Räume von der horizontalen Projektionsebene $X_0 Y_0$ des gegebenen Koordinatensystems bekannt sind, so läßt sich die Höhe Z_0 des Ballonortes aus jeder der drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Z_0 &= S_1 \operatorname{cotg} \beta_1 + Z_1 \\ Z_0 &= S_2 \operatorname{cotg} \beta_2 + Z_2 \\ Z_0 &= S_3 \operatorname{cotg} \beta_3 + Z_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots c)$$

ermitteln, wodurch die Höhe des Ballonortes kontrolliert werden kann.

Genauigkeit in der Bestimmung der Lage des Ballonortes.

Die Genauigkeit, mit welcher die rechtwinkeligen Koordinaten X_0, Y_0 und Z_0 des Ballonortes ermittelt werden können, hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher die rechtwinkeligen Bildkoordinaten der drei gegebenen Punkte der Negativplatte entnommen werden können. Nach dem Vorhergehenden ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{P}.$$

Sind demnach Δx und Δy die mittleren Fehler in der Bestimmung der Abszisse und Ordinate eines Punktes, so ist

$$\Delta \alpha = \pm \cos^2 \alpha \sqrt{\left(\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dy}\right)^2 \Delta y^2},$$

$$\Delta \beta = \pm \cos^2 \beta \sqrt{\left(\frac{d \operatorname{tg} \beta}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{d \operatorname{tg} \beta}{dy}\right)^2 \Delta y^2}.$$

Werden die obigen Gleichungen differenziert, so erhält man durch Substitution der erhaltenen Werte in die letzten Gleichungen die Relationen:

$$\Delta \alpha' = \pm 3438 \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2},$$

$$\Delta \beta' = \pm 3438 \frac{P}{x^2 + y^2 + P^2} \sqrt{\frac{x^2 \Delta x^2 + y^2 \Delta y^2}{x^2 + y^2}}.$$

Setzt man $\Delta x = \Delta y$, so erhält man:

$$\Delta \alpha' = \pm 3438 \frac{\Delta x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \ldots 1)$$

$$\Delta \beta' = \pm 3438 \frac{P \cdot \Delta x}{x^2 + y^2 + P^2}. \qquad \ldots 2)$$

Nach dem Vorhergehenden ist:

$$m_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \text{ und } m_2 = \alpha_1 - \alpha_3,$$

so daß die mittleren Fehler der Winkel m_1 und m_2 durch die Relationen

$$\Delta m_1 = \pm \sqrt{\Delta \alpha_1^2 + \Delta \alpha_2^2} \qquad \ldots 3)$$

$$\Delta m_2 = \pm \sqrt{\Delta \alpha_1^2 + \Delta \alpha_3^2} \qquad \ldots 4)$$

gegeben sind.

Die rechtwinkeligen Koordinaten des Ballonortes sind, da $S_1 \sin R_1 = \frac{p}{p^2+q^2}$ und $S_1 \cos R_1 = \frac{q}{p^2+q^2}$ ist,

$$X_0 = X_1 + \frac{p}{p^2+q^2} \qquad \ldots a)$$

$$Y_0 = Y_1 + \frac{q}{p^2+q^2} \qquad \ldots b)$$

$$Z_0 = Z_1 + \frac{\operatorname{cotg} \beta_1}{\sqrt{p^2+q^2}}\,. \qquad \ldots c)$$

Sind nun ΔX_0, ΔY_0 und ΔZ_0 die mittleren Fehler der Ballonkoordinaten, so ergeben sich dieselben nach einem bekannten Satze der Methode der kleinsten Quadrate aus den Gleichungen

$$\Delta X_0 = \pm \sqrt{\left(\frac{d X_0}{dp}\right)^2 \Delta p^2 + \left(\frac{d X_0}{dq}\right)^2 \Delta q^2} \qquad \ldots 7)$$

$$\Delta Y_0 = \pm \sqrt{\left(\frac{d Y_0}{dp}\right)^2 \Delta p^2 + \left(\frac{d Y_0}{dq}\right)^2 \Delta q^2} \qquad \ldots 8)$$

$$\Delta Z_0 = \pm \sqrt{\left(\frac{d Z_0}{dp}\right)^2 \Delta p^2 + \left(\frac{d Z_0}{dq}\right)^2 \Delta q^2 + \left(\frac{d Z_0}{\partial \beta_1}\right)^2 \Delta \beta_1^2} \ldots 9)$$

Durch Differentiation der Gleichungen *a)*, *b)* und *c)* erhält man

$$\left(\frac{dX_0}{dp}\right) = \frac{q^2}{(p^2+q^2)^2} - \frac{p^2}{(p^2+q^2)^2} = (Y_0 - Y_1)^2 - (X_0 - X_1)^2$$

$$\left(\frac{dX_0}{dq}\right) = -\frac{2p \,.\, q}{(p^2+q^2)^2} = -2(X_0 - X_1)(Y_0 - Y_1)$$

$$\left(\frac{dY_0}{dp}\right) = -\frac{2p \,.\, q}{(p^2+q^2)^2} = -2(X_0 - X_1)(Y_0 - Y_1)$$

$$\left(\frac{dY_0}{dq}\right) = \frac{p^2}{(p^2+q^2)^2} - \frac{q^2}{(p^2+q^2)^2} = (X_0-X_1)^2 + (Y_0-Y_1)^2$$

$$\left(\frac{dZ_0}{dp}\right) = -\frac{\operatorname{cotg}\beta_1}{\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \frac{p}{p^2+q^2} = -(Z_0-Z_1)(X_0-X_1)$$

$$\left(\frac{dZ_0}{dq}\right) = -\frac{\operatorname{cotg}\beta_1}{\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \frac{q}{p^2+q^2} = -(Z_0-Z_1)(Y_0-Y_1)$$

$$\left(\frac{dZ_0}{d\beta_1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \frac{1}{\sin^2\beta_1} = -\frac{Z_0-Z_1}{\sin\beta_1\cos\beta_1} = -\frac{2(Z_0-Z_1)}{\sin 2\beta_1}.$$

Die Substitution dieser Werte gibt:

$$\Delta X_0 = \pm\sqrt{\{(Y_0-Y_1)^2-(X_0-X_1)^2\}^2\Delta p^2 + 4(X_0-X_1)^2(Y_0-Y_1)^2\Delta q^2}$$

$$\Delta Y_0 = \pm\sqrt{4(X_0-X_1)^2(Y_0-Y_1)^2\Delta p^2 + \{(X_0-X_1)^2-(Y_0-Y_1)^2\}^2\Delta q^2}$$

$$\Delta Z_0 = \pm(Z_0-Z_1)\sqrt{(X_0-X_1)^2\Delta p^2 + (Y_0-Y_1)^2\Delta q^2 + \frac{4\Delta\beta_1^2}{\sin^2 2\beta_1}}.$$

Es ist aber der mittlere Fehler m in der Bestimmung der Lage des Ballonortes durch den Ausdruck gegeben

$$m = \pm\sqrt{\Delta X_0^2 + \Delta Y_0^2 + \Delta Z_0^2}.$$

Durch Substitution der vorhergehenden Ausdrücke erhält man:

$$m = \pm \sqrt{\begin{array}{l}[\{(X_0 - X_1)^2 + (Y_0 - Y_1)^2\}^2 + (X_0 - X_1)^2 (Z_0 - Z_1)^2] \Delta p^2 + \\ + [\{(X_0 - X_1)^2 + (Y_0 - Y_1)^2\}^2 + (Y_0 - Y_1)^2 (Z_0 - Z_1)^2] \Delta q^2 + \frac{4 (Z_0 - Z_1)^2}{\sin^2 2\beta_1} \Delta \beta_1^2 .\end{array}} \quad \ldots \alpha)$$

Die mittleren Fehler Δp und Δq ergeben sich nach einem bekannten Satze der Methode der kleinsten Quadrate aus den Gleichungen:

$$\Delta p = \pm \sqrt{\left(\frac{dp}{dm_1}\right)^2 \Delta m_1^2 + \left(\frac{dp}{dm_2}\right)^2 \Delta m_2^2}$$

$$\Delta q = \pm \sqrt{\left(\frac{dq}{dm_1}\right)^2 \Delta m_1^2 + \left(\frac{dq}{dm_2}\right)^2 \Delta m_2^2} .$$

Werden demnach die Gleichungen:

$$p = \frac{a_2 \sin m_1 \sin(\omega_2 - m_2) - a_1 \sin m_2 \sin(\omega_1 - m_1)}{a_1 a_2 \sin^2 \{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}$$

$$q = \frac{a_2 \sin m_1 \cos(\omega_2 - m_2) - a_1 \sin m_2 \cos(\omega_1 - m_1)}{a_1 a_2 \sin^2 \{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}$$

in Bezug auf m_1 und m_2 differenziert, so erhält man:

$$\left(\frac{dp}{dm_1}\right) = \frac{\{a_2 \sin(\omega_2 - m_2 - \omega_1) + a_1 \sin m_2\} \sin(\omega_2 - m_2)}{a_1 a_2 \sin^2 \{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}$$

$$\left(\frac{dp}{dm_2}\right) = \frac{\{a_2 \sin m_1 - a_1 \sin(\omega_2 - (\omega_1 - m_1))\} \sin(\omega_1 - m_1}{a_1 a_2 \sin^2 \{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}$$

$$\left(\frac{dq}{dm_1}\right) = \frac{\{a_2 \sin(\omega_2 - m_2 - \omega_1) + a_1 \sin m_2\} \cos(\omega_2 - m_2)}{a_1 a_2 \sin^2\{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}$$

$$\left(\frac{dq}{dm_2}\right) = \frac{\{a_2 \sin m_1 - a_1 \sin(\omega_2 - (\omega_1 - m_1))\} \cos(\omega_1 - m_1)}{a_1 a_2 \sin^2\{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}$$

Setzt man der Kürze halber

$$A = \frac{\sin(\omega_2 - m_2 - \omega_1)}{a_1} + \frac{\sin m_2}{a_2} \qquad \ldots 10)$$

$$B = \frac{\sin m_1}{a_1} - \frac{\sin(\omega_2 - (\omega_1 - m_1))}{a_2}, \qquad \ldots 11)$$

so ergibt sich:

$$\Delta p = \pm \frac{\sqrt{A^2 \sin^2(\omega_2 - m_2)\, \Delta m_1^2 + B^2 \sin^2(\omega_1 - m_1)\, \Delta m_2^2}}{\sin^2\{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}} \qquad \ldots \beta)$$

$$\Delta q = \pm \frac{\sqrt{A^2 \cos^2(\omega_2 - m_2)\, \Delta m_1^2 + B^2 \sin^2(\omega_1 - m_1)\, \Delta m_2^2}}{\sin^2\{(\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1)\}}. \qquad \ldots \gamma)$$

Nach dem Früheren ist

$$\Delta \beta_1 = \pm \frac{P . \Delta X_1}{X_1^2 + Y_1^2 + P^2}, \qquad \ldots \delta)$$

so daß mittels der Gleichungen α) bis δ) der mittlere Fehler des Ballonortes durch Rechnung bestimmt werden kann.

Eine einfache Betrachtung der Gleichung α) zeigt, daß der mittlere Fehler des Ballonortes abhängig ist:

a) von der Größe des Betrages der Werte Δp, Δq und $\Delta\beta$, d. i. von der Genauigkeit in der Ermittlung der Bildkoordinaten der gegebenen Punkte und

b) von der gegenseitigen Lage der drei gegebenen Punkte und des zu bestimmenden Punktes.

Denn sei in Fig. 8 $M_1' M_2' A_0 = \varphi$ und $M_1' M_3' A_0 = \psi$, so ist:

$$(R_1 - \omega_1) + m_1 + \varphi = 180°$$
$$(R_1 - \omega_2) + m_2 + \psi = 180°,$$

sonach:

$$\psi - \varphi = (\omega_2 - m_2) - (\omega_1 - m_1).$$

1. Ist $\psi = \varphi$, so liegen die gegebenen mit dem zu bestimmenden Punkte A_0 in einem Kreise und in diesem Falle ist die Bestimmung der Lage des Punktes A_0 unmöglich.

2. Ist $\psi > \varphi$, so liegt der zu suchende Punkt außerhalb des um die drei gegebenen Punkte bestimmten Kreises einer Seite gegenüber.

3. Ist endlich $\psi < \varphi$, so liegt der zu suchende Punkt entweder innerhalb des um die drei gegebenen Punkte bestimmten Kreises einer Seite gegenüber oder außerhalb des Kreises einer Ecke gegenüber.

In den beiden letzten Fällen erreicht die Differenz der Winkel $\psi - \varphi$ einen desto größeren positiven oder negativen Wert, je größer der Abstand des zu suchenden Punktes A_0 von dem um die drei gegebenen Punkte bestimmten Kreise ist.

Je größer aber $\psi - \varphi = (\omega_2 - m_2) - (\omega_2 - m_1)$ ist, desto kleiner werden die Werte von Δp und Δq.

Orientierung der Bildplatten in Bezug auf das gegebene Koordinatensystem.

Um die in gleicher Höhe von der horizontalen Ebene $X_0 Y_0$ (Fig. 9) in den Punkten o_1 und o_2 aufgenommenen photographischen Bilder B_1 und B_2, welche in einer horizontalen Ebene liegen, in Bezug auf das gegebene Koordinatensystem orientieren zu können, seien OX_0 und OY_0 die der Horizontal-

ebene desselben entsprechenden Abszissen- und Ordinatenachsen, ferner $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$ und $X_3 Y_3$ die rechtwinkeligen Koordinaten der drei im Raume gegebenen Punkte M_1, M_2 und M_3 sowie $O_1 x$, $O_1 y$ und $O_2 x$, $O_2 y$ die rechtwinkeligen Koordinatenachsen der beiden Bildplatten B_1 und B_2, welche durch die Marken des photogrammetrischen Aufnahmeapparates gegegeben sind; endlich $X'_0 Y'_0$ und $X''_0 Y''_0$ die durch Rückwärts-

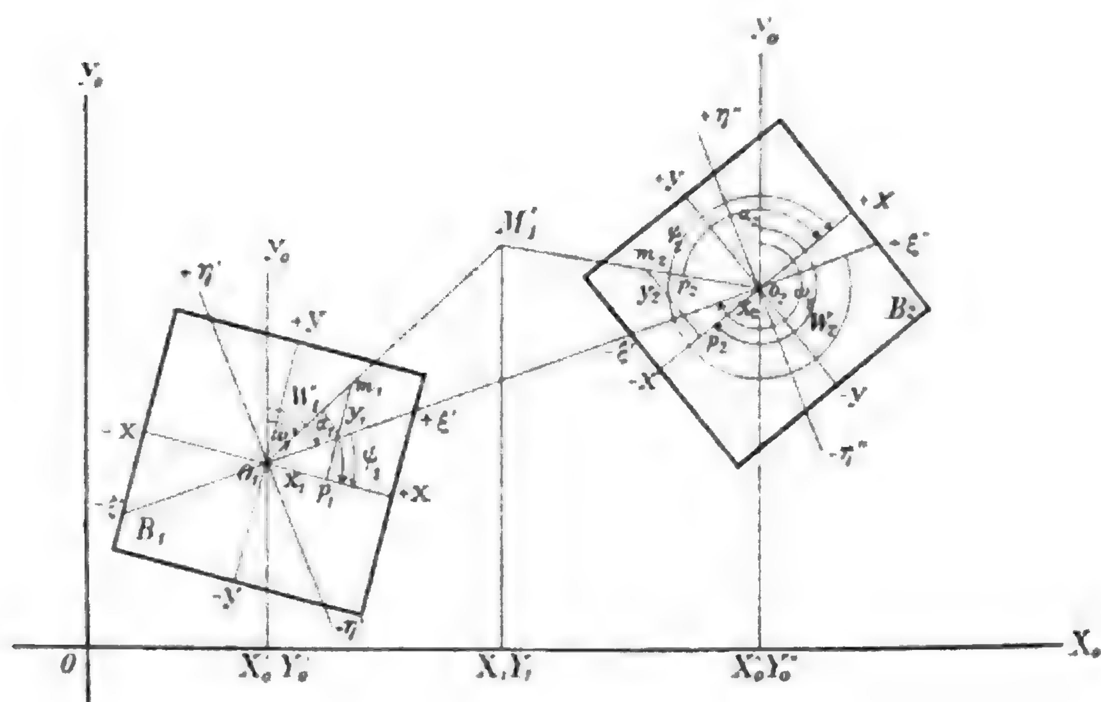


Fig. 9.

einschneiden berechneten Koordinaten der beiden Ballonorte o_1 und o_2.

Setzt man nun die Seite $O_1 M'_1 = a'_1$, die horizontale Basis $O_1 O_2 = B$ und die Azimute dieser Seiten, d. i. $Y_0 O_1 M'_1 = \omega_1$ und $Y_0 O_1 O_2 = W_1$, so ist:

$$a'_1 = \sqrt{(X_1 - X'_0)^2 + (Y_1 - Y'_0)^2} \qquad \ldots 1)$$

$$B = \sqrt{(X''_0 - X'_1)^2 + (Y''_0 - Y'_0)^2} \qquad \ldots 2)$$

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{X_1 - X'_0}{Y_1 - Y'_0} \qquad \ldots 3)$$

$$\operatorname{tg} W_1 = \frac{X''_0 - X'_0}{Y''_0 - Y'_0} \qquad \ldots 4)$$

Sind x_1, y_1 die Bildkoordinaten des Punktes M_1 im Raume auf der ersten Bildplatte, so ist, wenn $m_1 O_1 x = \alpha_1$ gesetzt wird,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1}{x_1}. \qquad \ldots 5)$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Basis $O_1 O_2$ mit der positiven Hälfte der Abszissenachse $O_1 x$ der ersten Bildplatte einschließt, mit ψ_1, so ist, wie aus der Fig. 9 ersichtlich ist,

$$\psi_1 = \omega_1 + \alpha_1 - W_1, \qquad \ldots 6)$$

wodurch die Richtung der Standlinie $O_1 O_2$ auf der ersten Bildplatte gegeben ist. Auf dieselbe Weise geschieht die Orientierung der zweiten Bildplatte in Bezug auf die Standlinie $O_1 O_2$ mit Hilfe desselben Punktes M_1 im Raume. Werden die früher bezeichneten Winkel in demselben Sinne in der Richtung der angedeuteten Pfeile gezählt, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y_2}{x_2} \qquad \ldots 7)$$

und der Neigungswinkel ψ_2 der Standlinie mit der positiven Hälfte der Abszissenachse $O_2 x$ der zweiten Bildplatte durch die Gleichung

$$\psi_2 = \omega_2 + \alpha_2 - W_2 \qquad \ldots 8)$$

bestimmt, wodurch auch die Orientierung derselben bekannt wird. Die Orientierung beider Bildplatten gegen die Standlinie kann eventuell auch mit Hilfe der gegebenen Punkte M_2' und M_3' kontrolliert werden.

Bestimmung der Koordinaten der Detailpunkte.

Ist von jeder Bildplatte die Richtung der Standlinie bekannt, so kann die letztere als Abszissenachse $O_1 \xi_1$ und die in dem Punkte O_1 errichtete Senkrechte als Ordinatenachse $O_1 \eta$ angenommen werden und die Koordinaten aller Detailpunkte auf dieses Koordinatensystem bezogen werden.

Die in den Endpunkten o_1 und o_2 einer horizontalen Standlinie orientierten, auf photogrammetrischem Wege erzeugten perspektivischen Bilder liefern die rechtwinkeligen Koordinaten

je zweier korrespondierenden Punkte, mittels welchen man, wenn die Bilddistanz P bekannt ist, die Lage eines jeden Punktes im Raume photogrammetrisch entweder nach der Standlinien- oder nach der Koordinatenmethode festgelegt werden kann.

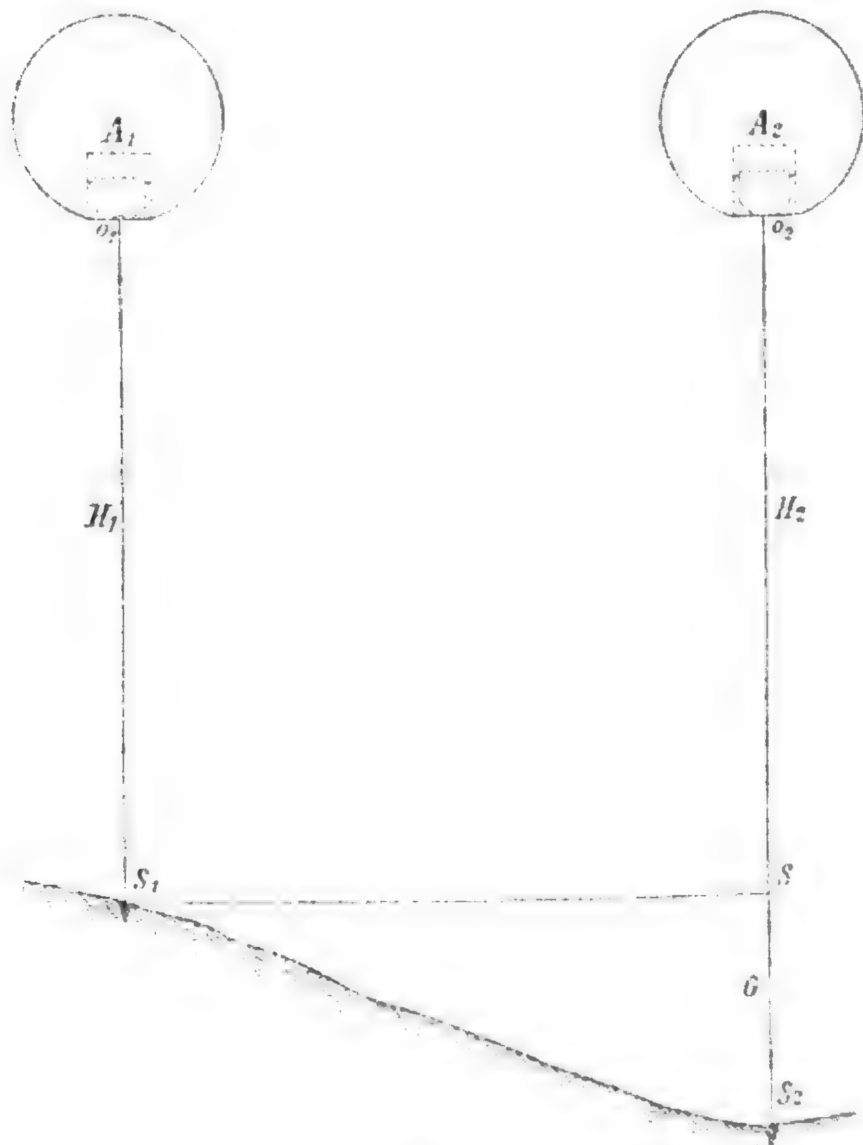


Fig. 10.

Unter der Voraussetzung, daß bei einer Ballonaufnahme die beiden Bildplatten eine horizontale Lage haben, sind auch die Bilddistanzlinien parallel und vertikal. Liegen überdies die beiden Bildplatten in einer und derselben horizontalen Ebene, wie Fig. 10 zeigt, so muß die Höhe H_1 des ersten Gauß'schen Hauptpunktes o_1 des Aufnahmeobjektives von dem ersten Standpunkte S_1 gleich sein der Höhe H_2 des ersten Gauß'schen

Hauptpunktes o_2 von dem zweiten Standpunkt S_2 weniger dem Gefälle G beider Standpunkte.

Haben die beiden Bildplatten zwar eine horizontale Lage, jedoch einen um ΔE verschiedenen Abstand von derjenigen Ebene, in welcher die zu photographierenden Punkte liegen, so werden dadurch die Koordinaten der Punkte dieser Bildplatte eine Änderung erleiden, welche sich durch Differentiation der im vorhergehenden abgeleiteten Gleichung

$$E = D \operatorname{cotg} \beta = \frac{P.D}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ergeben.

Ist ΔE der mittlere Fehler in der Bestimmung der Höhe E und Δx, Δy die mittleren Fehler in der Ermittlung der Koordinaten eines Punktes, so ist nach einem bekannten Satze der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\Delta E = \pm \sqrt{\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{dE}{dy}\right)^2 \Delta y^2}\,.$$

Es ist aber

$$\left(\frac{dE}{dx}\right) = \frac{E.x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dE}{dy}\right) = \frac{E.y}{x^2+y^2},$$

sonach

$$\Delta E = \pm \frac{E}{x^2+y^2} \sqrt{x^2 \Delta x^2 + y^2 \Delta y^2}.$$

Man kann $\Delta x = \Delta y$ annehmen, so daß

$$\Delta E = \pm \frac{E.\Delta x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm \frac{E}{r} \Delta x, \qquad \ldots 1)$$

wenn r die Entfernung des Punktes von dem Ursprunge des Koordinatensystems bezeichnet. Aus Gleichung 1) ist ersichtlich, daß der Abstand ΔE beider Bildplatten desto größer sein kann, je größer der Abstand E und je kleiner der Radiusvektor r des Punktes ist.

Für $E = 600\ m$, $r = 100\ mm$ und $\Delta x = \Delta y = 0 \cdot 1\ mm$ wird

$$\Delta E = \pm 0 \cdot 6\ m,$$

d. h. die beiden Bildplatten können bei der photographischen Aufnahme im Raume einen Abstand von 0·6 *m* besitzen, ohne daß dadurch die Genauigkeit der Konstruktion des Planes beeinträchtigt wird. Sind jedoch in gleichen Höhen bei horizontaler Lage beider Bildplatten photographische Aufnahmen gemacht worden, so kann von beiden Bildplatten mittels eines Telestereoskopes ein verkleinertes stereoskopisches Bild erzeugt werden.

Ist das Telestereoskop mit einem Stereokomparator in Verbindung gebracht, so können mit diesem Apparate nicht nur die rechtwinkeligen Koordinaten eines jeden Punktes der ersten Bildplatte, sondern auch die stereoskopische Parallaxe je zweier korrespondierender Punkte mit aller Schärfe ermittelt und dadurch ein jeder Punkt im Raume nach der Koordinatenmethode festgelegt werden.

Um mittels des Stereokomparators die rechtwinkeligen Koordinaten eines Bildpunktes der ersten Platte und die stereoskopische Parallaxe der korrespondierenden Punkte mit Hilfe der zweiten Platte messen zu können, werden die beiden Platten mit ihrer Schichtseite nach oben in die kreisförmigen, mit einer Teilung versehenen Scheiben so eingelegt, daß die in dem linken und rechten Standpunkte erhaltenen Platten dem linken und rechten Mikroskope zugekehrt sind und die Bilder eine aufrechte Stellung besitzen. Sodann werden die beiden Platten befestigt und die Scheiben mit demselben so lange gedreht, bis die Horizontallinien beider Platten eine nahezu parallele Lage mit der Bewegungsrichtung des horizontalen Rahmens erhalten. Nun werden die Okulare beider Mikroskope auf die Pupillendistanz des Beobachters eingestellt und jede Okularlinse so lange bewegt, bis das Fadenkreuz deutlich sichtbar wird. Endlich werden beide Mikroskope auf die Plattenbilder so gerichtet, daß keine Parallaxe wahrgenommen wird. Ist dies geschehen, so erfolgt die genaue Orientierung der Plattenbilder auf folgende Weise.

Das mit dem Kreuzungspunkte K_1 versehene linke Mikroskop wird auf die linke Horizontalmarke scharf eingestellt und der Horizontalrahmen so lange bewegt, bis der Kreuzungspunkt K_1 an der rechten Horizontalmarke erscheint. Trifft der

Kreuzungspunkt K_1 die letztere mit aller Schärfe, so ist die Horizontallinie der ersten Bildplatte der Bewegungsrichtung des Rahmens genau parallel, wenn nicht, so wird die Scheibe, in welcher die erste Bildplatte befestigt ist, so lange gedreht, bis der Kreuzungspunkt K_1 bei der Bewegung des Rahmens die Horizontallinie nicht verläßt.

Ganz auf dieselbe Weise wird mit Hilfe des Kreuzungspunktes K_2 des rechten Mikroskopes die Horizontallinie der zweiten Platte der Bewegungsrichtung des Rahmens parallel gestellt.

Um nun die der Standlinie entsprechende Richtung auf beiden Platten der Bewegungsrichtung des Rahmens parallel stellen, d. i. die Platten orientieren zu können, muß die Scheibe der ersten Platte um den Winkel ψ_1 und die Scheibe der zweiten Platte um den Winkel ψ_2 in dem entsprechenden Sinne gedreht und festgestellt werden.

Sind die beiden Bildplatten in dem Stereokomparator scharf orientiert, so erfolgt die Messung der rechtwinkeligen Koordinaten ξ und η eines jeden Bildpunktes sowie die Ermittelung der stereoskopischen Parallaxe a je zweier korrespondierender Punkte auf die bekannte Weise. Sind die letzteren gegeben, so können die rechtwinkeligen Koordinaten eines jeden Punktes im Raume durch Rechnung ermittelt werden, wenn die Bilddistanz P und die Größe B der horizontalen Standlinie gegeben sind. Zu diesem Behufe nehme man den Gauß'schen Hauptpunkt o_1 des Aufnahmeobjektives in der ersten Stellung des Phototheodoliten als Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems an, dessen X-Achse mit der horizontalen Basisrichtung $o_1 o_2$ zusammenfällt und dessen horizontale Y-Achse in dem Hauptpunkte o_1 auf der X-Achse senkrecht steht; die vertikale Z-Achse fällt alsdann mit der Distanzlinie der ersten Bildebene zusammen. Um die Koordinaten des Punktes M im Raume (Fig. 11) zu erhalten, welcher durch den Durchschnitt der den Bildplatten B_1 und B_2 entsprechenden Sehstrahlen $o_1 m_1$ und $o_2 m_2$ entsteht, fälle man von dem Punkte M Senkrechte auf die drei Koordinatenebenen und ermittle die Durchschnittspunkte Q, P und M_1 mit denselben. Zu dem Ende ziehe man durch den Bildpunkt m_1 die

Parallele $m_1 q_1$ zur Basislinie als Abszissenachse und die darauf senkrecht stehende Gerade $m_1 p_1$, so daß $m_1 q_1 = A_1 p_1 = \xi$ und $m_1 p_1 = A_1 q_1 = \eta$ die Bildkoordinaten des Punktes m_1 darstellen. Die Linien $o_1 p_1$ und $o_1 q_1$ geben die Fußpunkte P und Q der von M auf die Koordinatenebenen XZ und YZ gefällten Senkrechten, so daß $MQ = M_1 Q_1 = X$ und $MP = M_1 P_1 = Y$ die rechtwinkeligen Koordinaten der horizontalen Projektion M_1 des Punktes M im Raume darstellen, während $MM_1 = Z$

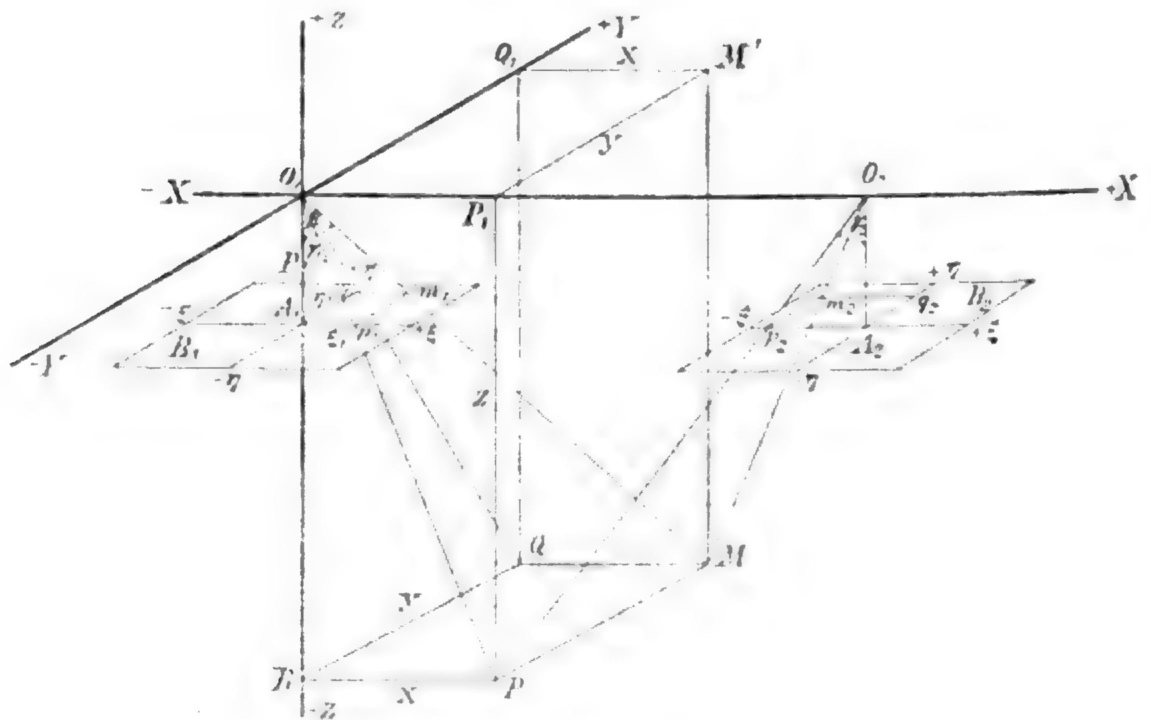


Fig. 11.

die Entfernung des Punktes M von der Koordinatenebene XY bedeutet. Die Raumkoordinaten des Punktes M stehen mit den Bildkoordinaten der ersten Platte in einer einfachen Beziehung. Wird die Bilddistanz $A_1 o_1$ der Brennweite P des Aufnahmeobjektives gleichgesetzt, so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken $o_1 A_1 p_1 \backsim o_1 RP$ und $o_1 A_1 q_1 \backsim o_1 RQ$ die Relationen:

$$X : \xi = Z : P$$

$$Y : \eta = Z : P$$

woraus folgt:

$$X = \frac{Z}{P} \quad \text{und} \quad Y = \frac{Z}{P} \cdot \eta$$

Wenn von dem Punkte P auf die Basis $o_1 o_2$ die Senkrechte $PP_1 = Z$ gefällt wird, so ergeben sich aus den ähnlichen Dreiecken $o_1 P P_1 \backsim o_1 p_1 A_1$ und $o_2 P P_1 \backsim o_2 p_2 A_2$ die Proportionen

$$o_1 P_1 : PP_1 = A_1 p_1 : A_1 o_1$$

und

$$o_2 P_1 : PP_1 = A_2 p_2 : A_2 o_2.$$

Aus denselben folgt:

$$o_1 P_1 = \frac{Z}{P} \xi \text{ und } o_2 P_2 = \frac{Z}{P} \xi'$$

wenn die Abszisse des korrespondierenden Punktes m_2 der zweiten Bildplatte, d. i. $A_2 p_2 = \xi'$ gesetzt wird.

Da aber $o_1 P_1 + o_2 P_1 = B$ ist und ξ' mit dem negativen Zeichen behaftet ist, so ergibt sich:

$$B = \frac{Z}{P} (\xi - \xi').$$

Die Differenz der Abszissen je zweier korrespondierender Punkte ist die stereoskopische Parallaxe derselben; wird diese gleich a gesetzt, so erhält man

$$B = \frac{Z}{P} a.$$

Die Substitution dieses Wertes, in die obigen Gleichungen gesetzt, gibt die Relationen

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{B}{a} \xi \\ Y &= \frac{B}{a} \eta \\ Z &= \frac{B}{a} P. \end{aligned}\right\} \quad \ldots A)$$

Mittels dieser Gleichungen lassen sich die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes im Raume bestimmen, wenn die Bildkoordinaten derselben sowie die stereoskopische Parallaxe je zweier korrespondierender Punkte, durch den Stereokomparator gemessen, und die Brennweite P des Aufnahmsobjektives sowie die Größe B der horizontalen Standlinie bekannt sind.

Genauigkeit in der Bestimmung der Koordinaten der Detailpunkte.

Werden die Brennweite P des Aufnahmeobjektives und die Basis B als fehlerfrei angesehen, so erhält man die mittleren Fehler der Koordinaten ΔX, ΔY und ΔZ aus den Gleichungen

$$\Delta X = \pm \sqrt{\left(\frac{dX}{da}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{dX}{d\xi}\right)^2 \Delta \xi^2}$$

$$\Delta Y = \pm \sqrt{\left(\frac{dY}{da}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{dY}{\partial \eta}\right)^2 \Delta \eta^2}$$

$$\Delta Z = \pm \left(\frac{dZ}{da}\right) \Delta a.$$

Durch Differentiation der Gleichungen A erhält man:

$$\left(\frac{dX}{da}\right) = \frac{X}{a}; \quad \left(\frac{dX}{d\xi}\right) = \frac{B}{a} = \frac{X}{\xi}$$

$$\left(\frac{dY}{da}\right) = \frac{Y}{a}; \quad \left(\frac{dY}{\partial \eta}\right) = \frac{B}{a} = \frac{Y}{\eta}$$

und

$$\left(\frac{dZ}{da}\right) = \frac{Z}{a}.$$

Durch Substitution dieser Werte ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta X}{X} &= \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta \xi}{\xi}\right)^2}\\ \frac{\Delta Y}{Y} &= \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta \eta}{\eta}\right)^2}\\ \frac{\Delta Z}{Z} &= \pm\frac{\Delta a}{a}\end{aligned}\right\} \quad \ldots a)$$

Konstruktion des Planes.

Sind die räumlichen Koordinaten aller Detailpunkte durch Rechnung bekannt, so lassen sich dieselben mittels eines entsprechend eingerichteten Koordinatographen in einem beliebigen Maßstabe auftragen, wenn die Standlinie auf dem Papiere den entsprechenden Platz erhielt.

Die auf diese Weise erhaltenen Punkte werden nach den mit aller Sorgfalt ausgeführten Handrissen entsprechend verbunden und die sich ergebenden Parzellen mit den konventionellen Zeichen versehen, so daß man aus der Darstellung die Kulturgattung der einzelnen Parzellen sowie die Wege, Straßen, Bäche, Flüsse, Teiche, Seen, Gehöfte, Häuser, Gräben, Steinbrüche u. drgl. leicht erkennen kann. Die Ausarbeitung sowie die Beschreibung der Pläne erfolgt nach gegebenen Vorschriften.

Bei der Herstellung eines Planes wird nicht selten der Fall eintreten, daß einzelne charakteristische Punkte des Terrains auf der Bildplatte nicht deutlich sichtbar sind. In diesem Falle müssen die zu bestimmenden Punkte entweder durch Einmessen oder durch Einkreuzen von in der Nähe gelegenen bekannten Punkten ermittelt werden.

Schlußbemerkung.

Bei jeder stereophotogrammetrischen Ballonaufnahme sind vor allem die Ballonhöhe und die Größe der Standlinie entsprechend zu wählen.

Die Ballonhöhe ist vorzugsweise durch die Größe der aufzunehmenden Fläche bedingt. Sei in Fig. 12 $oA = P$ die Brennweite des Aufnahmeobjektives, $ab = ad = s$ die Seite der quadratförmigen Negativplatte, $oQ = H$ die Höhe des

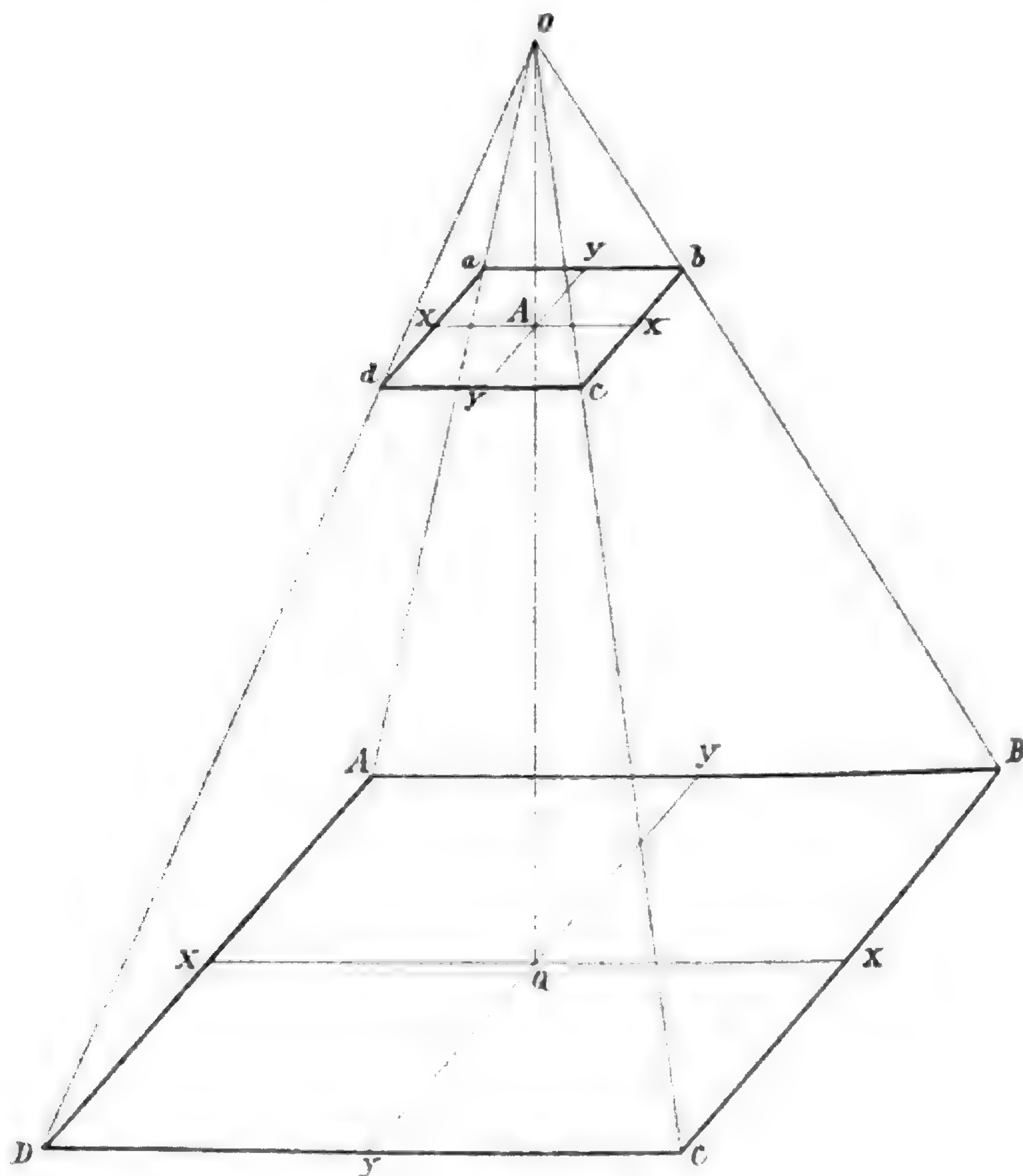


Fig. 12.

Ballons über dem Horizont des Punktes Q und $AB = AD = S$ die Seite des in demselben liegenden Quadrates, dessen Flächeninhalt F sei, so ist

$$F = S^2. \qquad \ldots 1)$$

Aus den ähnlichen Dreiecken oQX und oAx folgt:

$$S : s = H : P,$$

so daß

$$H = \frac{P}{s} S. \qquad \ldots 2)$$

Bei Anwendung einer bestimmten Plattengröße für einen gegebenen photogrammetrischen Aufnahmeapparat ist $\frac{P}{s} = C$ eine konstante Größe, so daß

$$H = C . S = C \sqrt{F}. \qquad \ldots 3)$$

Unter der Voraussetzung, daß der Halbmesser des Bildkreises der Brennweite P entspricht, ist die Seite der quadratischen Negativplatte

$$s = P \,.\, \sqrt{2}$$

mithin $\frac{P}{s} = C = 0 \cdot 7071.$

Es ist demnach für

$S = 1000\,m,\quad H = 707\,m$ und $F = 100\,ha$
$S = 900\,m,\quad H = 636\,m$ » $F = 81\,ha$
$S = 800\,m,\quad H = 566\,m$ » $F = 64\,ha$

u. s. w.

Die Größe der Standlinie ist nach dem Vorhergehenden durch die Gleichung

$$B = \frac{a}{P} Z \qquad \ldots 4)$$

bestimmt, wenn a die der Entfernung Z entsprechende stereoskopische Parallaxe bezeichnet.

Ist demnach a_0 die größte mit dem Stereokomparator noch zu messende Parallaxe und Z_0 die derselben entsprechende Entfernung, so ist der größte Wert B_0 der zu wählenden Standlinie

$$B_0 = \frac{a_0}{P} Z_0. \qquad \ldots 5)$$

Für $a_0 = 30\,mm$, $P = 220\,mm$ und $Z_0 = 300\,m$ ist

$$B = 41\,m.$$

Die photogrammetrische Ballonaufnahme ist für kartographische und militärische Zwecke von größter Wichtigkeit, da die mit großer Einfachheit und Leichtigkeit erhaltenen Bilder größerer Landstrecken in der kürzesten Zeit aufgenommen und zur Herstellung von Plänen in jedem beliebigen Maßstabe verwertet werden können.

Über Linienverschiebungen in den Spektren von Ca, Sn und Zn

von

Prof. **F. Exner** und Dr. **E. Haschek.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1906.)

Wir haben vor längerer Zeit gelegentlich der Messungen der ultravioletten Spektren der Elemente darauf hingewiesen, daß die Wellenlängenmessungen derselben Linie Unterschiede ergaben, je nachdem, ob man im vollentwickelten Spektrum des reinen Materials mißt oder ob die Linie als schwache Verunreinigung in einem fremden Spektrum auftritt.

Wir brachten diese Diskrepanzen in Zusammenhang mit den zu jener Zeit bekannt gewordenen Verschiebungen, wie sie Humphreys und Mohler[1] als Folge erhöhten Druckes in dem Gase beobachteten, in dem der elektrische Flammenbogen erzeugt wird. Es ergab sich nämlich, daß die von uns beobachteten Verschiebungen ebenso stets nach Rot gerichtet waren und sich einfach durch den seither auch experimentell nachgewiesenen Druck im Funken erklären ließen. Eine genauere Analyse der damals beobachteten Verschiebungen ergab dann allerdings, daß nicht der Druck im Funken als Erklärung herangezogen werden konnte, wenn er auch unzweifelhaft seinen Einfluß hat, sondern daß die Partialdichte des leuchtenden Dampfes maßgebend für die Größe der Verschiebung ist. Dabei ergab sich experimentell ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen dieser Partialdichte und der Größe der Verschiebung, da beide eine lineare Abhängigkeit zeigten.

[1] Astroph. Journal (1896, 1897 und 1905).

Diese Ergebnisse sind namentlich von H. Kayser in seinem Handbuche der Spektroskopie und von J. M. Eder und E. Valenta[1] angezweifelt worden und als scheinbare Verschiebungen gedeutet worden, die durch fehlerhafte Messung und fehlerhafte Entwicklung der photographischen Platte vorgetäuscht wurden. Es mag dies in einzelnen Fällen der zahlreichen Angaben vielleicht richtig sein, gewiß sind aber viele, wenn nicht die meisten der angegebenen Verschiebungen reell. Ein Urteil über die Untersuchung von Eder und Valenta ist leider nicht möglich, da dieselben keinerlei Zahlenangaben über die Stellung der Linien unter verschiedenen Umständen geben, sondern sich damit begnügen, völlige Koinzidenz der Linien in allen Fällen, wie es scheint, lediglich nach dem Anblicke der Spektrogramme, anzugeben.

Sehen wir für einen Moment ganz davon ab, ob sich das Intensitätsmaximum einer Linie wirklich verschiebt, so würden unsere Angaben darauf hindeuten, daß bei der Messung einer großen Zahl von Linien systematische Fehler in dem Sinne auftreten können, daß man die Wellenlänge zu groß bestimmt. In vielen Fällen kann man ja durch geeignete Wahl der Exposition und Entwicklung das Intensitätsmaximum einer Linie klar bekommen; es gibt aber in der praktischen Spektroskopie gewiß ebenso viele, wenn nicht mehr Fälle, wo dies nicht möglich ist. Bei der Prüfung von Fraktionsreihen auf das Vorhandensein irgend eines seltenen Elementes, bei der Untersuchung des Spektrums eines Präparates, von dem nur sehr wenig zur Verfügung steht, und in ähnlichen Fällen muß man das Spektrum voll exponieren, d. h. so, daß höchstens die allerschwächsten Linien verloren gehen können. Ist dann für die vorläufig sogenannten verschobenen Linien die Grenze nicht bekannt, innerhalb deren die Wellenlänge schwankt oder wenigstens zu schwanken scheint, abgesehen von den gewöhnlichen Meßfehlern, so wird die Identifikation sehr erschwert. Ebenso kann man in der Spektralanalyse der Himmelskörper wohl nie so exponieren, daß wirklich für jede Linie das Intensitätsmaximum klar erkennbar wird und bleibt. Und es ist leicht möglich, daß

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 112 (1903).

durch die so entstehenden Linienverschiebungen die großen Diskrepanzen in den Geschwindigkeiten im Visionsradius zu stande kommen, die man beobachtet, wenn man die radiale Bewegung nach dem Doppler'schen Prinzip aus mehreren Linien bestimmt.

Die Angaben, daß im Funkenspektrum Verschiebungen der Linien gegen das Bogenspektrum auftreten, haben Kent[1] veranlaßt, die Frage experimentell in einer groß angelegten Arbeit zu entscheiden. Darin werden unsere Angaben vollinhaltlich bestätigt und aus den Messungen jene Bedingungen fixiert, die die Verschiebungen beeinflussen. Bloß in zwei Punkten weichen Kent's Angaben, der übrigens nur die relativen Verschiebungen zwischen Funken und Bogen gemessen hat, von unseren ab, insoferne nämlich er eine Verschiebung von Umkehrungen leugnet, und weiters darin, daß seine quantitativen Angaben kleinere Werte für die Verschiebungen ergeben. Die erste Differenz mag bei der geringen Zahl der von Kent untersuchten Linien auf einem Zufalle beruhen, die zweite erklärt sich nach Kent's eigenen Resultaten einfach damit, daß wir unsere Messungen an bedeutend kräftigeren Funkenentladungen anstellten. Und daß die Verschiebung sehr wesentlich von der in jedem Moment in Strahlung verwandelten Energiemenge abhängt und mit dieser steigt, geht aus Kent's Messungen ohneweiters hervor.

Kent's Resultate sind von H. Kayser[2] angezweifelt worden, hauptsächlich deshalb, weil die Justierung des Spaltes keine genügend sorgfältige gewesen zu sein scheint. Es scheint uns aber nicht wahrscheinlich, daß die Resultate Kent's dadurch wesentlich beeinflußt sein können, da ja Kent keine absoluten Wellenlängenmessungen an den Linien selbst anstellt, sondern bloß die Differenzen der astigmatisch verlängerten Linienenden mißt, welche präzise mit dem Intensitätsmaximum übereinstimmen müssen.

Und da Kent die Linienenden nicht einseitig benützte, sondern die ganze Linie im Gesichtsfelde des Mikroskops hatte,

[1] Astroph. Journal (1905).

[2] Zeitschrift für wissensch. Photogr. etc. (1905).

so hätte er sicher einen Fehler infolge mangelhafter Spaltjustierung bemerken müssen.

Um die ganze Frage der Existenz von Linienverschiebungen im Funken und Bogen klarzustellen, haben wir es unternommen, an einer Reihe von Linien die Wellenlängen unter verschiedenen Bedingungen zu untersuchen. Dabei wurden natürlich uns bekannte Fehlerquellen nach Tunlichkeit vermieden. Und diese sollen im folgenden näher erörtert werden.

Zunächst wurde der Spalt subjektiv und photographisch parallel den Gitterstrichen gestellt, wobei wir das Spektrum durch zwei Unterbrechungen der Linien gleichzeitig in drei nahe aneinanderpassenden Streifen photographierten. Es gelang uns so eine Koinzidenz der Linienspitzen soweit zu erzielen, daß ihr Abstand, in Wellenlängen ausgedrückt, kleiner als 0·004 AE. wurde.

Es war dann ein Unterschied in der Wellenlänge nicht mehr nachweisbar, gleichgültig ob sie nahe dem Linienende oder in der Mitte bestimmt wurde. Weiters brachten wir passende Blenden an jener Stelle an, für die das Gitter nahe anastigmatisch abbildet, um das Übereinanderfallen der Lichtteile, die verschiedenen Teilen des Spaltes entsprechen, möglichst zu verhindern. Wir bekamen auf diese Weise Linien von sehr bemerkenswerter Schärfe und Klarheit der Definition. Da eine übermäßige Exposition die Erkennbarkeit des Maximums innerhalb der Linie sehr stört, so wurde mit sehr geringen Belichtungszeiten gearbeitet, die beim Bogen nie über 10 Sekunden, beim Funken nicht über 30 Sekunden hinausgingen. Auch die Entwicklungszeit wurde soweit abgekürzt, daß das Maximum innerhalb der Linienmitte immer klar erhalten blieb, obwohl es immer nach den Linienspitzen erkennbar geblieben wäre.

Die Messung der Linien selbst führten wir wieder nach der objektiven Methode durch, da Vergleichsmessungen unter dem Längenkomparator uns keine höhere Einstellgenauigkeit lieferten. Wir gebrauchten dabei die Vorsicht, stets dieselben Standardlinien zu verwenden und stets an derselben Stelle der Skala zu messen, um von diesen Seiten her ein Auftreten von Fehlern zu vermeiden. Die Standards selbst hatten gewöhnlich

einen kleineren Abstand als 5 AE. und die Vergrößerung wurde soweit genau gestellt, daß der Fehler über 100 AE. höchstens den Betrag von 0·01—0·02 AE. erreichte, meist aber kleiner blieb. Die Ablesung der Linie sowie der Standards erfolgte so, daß ihr Intensitätsmaximum in die Mitte zwischen die Schatten zweier paralleler Fäden eingestellt wurde, deren Stellung auf der Skala abgelesen wurde und deren Mittel dann bei einer Angabe auf 0·01 AE. für die Fäden die Linie auf 0·005 AE. lieferte. Für jede Linie wurden mindestens zwei, gewöhnlich mehrere voneinander unabhängige Einstellungen bei verschiedener Stellung der Standards gemacht und aus allen Angaben das Mittel gebildet. Man sieht daraus, daß zwar die absoluten Wellenlängenangaben durch Fehler der Standards gefälscht sein können, daß aber alle Differenzen der Wellenlängen innerhalb der Meßfehler richtig und untereinander streng vergleichbar sind.

Da wir Linienverschiebungen nicht nur gelegentlich der Messungen der Funkenspektren wahrnahmen, sondern solche auch bei der Untersuchung der Bogenspektren zu beobachten Gelegenheit hatten, so erstreckt sich unsere Arbeit auf beide Arten, leuchtenden Dampf zu erzeugen. Wir haben deshalb auch nicht, wie Kent, die Wellenlänge im Bogenspektrum als konstant annehmen und die Verschiebung relativ zur Bogenlinie messen können. Wir waren also gezwungen, absolute Wellenlängenmessungen durchzuführen und haben nur einmal gelegentlich direkte Messungen der Verschiebungen zur Kontrolle der Beobachtungen gemacht. Die Aufnahmen wurden dabei so gemacht, daß die beiden Spektren nebeneinander auf dieselbe Platte zu liegen kamen, so daß in zwei äußeren Streifen das eine, in einem inneren das andere enthalten war. Natürlich war hier, wie übrigens auch bei allen anderen Aufnahmen eine Kontrolle wegen zufälliger Verrückungen der Platte nötig. Dazu wurden entweder dem Eisen und dem untersuchten Elemente gemeinsame Linien benützt, die Verunreinigungen angehörend, als unverschoben bereits bekannt waren, oder es wurde bei den Aufnahmen am Anfang und am Ende das Eisenspektrum unter gleichen Bedingungen einphotographiert.

Es sei uns gestattet, bevor wir auf die Resultate der Messungen eingehen, hier noch einige Fälle scheinbarer Verschiebungen zu diskutieren, die uns gelegentlich im Spektrum von Sn und Ca vorkamen. Sie betrafen die Sn-Linie λ 3032·9 und die Ca-Linien λ 4454·9 und 4456·8. Diese Linien haben nahe Begleiter, die sich bei höherer Dampfdichte stark verbreitern, so daß ihr Hof über die Nachbarlinien hinüberreicht. Dabei tritt natürlich sowohl auf der photographischen Aufnahme, wie auch bei subjektiver Beobachtung eine Addition der Helligkeiten ein, die von der Abschattierung der einen, respektive von der anderen Linie herrühren. Die Folge davon ist, daß bei genügend raschem Abfallen der Helligkeit des Hofes der einen Linie eine scheinbare Annäherung beider Linien eintritt, die nicht einer Verschiebung im gewöhnlichen Sinn entspricht, obwohl das Intensitätsmaximum an eine ganz andere Stelle rückt. Es ist dabei ganz gleichgültig, ob es sich um Umkehrungen handelt oder nicht. Die ganze Erscheinung tritt natürlich deutlich bemerkbar nur bei nahen Linien und da nur bei der schmäleren und schwächeren auf, sobald beide Linien einen gemeinsamen Lichthof bekommen. Wir haben diese Linien in unseren Tabellen in eckige Klammern eingeschlossen.

Was nun den Umfang unserer Untersuchung anlangt, so haben wir Linien von Sn, Zn und Ca untersucht, und zwar stets für verschiedene Partialdichten des leuchtenden Dampfes im Funken- und im Bogenspektrum. Wir wählten dabei gewöhnlich drei verschiedene Fälle; einmal eine Minimaldichte, bei der wir noch möglichst alle fraglichen Linien klar erkennbar und gut meßbar erhielten, dann die möglichst reine Strahlung des Materials durch Verwendung des Metalles, respektive Verwendung von möglichst viel überschüssigem Salz und eine passende mittlere Partialdichte des leuchtenden Dampfes, bei der Umkehrungserscheinungen noch nicht auftraten.

Wir geben in den folgenden Tabellen die Resultate unserer Messungen wieder und wollen dazu nur im allgemeinen bemerken, daß alle Wellenlängenangaben auf Tausendstel der Angström'schen Einheit gegeben sind. Es sind in der ersten Vertikalkolonne stets die Einheiten der Wellenlängen gegeben,

während in den mit *A*, *B*, *C*, eventuell *D* überschriebenen Kolonnen die Dezimalen dieser Wellenlängen an erster Stelle stehen. Hier enthält die mit *i* bezeichnete Kolonne die Intensitäten der Linie, eventuell mit der Charakterisierung:

+ verwaschen,
r einseitig nach Rot verwaschen,
u umgekehrt.

Bei den Umkehrungen ist auch die beiläufige Breite des Absorptionsstreifens in Angström'schen Einheiten (AE.) angegeben, die wir zu beobachten Gelegenheit hatten. — Es sei ausdrücklich bemerkt, daß den Intensitätsangaben, die nur auf beiläufigen Schätzungen beruhen, nur ein orientierender Wert beizulegen ist. — Unter *F* bringen wir für jede Zahl den wahrscheinlichen Fehler in Tausendsteln der AE. und unter *n* die Anzahl der zum Mittel vereinigten Messungen.

In der ersten Tabelle sind die Messungen am Bogenspektrum des Zinks enthalten, die Stromstärke betrug dabei stets 6 Ampère. Die Messungen unter *A* entsprechen dem Spektrum einer verdünnten Zinkchloridlösung, die auf Gaskohle aufgetragen wurde. Die Aufnahmen für die Zahlen der Kolonne *B* wurden unter Verwendung von Messingstiften, jene für die Kolonne *C* mit Hilfe von käuflichem Stangenzink gemacht. Auf den Aufnahmen der Kolonne *A* konnten entsprechend der geringen Konzentration der Lösung nur die kräftigsten Zinklinien beobachtet, respektive gemessen werden.

In der Tabelle 2 stellen wir die Messungen zusammen, die wir am Funkenspektrum des Zinks anstellten. Zur Erzeugung des Funkens diente dabei wieder unser Hochspannungstransformator, der mit 26 Ampère bei 100 Volt Spannung im Primärkreise gespeist, zirka 10.000 Volt im Sekundärkreise liefert. Parallel der Funkenstrecke waren Kondensatoren von 750 *m* Kapazität geschaltet. Diese selben Strombedingungen wurden stets, auch bei allen folgenden Aufnahmen eingehalten. Die den Kolonnen *A*, *B* und *C* der Tabelle 2 zu Grunde liegenden Aufnahmen sind an denselben Materialien gemacht wie für die vorige Tabelle.

Tabelle 1.

Zink — Bogen.

λ	A				B				C			
	λ	i	F	n	λ	i	F	n	λ	i	F	n
2770·	—	—	—	—	1·055	5 r	2	4	·996	50 u 0·10	3	5
2800·	—	—	—	—	1·048	8 r	3	5	·964	100 u 0·10	2	5
3018·	—	—	—	—	·494	4 r	4	5	·535	20 r	3	4
3035·	—	—	—	—	·916	6	3	5	6·009	30 r	4	5
3072·	—	—	—	—	·238	10 r	4	8	·324	50 r	1	4
3075·	6·005	1	0	2	6·008	10	3	8	·991	10 u 0·08	4	9
3282·	·446	1	6	3	·445	50	2	3	·420	200 u 0·10	0	3
3302·	·710	3	3	2	·713	100	2	2	·678	500 u 0·15	5	3
3303·	—	—	—	—	·080	50	0	2	·032	200 u 0·10	1	3
3345·	—	—	—	—	·142	100	3	3	·129	1000 u 0·15	2	4
3345·	—	—	—	—	·683	30	1	3	·671	300 u 0·10	4	4
4680·	·329	4	3	5	·385	50 r	8	5	·390	100	3	4
4722·	·345	6	2	6	·410	100 r	4	6	·341	100 u 0·15	3	4
4810·	·730	6	2	4	·813	100 r	2	4	·733	200 u 0·20	3	5

A Aus verdünnter Zinkchloridlösung.
B Aus Messing.
C Aus Zinkmetall.

Tabelle 2.

Zink — Funken.

λ	A				B				C			
	λ	i	F	n	λ	i	F	n	λ	i	F	n
2771·	—	—	—	—	·048	1	5	10	·055	5+ r	2	4
2800·	—	—	—	—	·966	1 r	5	4	1·040	8+ r	5	3
3018·	—	—	—	—	—	—	—	—	·510	3 r	4	7
3035·	—	—	—	—	—	—	—	—	·948	5 r	3	3
3072·	—	—	—	—	·253	1 r	1	7	·255	10 r	3	4
3076·	—	—	—	—	·024	1	3	7	·041	10	2	4
3282·	·430	1	0	2	·437	5	4	3	·443	100	1	3
3302·	·649	2	5	4	·699	10	2	6	·725	300 n 0·12	2	4
3303·	·035	1	3	4	·064	5	1	4	—	—	—	—
3345·	·130	3	2	3	·140	20	3	4	·153	500 n 0·15	3	4
3345·	·688	1	5	3	·685	8	2	4	—	—	—	—
4680·	·348	1	2	5	—	—	—	—	·422	50 r	3	5
4722·	·336	2 r	5	5	—	—	—	—	·410	100 r	3	5
4810·	·730	2 r	2	5	—	—	—	—	·797	100 r	2	5

A Aus verdünnter Zinkchloridlösung auf Kohle.
B Aus Messing.
C Aus metallischem Zink.

Tabelle 3.

Calcium — Bogen.

λ	A λ	A i	A F	A n	B λ	B i	B F	B n	C λ	C i	C F	C n
4425·	·599	3	4	5	·606	30	2	8	·603	30 u 0·05	3	10
4435·	·095	5	4	4	·131	30 u 0·10	3	8	·140	50 u 0·10	3	8
4435·	·824	2	3	4	·859	20	3	8	·833	20 u *	2	8
4454·	·949	6	3	5	·966	50 u 0·15	3	8	[·937]	80 u 0·15	5	8
4456·	·056	2	3	5	·073	20	2	8	·040	20 u *	4	8
4456·	·795	1	3	5	·798	4	3	8	[·772]	5 **	3	8
4578·	·725	1	2	4	·793	6 r	4	5	·825	15 r	2	7
4581·	·613	1	2	4	·669	8 r	3	4	·712	20 r	5	6
4586·	·060	1	2	3	·124	10 r	5	5	·155	25 r	6	6

* Die Umkehrungen schlecht sichtbar.

** Die Linie steht im Abfalle der Linie 4456·05 nach Rot, so daß durch Addition der Helligkeiten das Maximum der Helligkeiten nach Violett wandert.

A Calcium als normale, schwache Verunreinigung der Kohle.
B Aus konzentrierter Calciumchloridlösung.
C Calciumchlorid, auf Kohle aufgeschmolzen.

In der Tabelle 3 sind die Messungen am Bogenspektrum des Calciums zusammengestellt. Auch hier betrug die Stromstärke stets 6 Ampère. Die Zahlen der Kolonne *A* entsprechen einer Dampfdichte des Calciumdampfes, wie man sie für die Zufallsverunreinigung der Kohle erhält. Die Aufnahmen der Kolonne *B* wurden erhalten an Kohlen, die durch Aufträufeln fast gesättigter Chlorcalciumlösung imprägniert wurden, während für die Aufnahmen der Kolonne *C* die Kohlen mit aufgeschmolzenen Kappen von Calciumchlorid versehen wurden.

Die Tabelle 4 gibt die Messungen am Funkenspektrum des Calciums wieder, das man unter Verwendung von konzentrierter Calciumchloridlösung (Kolonne *A*) und von aufgeschmolzenem Salz auf Kohle (Kolonne *B*) erhält. Die geringe Dampfdichte, Calcium als Verunreinigung von Kohle, ist hier nicht aufgenommen, da im Funken unter diesen Bedingungen das Spektrum des Calciums zu wenig intensiv und daher zu schlecht für die Messung wird.

Tabelle 4.

Calcium — Funken.

λ	*A*				*B*			
	λ	*i*	*F*	*n*	λ	*i*	*F*	*n*
4425·	·610	6	4	5	·604	15 *u* 0·05	1	8
4435·	·122	8	2	5	·117	20 *u* 0·15	3	8
4435·	·856	5	5	5	·864	10	5	8
4454·	·937	10	2	8	·914	30 *u* 0·20	2	13
4456·	·072	5	2	8	·102	15	6	12
4456·	·783	1	3	8	·782	4	3	14
4578·	·787	1 *r*	5	8	·835	6 *r*	6	12
4581·	·657	2 *r*	5	8	·739	8 *r*	7	12
4586·	·098	2 *r*	5	8	·188	10 *r*	4	12

A Aus konzentrierter Calciumchloridlösung auf Kohle.
B Calciumchlorid, auf Kohle aufgeschmolzen.

Die folgende Tabelle 5 enthält die Messungen einiger Zinnlinien im Bogenspektrum. Die Aufnahmen der Kolonnen *A*, *B* und *C* wurden mit einer Stromstärke von 6 Ampère hergestellt, und zwar wurden verwendet: Für *A* Kohlen, die mit verdünnter Zinnchloridlösung imprägniert waren, für *B* Messingstifte, die mit einer dünnen Schichte Zinnlotes überzogen wurden, und für *C* metallisches Zinn. In der angefügten Kolonne *D* sind Messungen an Aufnahmen aus metallischem Zinn bei Verwendung von 20 Ampère zur Erzeugung des Bogens angeführt.

In der Tabelle 6 sind die Messungen der Funkenlinien des Zinns angeführt. Es entsprechen die Zahlen der Kolonne *A* dem Spektrum einer verdünnten Zinnchloridlösung auf Kohle, die der Kolonne *B* sind an Zinnlinien gewonnen, die als Verunreinigungen im Zinkspektrum auftraten; in der Kolonne *C* sind die Messungen enthalten, die an Aufnahmen verzinnter Messingstifte erhalten wurden, und die Kolonne *D* gibt die Wellenlängen im Spektrum des reinen Zinns.

Am Zinnspektrum haben wir zur Kontrolle der Wellenlängenmessungen direkte Verschiebungsmessungen gemacht. Es wurden nebeneinander die Spektren verzinnten Messings (außen) und reinen Zinns (innen) nebst dem Standardspektrum aufgenommen und die Differenzen der Einstellungen in beiden Fällen bestimmt. Die so erhaltenen Zahlen sind unter »$\Delta\lambda$ beobachtet« aufgeführt, während unter »$\Delta\lambda$ berechnet« die analogen Werte aus Tabelle 6, *C* und *D*, beigefügt sind. Erwähnt muß werden, daß die hier verwendeten Messingstifte mit einer stärkeren Schichte von Zinnlot überzogen waren als jene, die zu den Aufnahmen der Tabelle 6 dienten.

Diese Tabellen zeigen wohl deutlich, daß unter den angegebenen Umständen die Messungen der Wellenlängen Differenzen ergeben, die weit über die Grenzen der Meßfehler hinausgehen, daß also Linienverschiebungen existieren, welche mit der Vergrößerung der Dichte des leuchtenden Dampfes wachsen.

Tabelle 5.

Zinn — Bogen.

λ	A				B				C				D			
	λ	*i*	*F*	*n*	λ	*i*	*F*	*n*	λ	*i*	*F*	*n*	λ	*i*	*F*	*n*
2840·	·067	1	3	5	·108	10	3	3	·082	50 *u* 0·22	3	7	·105	200 *u* 0·55	0	4
2850·	—	—	—	—	·725	4	2	3	·728	10 *u* 0·10	3	3	·721	20 *u* 0·12	4	4
2863·	·418	1	4	4	·438	8	3	3	·438	30 *u* 0·20	2	2	·445	100 *u* 0·45	0	3
3009·	·220	1	2	3	·230	8 *r*	2	3	·218	30 *u* 0·10	5	2	·235	100 *u* 0·28	2	3
3032·	—	—	—	—	·905	3	5	3	·898	8	3	3	[·862]	[1] *u* 0·10	4	3
3034·	·192	1	1	3	·233	10 *r*	3	5	·208	50 *u* 0·15	5	2	·215	200 *u* 0·35	0	2
3175·	·150	2	3	3	·176	20 *r*	4	5	·155	100 *u* 0·15	0	2	·158	300 *u* 0·32	2	2
3262·	·465	2	2	3	·499	15 *r*	3	4	·476	100 *u* 0·10	3	9	·488	300 *u* 0·20	2	2
3330·	·745	1	2	3	·765	5 *r*	2	3	·741	30 *u* 0·10	2	4	·758	100 *u* 0·12	1	3

A Aus verdünnter Zinnchloridlösung auf Kohle. 6 Ampère.
B Aus verzinntem Messing. 6 Ampère.
C Aus Metall. 6 Ampère.
D Aus Metall. 20 Ampère.

[1] Eine Intensitätsangabe für diese Linie zu machen, ist nicht möglich, da sie vollständig in der Verbreiterung der folgenden Linie verschwindet.

Tabelle 6.

Zinn — Funken.

λ	A				B				C				D			
	λ	i	F	n	λ	i	F	n	λ	i	F	n	λ	i	F	n
2840·	·113	2+	5	2	·120	2	2	3	·143	3 r	3	3	·045	30 u * 0·11	3	2
2850·	—	—	—	—	—	—	—	—	·737	1	3	3	·708	8 u † 0·10	4	4
2863·	·445	1+	16	2	·449	1	3	7	·463	2 r	5	2	·390	15 u * 0·12	6	2
3009·	·228	1	2	2	·253	1	2	4	·265	2 r	3	2	·220	20 u * 0·10	0	2
3032·	—	—	—	—	—	—	—	—	·900	1	2	3	·898	8	3	5
3034·	·199	1 r	4	4	·230	1	3	2	·238	3 r	2	2	·187	30 u * 0·11	1	3
3175·	·138	2 r	5	2	·153	2 r	2	2	·178	4 r	5	2	·140	50 u * 0·11	2	4
3262·	·460	2 r	3	2	·493	2 r	3	4	·482	5 r	4	3	·460	50 u * 0·11	6	2
3330·	·743	1	5	2	·766	1	2	6	·758	2	2	3	·780	30	3	2

A Aus verdünnter Zinnchloridlösung auf Kohle.
B Als Verunreinigung in metallischem Zink.
C Aus verzinntem Messing.
D Aus metallischem Zinn.

* Rote Komponente stärker.
† Violette Komponente stärker.

Tabelle 7.

Zinn — Funken.

λ	Δλ berechnet	Δλ beobachtet	i_1	i_2		F	n
2840·	+0·098	+0·107	10	50 *u* *	0·18	2	3
2850·	+0·029	+0·028	1	10 *u*	0·10	3	3
2863·	+0·073	+0·081	8	30 *u* *	0·15	2	6
3009·	+0·045	+0·043	10	30 *u* *	0·15	3	3
3032·	+0·002	—0·002	1	10		2	3
3034·	+0·051	+0·051	12	50 *u* *	0·18	4	4
3175·	+0·038	+0·035	20	100 *u* *	0·12	2	4
3262·	+0·022	+0·030	20	100 *u* *	0·15	3	4
3330·	—0·022	—0·030	8	30		3	4

Δλ berechnet aus den Zahlen der Tabelle 6, *C* und *D*.
Δλ beobachtet auf einer Aufnahme mit Sn aus verzinntem Messing und Metall nebeneinander.
i_1 für verzinntes Messing (stärker verzinnt als für Tabelle 6, *C*).
i_2 für Metall.
* Rote Komponente stärker.

Die Größe dieser Verschiebung ist für die verschiedenen Linien variabel und erreicht Werte, die das Zehntel der Angström'schen Einheit übersteigen. Dabei zeigt sich, daß wenigstens in sehr vielen Fällen die Wellenlänge der Umkehrung mit jener der schwachen Linie übereinstimmt, das ist aber mit der Wellenlänge des verdünnten Dampfes; in andern Fällen zeigt aber auch die Umkehrung noch eine bemerkliche Verschiebung. Es wird dies ohneweiters klar, wenn man bedenkt, daß man es in der Linie, welche man im Bogen- oder Funkenspektrum beobachtet, stets mit der Überlagerung der Emissionen zu tun hat, die aus den verschiedenen Schichten des leuchtenden Dampfes stammen. Je weiter wir uns vom zentralen Kern entfernen, desto niedriger wird die Temperatur

und auch die Dichte des leuchtenden Dampfes. Im Spektroskop gelangt die Überlagerung aller Einzelemissionen zur Beobachtung und man beobachtet deshalb fast ausnahmslos einseitige Verbreiterungen nach Rot, wenn die Intensitätsmaxima der differenten Schichten entstammenden Einzellinien nicht genau koinzidieren. Wo das Maximum der resultierenden Linie liegt, hängt dann natürlich von dem Temperatur- und Dichtegefälle im Funken oder Bogen, respektive von den Intensitäten der komponierenden Strahlungen ab.

Wenn Umkehrungserscheinungen auftreten sollen, muß die Strahlung der äußersten Schichten einen passenden Wert erreichen, und es ist ohneweiters klar, daß die Umkehrung uns die Wellenlänge der absorbierenden, das ist aber im allgemeinen der äußersten Schichte im Bogen oder Funken liefern muß. Da aber diese jedenfalls von allen gleichzeitig vorhandenen die ist, welche geringste Dampfdichte aufweist, so muß die Umkehrung nach kleineren Wellenlängen verschoben erscheinen gegenüber der starken, nicht umgekehrten Linie. Tritt nun diese Umkehrungserscheinung schon bei relativ niederer mittlerer Dampfdichte auf, so werden sich mit wachsender Dichte immer tiefer im Bogen oder Funken liegende Schichten, also solche, die schon merkliche Verschiebung des Emissionsmaximums zeigen, an der Absorption beteiligen, und die Umkehrung muß sich nach Rot verschieben. Solche Steigerungen der mittleren Dampfdichte kann man durch reichlichere Zufuhr von Material bewirken, und unsere Tabellen zeigen hiefür Beispiele in den Zinklinien λ 3302·7 und 3345·1.

Es läßt sich aber die mittlere Dampfdichte auch durch Erhöhung der Stromstärke steigern, womit reichlichere Verdampfung des Elektrodenmaterials Hand in Hand geht. Tabelle 5, *C* und *D*, zeigen, daß dann tatsächlich ganz bedeutende Verschiebungen der Umkehrungen eintreten, welche im gegebenen Falle bei Zinn nahezu die Werte erreichen wie für 5*A* und *B*.

Bemerkt mag werden, daß Linien gleicher Serien auch gleichmäßiges Verhalten zeigen, solange wenigstens, als sie durch die Veränderungen im Stromkreis in analoger Weise affiziert werden. Wir glauben aber nicht, daß ein näheres Studium der Verschiebungserscheinungen aller Elemente uns

die Kenntnis der Serien vermitteln würde, da ja auch solche Linien Verschiebungen zeigen, welche nicht in Serien eingeordnet werden können. Es bestätigt diese Beobachtung die Angaben von J. Stark,[1] die er in einer jüngst erschienenen Arbeit machte.

Die nun folgenden Tabellen, welche für sonst gleichartige Bedingungen die Messungen der Bogen- und Funkenlinien nebeneinander bringen, zeigen wieder, daß nicht bloß innerhalb einer Art des Spektrums Verschiebungen auftreten, sondern daß die Wellenlängen sehr wesentlich von der Art der Erzeugung des leuchtenden Dampfes abhängen. Die hier enthaltenen Zahlen sind einfach den oben mitgeteilten Zusammenstellungen entnommen, auf die bezüglich der näheren Charakteristik verwiesen werden muß.

Vergleicht man die angegebenen Zahlen, so zeigt sich, daß die Wellenlängen im Funken- und Bogenspektrum sehr wesentlich differieren. Dabei findet man, daß hier die Linien im Funkenspektrum sehr häufig kleinere Wellenlängen aufweisen, wohl deshalb, weil im Bogen eine reichlichere Verdampfung des zugeführten Materials und damit auch eine höhere mittlere Dampfdichte auftritt. Andrerseits erreicht aber die maximale Verschiebung im Funkenspektrum höhere Werte, da im Funken wohl größere Dichtenunterschiede zwischen Kern und Hülle auftraten und wahrscheinlich auch eine relativ intensivere Strahlung der zentralen Partien statthat. Damit übereinstimmend, sind auch die Wellenlängen der Umkehrungen im Funkenspektrum häufig besonders tief.

Anschließend an diese Beobachtungen sei es uns gestattet, auf einige Umstände aufmerksam zu machen, welche beim Studium der Verschiebungserscheinungen störend auftreten. Sie können in beiderlei Sinne wirken, indem sie Verschiebungen vortäuschen, wo keine sind, respektive die vorhandenen vergrößern und auch so, daß die Verschiebung teilweise oder vollständig verdeckt wird. Wir werden natürlich dabei nicht alle Möglichkeiten anführen können.

[1] Ber. der d. Phys. Ges., 1906.

Tabelle 8.

Zink — Funken und Bogen.

λ	A		B		C	
	Funken	Bogen	Funken	Bogen	Funken	Bogen
2770·	—	—	1·048	1·055	1·055	·996 *u*
2800·	—	—	·966	1·048	1·040	·964 *u*
3018·	—	—	—	·494	·510	·535
3035·	—	—	—	·916	·948	6·009
3072·	—	—	·253	·238	·255	·324
3075·	—	6·005	6·024	6·008	6·041	·991 *u*
3282·	·430	·446	·437	·445	·443	·420 *u*
3302·	·649	·710	·699	·713	·725 *u*	·678 *u*
3303·	·035	—	·064	·080	—	·032 *u*
3345·	·130	—	·140	·142	·153 *u*	·129 *u*
3345·	·688	—	·685	·683	—	·671 *u*
4680·	·348	·329	—	·385	·422	·390
4722·	·336	·345	—	·410	·410	·341 *u*
4810·	·730	·730	—	·813	·797	·733 *u*

A Aus verdünnter Zinkchloridlösung auf Kohle.
B Aus Messing.
C Aus metallischem Zink.

Tabelle 9.

Calcium — Funken und Bogen.

λ	A		B	
	Funken	Bogen	Funken	Bogen
4425·	·610	·606	·604 *u*	·603 *u*
4435·	·122	·131 *u*	·117 *u*	·140 *u*
4435·	·856	·859	·864	·833 *u*
4454·	·937	·966 *u*	·914 *u*	[·937 *u*]
4456·	·072	·073	·102	·040 *u*
4456·	·783	·798	·782	[·772]
4578·	·787	·793	·835	·825
4581·	·657	·669	·739	·712
4586·	·098	·124	·188	·155

Tabelle 10.

Zinn — Funken und Bogen.

λ	A		B		C		
	Funken λ	Bogen λ	Funken λ	Bogen λ	Funken λ	Bogen 6 Amp. λ	Bogen 20 Amp. λ
2840·	·113	·067	·143	·108	·045 *u*	·082 *u*	·105 *u*
2850·	—	—	·737	·725	·708 *u*	·728 *u*	·721 *u*
2863·	·445	·418	·463	·438	·390 *u*	·438 *u*	·445 *u*
3009·	·228	·220	·265	·230	·220 *u*	·218 *u*	·235 *u*
3032·	—	—	·900	·905	·898	·898	[·862 *u*]
3034·	·199	·192	·238	·233	·187 *u*	·208 *u*	·215 *u*
3175·	·138	·150	·178	·176	·140 *u*	·155 *u*	·158 *u*
3262·	·460	·465	·482	·499	·460 *u*	·476 *u*	·488 *u*
3330·	·743	·745	·758	·765	·780	·741 *u*	·758 *u*

A Aus verdünnter Zinnchloridlösung auf Kohle.
B Aus verzinntem Messing.
C Aus metallischem Zinn.

Um zunächst auf den ersten Fall einzugehen, sei daran erinnert, daß bei einseitig verbreiterten Linien die Umkehrung normal am violetten Rande so eintritt, daß die rote Komponente wesentlich intensiver erscheint als die violette. Dabei kann es leicht, namentlich bei zu kurzen Expositionen oder auch bei nahestehenden Linien vorkommen, daß man die violette Komponente ganz übersieht und bloß die intensive rote als Linie mißt, welche natürlich eine ganz bedeutend größere Wellenlänge ergibt, als der Linie zukommt. Der entgegengesetzte Fall, daß die violette Komponente wesentlich stärker wäre als die rote, kommt kaum vor, wenigstens ist uns kein solcher Fall bekannt. Es mag auch der Fall eintreten, daß man im Spektrum des reinen Materials Doppellinien als Umkehrungen auffaßt oder daß nahe Dublets scheinbar zu einer Linie verfließen. Tritt nun das Spektrum einmal bei geringer Dampfdichte scharf auf, so kann es sein, daß nur eine der Linien auftritt. Daß dann Differenzen der Wellenlängenmessungen Verschiebungen vortäuschen, ist klar. So ist z. B. die von uns[1] für Li λ 4602·5 gegebene Verschiebung im Funkenspektrum nicht reell, da diese Linie doppelt ist und beide Umkehrungen auf der Platte zusammenflossen. Als Verunreinigung beobachteten wir zufällig nur die rote Komponente des Dublets, das gegen die gemeinsame Umkehrung scheinbar eine Verschiebung von 0·6 AE. ergab. Wir bitten diese fehlerhafte Angabe a. a. O. zu streichen.

Jede photographische Aufnahme eines Spektrums, das mit einem Rowland'schen Gitter erzeugt wird, erfordert wegen der relativen Lichtschwäche ziemlich lange Zeit. Wenn wir auch die Expositionen möglichst abkürzten, so war doch Gelegenheit, daß namentlich bei Verwendung von Salzen auf Kohle der Vorrat an Material und damit die Nachlieferung von Dampf in die Bahn der Entladung abnahm. Da kann es leicht vorkommen, daß zu Anfang der Exposition eine Linie eine bedeutende Verschiebung des Maximums oder Umkehrung aufwies, während in den späteren Momenten das Maximum wegen der abnehmenden Dampfdichte immer mehr nach Violett rückt, respektive die Umkehrungserscheinung auf der Platte durch

[1] Wellenlängen-Tabellen der Funkenspektra, 1902.

die Emissionslinie wieder verdeckt wird. In beiden Fällen beobachtet man breite Maxima und, wie leicht einzusehen ist, zu geringe Verschiebungen. Es mag dieser Umstand auch bei den weiter oben mitgeteilten Zahlen, so namentlich bei einzelnen Linien des Zinks und Calciums besonders im Bogenspektrum, störend mitgewirkt haben.

Endlich sei noch auf einen Fall hingewiesen, der in beiderlei Sinn wirken kann, der weiter oben bereits erwähnt wurde. Beobachtet man ein relativ weites Dublet bei verschiedenen Dampfdichten, so werden schließlich, wenn die Linien Verbreiterungen zeigen, diese zu einem gemeinsamen Hofe verschmelzen. Bei einem genügenden Intensitätsunterschiede der Linien wird die hellere wenig oder gar nicht affiziert, während sich zur Emission der schwächeren Linie noch jene des Hofes der Nachbarlinie addiert. Nun nimmt aber die Helligkeit mit der Entfernung vom Maximum ab und die Intensitätskurve der schwächeren Linie erfährt dadurch bei genügend rascher Abnahme der Intensität des Hofes eine solche Veränderung, daß ihr Maximum scheinbar gegen die intensive Nachbarlinie hinwandert. Das Entgegengesetzte tritt natürlich für die Umkehrung auf, falls eine solche an der schwächeren oder wenigstens weniger verbreiterten Linie auftritt. Die Folge davon ist natürlich eine Verrückung der Linie oder der Umkehrung, die eine ganz andere Ursache hat als die hier untersuchten Verschiebungen. Es ist selbstverständlich ganz gleichgültig, ob die Linien des Dublets dem gleichen oder verschiedenen Elementen angehören. Beispiele für diesen Fall sind in unseren Tabellen enthalten, und zwar die Linien: Sn-Bogen 3032·9, Ca-Bogen 4454·9 und Ca-Bogen 4456·8.

Die Linienverschiebungen sind übrigens schon seit längerer Zeit bekannt. So haben ja Humphreys und Mohler, wie bereits erwähnt, die Veränderlichkeit der Wellenlänge der Bogenspektren mit dem Druck in dem den Bogen umgebenden Medium untersucht. Ihre Resultate haben allgemeine Anerkennung gefunden im Gegensatze zu unseren Angaben, daß die Wellenlänge mit der Dampfdichte variabel ist. Und doch scheinen uns beide Erscheinungen auf der gleichen Endursache zu basieren, nämlich auf der Annäherung der emittierenden Teilchen, auf der dadurch bewirkten Erhöhung ihrer Anzahl in der Volumen-

einheit. Daß übrigens nicht bloß im Funken- oder Bogenspektrum Linienverschiebungen auftreten, sondern auch im Spektrum des Geißlerrohres, beweisen die Angaben von Eder und Valenta gelegentlich ihrer Messungen des Argonspektrums.[1]

Schließlich wollen wir noch darauf aufmerksam machen, daß die Tatsache der Linienverschiebungen für die Spektroskopie der Himmelskörper von einschneidender Bedeutung ist. Für die Bestimmung der Geschwindigkeit der Gestirne im Visionsradius haben wir ja bloß die eine Methode, die Linienverschiebungen nach dem Doppler'schen Prinzip zu bestimmen. Es ist nun klar, daß man dazu nur solche Linien wählen darf, die unter allen im Laboratorium herstellbaren Bedingungen konstante Wellenlänge aufweisen. Da wir nämlich über die Dampfdichte und Temperaturverhältnisse der Gestirne so gut wie gar nichts wissen und einen Aufschluß darüber schließlich doch nur aus den Spektren erwarten dürfen, so können wir auch nie mit voller Sicherheit sagen, ob in den Sternspektren die Verschiebungen ganz oder nur teilweise von der Bewegung im Visionsradius herrühren. Und es mag ganz wohl sein, daß die auffälligen Unterschiede in der Geschwindigkeit eines Sternes, die man findet, sobald die Bewegung nach mehreren Linien bestimmt wird, zum großen Teil auf variablen Verschiebungen der Linien infolge der Druck- oder Dichteverhältnisse beruhen. Und daß in den Sonnenspektren solche Verschiebungen vorkommen können, ist wohl ohneweiters zuzugestehen und wird noch weiters illustriert durch folgende kleine Tabelle, die wir den Standardlinien Rowland's entnehmen.

Element	Bogen	Sonne
Ca	5041·867	5041·795
Mg	4703·249	4703·180
Fe	4494·756	4494·735
Ca	3949·070	3949·034
Fe	3716·601	3716·585
Fe	3638·454	3638·435
Ni	3195·729	3195·702

[1] Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1896.

Wir wollen dazu nur noch bemerken, daß sich aus Rowland's Tabelle der Standardlinien noch zahlreiche andere Beispiele anführen ließen und daß wir nur die auffälligsten auswählten.

Wir möchten schließlich noch auf die Möglichkeit hinweisen, daß auch die von Janicki[1] untersuchten Änderungen in der Intensitätsverteilung komplexer Linien wohl zu Veränderungen der beobachteten Wellenlängen Veranlassung geben können.

---

[1] Ann. d. Ph., 19 (1906).

Über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes und die scheinbare Größe der Gestirne

von

Dr. R. Daublebsky v. Sterneck,

Professor der Mathematik an der k. k. Universität in Czernowitz.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Juni 1906.)

Daß das scheinbare Himmelsgewölbe nicht etwa eine Halbkugel, sondern entschieden eine weniger stark gewölbte Fläche darstellt, ist eine allgemein anerkannte Tatsache, die schon oft Gegenstand eingehender wissenschaftlicher Erörterung geworden ist. Vor allem war es Helmholtz,[1] der sich mit der Erklärung dieses Phänomens befaßt hat, außer ihm aber noch mehrere andere Gelehrte,[2] die meist vom Standpunkt des Physiologen oder Psychologen zu dieser Tatsache Stellung genommen haben.

---

[1] Handb. der physiol. Optik, 2. Aufl., 1896, p. 774.

[2] O. Zoth, Über den Einfluß der Blickrichtung auf die scheinbare Größe der Gestirne und die scheinbare Form des Himmelsgewölbes. Archiv für Physiol., Bd. 78 (1899). — W. Filehne, Die Form des Himmelsgewölbes. Ebenda, Bd. 59 (1895). (Im Anhang interessante historische und literarische Notizen.) — Euler, Briefe an eine deutsche Prinzessin, Frz. Ausg. Brief 225. — R. Mayr, Die scheinbare Vergrößerung von Sonne, Mond und Sternbildern. Archiv für Physiol., Bd. 101, p. 349 bis 422. — Pernter, Die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes. Schriften des Ver. zur Verbr. nat. Kenntnisse in Wien, Bd. 41 (1901). — Plateau, Une application des images accidentelles. Bull. Acad. roy. de Belgique, t. 49, p. 316 (1880). — Ed. Clarapède, L'agrandissement et la proximité apparents de la lune à l'horizon. Archives de psychologie, t. V, No 18, Octobre 1905. Enthält unter anderem ein ganz vollständiges Verzeichnis der einschlägigen Literatur.

Mit der Flachheit des Himmelsgewölbes in mehr oder minder engem Zusammenhange steht eine Reihe von Phänomenen, die sich auf die scheinbare Größe der Gestirne, d. h. der Sternbilder, der Sonne und des Mondes, beziehen. Helmholtz nimmt an, daß beim Zustandekommen dieser eigentümlichen Phänomene außer der Flachheit des Himmelsgewölbes noch andere Umstände wesentlich beteiligt sind, so vor allem die Vergleichung der Himmelskörper mit irdischen Gegenständen und die Luftperspektive. In neuerer Zeit hat O. Zoth das Moment der Verschiedenheit der Blickrichtung besonders betont.

Auffallend ist nun der Umstand, daß, während man eine ganze Reihe von Erklärungsversuchen für alle diese Phänomene in der Literatur vorfindet, die Erscheinungen selbst, wie mir scheint, bis jetzt nur mangelhaft beschrieben worden sind. Über die Tatsachen, daß das Himmelsgewölbe flach erscheint und daß Sonne und Mond am Horizont größer erscheinen als in der Nähe des Zeniths, und zwar unter verschiedenen (keineswegs noch genau präzisierten) Umständen verschieden groß, ist man eigentlich in den bisherigen Beschreibungen nicht hinausgekommen.

Der einzige Autor, der numerische Daten über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes veröffentlicht hat, ist Eugen Reimann.[1] Er verwendete eine von Robert Smith[2] angegebene Methode, die darin besteht, den Höhenwinkel jenes Punktes am Himmel zu bestimmen, der den Bogen vom Zenith bis zum Horizont gerade zu halbieren scheint. Aus der Kenntnis dieser Halbierungsstelle kann man dann nach den von Drobisch[3] entwickelten Formeln unter der (von Reimann besonders geprüften) Annahme, daß das Himmelsgewölbe eine Kugelkalotte darstellt, das Verhältnis der Vertikalerhebung zum Radius des Schnittkreises mit dem Horizont ermitteln.

---

[1] Programmabhandlungen des Gymnasiums in Hirschberg i. Schl., 1890, 1891, 1901, 1903; auch Zeitschr. für Psychologie, Bd. 30 und 37.

[2] System of optics (1728). Deutsche Bearbeitung von A. G. Kästner, 1755: Vollst. Lehrbegriff der Optik, p. 55 bis 58, 416 bis 418.

[3] Über die Bestimmung der Gestalt des Himmelsgewölbes. Berichte über die Verh. der sächs. Ges. der Wiss., 1854.

Auch über die scheinbare Größe der Sonne hat Reimann einige Beobachtungen angestellt, indem er sie bei 55° Höhe und beim Untergang im Meere verglich. Diesem Teile der Untersuchungen Reimann's kann ich allerdings wegen prinzipieller Bedenken gegen die verwendete Methode gar nicht beistimmen.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es nun, eine größere Zahl numerischer Daten, die nach einer ganz anderen Methode, nämlich durch direkte Schätzungen gewonnen wurden, zusammenzustellen. Diese Daten ermöglichen es uns dann, den Verlauf gewisser idealer Flächen, auf die wir die Schätzungen am Himmelsgewölbe beziehen, ihrer Form und Größe nach zu verfolgen. Ich habe diese Flächen bereits am Schlusse einer vor kurzem erschienenen Arbeit[1] nebenbei erwähnt und »Referenzflächen«[2] genannt.

1. Allgemeine Bemerkungen über Referenzflächen.

Wir konstatieren hier nochmals die psychologisch sehr interessante Tatsache, daß wir Schätzungen von Dimensionen am Himmelsgewölbe immer auf eine bestimmte Rfl. beziehen; so schätzen wir z. B. den Durchmesser der Sonne bei einem bestimmten Höhenwinkel etwa mit 15 *cm*. Dieser Schätzung entspricht, da uns der Sonnendurchmesser unter einem Gesichtswinkel von 32′ erscheint, eine Entfernung von 16·1 *m*; eine Scheibe von 15 *cm* Durchmesser müßten wir nämlich in einer Entfernung von 16·1 *m* vom Auge des Beobachters anbringen, wenn wir erreichen wollten, daß durch diese Scheibe die Sonne genau verdeckt würde. Da wir nun weder den Eindruck haben, daß die Sonne nur 16·1 *m* von uns entfernt sei, noch auch, daß ihr Durchmesser in Wirklichkeit nur 15 *cm* betrage, so sehen wir, daß wir eigentlich nicht den Sonnendurchmesser selbst, sondern den Durchmesser einer Scheibe geschätzt haben, welche die durch den Sonnenrand und unser

[1] Versuch einer Theorie der scheinbaren Entfernungen. Diese Sitzungsberichte, Bd. 114, Abt. IIa, 1905.

[2] Wegen des häufigen Vorkommens des Wortes »Referenzfläche« wird dasselbe im folgenden stets mit Rfl., im Plural mit Rfln. abgekürzt.

Auge bestimmte Kegelfläche aus einer idealen Fläche ausschneidet, die in einer ganz mäßigen Entfernung verläuft. Um diese Fläche, die jedenfalls eine Rotationsfläche mit vertikaler Achse ist und die wir »Referenzfläche« nennen wollen, auszumessen, haben wir bloß nötig, den Sonnendurchmesser bei möglichst zahlreichen verschiedenen Ständen der Sonne zu schätzen und aus jedem solchen Schätzungsresultat den zugehörigen Leitstrahl der Rfl. zu berechnen.

Bei der Ausgleichung derartiger Beobachtungsresultate, gleichviel um welche Rfl. es sich handelt, bin ich immer von der Annahme ausgegangen, daß die gesuchte Rfl. sich als die eine Mantelfläche eines zweischaligen Rotationshyperboloids darstellen lasse, eine Annahme, die, wie sich zeigen wird, den Beobachtungsresultaten durchaus keinen Zwang antut; es genügt sogar, ein spezielleres Rotationshyperboloid zu wählen, das unter der Voraussetzung, daß sich der Beobachter im Koordinatenanfangspunkt befindet und daß die Rotationsachse mit der Z-Achse zusammenfällt, durch folgende Gleichung dargestellt werde:

$$b^2(a-z)^2 = a^2(x^2+y^2+z^2),$$

eine Gleichung,[1] die, wie man sieht, von zwei Konstanten abhängt und daher denselben Grad der Allgemeinheit besitzt, wie wenn wir eine Kugelkalotte annehmen würden.

Setzen wir

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2,$$

so ergibt sich unter Einführung des Höhenwinkels φ, den der Leitstrahl mit der Horizontalebene einschließt, die Gleichung:

$$b^2(a-\rho \sin \varphi)^2 = a^2\rho^2$$

und daraus, da der in unserem Falle in Betracht kommenden, gegen unten konkaven Mantelfläche des Hyperboloids der kleinere der beiden Werte ρ entspricht,

[1] Man erhält dieses Rotationshyperboloid durch Rotation der Hyperbel

$$b^2(a-z)^2 = a^2(x^2+z^2),$$

die mit etwas abgeänderter Bezeichnung bereits in meiner früheren Arbeit eine hervorragende Rolle spielte (a. a. O. p. 1696).

$$\rho = \frac{b}{m \sin \varphi + 1},$$

wo wir $\frac{b}{a} = m$ gesetzt haben. Die Bestimmung der beiden Konstanten b und m ist nun sehr einfach, wenn für verschiedene Werte φ die Werte des Leitstrahls ρ durch Beobachtungen ermittelt sind.

Für $\varphi = 0$ hat ρ den Wert b.

Für $\varphi = 90°$ hat ρ den Wert $\frac{b}{m+1}$.

$1:(m+1)$ ist somit das Verhältnis der Vertikalerhebung der Fläche zum Radius des Schnittkreises derselben mit der Horizontalebene. Wir wollen eine solche Fläche der Kürze halber ein Hyperboloid $1:(m+1)$ nennen.

Die Rfl. ist natürlich zum Teil durch die Individualität des Beobachters bedingt und für verschiedene Personen verschieden. Eine kleine Umfrage, die ich in dieser Hinsicht unter 30 meiner Bekannten veranstaltete, ergab, daß, soweit ich dies ohne Vornahme größerer Versuchsreihen konstatieren konnte, sich die individuellen Verschiedenheiten der einzelnen Personen nur auf die absolute Größe, nicht aber auf die Form der Rfl. beziehen. Ich gewann den Eindruck, daß sich die Menschen im großen und ganzen in dieser Hinsicht in drei Gruppen teilen. Ich selbst schätze z. B. den Durchmesser des Vollmondes bei heiterem Nachthimmel, reiner Luft und einer Höhe von 13° etwa mit 18 *cm*. Die meisten der befragten Personen, nämlich 22 von 30 (darunter 4 kurzsichtige) stimmen nun mit mir in dieser Schätzung überein, während 3 von ihnen (darunter 2 kurzsichtige) denselben Durchmesser bloß mit 9 *cm*, 5 (darunter 2 kurzsichtige) sogar bloß mit 3 *cm*, also sechsmal kleiner als ich selbst, schätzen. Die Rfl. dieser letzteren Gruppe von Personen ist also sechsmal kleiner als meine eigene; diese eigentümliche Erscheinung, die wir als »Himmelsmikropsie« bezeichnen können, ist nicht etwa als eine Folge der Kurzsichtigkeit aufzufassen, da sich in jeder Gruppe von Personen sowohl kurzsichtige als auch normal- oder weitsichtige Personen befanden.

Die Dimensionen der im folgenden bestimmten Rfln., die zunächst für mich selbst gelten, dürften daher nach den Ergebnissen dieser kleinen Statistik für die meisten Personen ebenfalls richtig sein. Manche jedoch werden nötig haben, sämtliche Dimensionen erst mit einem bestimmten (verkleinernden) Proportionalitätsfaktor zu multiplizieren, um die für sie selbst geltenden Rfln. daraus abzuleiten.

2. Die Referenzfläche des Sternenhimmels.

Bei der Bestimmung der Rfl. des Sternenhimmels benutzte ich ein kleines Fernrohr mit einer Porro'schen doppelten Prismenumkehrung und einem ziemlich großen Gesichtsfelde von beinahe 6° Durchmesser, mit dem es sehr leicht war, irgend eine Gegend des Himmels, die zunächst mit freiem Auge betrachtet wurde, aufzufinden und die einzelnen Sterne wiederzuerkennen, da das Fernrohr aufrechte Bilder zeigte. In dem Fernrohr war ein Okularmikrometer angebracht, an welchem unmittelbar der Winkel, den die Visuren nach zwei nahe beieinander liegenden Sternen miteinander einschlossen, abgelesen werden konnte. Das Mikrometer bestand in einem gezähnten Metallstreifen, der Winkelwert eines Zahnes betrug 13·4′. Da man leicht noch die Zehntel eines Intervalls richtig schätzte, sind die Winkelmessungen nahezu auf Minuten genau, was vollkommen ausreichend ist.

Es wurde nun irgend ein Sternpaar, dessen Sterne ungefähr gleiche Höhe hatten und nahe beieinander lagen, gewählt und zunächst die scheinbare Entfernung beider Sterne voneinander geschätzt. Zur Unterstützung dieser Schätzung hatte ich stets einen Maßstab zur Hand, auf dem ich ein der scheinbaren Entfernung gleiches Stück fixierte und dann dessen Länge in Zentimetern ablas.

Dann wurde mit Hilfe des Mikrometers der Winkelwert bestimmt, der der Entfernung der betreffenden beiden Sterne entsprach, und schließlich mit einem Höhenmeßapparat allereinfachster Art der Höhenwinkel abgelesen, den die Richtungen nach den beiden Sternen mit der Horizontalebene einschlossen; es war dies bei beiden Sternen im allgemeinen derselbe Höhenwinkel, da eben Paare gleich hoher Sterne ausgesucht wurden;

war die Höhe nicht genau dieselbe, so wurde das Mittel genommen.

Aus jeder der eben skizzierten Messungen erhält man dann eine Aussage über die Länge des Leitstrahls, der vom Auge bis zur Rfl. hinführt.

In der folgenden Tabelle sind die auf die Rfl. des Sternenhimmels bezüglichen Beobachtungen zusammengestellt; sie erstrecken sich auf 43 Sternpaare und sind sämtlich von den Fenstern des Universitätsgebäudes in Czernowitz, von wo ich einen großen Teil des Himmels, allerdings nur bis zu Höhenwinkeln von 64°, übersehen konnte, ausgeführt. In derselben bedeutet φ die mittlere Höhe des Sternpaares in Graden, D die scheinbare Distanz der beiden Sterne in Zentimetern, α die Entfernung der beiden Sterne im Winkelmaß, ausgedrückt in Einheiten des Okularmikrometers à 13·4′, und ρ den Leitstrahl der Rfl. in Metern.

φ	D	α	ρ	Mittel	φ	D	α	ρ	Mittel
7°	200	22·0	23·3	23·5	33°	11	1·9	14·9	
7	210	22·6	23·8		33	99	16·1	15·8	15·0
8	106	12·8	21·3	21·3	36	52	9·8	13·6	
10	210	26·0	20·7		37	59	9·5	15·9	
11	94	11·2	21·5	20·9	43	40	6·6	15·6	
12	56	7·0	20·5		43	107	20·3	13·5	
13	135	18·5	18·7		44	98	16·0	15·7	
13	160	18·4	22·3		44	39	7·0	14·3	14·5
13	57	7·0	20·9		45	56	9·5	15·1	
14	97	12·8	19·4	19·7	47	98	17·7	14·2	
16	47	6·7	18·0		47	85	16·6	13·1	
17	110	15·2	18·6		50	56	9·8	14·7	
18	38	5·8	16·8		50	109	20·3	13·8	14·3
21	61	9·6	16·3		50	56	9·8	14·7	
22	40	5·4	19·0	18·0	52	130	24·0	13·9	
22	120	15·6	19·7		55	44	7·7	14·7	14·7
23	41	5·8	18·1		60	54	12·3	11·3	
26	54	8·8	15·7		62	16	3·4	12·1	11·8
27	102	17·1	15·3	16·9	62	60	12·7	12·1	
27	41	6·3	16·7		64	107	20·8	13·2	13·8
28	39	6·4	15·6	14·8	64	48	8·5	14·5	
29	53	9·7	14·0						

Bei der Mittelbildung wurden von 10° aufwärts alle Einzelresultate vereinigt, die sich um dasselbe Vielfache von je 5° des Höhenwinkels φ gruppieren.

Die Ausgleichung der erhaltenen Beobachtungsresultate zeigt, daß sich die Rfl. des Sternenhimmels sehr gut durch ein Hyperboloid mit den Konstanten $b = 24 \cdot 4\, m$, $m + 1 = 2$, darstellen lasse, dessen Leitstrahlen ρ für die verschiedenen Höhenwinkel φ in der folgenden Tabelle, und zwar in Metern zusammengestellt sind.

φ	ρ	φ	ρ	φ	ρ	φ	ρ
0°	24·4	7°	21·7	30°	16·2	65°	12·8
1	23·9	8	21·4	35	15·5	70	12·6
2	23·5	9	21·1	40	14·8	75	12·4
3	23·1	10	20·7	45	14·2	80	12·3
4	22·8	15	19·3	50	13·8	85	12·2
5	22·4	20	18·1	55	13·3	90	12·2
6	22·1	25	17·1	60	13·0		

Die Übereinstimmung mit den in der früheren Tabelle enthaltenen Mittelwerten kann als vollkommen befriedigend betrachtet werden, so daß wir als erstes Resultat unserer Untersuchung die folgende Tatsache verzeichnen können:

Die Rfl. des Sternenhimmels ist ein Hyperboloid 1:2 mit der Vertikalerhebung $12 \cdot 2\, m$ im Zenith.

Aus der Kenntnis der Rfl. können wir zwar nicht auf die Dimensionen, wohl aber auf die Form des scheinbaren Himmelsgewölbes, hier speziell des Sternenhimmels, schließen. Wenn wir nämlich irgend zwei Sternpaare betrachten, die z. B. von der Art sind, daß die gegenseitige Entfernung der Sterne des ersten Paares, auf der Rfl. gemessen, doppelt so groß ist als die der Sterne des zweiten Paares, so machen uns die beiden Sternpaare zweifellos den Eindruck, daß auch in Wirklichkeit die Sterne des ersten Paares doppelt so weit voneinander abstehen als die Sterne des zweiten. Die Rfl. ist daher dem scheinbaren Himmelsgewölbe ähnlich.

Da sie sich beim Sternenhimmel als Hyperboloid 1:2 darstellen läßt, so erscheinen die Sternbilder beim Auf- oder Untergange doppelt so groß, als wenn sie im Zenith stehen.[1]

3. Erklärungsversuch der Form des Sternenhimmels.

Die starke Krümmung des Sternenhimmels, der den Horizont nur in doppelt so großer Distanz zu schneiden scheint, als seine vertikale Erhebung beträgt, lassen mich klar erkennen, daß die in meiner früheren Arbeit versuchte Zurückführung der scheinbaren Form des heiteren und des Nachthimmels auf die scheinbare Form des bewölkten Tageshimmels, wie sie auch Helmholtz vornimmt, nur als sehr dürftiger Erklärungsversuch angesehen werden kann. Ich gestatte mir daher, hier einen neuen Erklärungsversuch mitzuteilen, der die Form des Sternenhimmels mit dem Phänomen der Extinktion des Sternenlichtes in der Atmosphäre in Zusammenhang bringt.

Je tiefer ein Stern einer bestimmten Größenklasse steht, ein um so größerer Teil des von ihm ausgehenden Lichtes wird beim Durchgange durch die Atmosphäre absorbiert; so kommt es, daß die vom Zenith weiter abstehenden Zonen des Himmels im großen und ganzen immer schwächer leuchtende Sterne aufweisen.

Dieses schwächere Leuchten der tiefer stehenden Sterne könnte nun, da uns namentlich bei klarer Luft die Extinktion des Lichtes als selbständiges Phänomen absolut nicht zum Bewußtsein kommt, den psychologischen Effekt haben, daß wir (bei Sternen einer und derselben Größenklasse) die Lichtquellen selbst überall als gleich stark, aber in verschiedenen Entfernungen vom Beobachter befindlich vorstellen. Es entsteht die Frage, ob durch eine solche Annahme die scheinbare Form des Sternenhimmels erklärt werden könnte.

Dies gelingt in der Tat, wenn wir nur solche Sterne in Betracht ziehen, deren Höhe über dem Horizont mindestens 10° beträgt.

---

[1] Die Halbierungsstelle des Bogens vom Zenith bis zum Horizont liegt bei $\varphi = 32 \cdot 5°$, während Reimann diese Stelle (aus sechs Beobachtungen) bei $\varphi = 30°$ annimmt.

Da die Leuchtkraft gleich intensiver Lichtquellen dem Quadrat der Entfernung der einzelnen Lichtquellen umgekehrt proportional ist, so müßte, wenn die Extinktion eine hinreichende Erklärung für die scheinbare Form des Sternenhimmels bilden sollte, die Quadratwurzel aus dem reziproken Helligkeitsverhältnis der Sterne einer bestimmten Größenklasse bei verschiedenen Höhen dem Leitstrahl der Rfl. bei eben diesen Höhen proportional sein. Wenn wir somit den Leitstrahl durch diese Quadratwurzel dividieren, so müßten wir bei allen Höhenwinkeln denselben Quotienten erhalten. Die Probe, inwieweit dies zutrifft, ist in der folgenden kleinen Tabelle durchgeführt, in welcher log $\sqrt{h^{-1}}$ den Logarithmus der Quadratwurzel aus dem reziproken Verhältnis der Helligkeit in der Höhe φ zur Helligkeit im Zenith[1] bedeutet.

φ	ρ	log ρ	log $\sqrt{h^{-1}}$	log $\frac{\rho}{\sqrt{h^{-1}}}$	$\frac{\rho}{\sqrt{h^{-1}}}$		Abweichung vom Mittel
10°	20·7	1·316	0·196	1·120	13·2	Mittel 13·3	−0·1
20	18·1	1·258	0·090	1·168	14·7		+1·4
30	16·2	1·211	0·046	1·165	14·6		+1·3
40	14·8	1·171	0·024	1·147	14·0		+0·7
50	13·8	1·138	0·012	1·126	13·4		+0·1
60	13·0	1·114	0·006	1·108	12·8		−0·5
70	12·6	1·099	0·002	1·097	12·5		−0·8
80	12·3	1·088	0·000	1·088	12·3		−1·0
90	12·2	1·085	0·000	1·085	12·2		−1·1

Die erzielte Übereinstimmung der Werte $\frac{\rho}{\sqrt{h^{-1}}}$ ist zwar keine vollständige, aber immerhin beachtenswert. Für Höhen über 10° können wir daher die Extinktion des Lichtes mindestens als einen sehr wesentlichen Faktor beim Zustandekommen der scheinbaren Form des Sternenhimmels ansehen.

[1] Diese von G. Müller in Potsdam ermittelten Werte entnehme ich dem »Handwörterbuch der Astronomie«, herausgegeben von Valentiner, I. Bd., p. 328.

Für Höhen unter 10° trifft diese Erklärung allerdings gar nicht zu, indem die Extinktion hier so groß wird, daß die Leitstrahlen der Rfl. noch viel rascher zunehmen müßten, als es der Fall ist. Hier nun können wir, wie ich glaube, die Erinnerungsbilder an den Tageshimmel doch insofern heranziehen, als sie uns veranlassen, wenigstens im allgemeinen bei der Hyperboloidform zu bleiben und nicht am Horizont eine so bedeutende Erweiterung der scheinbaren Form des Sternenhimmels anzunehmen, wie es die Extinktion allein verlangen würde. Hiezu kommt noch, daß wir ja auch am Tage am äußersten Horizont meist mehr oder minder dichte Dunstmassen angehäuft sehen und es uns daher gar nicht schwer fällt, die ganz tiefstehenden Sterne tatsächlich durch solche Dunstmassen verdüstert vorzustellen.

So dürfte denn beim Zustandekommen der scheinbaren Form des Sternenhimmels die psychologische Wirkung der Extinktion des Lichtes mit Erinnerungsbildern an den Tageshimmel Hand in Hand gehen.

4. Die Referenzfläche der Sonne.

Bei der Ausmessung der Rfl. der Sonne ist die Aufgabe dadurch vereinfacht, daß der Sonnendurchmesser im Winkelmaß stets nahezu denselben Betrag, 32′, besitzt, so daß die auszuführenden Beobachtungen einfach in Schätzungen des Sonnendurchmessers nebst Bestimmung der zugehörigen Höhenwinkel bestehen. Die Schätzungen kann man, wenn die Sonne teilweise durch Wolken verdunkelt ist, sehr oft mit freiem Auge vornehmen. Ist sie in ihrem vollen Glanze, so muß man natürlich ein dunkles Glas verwenden, was anfangs ein wenig stört. Am wenigsten wird dieser störende Einfluß empfunden, wenn man ein an verschiedenen Stellen verschieden stark berußtes Glas verwendet, so daß man die Sonne zwar gehörig abdunkeln, aber doch durch die übrigen Teile des Glases den Himmel und den Horizont noch ziemlich gut sehen kann.

Bei den Schätzungen des Sonnendurchmessers zeigte sich nun vor allem ein sehr bemerkenswerter Umstand, den ich hier vorwegnehmen möchte. Die Beobachtungen bei Höhenwinkeln von 10° aufwärts lassen nämlich eine vollkommen

einheitliche Darstellung zu, indem jedem Werte des Höhenwinkels φ ein ganz bestimmter Sonnendurchmesser entspricht, während bei Höhen unter 10° für einen und denselben Höhenwinkel ganz verschiedene Werte für den scheinbaren Durchmesser zum Vorschein kommen, so daß es nicht möglich ist, ohne gewisse Nebenumstände eingehender zu beschreiben, die Schätzungen bei kleinen Höhenwinkeln einheitlich zur Darstellung zu bringen.

Wir wollen daher zunächst nur solche Beobachtungen zusammenstellen, die bei Höhenwinkeln von 10° aufwärts gewonnen wurden, und aus ihnen die Rfl. berechnen. Diese Rfl., die wir wieder als Rotationshyperboloid der oben bezeichneten Art darstellen, setzen wir dann auch gegen den Horizont, also auch für Höhenwinkel unter 10°, fort. Die Leitstrahlen für diese kleinen Höhenwinkel sind somit nicht durch Beobachtungen gewonnen, sondern als bloßes Rechnungsresultat aus den Beobachtungen für größere Höhenwinkel abgeleitet.

Dann erst wollen wir an die Beobachtungsresultate für Winkel unter 10° herangehen und sie einzeln untersuchen. Stimmt ein aus einer Beobachtung ermittelter Leitstrahl mit dem in der eben besprochenen Art berechneten überein, so wollen wir das betreffende Beobachtungsresultat als **normal**, im entgegengesetzten Falle als **abnormal** bezeichnen.

Die folgende Tabelle enthält zunächst alle bei Höhenwinkeln $\varphi \geqq 10°$ erhaltenen Beobachtungsresultate d (in Zentimetern), 60 an der Zahl, die an 25 verschiedenen Tagen unter den verschiedensten atmosphärischen Umständen gewonnen wurden.

φ	d	Mittel	φ	d	Mittel
10°	25, 18		15°	17, 15	
11	20, 19	19·3	16	17	
12	19, 17, 17		19	15, 15	
13	16, 17, 17, 17		20	15	15·0
14	16, 17	16·6	21	15, 14	

φ	d	Mittel	φ	d	Mittel
22°	16,		41°	12, 11, 12, 12	
23	15, 15, 15		42	11	
24	14		43	11·5	
25	14, 14	14·5	46	12·5	12·0
26	14		49	12, 12	11·5
27	15		50	10·5	
29	13, 13		53	11, 10·5	
30	13	13·3	54	11·5, 11·5	
31	14		55	11·5	11·3
33	12·5	13·2	56	12	
36	14		57	11, 11·5	
38	12, 12, 12·5		58	11	11·0
40	12, 13	12·0			

Leiten wir aus diesen Beobachtungen das ihnen am besten entsprechende Hyperboloid ab, so finden wir die beiden charakteristischen Konstanten $b = 25 \cdot 3\, m$, $m + 1 = 2 \cdot 5$. Die Werte des Leitstrahles ρ dieses Hyperboloids (in Metern) und die Werte des zugehörigen normalen Sonnendurchmessers d_n (in Zentimetern) sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

φ	ρ	d_n	φ	ρ	d_n	φ	ρ	d_n
0°	25·3	23·8	9°	20·5	19·3	50°	11·8	11·1
1	24·7	23·2	10	20·1	18·9	55	11·4	10·7
2	24·0	22·6	15	18·2	17·1	60	11·0	10·3
3	23·4	22·0	20	16·7	15·7	65	10·7	10·1
4	22·9	21·5	25	15·5	14·6	70	10·5	9·9
5	22·3	21·0	30	14·5	13·6	75	10·3	9·7
6	21·9	20·6	35	13·6	12·8	80	10·2	9·6
7	21·4	20·1	40	12·9	12·1	85	10·1	9·5
8	20·9	19·6	45	12·3	11·6	90	10·1	9·5

Wir erfahren aus der vorstehenden Tabelle, wie groß der Sonnendurchmesser bei Winkeln von 10° aufwärts tatsächlich erscheint und wie groß er bei Winkeln unter 10° normalerweise erscheinen würde. Was die Werte für $\varphi \geqq 10°$ betrifft, so zeigt eine Vergleichung mit der vorigen Tabelle, daß die beobachteten Sonnendurchmesser mit den auf Grund des Hyperboloids berechneten ausnahmslos gut übereinstimmen.

Wir haben somit das Resultat: Die Rfl. des Sonnendurchmessers bei Höhenwinkeln von 10° aufwärts ist ein Hyperboloid 1:2·5 mit einer Vertikalerhebung von 10·1 *m* im Zenith.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Beobachtungsresultate für $\varphi < 10°$ über. Es fragt sicht vor allem, ob wir auch hier mitunter den »normalen« Durchmesser beobachten. Aus meinen Beobachtungen kann ich nun mit ziemlicher Bestimmtheit sagen, daß bei vollkommen heiterem Himmel und reiner Atmosphäre der normale Sonnendurchmesser zum Vorschein kommt.

Ich führe die bezüglichen Beobachtungen hier an:

1. Sonnenuntergang bei klarem Himmel, am 29. Jänner 1906 in Czernowitz beobachtet. Die Sonne ging hinter dem 5 *km* entfernten Berge Cecina unter:

$$\varphi = 4, \quad 2·5°$$
$$d = 21, \quad 25\ cm.$$

2. Untergang am 5. April 1906, vom Dache eines Hauses in der Universitätsstraße in Wien beobachtet, bei ganz klarem Himmel:

$$\varphi = 4, \quad 3, \quad 2°$$
$$d = 22, \quad 24, \quad 23·5\ cm.$$

3. Untergang am 12. April 1906, bei vollkommen heiterem Himmel bei Laibach während der Eisenbahnfahrt beobachtet:

$$\varphi = 7, \quad 5°$$
$$d = 21, \quad 22\ cm.$$

Diese drei bei vollkommen heiterem Himmel angestellten Beobachtungen zeigen, wie man sieht, keine irgendwie nennens-

werten Abweichungen des beobachteten Durchmessers von dem normalen Werte.

Im Gegensatz hiezu habe ich bei bewölktem Himmel, namentlich wenn dicke, schwere Wolken fast den ganzen Himmel bedeckten, die Sonne beim Auf- oder Untergang aber doch sichtbar war, niemals den normalen Durchmesser beobachtet. Selbst bei mäßiger Bewölkung erscheint der Sonnendurchmesser etwas vergrößert. Um dies durch die Beobachtungen zu illustrieren, teile ich zunächst einige Beobachtungsresultate mit, die bei ziemlich heiterem, aber immerhin einige leichte Wolken aufweisendem Himmel gewonnen wurden.

4. Untergang am 23. März 1906, in Czernowitz beobachtet; ziemlich heiter:

$$\varphi = 6,\quad 4,\quad 3,\quad 3,\quad 2\cdot5^\circ$$
$$d = 20,\quad 22,\quad 21,\quad 24,\quad 27\ cm.$$

5. Aufgang am 26. März 1906, in Czernowitz beobachtet; ziemlich heiter:

$$\varphi = 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 9^\circ$$
$$d = 26,\quad 27,\quad 26,\quad 23,\quad 18\ cm.$$

6. Aufgang am 30. März 1906, in Czernowitz beobachtet; ziemlich heiter:

$$\varphi = 2,\quad 5,\quad 5^\circ$$
$$d = 32,\quad 26,\quad 29\ cm.$$

7. Aufgang am 1. April 1906, vom Eisenbahncoupé aus bei Csap in Ungarn bei fast ganz heiterem Himmel (bis auf einige Horizontwolken) beobachtet:

$$\varphi = 5,\quad 6^\circ$$
$$d = 24,\quad 22\ cm.$$

8. Untergang am 24. März 1906, bei etwas wolkigem Himmel in Czernowitz beobachtet:

$$\varphi = 8,\quad 6^1/_2,\quad 6,\quad 5^1/_2,\quad 5,\quad 5,\quad 4^1/_2,\quad 3^1/_2,\quad 3,\quad 2^1/_2{}^\circ$$
$$d = 25,\quad 21,\quad 23,\quad 24,\quad 24,\quad 25,\quad 26,\quad 29,\quad 28,\quad 29\ cm.$$

9. Untergang am 16. April 1906, von Fiume aus bei ziemlich heiterem, im Zenith aber mit ziemlich schweren Wolken bedecktem Himmel:

$$\varphi = 4°$$
$$d = 31\ cm.$$

Bei allen diesen Auf-, beziehungsweise Untergängen ist der Durchmesser gegen seinen normalen Betrag zwar nicht sehr bedeutend, aber immerhin schon merklich vergrößert.

Eine auffallende Vergrößerung zeigen aber die bei sehr bewölktem Himmel beobachteten Sonnendurchmesser, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

10. Untergang am 25. März 1906, in Czernowitz beobachtet. Der Himmel war mit zerrissenem Gewölk fast ganz bedeckt, nur für einen Augenblick trat die Sonne heraus:

$$\varphi = 3°$$
$$d = 42\ cm.$$

11. Untergang am 26. März 1906, in Czernowitz beobachtet. Der Himmel war durch die Wolken in zwei Teile geteilt; vom Zenith bis zu 8° Höhe mit schweren Wolken bedeckt, unterhalb, bis zum Horizont, namentlich gegen Westen ganz rein, bis auf wenige Kumuluswolken:

$$\varphi = 7^1/_2,\quad 7^1/_2,\quad 6,\quad 5,\quad 5,\quad 4^1/_2,\quad 3^1/_2°$$
$$d = 40,\quad 37,\quad 42,\quad 49,\quad 40,\quad 42,\quad 42\ cm.$$

12. Aufgang am 27. März 1906, in Czernowitz beobachtet. Ähnliche Wolkenstimmung wie am Abend vorher, der Horizont ziemlich rein:

$$\varphi = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 3,\quad 5,\quad 6°$$
$$d = 38,\quad 37,\quad 41,\quad 40,\quad 36,\quad 35\ cm.$$

Aus diesen Daten geht zweifellos hervor, daß die Vergrößerung des Sonnendurchmessers bei bewölktem Himmel regelmäßig stattfindet, während bei heiterem Himmel die Sonne, auch wenn sie tief steht, ihren normalen Durchmesser zeigt. Hiemit ist vor allem die noch immer sehr verbreitete Ansicht, daß es die am Horizont sichtbaren Gegenstände seien, die zur scheinbaren Vergrößerung der Sonne wesentlich beitragen,

wohl als widerlegt anzusehen. Die Beobachtungen 1, 2 und 3 sind z. B., wie der Beschreibung zu entnehmen ist, unter den allerverschiedensten Umständen, was die sichtbaren Gegenstände betrifft, angestellt. Trotzdem zeigen diese drei Untergänge ziemlich die gleichen Sonnendurchmesser und es ist daher wohl anzunehmen, daß ihre Übereinstimmung dem bei allen dreien gemeinsamen Umstande, nämlich daß der Himmel wolkenlos war, zuzuschreiben sei.

Allerdings soll damit nicht gesagt sein, daß die Rfl. von der Situation des Standortes in jeder Beziehung ganz unabhängig sei. Es kommt nämlich unter gewissen Umständen vor, daß besonders auffallende Stellen der Umgebung die Rfl. ein wenig beeinflussen, und zwar in zweierlei Art: Erstens ereignet es sich manchmal, daß man den an sich unveränderlichen Leitstrahl der Rfl. nicht vom Auge, sondern von einem in der allernächsten Umgebung besonders auffallenden Punkte aus in Gedanken aufträgt. Dies geschieht z. B. regelmäßig dann, wenn wir die schon tief stehende Sonne aus dem Fenster eines Zimmers betrachten und nun im Zimmer einige Schritte zurücktreten. Es zeigt sich sofort eine Vergrößerung des scheinbaren Durchmessers, die zweifellos davon herrührt, daß wir den Leitstrahl, auch wenn wir uns vom Fenster bereits entfernt haben, doch noch vom Fenster aus mit demselben Betrage wie früher nach außen hin aufgetragen denken und so, vom Auge aus gezählt, der Rfl. ausnahmsweise einen größeren Leitstrahl zuschreiben.

Zweitens kann es mitunter vorkommen, daß zwar der Leitstrahl vom Auge des Beobachters aus gezählt wird, daß aber statt des richtigen Endes des Leitstrahls eine in dessen Nähe befindliche, besonders markante Stelle der Umgebung benützt wird. So lassen wir uns z. B., wenn wir die tiefstehende Sonne (oder den Mond) hinter einem Gebüsch erblicken, dessen Entfernung nur um einige Meter von der normalen Entfernung der Rfl. abweicht, mitunter verleiten, die Rfl. genau an die Stelle dieses Gebüsches zu verlegen, wodurch dann allerdings der Schein entsteht, als ob eine Vergleichung mit jenem Gegenstande stattfände; doch ist die Vergleichung keineswegs das Wesentliche an diesem Vorgange, was daraus hervorgeht, daß

sie sofort unterbleibt, wenn sich der betreffende Gegenstand (z. B. das erwähnte Gebüsch) in einer von der normalen Länge des Leitstrahles der Rfl. bereits sehr stark abweichenden Entfernung befindet.

Sehen wir aber von derartigen ganz besonderen Umständen bei der Beobachtung ab, so dürfte im übrigen die Theorie, die sich auf die Vergleichung mit Gegenständen am Horizont, Häusern, Baumkronen u. dgl., beruft, keinen Anspruch auf irgend welche Richtigkeit erheben können.

Es entsteht nun aber die berechtigte Frage, in welcher Weise denn die Wolken einen vergrößernden Einfluß auf die Sonne auszuüben vermögen. Um auf diese Frage eingehen zu können, müssen wir uns noch mit einer weiteren Rfl. beschäftigen, nämlich derjenigen, auf die wir die Schätzungen am Wolkenhimmel beziehen.

5. Die Referenzfläche des Wolkenhimmels.

Betrachten wir irgend eine kleine Wolke, so sind wir geneigt, ihr z. B. eine Längenausdehnung von 60 *cm* zuzuschreiben, während wir wohl überzeugt sind, daß sie in Wirklichkeit eine vielmal größere Ausdehnung hat; dies zeigt, daß auch der Wolkenhimmel auf eine Rfl. bezogen werden kann.

Die Ausmessung dieser Rfl. nahm ich in ganz analoger Weise vor wie beim Sternenhimmel; ich bestimmte zunächst den Höhenwinkel, unter dem irgend eine kleine Wolke (oder ein scharf abgegrenzter Teil einer größeren) gesehen wurde, schätzte dann eine bestimmte Dimension dieser Wolke (womöglich die horizontale) und ermittelte schließlich mit Hilfe des Mikrometers den zugehörigen Winkelwert.

In dieser Weise wurde die Rfl. desjenigen Wolkenhimmels ausgemessen, der am 25., 26. und 27. März 1906 über Czernowitz sichtbar war, aus ziemlich zerrissenen, im Zenith mitunter ziemlich dicken, offenbar recht niedrig schwebenden Wolken bestand und mit Ausnahme einiger bald vorübergehenden Aufheiterungen (z. B. am 26. früh) durch die drei Tage fast unverändert blieb. Die folgende Tabelle gibt die Beobachtungen wieder; es bedeutet G die Größe der Wolken, auf der Rfl.

geschätzt, in Zentimetern, α den Winkel, unter dem die betreffende Wolke gesehen wurde, in Einheiten des Mikrometers à 13·4′, ρ den Leitstrahl der Rfl. in Metern.

φ	G	α	ρ	Mittel	φ	G	α	ρ	Mittel
3°	110	3·5	80·6		18°	130	14·0	23·9	
3	140	4·8	74·8		18	60	6·0	25·7	23·8
3	170	5·8	75·2		22	75	9·0	21·4	
3	190	6·0	81·2	75·8	22	170	18·0	24·2	
3	150	5·5	70·0		23	140	13·0	27·7	
3	170	6·0	72·7		27	100	11·0	23·3	25·5
4	110	4·0	70·6	70·6	29	70	8·0	22·5	
5	80	3·0	68·4		29	150	17·0	22·6	
5	80	3·3	62·2	66·4	32	120	13·0	23·7	21·5
5	80	3·0	68·4		32	80	12·0	17·1	
5	140	5·4	66·5		35	60	6·5	23·7	
6	100	3·6	71·3		36	60	8·5	18·1	19·6
6	130	6·0	55·6	65·4	37	60	9·0	17·1	
6	100	3·7	69·3		38	80	14·0	14·7	
7	150	8·0	48·1	52·9	39	60	9·0	17·1	16·1
7	90	4·0	57·7		42	45	7·0	16·5	
8	50	2·3	55·8	55·8	43	80	12·0	17·1	
9	120	9·0	34·2	40·4	43	40	6·0	17·1	
9	200	11·0	46·6		44	60	10·0	15·4	15·9
10	90	4·0	57·7	48·6	45	35	6·5	13·8	
12	40	2·6	39·5		49	60	10·0	15·4	15·9
13	120	10·0	30·8	29·1	52	45	7·0	16·5	
16	160	15·0	27·4		59	120	17·0	18·1	18·1

Wir haben wieder bei Höhen unter 10° wegen der großen Veränderlichkeit der Werte ρ nur die genau zu demselben Werte φ gehörigen zu Mitteln vereinigt, während bei größeren Höhen die Mittelbildung von 5 zu 5 Graden erfolgte. Das Hyperboloid, das sich den beobachteten Leitstrahlen am besten anpaßt, hat die Konstanten

$$b = 109{\cdot}4\ m, \qquad m+1 = 9.$$

Die Leitstrahlen dieses Hyperboloids (in Metern) zeigt die folgende Tabelle.

φ	ρ	φ	ρ	φ	ρ	φ	ρ
0°	109·4	7°	55·4	30°	22·9	65°	13·3
1	96·0	8	51·8	35	19·6	70	12·9
2	85·6	9	48·6	40	17·8	75	12·5
3	77·1	10	45·8	45	15·7	80	12·3
4	70·2	15	35·6	50	15·4	85	12·2
5	64·5	20	29·3	55	14·5	90	12·2
6	59·6	25	25·0	60	13·8		

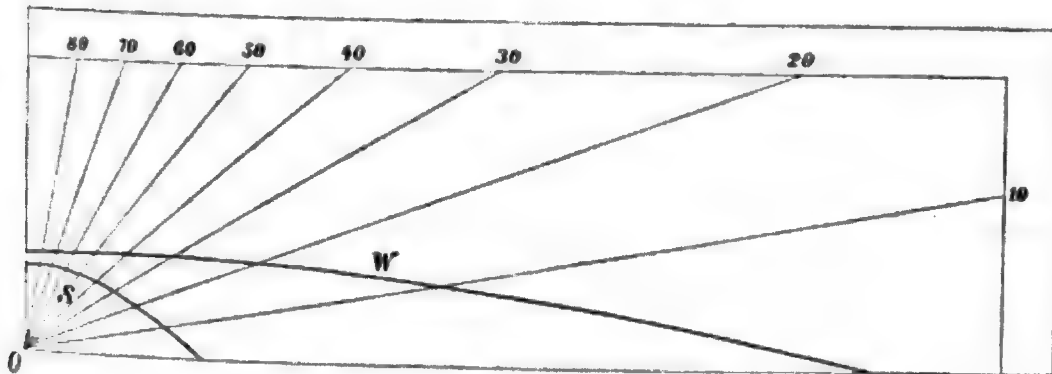
Die Übereinstimmung dieser ausgeglichenen Werte mit den Beobachtungsresultaten ist wieder eine ganz befriedigende, zumal man ja doch an derartige Schätzungen und Messungen von Wolken keine allzu großen Anforderungen stellen wird. Als Resultat der Messungen ist somit zu verzeichnen, daß der Wolkenhimmel vom 25., 26. und 27. März 1906 ein Hyperboloid 1:9 als Rfl. hatte, das, mit der Rfl. der Sonne verglichen, im Zenith nur um ein geringes höher war (12·2 *m* statt 10·1 *m*), dagegen in horizontaler Richtung in die mehr als vierfache Entfernung sich erstreckte (109·4 *m* gegen 25·3 *m*).

6. Über den Wettstreit der Referenzflächen.

Der Leitstrahl der Rfl. des Wolkenhimmels hat sich für alle Winkel φ größer ergeben als der Leitstrahl der Rfl. der Sonne. Die folgende Figur stellt einen vertikalen Durchschnitt durch diese beiden Rfln. dar. Der Beobachter steht in *O*, *S* stellt die Rfl. der Sonne, *W* diejenige des Wolkenhimmels dar. Der Maßstab ist für beide etwa 1: 1345 der natürlichen Größe.

Das gleichzeitige Auftreten dieser beiden Rfln., das wir dann beobachten, wenn der Himmel großenteils mit Wolken bedeckt, andrerseits aber die Sonne doch sichtbar ist, muß nun gewisse eigentümliche Erscheinungen, eine Art Wettstreit der Rfln. zur

Folge haben. Denn die Rfl. S ist ein verkleinertes Abbild derjenigen Fläche, auf der sich die Sonne zu bewegen scheint, W ein verkleinertes Abbild des Wolkenhimmels. Daß nun die scheinbare Sonnenbahn immer innerhalb des scheinbaren Wolkenhimmels verlaufen sollte, wäre eine Annahme, die unserer Erfahrung vollkommen widerspricht; sehen wir doch immer die einzelnen Wolken vor der Sonne vorüberziehen und niemals die Sonne vor den Wolken. Dieser Widerspruch der Rfln. mit der Erfahrung zwingt uns dazu, in derjenigen Richtung, in der gerade die Sonne steht, an den Rfln. in Gedanken irgend welche Deformationen vorzunehmen, durch die erreicht wird, daß wenigstens für diese eine Richtung die Leitstrahlen der



beiden Rfln. gleich lang ausfallen. Daß die Rfl., namentlich die des Wolkenhimmels, tatsächlich solche Deformationen erfährt, davon können wir uns an jedem bewölkten Tage überzeugen. Die Stelle des Wolkenhimmels, die durch die Anwesenheit der Sonne heller leuchtet (selbst wenn die Sonne selbst nicht sichtbar ist) erscheint nämlich dem Beobachter viel näher als gleich hohe Gegenden in anderen Weltrichtungen, was eine gewisse Unsymmetrie in die scheinbare Form des Wolkenhimmels bringt. Natürlich erstreckt sich diese Deformation nicht bloß auf die Stelle, an der die Sonne steht, sondern auch auf eine größere oder kleinere Umgebung dieser Stelle, mindestens so weit, daß ein stetiger Übergang zu den nicht deformierten Partien stattfindet und dabei nirgends eine gegen den Beobachter konvexe Stelle entsteht. Ist man einmal auf das Vorkommen dieser Deformationen des Wolkenhimmels aufmerksam

geworden, so konstatiert man sie geradezu ausnahmslos an jedem bewölkten Tage.

Derartige Deformationen der Rfl. des Wolkenhimmels können aber andrerseits eine gewisse obere Grenze nicht übersteigen. Ich glaube konstatieren zu können, daß das Maximum der auf diese Art stattfindenden Verkleinerung in keiner Richtung mehr als 40% des betreffenden Leitstrahls betragen kann. Daß dem so ist, wird sich aus der Diskussion der oben mitgeteilten Beobachtungen der Sonnenuntergänge ergeben; andrerseits wird uns das Bestehen einer solchen oberen Grenze der Deformationen wohl nicht wundernehmen; es ist eher merkwürdig, daß die scheinbare Form des Wolkenhimmels, beziehungsweise dessen Rfl. überhaupt Deformationen bis zu 40% und damit so bedeutende Abweichungen von der Symmetrie aufweisen kann.

Eine Vergleichung der Tabellen für die Leitstrahlen der Rfl. der Sonne und jener des Wolkenhimmels zeigt nun, daß für alle $\varphi \geqq 20°$ der erstere mindestens 60% des letzteren beträgt, so daß durch eine Verkleinerung des letzteren um höchstens 40% tatsächlich erreicht werden kann, daß die beiden Rfln. an der betreffenden Stelle gleich weit vom Beobachter abstehen. Die Erfahrung lehrt nun, daß bei allen Höhenwinkeln $\varphi \geqq 20°$ in der Tat der Wettstreit der beiden Rfln. immer zu dem Ergebnis führt, daß die Rfl. der Sonne ungeändert bleibt, dagegen diejenige der Wolken so weit deformiert wird, bis sie mit der ersteren zur Berührung kommt; denn der Sonnendurchmesser zeigt bei Höhen über 20° auch an bewölkten Tagen nicht die geringste Abweichung vom normalen Werte.

Bei Höhen unter 20° reicht dagegen eine Verkleinerung des Leitstrahls der Rfl. des Wolkenhimmels um 40% nicht mehr aus, um diese Fläche bis an die Rfl. der Sonne heranzuziehen; da es nun aber doch unbedingt nötig ist, die beiden Flächen zur Berührung zu bringen, da wir ja sonst in widersinniger Weise die Sonne *vor* den Wolken vorstellen müßten, so lösen wir nun den Widerspruch auf die andere der beiden möglichen Weisen, indem wir den Leitstrahl der Rfl. der Sonne so lange vergrößern, bis er 60% des Leitstrahls der Rfl. der Wolken beträgt. Dies führt dann zu den

bekannten Vergrößerungen des Sonnendurchmessers beim Auf- oder Untergange.

Die früher beschriebenen Sonnenauf- und -untergänge 10, 11 und 12 illustrieren die eben geschilderte Tatsache. 60% des Leitstrahls der Rfl. des Wolkenhimmels betragen bei

0	1	2	3	4	5	6	7	8°
65·6,	57·6,	51·4,	46·3,	42·1,	38·7,	35·8,	33·2,	31·1 *m*.

In diesen Entfernungen berühren sich daher die beiden deformierten Rfln. der Sonne und des Wolkenhimmels. Andrerseits hat in diesen Entfernungen der scheinbare Sonnendurchmesser den Wert:

61·1, 53·6, 47·8, 43·1, 39·2, 36·0, 33·3, 30·9, 29·0 *cm*.

Diese Ergebnisse stimmen mit den Beobachtungsresultaten der zwei Untergänge 10 und 11 und des Aufganges 12, die an den drei Tagen, an denen auch die Wolkenbeobachtungen ausgeführt sind, beobachtet wurden, fast ganz genau überein; die beobachteten Sonnengrößen finden daher ihre vollständige Erklärung, wenn wir 40% des Leitstrahls als obere Grenze der Deformierbarkeit der Rfl. des Wolkenhimmels annehmen.

Bei etwas größeren Höhen als 8° (für welche ich leider an den bezeichneten Tagen keine Beobachtungen machen konnte, da die Sonne bei so hohem Stande stets hinter Wolken war) wären unter dieser Annahme auch noch kleine Vergrößerungen des Sonnendurchmessers unvermeidlich. Es ergibt sich bei

9, 10, 15, 20°

ein Minimalleitstrahl von

29·2, 27·5, 21·4, 17·6 *m*,

dem eine Sonnengröße von

27·2, 25·6, 19·9, 16·4 *cm*

entspricht, während die normalen Sonnengrößen in diesen Höhen

19·3, 18·9, 17·1, 15·7 *cm*

betragen. Es ist also, genau genommen, erst bei bei 20° Höhe kein merklicher Unterschied zwischen der normalen Größe und der durch die Wolkenfläche beeinflußten vorhanden; bei 10° besteht noch eine Vergrößerung von etwa 7 *cm*, die zweifellos bemerkt worden wäre, wenn eben an den bezeichneten Tagen Beobachtungen in dieser Höhe möglich gewesen wären.[1]

Die besonders auffallenden Vergrößerungen werden sich aber im allgemeinen wohl nur bei Höhen unter 10° ereignen.

Was wir bisher über die Rfln. der Sonne und der Wolken angeführt haben, ist bloß als eine Beschreibung der Tatsachen, in keiner Weise als eine Theorie aufzufassen. Denn das Bestehen der beiden Rfln. ist direktes Beobachtungsresultat und die Deformationen derselben eine Folge der selbstverständlichen Tatsache, daß wir niemals die Sonne vor den Wolken vorstellen können. Nur die eine Annahme, daß die obere Grenze der Deformation 40% des Leitstrahls beträgt, ist gewissermaßen als eine zum Zwecke der Erklärung der abnormal großen Sonnendurchmesser aufgestellte Hypothese anzusehen.

Psychologisch hat sie etwa die Bedeutung, daß wir bei der Betrachtung des Himmelsgewölbes bis zu einem gewissen Grade ein unwiderstehliches Symmetriebedürfnis empfinden und daher in der Deformation an einer bestimmten Stelle haltmachen.

Ist der Himmel nur sehr lückenhaft mit Wolken bedeckt, so wird die Rfl. zwar ungefähr dieselbe Form aufweisen, wie wenn der ganze Himmel mit Wolken derselben Art bedeckt wäre, aber sie wird in viel schwächerem Grade zum Bewußtsein kommen und wir werden daher auch eine über 40% des Leitstrahls hinausgehende Deformation noch zulassen; mit anderen Worten: Die Rfl. dieser lückenhaften Wolken wird in dem Wettstreit mit der Rfl. der Sonne viel leichter unterliegen und wird es nur bei ganz kleinen Höhenwinkeln, wo der Unterschied der Leitstrahlen sehr groß wird, eventuell zuwege bringen, in ganz bescheidenem Maße eine Deformation der Rfl.

[1] Dagegen enthält die Tabelle der Sonnenbeobachtungen tatsächlich eine, die bei $\varphi = 10°$ $d = 25$ *cm*, also eine Vergrößerung um 6 *cm* gegenüber dem normalen Wert ergeben hat.

der Sonne zu bewirken. Die Auf- und Untergänge, die in der früheren Zusammenstellung unter 4. bis 9. angeführt sind, zeigen diese ganz mäßigen Vergrößerungen des scheinbaren Sonnendurchmessers, wie sie an ziemlich heiteren Tagen, namentlich beim Auftreten einiger weniger Horizontwolken beobachtet werden.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch noch der Tatsache Erwähnung tun, daß nicht bloß Wolken, sondern auch in der Atmosphäre angehäufte Dunstmassen häufig den Anlaß zur Vergrößerung des scheinbaren Sonnendurchmessers beim Auf- oder Untergange bilden. Es unterliegt wohl kaum einem Zweifel, daß auch diese Dunstmassen zunächst zur Entstehung einer bestimmten Rfl. Veranlassung geben, über die sich zwar keinerlei Messungen anstellen lassen, die aber den Deformationen immerhin ziemlichen Widerstand entgegensetzen dürfte, da solche Dunstmassen meist ziemlich homogen am ganzen Horizont verteilt erscheinen und die bei der Deformation entstehende Unsymmetrie daher recht deutlich zum Bewußtsein kommt.

7. Die Referenzfläche des Mondes.

Bei der Bestimmung der Rfl. des Mondes müssen zwei Umstände besonders berücksichtigt werden: Erstens unterliegt der Gesichtswinkel, unter dem uns der Durchmesser des Mondes erscheint, viel größeren Schwankungen als derjenige der Sonne, weshalb wir jede einzelne Beobachtung für sich reduzieren müssen; zweitens ist es offenbar psychologisch durchaus nicht dasselbe, ob wir den Mond bei Tage oder bei Nacht beobachten. Da ferner auch die Rfl. des Mondes, wie wir sehen werden, bei kleinen Höhenwinkeln verschiedenen Deformationen unterliegt (und zwar in noch höherem Maße, als es bei der Sonne der Fall war), stellen wir zunächst nur solche Beobachtungen zusammen, bei denen der Höhenwinkel $\varphi \geqq 12°$ ist. Die folgende Tabelle enthält zunächst die Beobachtungen bei Tage, bei denen uns also der Mond als weißliche Scheibe (oder Sichel) auf blauem Untergrund erscheint. Beim sichelförmigen Monde wurde natürlich der Durchmesser immer so geschätzt, als ob die Scheibe ganz voll wäre. In der folgenden Tabelle bedeutet *D* das Datum der Beobachtung (sämtlich 1906), *U* die Uhrzeit

der Beobachtung, d den geschätzten Durchmesser des Mondes in Zentimetern, α den Gesichtswinkel, unter dem der Monddurchmesser erschien, auf Minuten abgerundet, ρ den Leitstrahl der Rfl. in Metern, δ die Abweichung von dem Leitstrahl der Rfl. der Sonne.

φ	D	U	d	α	ρ	Mittel	δ
12°	11./5.	5^h20^m	17·5	33	18·2	18·0	−0·2
15	11./5.	4 45	17	33	17·7		
19	2./5.	1 40	16	31	17·7	17·1	+0·4
20	6./5.	6 45	17	33	17·7		
22	2./5.	2 00	14·5	31	16·0		
23	26./4.	7 00	16	30	18·3	16·6	+1·1
26	2./5.	2 30	13·5	31	14·9		
29	5./5.	6 45	14	33	14·6	14·6	+0·1
33	5./4.	5 30	15	32	16·1	14·7	+1·1
33	2./5.	3 15	12	31	13·3		
38	5./4.	6 10	14·5	32	15·5	14·6	+1·7
39	2./5.	3 50	12	31	13·3		
40	29./1.	5 00	13	30	14·9		
46	30./1.	4 45	11	30	12·6	12·6	+0·3
49	31./1.	4 45	11·5	30	13·2	12·8	+1·0
50	1./2.	5 15	11	30	12·6		
50	30./4.	3 00	11	30	12·6		
54	2./5.	6 10	11	31	12·2	13·1	+1·7
55	30./4.	7 00	12	30	13·8		
56	2./5.	6 50	12	31	13·3		
61	30./4.	5 45	10	30	11·5	11·5	+0·5

Man erkennt, daß als Rfl. von Schätzungen des Monddurchmessers, die bei Tage erfolgen, zweifellos die Rfl. der Sonne anzusehen ist, denn die Abweichungen δ der gefundenen Beträge der Leitstrahlen von den Leitstrahlen der Rfl. der Sonne sind so gering, daß wir, trotzdem sie fast alle positiv sind, doch gewiß berechtigt sind, sie als Wirkung der Beobachtungsfehler aufzufassen. Somit können wir sagen:

Schätzungen des Monddurchmessers bei Tage werden, sobald $\varphi \geqq 12°$ ist, auf dieselbe Rfl. bezogen wie die Schätzungen des Sonnendurchmessers.

Wir stellen nun in der nächsten Tabelle Beobachtungen von Monddurchmessern zusammen, die bei Nacht, d. h. immer erst nach Eintritt der Dunkelheit, angestellt wurden, und zwar wieder nur solche, bei denen $\varphi \geqq 12°$ war; in derselben bedeutet jetzt δ die Abweichung vom Leitstrahl der Rfl. des Sternenhimmels.

φ	D	U	d	α	ρ	Mittel	δ
15°	29./1.	8h30m	16	30	18·3		
15	8./4.	7 30	19·5	33	20·3	19·1	—0·2
15	9./5.	10 45	18	33	18·8		
18	8./4.	7 45	18·5	33	19·3		
18	8./5.	9 45	19	33	19·8		
19	7./5.	8 10	20	33	20·8	19·4	+1·3
20	8./5.	10 00	18	33	18·8		
20	12./5.	3 07	17	32	18·3		
24	7./5.	9 05	18	33	18·8	18·8	+1·7
28	7./5.	9 35	16·5	33	17·2		
28	8./5.	11 57	16	33	16·7	16·3	+0·1
32	7./5.	11 30	14·5	33	15·1		
37	30./4.	9 30	12·5	30	14·3	14·3	—1·2
39	1./5.	9 30	13	31	14·4	14·0	—0·8
42	5./5.	10 30	13	33	13·5		
46	30./4.	8 15	13	30	14·9	14·9	+0·7
50	4./2.	6 45	13	30	14·9	14·9	+1·1
51	5./4.	10 30	13	30	14·9		
55	2./2.	6 30	11	30	12·6	14·3	+0·8
57	4./2.	7 45	14	30	16·0		
60	2./4.	7 15	12	30	13·8	13·8	+0·8

Die in der vorletzten Spalte enthaltenen Mittel sind entschieden größer als die soeben aus den Tagesbeobachtungen

ermittelten Werte und zeigen ihrerseits eine gute Übereinstimmung mit den Leitstrahlen der Rfl. des Sternenhimmels; die geringen Abweichungen δ sind auch hier zweifellos nur den Beobachtungsfehlern zuzuschreiben. Wir können somit als zweites Resultat die Tatsache verzeichnen:

Schätzungen des Monddurchmessers bei Nacht werden bei Höhenwinkeln über 12° auf die Rfl. des Sternenhimmels bezogen.

(Beobachtungen, die gerade in die Zeit der Dämmerung fallen, haben wir bisher überhaupt nicht in Betracht gezogen.)

Die beiden letzten Tabellen zeigen auch, daß für Höhen über 12° nicht nur die Mittelwerte, sondern auch die einzelnen Beobachtungsresultate sich recht gut der Rfl. der Sonne beziehungsweise der des Nachthimmels anpassen, so daß wir sagen können, daß, wenn der Mond (bei Tage oder bei Nacht) höher als 12° steht, sein scheinbarer Durchmesser bloß vom Höhenwinkel φ abhängt.

Ganz anders ist es nun wieder bei Höhen unter 12°. Hier hängt der scheinbare Durchmesser noch von einer Reihe anderer Umstände ab, die wir jedesmal besonders beschreiben müssen, wie wir dies ja auch bei der tiefstehenden Sonne getan haben. Entspricht nun aber eine einzelne Beobachtung auch bei einer Höhe unter 12° (bei Tage) der Rfl. der Sonne oder (bei Nacht) der Rfl. des Sternenhimmels, so wollen wir den betreffenden Durchmesser wieder als normal bezeichnen. Wenn wir als mittleren Monddurchmesser (im Winkel) 31′ annehmen, so ergibt sich hieraus folgende Tabelle des normalen Monddurchmessers d_n (in Zentimetern).

φ	d_n bei Nacht	d_n bei Tage	φ	d_n bei Nacht	d_n bei Tage
0°	22·0	22·8	6°	19·9	19·7
1	21·6	22·3	7	19·6	19·3
2	21·2	21·7	8	19·3	18·9
3	20 9	21·1	9	19·0	18·5
4	20·5	20·6	10	18·7	18·1
5	20·2	20·2	11	18·4	17·7

φ	d_n bei Nacht	d_n bei Tage	φ	d_n bei Nacht	d_n bei Tage
12°	18·2	17·4	55°	12·0	10·2
15	17·4	16·4	60	11·7	9·9
20	16·3	15·1	65	11·5	9·7
25	15·4	14·0	70	11·3	9·5
30	14·6	13·0	75	11·2	9·3
35	13·9	12·3	80	11·1	9·2
40	13·4	11·6	85	11·0	9·1
45	12·8	11·1	90	11·0	9·1
50	12·4	10·6			

Die Frage, unter welchen Bedingungen der Mond bei Höhen unter 12° tatsächlich seinen normalen Durchmesser und unter welchen er einen vergrößerten zeigt, wollen wir wieder an der Hand einzelner Beobachtungen über den tiefstehenden Mond diskutieren und die Untersuchung in drei Abschnitte teilen, die sich auf die Beobachtungen bei Tage, bei Nacht und in der Dämmerung beziehen.

a) Mondbeobachtungen bei Höhen unter 12° bei Tage.

Alle in der Zeit von Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang angestellten Beobachtungen wollen wir als Tagesbeobachtungen ansehen. Es ist nicht leicht, den Mond in der Nähe des Horizontes bei Tage zu sehen, da uns die geringsten Dunstmassen seinen Anblick bereits benehmen. Ich verfüge derzeit nur über wenige Beobachtungen des Mondes bei Tage und diese reichen nicht unter 5° hinab; doch liegen die Verhältnisse so einfach, daß die Beobachtungen immerhin als ausreichend gelten können. Wir setzen neben jeden beobachteten Durchmesser den für die betreffende Höhe geltenden normalen Wert d_n,[1] um ein Bild von dem Ausmaße der jeweiligen Vergrößerung $d - d_n$ zu erhalten.

[1] Derselbe ist der vorstehenden Tabelle entnommen; nur wenn der Mond unter einem anderen Gesichtswinkel als 31′ erschien, ist der richtige Gesichtswinkel der Berechnung zu Grunde gelegt worden.

1. Beobachtung am 2. Mai 1906 mittags, vom Rathausturm in Czernowitz aus. Heiterer, blauer Himmel, nur unterhalb des Mondes einige wenige Horizontwolken. Ein Tag nach dem letzten Viertel (Durchmesser = 33′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
12^h30^m	8°	21·5 *cm*	20·4 *cm*	1·1 *cm*
1 00	12	21	18·8	2·2

2. Beobachtung am 7. Mai 1906 nachmittags vom Rathausturm in Czernowitz. Am Horizont heiter, aber dunstig. Etwas höher, etwa von 6° aufwärts, eine kompakte, scharf begrenzte Wolkenmasse mit horizontalem unteren Rande; dieselbe zerteilte sich später so weit, daß der Mond in den Lücken sichtbar wurde. Ein Tag vor dem Vollmond (Durchmesser = 33′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
$6^h\,25^m$	5°	36 *cm*	21·8 *cm*	14·2 *cm*
6 45	7	33	20·9	12·1
6 55	8	31	20·4	10·6
7 10	12	29	18·8	10·2

3. Beobachtungen am 15. Mai 1906 vormittags, vom Universitätsgebäude in Czernowitz aus. Viele, aber ganz zerrissene Horizontwolken, und zwar nur im Westen; hinter diesen verschwand der Mond bei 8° Höhe; sonst war es vollkommen heiter, der Himmel von schönem, ziemlich dunklem Blau. Mond genau letztes Viertel (Durchmesser = 31′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
9^h45^m	11°	17 *cm*	17·7 *cm*	—0·7 *cm*
9 55	$10^1/_2$	21	17·9	+3·1
10 05	9	21	18·5	2·5
10 12	8	21	18·8	2·2

Nach diesen Beobachtungen sind es zweifellos die Wolken, die bei Tage eine Vergrößerung des Monddurchmessers am Horizont bewirken. Bei 1 und 3, wo nur einige Horizontwolken, und zwar nur an einem kleinen Teile des Horizontes vorhanden waren, sehen wir fast gar keine Vergrößerung, bei 2 dagegen eine sehr bedeutende, die nur von der damals am Himmel befindlichen kompakten Wolkenmasse herrühren kann. Wir können somit sagen:

Bei Tage erscheint auch der tiefstehende Mond in normaler Größe, außer wenn eine die Rfl. deformierende Wolkenmasse vorhanden ist.

b) Mondbeobachtungen in der Zeit der Dämmerung.

Die Zeit vom Sonnenuntergange bis zum Eintritt nahezu vollständiger Dunkelheit, also etwa bis zu dem Zeitpunkt, wo sich die Sonne 8° unter dem Horizont befindet, wollen wir als die Zeit der Dämmerung bezeichnen. Es ist also hier nicht die Dämmerung im astronomischen Sinne gemeint, die man bekanntlich bis zu einer Tiefe der Sonne von 18°, also bis zum letzten Verschwinden jeden Scheines am Abendhimmel, rechnet. Es wird sich empfehlen, hier auch noch einige Beobachtungen mitaufzunehmen, die bei größerem Höhenwinkel als 12° ausgeführt wurden, da wir in den früheren Zusammenstellungen von Beobachtungen während der Dämmerung überhaupt absehen und daher nicht von vornherein annehmen können, daß auch während der Dämmerung der Monddurchmesser bei $\varphi \geqq 12°$ immer normal sei. Es wird sich zeigen, daß diese Annahme auch gar nicht richtig wäre. Um für die Vergrößerung einen Maßstab zu gewinnen, wollen wir den normalen Durchmesser in der ersten Hälfte der Dämmerung wie bei den Tagesbeobachtungen, in der zweiten wie bei den Nachtbeobachtungen berechnen.

1. Mondaufgang am 8. April 1906, in Wien beobachtet. Standort: Elisabethpromenade. Anfangs waren einige Wolken, die sich nach und nach auflösten. Sonnenuntergang $6^h \underline{38}^m$, Ende der Dämmerung $7^h \underline{25}^m$, Vollmond (Durchmesser = 33′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
$6^h\,\underline{20}^m$	5°	30 *cm*	21·8 *cm*	8·2 *cm*
6 $\underline{30}$	7	30	20·9	9·1
6 $\underline{45}$	10	25	19·7	5·3
7 $\underline{00}$	12	24	18·8	5·2
7 $\underline{15}$	14	23	19·1	3·9
7 $\underline{30}$	15	19·5	18·8	0·7

2. Mondaufgang am 7. Mai 1906, in Czernowitz beobachtet (Fortsetzung von Nr. 2 der Tagesbeobachtungen). Die Wolken nach und nach in Auflösung, Sonnenuntergang $7^h\,\underline{20}^m$, Ende der Dämmerung $8^h\,\underline{15}^m$ (die letzte Beobachtung wäre also eigentlich schon zu den Nachtbeobachtungen zu zählen). Ein Tag nach dem Vollmond (Durchmesser = 33′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
$7^h\,\underline{30}^m$	14°	27 *cm*	18·1 *cm*	8·9 *cm*
7 $\underline{45}$	16	25	17·5	7·5
7 $\underline{55}$	18	24	18·0	6·0
8 $\underline{10}$	19	20	17·8	2·2
9 $\underline{05}$	24	18	16·8	1·2

Aus diesen beiden Beobachtungsserien sieht man deutlich, daß in der Dämmerung eine besonders starke Tendenz zur Vergrößerung des scheinbaren Monddurchmessers vorhanden ist. Sie ist beim Beginn der Dämmerung am größten und verliert sich nach und nach, so daß am Ende der Dämmerung nahezu wieder der normale Durchmesser erreicht ist. Die Vergrößerung reicht aber auch bis zu Höhen über 12° hinauf, wenn eben die Dämmerung so lange währt. Bei 2 ist noch bei 18° eine deutliche Vergrößerung zu bemerken. Wir stellen somit die Tatsache fest, daß der Mond während der Dämmerung niemals seinen normalen Durchmesser zeigt, sondern stets vergrößert erscheint und mit zunehmender Dunkelheit sich wieder seiner normalen Größe nähert.

c) Mondbeobachtungen bei Nacht.

Hier können wir uns wieder auf Höhen unter 12° beschränken, da wir bereits wissen, daß sich bei größeren Höhen in finsterer Nacht stets der normale Durchmesser zeigt.

1. Mondaufgang am 10. Mai 1906, in Czernowitz beobachtet. Mondaufgang $9^h \underline{50}^m$, schon in ganz finsterer Nacht, die Sonne bereits 18° tief. Anfangs war der Mond durch Horizontwolken verdeckt, erst bei 2° Höhe wird er sichtbar. Das Firmament ist an der Stelle des Aufganges ziemlich hell erleuchtet und samt den Horizontwolken sehr gut sichtbar. Die Wolken waren in Auflösung, so daß um 11 Uhr abends der Himmel rein war; doch blieb es ziemlich dunstig. Zwei Tage nach dem Vollmonde (Durchmesser = 33′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
$10^h \underline{10}^m$	2°	35 *cm*	23·0 *cm*	12·0 *cm*
10 $\underline{20}$	4	34	22·3	11·7
10 $\underline{40}$	7	30	21·2	8·8
11 $\underline{00}$	8	29	20·8	8·2
11 $\underline{05}$	8	26	20·8	5·2
11 $\underline{30}$	11	22	19·8	2·2

2. Beobachtung am 13. Mai 1906 in Czernowitz. Zwei Tage vor dem letzten Viertel. Sehr wolkig, die Wolken werden vom Monde erleuchtet, aber entschieden weniger als beim Mondaufgange vom 10. Mai (Durchmesser = 32′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
$12^h \underline{35}^m$	5°	27 *cm*	21·0 *cm*	6·0 *cm*
1 $\underline{00}$	9	28	20·0	8·0

3. Beobachtung am 14. Mai 1906 in Czernowitz. Ein Tag vor dem letzten Viertel. Es ist heiterer Himmel, nur unter dem Monde sind einige Wolken, die ihn erst bei 9° Höhe zum Vorschein kommen lassen; dieselben werden vom Monde fast

gar nicht erleuchtet. Auch der Himmel ist finster, die Luft rein (Durchmesser = 31′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
2h 00m	9°	22 *cm*	19·0 *cm*	3·0 *cm*
2 30	11	21	18·4	2·6

4. Monduntergang am 28. Mai 1906 in Czernowitz (vom Universitätsgebäude aus) beobachtet. Dunkler, ganz heiterer Himmel; derselbe wird durch den Mond absolut gar nicht erleuchtet. Der Mond war bei den vier ersten Beobachtungen hell leuchtend, bei der vorletzten bereits dunkelgelb und bei der letzten rot gefärbt. Fünf Tage nach dem Neumond (Durchmesser = 30′).

	φ	d	d_n	$d-d_n$
9h 10m	22°	14·5 *cm*	15·4 *cm*	—0·9 *cm*
9 50	17	15·5	16·3	—0·8
10 40	9	16·5	18·4	—1·9
10 55	7	16·0	18·9	—2·9
11 10	5	17·5	19·5	—2·0
11 30	2½	18·0	20·3	—2·3

(Bei dieser Beobachtungsserie ist somit der seltene Fall eingetreten, daß der scheinbare Durchmesser hinter seinem normalen Werte um ein geringes zurückblieb.)

Aus diesen Beobachtungen können wir folgende, auch mit der sonstigen Erfahrung übereinstimmende Regel ableiten:

Der tiefstehende Mond erscheint bei Nacht um so mehr vergrößert, je mehr er den ihn umgebenden Teil des Firmamentes erleuchtet.

Daher trägt eine dunstige Atmosphäre am meisten zur Vergrößerung bei, weil sie bewirkt, daß ein großer Teil des Himmels vom aufgehenden Monde erleuchtet wird. Die reine Luft, wie wir sie im Hochgebirge finden, hat dagegen anerkanntermaßen den Effekt, daß der Mond beim Aufgang auffallend klein erscheint.

Es erwächst für uns nun die Aufgabe, zu zeigen, daß auch die Vergrößerungen des Monddurchmessers in dem Auftreten gewisser Rfln. ihre Ursache haben.

Bei Tage, wenn es vollkommen heiter ist, besteht überhaupt nur eine Rfl. in unserem Bewußtsein, nämlich die der Sonne; der blaue Himmel, der hier vor allem in Betracht käme, scheint bei Tage überhaupt nicht Anlaß zur Entstehung einer eigenen Rfl. zu geben. Daher schätzen wir die Mondgröße auf der einzig vorhandenen Rfl., nämlich der der Sonne.

Ist der Himmel, zumal am Horizont, bewölkt, so unterliegt, wie wir wissen, sogar die Rfl. der Sonne gewissen Deformationen; die Rfl. des Mondes wird einer solchen Beeinflussung noch viel stärker zugänglich sein, da ja am Tage der tiefstehende blasse Mond von einem weißen Wölkchen selbst kaum unterscheidbar ist. Bei Höhen über 12° findet dagegen eine Vergrößerung bei Tage im allgemeinen nicht mehr statt. Das mag etwa daher rühren, daß wir ja den Mond bei Tage im allgemeinen nur sehen, wenn das Gewölk ein so zerrissenes ist, daß größere zusammenhängende Stellen blauen Himmels sichtbar sind und daß daher in diesen Fällen die Rfl. der Wolken nur so schwach angedeutet ist, daß sie nur, wenn der Unterschied der Leitstrahlen, wie es am Horizont der Fall ist, ganz besonders groß ist, deformierend auf eine zweite Rfl. einzuwirken im stande ist.

Beim Untergange der Sonne verschwindet ihre Rfl. aus unserem Bewußtsein; nun tritt das blaue Himmelsgewölbe, das, wie wir gesehen haben, solange die Sonne am Himmel war, nicht im stande war, eine eigene Rfl. zu behaupten, in seine Rechte, an Stelle der Rfl. der Sonne tritt eine Rfl., die zweifellos dem auch nach Sonnenuntergang noch ziemlich hellen Himmelsgewölbe ihre Entstehung verdankt; eine Fläche, über die wir zwar keine Messungen anstellen können, die sich aber jedenfalls in horizontaler Richtung viel weiter erstreckt als die Rfl. der Sonne. Auf diese Rfl. des Dämmerungshimmels beziehen wir nun die Mondgröße; daher erscheint der Mond während der Dämmerung unter allen Umständen sehr groß, selbst wenn seine Höhe 12° bereits übersteigt.

Diese Vergrößerung des Mondes ist unmittelbar nach Sonnenuntergang am beträchtlichsten und nimmt dann mehr und mehr, und zwar stetig ab, woraus wir schließen können, daß die Rfl. des Dämmerungshimmels sich mit zunehmender Dunkelheit mehr und mehr zusammenzieht, bis sie schließlich beim Eintritt vollständiger Finsternis mit der Rfl. des Nachthimmels zusammenfällt.

Geht nun aber in der Dunkelheit der Mond auf, so kann es geschehen, daß er einen großen Teil seiner Umgebung ziemlich hell erleuchtet, wodurch die bereits entschwundene Rfl. des Dämmerungshimmels in einer der von ihr durchlaufenen Phasen wieder auflebt und nun ihrerseits zu einer Deformation der Rfl. des Nachthimmels führt, die in einer wesentlichen Erweiterung dieser Rfl. in jener Richtung besteht, in welcher eben der Mond aufgeht. Beleuchtet aber der Mond seine Umgebung gar nicht oder nur sehr schwach, wie es einerseits vorkommt, wenn gar keine Dunstmassen in der Atmosphäre vorhanden sind oder wenn der Mond als ganz schmale Sichel selbst keine Leuchtkraft besitzt, dann lebt die Rfl. des Dämmerungshimmels gar nicht mehr auf oder ist nur so schwach angedeutet, daß ihr gar keine deformierende Kraft innewohnt und dann sehen wir den Mond in seiner normalen Größe.

Bei dieser Auffassung ist es auch klar, daß nur der tiefstehende Mond einen solchen Beleuchtungseffekt, der zu einer Deformation der Rfl. des Nachthimmels führt, ausüben kann. Es besteht hier nämlich eine vollständige Analogie mit der Art und Weise, wie die Rfl. des Wolkenhimmels auf die Rfl. der Sonne einwirkt. Wie es nur die tieferen Partien des Wolkenhimmels sind, denen eine deformierende Kraft zuzuschreiben ist, so müssen auch hier die tieferen Partien des Himmels durch den Mond erleuchtet werden, wenn hiedurch eine Deformation der Rfl. des Nachthimmels erfolgen soll; denn es kommt auch hier wieder auf den Unterschied der Leitstrahlen der beiden Rfln. an, der nur in den tieferen Partien einen nennenswerten Betrag erreicht. Bei höherem Stand des Mondes entsteht infolge der von ihm ausgehenden Erleuchtung einfach eine hellere Stelle an dem seiner Form nach unveränderten Nachthimmel.

Durch die Heranziehung des Momentes der teilweisen Erleuchtung des Firmamentes durch den Mond glaube ich, die bereits erwähnte, von Helmholtz mit Vorliebe ins Treffen geführte Theorie der »Luftperspektive« erst in ihrer wahren Bedeutung zu erkennen. Diese zunächst sehr bestechende Theorie dürfte eigentlich nur einen gewissen Schein von Richtigkeit besitzen. Denn wenn es dunstig ist, so erscheint der Mond allerdings matter leuchtend und zugleich auch vergrößert; aber nicht das veränderte Aussehen des Mondes selbst ist es, das die Vergrößerung bewirkt, sondern es wird eben in dunstigen Nächten ein viel größeres Stück des Firmamentes durch den Mond erleuchtet und dies ist der Grund für die Entstehung einer größeren, die ursprüngliche deformierenden Rfl. Daß das bloße Matterscheinen des Mondes nicht hinreicht, hat bereits Robert Smith (1728) klar zum Ausdruck gebracht, indem er darauf hinwies, daß der hochstehende Mond, der bei einer Mondesfinsternis gleichfalls ganz matt leuchtet, dennoch nicht vergrößert erscheint.[1] Auch läßt sich gegen diese Theorie des Matterscheinens anführen, daß der sichelförmige Mond auch bei dunstiger Atmosphäre gar keine oder doch keine wesentliche Vergrößerung gegenüber seinem normalen Durchmesser zeigt.

8. Die Entstehung der Referenzflächen.

Wir haben zur Erklärung der scheinbaren Größe der Sonne und des Mondes im ganzen vier verschiedene Rfln. angenommen und ihre Wechselwirkung untersucht, nämlich

1. die Rfl. der Sonne,
2. die Rfl. des Wolkenhimmels,
3. die etwas variable Rfl. des Dämmerungshimmels,
4. die Rfl. des Nachthimmels.

Nun wollen wir noch den Versuch machen, auch das Zustandekommen dieser vier Rfln. unserem Verständnisse etwas näher zu bringen.

[1] Robert Smith, a. a. O., p. 418.

Vor allem konstatieren wir, daß die empirische Untersuchung der Rfln. gezeigt hat, daß sie (von einer unwesentlichen Abweichung der Rfl. der Sonne abgesehen) die gleiche Vertikalerhebung im Zenith, etwa 12 *m*, besitzen.

Was zunächst diese gemeinsame Höhe betrifft, so ist der Betrag von 12 *m* für dieselbe an sich ein ganz willkürlicher; da nun aber, wie ich durch die bereits erwähnte Umfrage konstatiert habe, die meisten Menschen auch hinsichtlich der absoluten Größe der Rfln. mit meinen Schätzungen übereinstimmen, so muß dieser Höhe von 12 *m* doch irgend welche besondere Bedeutung zukommen. Es dürfte etwa die Entfernung sein, die den meisten Menschen gerade angenehm ist, um bei bequemem Hinaufsehen einen Gegenstand seiner Größe nach abzuschätzen. Überdies gibt es ja einige Personen, bei denen es anders ist; diejenigen, die den Mond, den ich mit 18 *cm* schätze, bloß mit 3 *cm* schätzen, verlegen die Rfln. im Zenith nicht in 12 *m*, sondern bloß in 2 *m* Entfernung.

Hat sich nun eine Person für eine bestimmte Höhe ihrer sämtlichen Rfln. entschieden (die meisten wählen eben 12 *m*), so hängt die Form der einzelnen Rfl. nur mehr von ihrer Horizontalausdehnung ab. Daraus können wir entnehmen, daß es wohl hauptsächlich der verschiedene Anblick des Horizonts sein wird, der die Entstehung der verschiedenen Rfln. bedingt.

Wir gehen nun zu den einzelnen Rfln. über und beginnen mit der Rfl. des Wolkenhimmels. Da dieselbe der scheinbaren Form des Wolkenhimmels ähnlich ist, so haben wir bloß letztere zu erklären. Diese Erklärung habe ich bereits an anderer Stelle gegeben,[1] indem ich zeigte, daß unter der Annahme, daß die scheinbare Distanz d' einer Wolke mit der wahren Distanz d durch die Formel $d' = \frac{cd}{c+d}$ zusammenhängt, sich die Form des Wolkenhimmels als ein Hyperboloid darstellen muß. Beträgt die Höhe der über uns schwebenden Wolkenschicht h, so ist die scheinbare Vertikalerhebung des Wolkenhimmels gegeben durch $\frac{ch}{c+h}$, die scheinbare Horizontalausdehnung aber nahezu

[1] Versuch u. Th. d. scheinb. Entf., p. 1609.

gleich c, da wir die Wolkenschicht mit hinreichender Genauigkeit als eine Horizontalebene ersehen können, die den Horizont erst in der wahren Distanz $d = \infty$, der $d' = c$ entspricht, schneidet. Das Verhältnis der Vertikalerhebung zum Radius des Schnittkreises mit dem Horizonte ist daher $\frac{h}{c+h}$. Was die Größe c betrifft, so habe ich a. a. O. umgekehrt aus der scheinbaren Form des Wolkenhimmels die Konstante c mit $10 \cdot 6\, km$ berechnet. In letzter Zeit habe ich nun einige Distanzschätzungen terrestrischer Objekte bei Tage vorgenommen und gefunden, daß unter besonders günstigen Bedingungen für die Schätzung sich selbst bei terrestrischen Objekten ein Wert von c herausstellt, der 10 *km* oder sogar etwas darüber beträgt.[1] Diese gute Übereinstimmung mit dem seinerzeit aus der Form des Wolkenhimmels ermittelten Werte von c berechtigt uns, auch hier wieder denselben Wert zu verwenden. Da wir nun für die scheinbare Form des Wolkenhimmels vom 25., 26. und 27. März 1906 durch die Messungen ein Hyperboloid 1:9 gefunden haben, so erhalten wir die Höhe h, in der wir die an diesen Tagen über Czernowitz schwebende Wolkenschicht voraussetzen müssen, um die beobachtete Form des Wolkenhimmels zu erklären, aus der Gleichung

$$\frac{h}{c+h} = \frac{1}{9}, \quad h = \frac{c}{8} = \frac{10 \cdot 6\, km}{8} = 1325\, m.$$

Da die Seehöhe von Czernowitz 250 *m* beträgt, müßte sich also die betreffende Wolkenschicht in einer Seehöhe von 1575 *m* befunden haben, was ganz plausibel ist, da wir es offenbar mit recht niedrigen Wolken zu tun hatten, wie man aus dem raschen Vorbeiziehen im Zenith entnehmen konnte.

Für die Rfl. des Wolkenhimmels bietet somit die Theorie der scheinbaren Entfernungen eine ausreichende Erklärung. Die Form des Wolkenhimmels hängt unter anderem auch wesentlich von der Größe c, d. h. von der scheinbaren Ent-

[1] Ein genauer Bericht über diese Versuche würde uns hier zu weit führen.

fernung der fernsten, am Horizont noch sichtbaren Gegenstände, speziell der Wolken, ab.

Zwei Umstände lassen sich nun namhaft machen, die solchen Entfernungsschätzungen in der Richtung gegen den Horizont besonders hinderlich sind: erstens eine allzu grelle Beleuchtung, zweitens eine allzu geringe Beleuchtung. Sehen wir gegen die Sonne, so unterschätzen wir die Entfernungen terrestrischer Objekte infolge der ungünstigen Beleuchtungsverhältnisse ganz besonders stark, da wir keine Details der Umgebung wahrnehmen können. Dies scheint mir der Grund für die Entstehung einer eigenen Rfl. der Sonne zu sein, die in der Horizontalausdehnung ganz bedeutend kleiner ist als die des Wolkenhimmels (25·3 *m* gegen 109·4 *m*), während im Zenith bis auf eine unwesentliche Abweichung[1] (10·1 *m* gegen 12·2 *m*) die Erhebung die gleiche ist. Diese neue Rfl. ist nun die bei Tage eigentlich herrschende, da die Sonne eben der einzige sichtbare Gegenstand am Firmament ist; nur wenn sehr zahlreiche Wolken am Himmel sind, kommt uns mitunter auch die Rfl. des Wolkenhimmels wieder zum Bewußtsein und bewirkt die geschilderten Deformationserscheinungen.

Geht nun die Sonne unter, so sind die Distanzschätzungen auch in der früher durch die Sonne behinderten Richtung wieder viel leichter geworden und die herrschende Rfl. erweitert sich allmählich. Während bei Tage das blaue Himmelsgewölbe selbst nicht Anlaß zur Entstehung einer eigenen Rfl. gab, ist dies jetzt in der Abendbeleuchtung anders geworden; die sich derart erweiternde Rfl. der Sonne wird nämlich, wenn keine Wolken am Himmel sind, eventuell auch zur Rfl. des heiteren Himmels; sie erreicht (wenn wir das Maximum der Vollmondgröße am Horizont etwa mit 50 *cm* annehmen) ungefähr die doppelte Horizontalausdehnung der Rfl. der Sonne.[2]

---

[1] Diese Abweichung vermag ich nicht zu erklären.

[2] Geht die Sonne sehr wenig leuchtend unter (infolge Dunstes), so könnte man auch annehmen, daß infolge der leichteren Distanzschätzung die Rfl. des heiteren Firmamentes noch vor Sonnenuntergang entsteht, und brauchte dann zur Erklärung des vergrößerten Sonnendurchmessers den Dunstmassen selbst keine eigene Rfl. zuzuschreiben.

Doch nicht lange besteht diese erweiterte Rfl. Mit Einbruch der Dunkelheit wachsen die Schwierigkeiten der Distanzschätzung gegen den Horizont wieder ganz bedeutend und wir sehen die Rfl. wieder mehr und mehr zusammenschrumpfen, bis sie eine Form annimmt, die mit der uns durch das Phänomen der Extinktion des Sternenlichtes in der Atmosphäre nahegelegten Form des Sternenhimmels übereinstimmt. Außer stande, in finsterer Nacht irgend welche Distanzen gegen den Horizont hin zu schätzen, würden wir wahrscheinlich in der Zusammenziehung der Rfl. so weit fortfahren, bis wir tatsächlich bei der Halbkugelform anlangen würden, wenn uns nicht die tiefer stehenden Sterne infolge der Extinktion schwächer leuchtend und daher weiter von uns entfernt vorkämen. Diese Rfl. des Sternenhimmels stimmt dann zufällig ungefähr mit der Rfl. der Sonne überein.

Ein ganz ähnliches Übergangsstadium wie während der Abenddämmerung muß natürlich auch während der Morgendämmerung existieren. Hier erweitert sich bei zunehmendem Tageslicht die Rfl. des Nachthimmels, bis sie durch den Sonnenaufgang veranlaßt wird, sich wahrscheinlich ziemlich plötzlich in die Rfl. der Sonne zusammenzuziehen.

Durch die vorstehenden Ausführungen dürfte die Entstehung der verschiedenen Rfln. ziemlich erklärt sein; die größeren oder geringeren Schwierigkeiten in der Schätzung der Distanzen gegen den Horizont hin haben eben in unserer Vorstellung dieses eigentümliche Heran- oder Hinausrücken des scheinbaren Horizontes zur Folge, das unter Annahme einer konstanten Vertikalerhebung die verschiedenen Formen des Himmelsgewölbes und damit die verschiedenen Formen der Rfln. bedingt.

Wir haben auch die Beziehungen unserer Theorie zu den bisher üblichen Erklärungsversuchen der scheinbaren Vergrößerung des Mondes und der Sonne am Horizont bereits erwähnt. Alle diese Theorien klingen zweifellos an richtige Gedanken an, müssen aber in ihrer jetzigen Form doch als ungeeignet bezeichnet werden, die sehr mannigfachen einschlägigen Erscheinungen auch nur halbwegs erschöpfend zu erklären.

Wir stellen ihnen hiemit eine neue, die »Referenzflächentheorie« gegenüber, die in der Annahme bestimmter Wechselwirkungen zwischen den einzelnen empirisch konstatierbaren Rfln. besteht. Möge denn dieser erste Versuch einer einheitlichen Erklärung der scheinbaren Größe der Gestirne, der ja keineswegs den Anspruch erheben will, bereits hinsichtlich jedes einzelnen Details als erschöpfend zu gelten, in Fachkreisen eine wohlwollende Beurteilung finden.

Über den Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie

von

Edmund Landau in Berlin.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1906.)

Einleitung.

In der folgenden Abhandlung handelt es sich nicht darum, neue Sätze zu beweisen; sondern ich werde einige der wichtigsten bekannten Sätze über die Verteilung der Primzahlen und der quadratfreien Zahlen in Bezug auf ihren gegenseitigen Zusammenhang untersuchen, ebenso ihre Verallgemeinerungen für algebraische Zahlkörper. Der Beweis jener Sätze ist erst in neuerer Zeit auf Grund der Theorie der Zetafunktion geführt worden. Mir liegt daran, festzustellen, daß einige derselben sich aus anderen durch elementare Hilfsmittel, d. h. ohne nochmalige Heranziehung jener transzendenten Methoden, herleiten lassen.

Es sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$, $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen der Primzahlen $\leqq x$, $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien (d. h. durch keine von 1 verschiedene Quadratzahl teilbaren) Zahlen $\leqq x$; es sei $\mu(n)$ diejenige zahlentheoretische Funktion, welche für $n = 1$ gleich 1 ist, für quadratfreie, aus ρ Primfaktoren zusammengesetzte n gleich $(-1)^\rho$ und für nicht quadratfreie n gleich 0. Ferner seien die Funktionen $M(x)$, $g(x)$ und $f(x)$ durch die Gleichungen

$$M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n),$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n},$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n) \log n}{n}$$

definiert. Im ersten Teile dieser Arbeit wird hauptsächlich von den sechs bekannten Sätzen die Rede sein, welche unter Anwendung dieser Bezeichnungen folgendermaßen lauten:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1, \tag{1}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1, \tag{2}$$

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{x=\infty} f(x) = -1, \tag{5}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)-\frac{6}{\pi^2}x}{\sqrt{x}} = 0. \tag{6}$$

Historisch sei kurz bemerkt, daß Satz (1) zuerst von den Herren Hadamard[1] und de la Vallée Poussin[2] bewiesen worden ist (später einfacher von mir[3]), Satz (2) zuerst von Herrn de la Vallée Poussin[4] (später einfacher von mir[5]), die Sätze (3) und (4) zuerst von Herrn v. Mangoldt[6] (später

---

1 »Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques«. Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 24 (1896), p. 218.

2 »Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers«. Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2 (1896), p. 251.

3 »Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes«. Mathematische Annalen, Bd. 56 (1903), p. 663.

4 L. c. (siehe Anm. 2), p. 361.

5 L. c. (siehe Anm. 3), p. 663.

6 »Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$.« Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1897, p. 849, beziehungsweise p. 851.

einfacher von mir[1]), Satz (5) zuerst von mir[2] und Satz (6) ebenfalls.[3] Diese Beweise beruhen durchweg auf der Theorie der Riemann'schen Zetafunktion.

Was den etwaigen elementaren Zusammenhang der Sätze untereinander anlangt, so ist darüber folgendes bekannt:

1. Sylvester[4] hat — als die Sätze (1) und (2) beide noch unbewiesen waren — gezeigt, daß aus (1) unmittelbar (2) folgt. Zu diesem Zwecke führte er (elementar) den Nachweis der Relation

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leqq \limsup_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x},$$

welche zusammen mit der selbstverständlichen Beziehung

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{p \leqq x} \log p \leqq \frac{\log x}{x} \pi(x)$$

das Verlangte leistet.

Umgekehrt ergibt sich aus (2) leicht der Satz (1).

2. Aus (1) läßt sich elementar (3) folgern; hierin besteht mein Beweis[5] der Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

3. Aus (3) läßt sich (4) elementar herleiten; dies hat Herr v. Mangoldt[6] zuerst ausgeführt und ich später[7] einfacher.

---

[1] »Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$.« Inauguraldissertation, Berlin, 1899, p. 15, beziehungsweise p. 16.

[2] »Contribution à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.« Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 129 (1899), p. 815.

[3] »Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.« Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 33 (1905), p. 241.

[4] »On arithmetical series.« The Messenger of Mathematics, Ser. 2, Bd. 21 (1891), p. 9.

[5] L. c. (siehe Anm. 1), p. 6 bis 15.

[6] L. c. (siehe p. 590, Anm. 6), p. 849 bis 851.

[7] L. c. (siehe Anm. 1), p. 15 bis 16.

4. Aus (5) folgt die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \tag{7}$$

unmittelbar, da das allgemeine Glied dieser Reihe aus dem allgemeinen Gliede der nach (5) konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n}$$

durch Multiplikation mit dem monoton zu Null abnehmenden Faktor $\frac{1}{\log n}$ $(n \geqq 2)$ entsteht. Aus der Konvergenz von (7) läßt sich bekanntlich leicht folgern, daß der Wert dieser unendlichen Reihe $= 0$ ist. Analytisch ergibt es sich aus der bekannten Tatsache,[1] daß eine Dirichlet'sche Reihe in jedem Punkte, wo sie konvergiert, nach rechts stetig ist; denn hiernach ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = \lim_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \lim_{s=1} \frac{1}{\zeta(s)} = 0.$$

Elementar folgt es z. B. aus der von Herrn v. Mangoldt[2] einfach bewiesenen Relation

$$|\log x\, g(x) - f(x)| < 4;$$

eine andere elementare Begründung auf Grund der Identität

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right) = 1 \tag{8}$$

habe ich früher[3] einmal angegeben.

---

[1] Diese ist das Analogon zum Abel'schen Satz über Potenzreihen.

[2] L. c. (siehe p. 590, Anm. 6), p. 839.

[3] »Über die asymptotischen Werte einiger zahlentheoretischer Funktionen.« Mathematische Annalen, Bd. 54 (1901), p. 573 bis 574. Dort zeigte ich auf Grund von (8), daß sogar die Relation

$$g(x) \geqq \frac{c}{\log x} \qquad (c > 0)$$

Aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

ergibt sich weiter

$$g(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} = -\sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = -\sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n} \frac{1}{\log n}$$

$$= -\sum_{n=x+1}^{\infty} (1+f(n)-(1+f(n-1))) \frac{1}{\log n}$$

$$= -\sum_{n=x+1}^{\infty} (1+f(n)) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{1+f(x)}{\log(x+1)}; \qquad (9)$$

wenn δ eine beliebig gegebene positive Größe ist, so ist nach (5) für alle hinreichend großen x

$$|1+f(x)| < \delta,$$

also in Verbindung mit (9)

$$|g(x)| < \delta \sum_{n=x+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\delta}{\log(x+1)} = \frac{2\delta}{\log(x+1)}.$$

Aus (5) folgt also nicht nur (3), sondern sogar

$$\lim_{x=\infty} g(x) \log x = 0. \qquad (10)$$

Ferner folgt aus (5) für $M(x)$ nicht nur die Relation (4), wie man mit Rücksicht auf p. 591, Nr. 3. durch den Übergang über (3) erhält; sondern es ergibt sich sogar die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x \, M(x)}{x} = 0. \qquad (11)$$

---

nicht für alle hinreichend großen x gelten kann, und dasselbe für

$$g(x) \leq \frac{c}{\log x} \qquad (c < 0).$$

In der Tat ist

$$M(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} n = \sum_{n=1}^{x} (g(n) - g(n-1))n$$

$$= \sum_{n=1}^{x} g(n)(n-(n+1)) + g(x)(x+1) = -\sum_{n=1}^{x} g(n) + g(x)(x+1).$$

Nach Annahme von δ ist wegen (10) für alle $n > \omega(\delta)$

$$|g(n)| < \delta \frac{1}{\log n},$$

also für alle $x > \omega$

$$|M(x)| \leqq \sum_{n=1}^{\omega} |g(n)| + \delta \sum_{n=\omega+1}^{x} \frac{1}{\log n} + \delta \frac{x+1}{\log x}; \tag{12}$$

der Quotient der rechten Seite von (12) durch $\frac{x}{\log x}$ konvergiert für $x = \infty$ gegen 2δ; also ist für alle hinreichend großen x

$$|M(x)| < 3\delta \frac{x}{\log x},$$

womit (11) bewiesen ist.

Im folgenden bezeichne durchweg, wenn $F(x)$ eine Funktion des positiven Argumentes x ist, $O(F(x))$ eine Funktion, deren Quotient durch $F(x)$ für alle x von einer gewissen Stelle an dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke verbleibt; $\{F(x)\}$ bezeichne eine Funktion, deren Quotient durch $F(x)$ für $x = \infty$ den Grenzwert 0 hat; alsdann lassen sich z. B. die Gleichungen (5), (10) und (11) folgendermaßen schreiben:

$$f(x) = -1 + \{1\}, \tag{13}$$

$$g(x) = \left\{\frac{1}{\log x}\right\}, \tag{14}$$

$$M(x) = \left\{\frac{x}{\log x}\right\}. \tag{15}$$

Den erwähnten bekannten Beziehungen zwischen den Sätzen (1) bis (6) füge ich nun in der vorliegenden Arbeit einige neue hinzu, welche mir von Interesse zu sein scheinen. Im § 1 zeige ich, daß sich aus (5) der Satz (1) elementar folgern läßt. Dies beleuchtet die Versuche von Tschebyschef, Sylvester und anderen, den Satz (1) auf Grund der Tschebyschef'schen Identität

$$\sum_{n=1}^{x} \log n = \sum_{n=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \qquad (16)$$

zu beweisen, wo

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \ldots$$

gesetzt ist. Im § 2 werde ich aus (1) ohne Vermittelung von (3) den Satz (4) folgern. Im § 3 werde ich aus (4) den Satz (6) folgern; mein bisheriger Beweis[1] von (6) benutzte einen schärferen Satz[2] über $M(x)$. Im § 4 gebe ich einen neuen, nur die einfachsten Eigenschaften der Zetafunktion benutzenden Beweis für den Satz an, daß bei gegebenem s mit reellem Teil 1

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n^s} = O(1)$$

ist.

Im zweiten Teile führe ich für beliebige algebraische Zahlkörper analoge Untersuchungen aus wie im ersten Teile für den natürlichen Rationalitätsbereich. Die Untersuchungen der §§ 5 bis 7 beziehen sich auf die (sämtlich zuerst von mir bewiesenen) fünf Sätze, welche den Sätzen (1) bis (5) entsprechen und folgenden Wortlaut haben:

Es sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primideale, deren Norm $\leqq x$ ist, $\vartheta(x)$ die Summe ihrer natürlichen Logarithmen; es sei die idealtheoretische Funktion $\mu(\mathfrak{n})$ für das Einheitsideal $= 1$, für ein quadratfreies Ideal, das aus ρ Primidealen zusammengesetzt ist, $= (-1)^{\rho}$, sonst $= 0$; es sei

---

[1] L. c. (siehe p. 591, Anm. 3), p. 239 bis 241.

[2] Derselbe war vordem auch von mir bewiesen worden.

$$M(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \mu(\mathfrak{n}),$$

$$g(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}},$$

$$f(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n}) \log N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}},$$

wo $\mathfrak{n}$ in den Summen alle Ideale durchläuft, deren Normen $\leqq x$ sind. Dann gelten die Sätze (1), (2), (3), (4) wörtlich und an Stelle von (5) tritt

$$\lim_{x=\infty} f(x) = -\frac{1}{\alpha}, \tag{17}$$

wo α eine durch den Körper wohlbestimmte positive Konstante ist. Die Sätze (1) und (2) habe ich in der auf p. 590, Anm. 3 zitierten Arbeit[1] bewiesen, die Sätze (3), (4) und (17) in einer späteren Arbeit.[2]

Im § 5 leite ich aus (17) den Satz (1) ab (im Anschluß an § 1); der § 6 entspricht dem § 2 und liefert den direkten Übergang von (1) zu (4). Der § 7 enthält nicht das Analogon zum § 3;[3] vielmehr führe ich im § 7 das Analogon zu dem in meiner Dissertation[4] enthaltenen elementaren Übergange von (1) zu (3) aus. Der § 8 schließt sich eng an den § 4 an.

---

[1] p. 669, beziehungsweise p. 670.

[2] »Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$.« Diese Sitzungsberichte, Bd. 112, Abt. IIa, 1903, p. 566, beziehungsweise p. 560, beziehungsweise p. 566.

[3] Ein solches existiert nicht, da für Zahlkörper zweiten und höheren Grades bei der bekannten Behandlung von $Q(x)$ (siehe die in Anm. 2 zitierte Arbeit, p. 561 bis 562) ein anderes Glied die Größenordnung des Restes bestimmt wie für den Körper der rationalen Zahlen.

[4] L. c. (siehe p. 591, Anm. 1).

Erster Teil.

§ 1.

Wenn $\psi(x)$ die auf p. 595 angegebene Bedeutung hat und

$$\sum_{n=1}^{x} \log n = T(x)$$

gesetzt wird, ist nach Tschebyschefs Identität (16)

$$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{n}\right). \tag{18}$$

Hierbei, wie durchweg im folgenden, braucht x keine ganze Zahl zu sein; eine Summe mit nicht ganzzahligen Grenzen soll stets bedeuten, daß der Summationsbuchstabe alle dem betreffenden Intervall angehörigen ganzen Zahlen durchläuft. Demnach ist für alle $x \geqq 1$

$$T(x) = \log([x]!).$$

Aus (18) folgt durch Anwendung der Möbius'schen Umkehrungsformel

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \log\left(\left[\frac{x}{n}\right]!\right). \tag{19}$$

Wie Herr Gram[1] angegeben hat, gibt es für $\psi(x)$ noch die andere Darstellung

$$\psi(x) = -\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] \log n. \tag{20}$$

Die analytische Quelle dieser beiden (auch arithmetisch leicht verifizierbaren) Identitäten (19) und (20) liegt in den beiden Gleichungen

[1] »Undersøgelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse«. Det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling, Ser. 6, Bd. 2 (1884), p. 238 und 299.

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot (-\zeta'(s)) \tag{21}$$

und

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} \cdot \zeta(s); \tag{22}$$

denn, wenn die Dirichlet'schen Reihen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad -\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{\zeta(s)} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n^s}, \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s}\ ^{1}$$

eingeführt werden, so ergibt sich (19) aus (21) und (20) aus (22), indem man auf beiden Seiten die Summe der Koeffizienten von $\frac{1}{1^s}, \frac{1}{2^s}, \ldots, \frac{1}{[x]^s}$ einander gleichsetzt und die Identität

$$\sum_{n=1}^{x} \nu(n) = \psi(x)$$

berücksichtigt.

Ich hatte bei einer früheren Gelegenheit[2] gezeigt, daß der Satz (1), also auch der Satz (2), sich elementar aus dem Satze

$$g(x) = O\left(\frac{1}{\log x (\log\log x)^2}\right) \tag{23}$$

ergibt, d. h.[3] aus

$$f(x) = -1 + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right). \tag{24}$$

[1] Hierin ist $\nu(n) = p$ für Primzahlpotenzen $n = p^m$ $(m \geqq 1)$, sonst $\nu(n) = 0$.

[2] »Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschef'schen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale.« Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125 (1903), p. 184 bis 188.

[3] In der Tat folgt (23) aus (24) durch partielle Summation. Die Sätze (23) und (24) hatte ich vordem schon bewiesen (siehe die auf p. 592, Anm. 3 zitierte Arbeit, p. 584).

Die folgende neue Beweisanordnung des Satzes (1) geht nur von der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} f(x) = -1 \tag{5}$$

aus und führt ohne irgend welche Kenntnis der Geschwindigkeit der Konvergenz von $f(x)$ zum Ziele.

Aus der Definitionsgleichung

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \ldots$$

folgt ohne weiteres, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)-\vartheta(x)}{x} = 1$$

ist; die Differenz

$$\psi(x)-\vartheta(x) = \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \ldots$$

ist ja sogar von der Größenordnung $O(\sqrt{x})$. Der zu beweisende Satz lautet also:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

anders geschrieben:

$$\psi(x) = x + \{x\}.$$

Es ist nach (19)

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \log\left(\left[\frac{x}{n}\right]!\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \sum_{k=1}^{\frac{x}{n}} \log k = \sum_{n,k} \mu(n) \log k, \tag{25}$$

wo n und k alle Paare positiver ganzer Zahlen durchlaufen, deren Produkt $nk \leqq x$ ist. Berücksichtigt man zunächst die Werte[1] $n = 1, \ldots, \left[\frac{x}{\log^2 x}\right]$ mit den zugehörigen $k = 1, \ldots, \left[\frac{x}{n}\right]$, dann die Werte $k = 1, \ldots, [\log^2 x]$ mit den zugehörigen $n = 1$,

[1] Für $x \geqq 3$ ist $1 \leqq \left[\frac{x}{\log^2 x}\right] \leqq x$; es werde $x \geqq 3$ angenommen.

$\ldots, \left[\frac{x}{k}\right]$ und bringt dann die Wertepaare wieder in Abzug, für welche zugleich $n \leqq \frac{x}{\log^2 x}$ und $k \leqq \log^2 x$ ist, so ergibt sich aus (25)

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \mu(n) \sum_{k=1}^{\frac{x}{n}} \log k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\log^2 x} \log k \sum_{n=1}^{\frac{x}{k}} \mu(n) - \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \mu(n) \cdot \sum_{k=1}^{\log^2 x} \log k$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\log^2 x} \log k M\left(\frac{x}{k}\right) - M\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) T(\log^2 x). \qquad (26)$$

Nun ist bekanntlich

$$T(x) = \log([x]!) = x \log x - x + O(\log x), \qquad (27)$$

also in der ersten Summe von (26)

$$T\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} \log \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + O\left(\log \frac{x}{n}\right).^{1} \qquad (28)$$

Daher ist

$$\sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \mu(n) \left(\frac{x}{n} \log \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + O\left(\log \frac{x}{n}\right)\right)$$

$$= (x \log x - x) g\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) - x f\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) + O \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \log x,$$

[1] Aus (27) folgt, daß für alle $x \geqq \log^2 3$ der Quotient $\frac{|T(x) - x \log x + x|}{\log x}$ unterhalb einer festen Schranke c liegt; da in der ersten Summe von (26)

also nach

$$f(x) = -1+\{1\} \tag{13}$$

und der daraus folgenden Relation

$$g(x) = \left\{\frac{1}{\log x}\right\} \tag{14}$$

$$\sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right) = (x\log x - x)\left\{\frac{1}{\log x - 2\log\log x}\right\}$$

$$+x+\{x\}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\cdot \log x\right)$$

$$= \{x\}+x+\{x\}+O\left(\frac{x}{\log x}\right) = x+\{x\}. \tag{29}$$

Ferner ist nach dem in (5) enthaltenen Satze

$$M(x) = \left\{\frac{x}{\log x}\right\} \tag{15}$$

bei gegebenem δ für alle $x > \omega(\delta)$ nebst $k \leqq \log^2 x$

$$\left|M\left(\frac{x}{k}\right)\right| < \delta \frac{x}{k\log\frac{x}{k}},$$

also

$$\sum_{k=1}^{\log^2 x} \log k M\left(\frac{x}{k}\right) = \left\{\sum_{k=1}^{\log^2 x} \log k \frac{x}{k\log\frac{x}{k}}\right\}$$

$$= \left\{\frac{x\log(\log^2 x)}{\log\frac{x}{\log^2 x}} \sum_{k=1}^{\log^2 x}\frac{1}{k}\right\} = \left\{\frac{x\log\log x}{\log x}\log(\log^2 x)\right\}$$

$$= \left\{\frac{x(\log\log x)^2}{\log x}\right\} = \{x\}. \tag{30}$$

$\frac{x}{n} \geqq \log^2 x \geqq \log^2 3$ ist, ist die Gleichung (28) in dem Sinne zu verstehen, daß die mit $O\left(\log\frac{x}{n}\right)$ bezeichnete Funktion für alle in Betracht kommenden Wertepaare x, n dem absoluten Betrage nach $< c\log\frac{x}{n}$ ist.

Endlich folgt aus (15) und (27)

$$M\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) T(\log^2 x)$$

$$= \left\{\frac{x}{\log^2 x \log \frac{x}{\log^2 x}} \log^2 x \log(\log^2 x)\right\}$$

$$= \left\{\frac{x \log\log x}{\log x}\right\} = \{x\}. \tag{31}$$

Aus (26), (29), (30) und (31) folgt schließlich

$$\psi(x) = x+\{x\}+\{x\}-\{x\} = x+\{x\},$$

was zu beweisen war.

Die gefundene Tatsache, daß

$$\psi(x) = x+\{x\}$$

aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1$$

elementar folgt, steht in engem Zusammenhange mit den Untersuchungen von Tschebyschef über das Primzahlproblem. Tschebyschef hatte mit Hilfe der Identität

$$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

durch Betrachtung der Funktion

$$T(x)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)+T\left(\frac{x}{30}\right)$$

nachgewiesen,[1] daß (in heutiger Bezeichnungsweise)

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geqq \frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}-\frac{\log 30}{30} \tag{32}$$

[1] »Mémoire sur les nombres premiers.« Journal de mathématiques pures et appliquées, Sér. 1, Bd. 17 (1852), p. 378; Mémoires présentés à l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg par divers savants, Bd. 7 (1854), p. 25; Œuvres, Bd. 1 (1899), p. 61.

und

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leqq \frac{6}{5}\left(\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 30}{30}\right) \quad (33)$$

ist. Sylvester[1] hatte die Konstante auf der rechten Seite von (32) und (33) mehr und mehr vergrößert, beziehungsweise verkleinert, durch Betrachtung des Aggregates

$$T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + \\ + T\left(\frac{x}{6}\right) - T\left(\frac{x}{7}\right) + T\left(\frac{x}{70}\right) - T\left(\frac{x}{210}\right)$$

und anderer von ähnlicher Bauart, welche immer mehr Anfangsglieder mit der Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right)$$

gemeinsam haben. Jedes jener Aggregate enthält am Schlusse solche Glieder, daß die Summe der mit den betreffenden Vorzeichen multiplizierten Argumente von T gleich Null ist. Die Untersuchung Sylvesters führt jedesmal zu einer Relation

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geqq a,$$

wo $-a$ näherungsweise die Summe einer Anzahl Anfangsglieder der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n}$$

ist, während in der entsprechenden Relation

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leqq b$$

[1] »On Tchebycheff's theory of the totality of the prime numbers comprised within given limits«. American Journal of Mathematics, Bd. 4 (1881), p. 230 bis 247; vergl. auch namentlich die auf p. 591, Anm. 4, zitierte Arbeit.

$\frac{b}{a}$ um so näher an 1 liegt, je mehr Anfangsglieder von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

bei der Bildung des Aggregates

$$\sum_{n} \pm T\left(\frac{x}{n}\right)$$

benutzt sind und je näher a an 1 liegt. Sylvester hat also unter Benützung der empirischen Tatsache, daß für mehrere ganzzahlige wachsende Werte von x die Funktionen $|g(x)|$ und $|f(x)+1|$ abnehmen, die Tschebyschef'schen Schranken für die Unbestimmtheitsgrenzen von $\frac{\psi(x)}{x}$ verengert. Nun liegt tatsächlich der Satz

$$\lim_{x=\infty} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \tag{34}$$

weniger tief als der Satz

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1, \tag{35}$$

indem (34) aus (35) elementar folgt,[1] aber — beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft — (35) nicht aus (34); dagegen liegt der Satz

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1, \tag{36}$$

der zum Nachweise von

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \tag{35}$$

auf dem Tschebyschef-Sylvester'schen Wege als bekannt vorausgesetzt werden muß, tiefer als der Satz (35), indem kein elementarer Beweis von (36) auf Grund von (35) bekannt ist. Wenn es

[1] Siehe die auf p. 591, Anm. 1, zitierte Arbeit.

also auch hoffnungslos erscheint, daß die Tschebyschef'sche Methode jemals zu dem (von ihm und seinen Nachfolgern erstrebten) Ziele führen wird, den Satz (35) zu beweisen, so verdient doch hervorgehoben zu werden, daß aus dem Satze (36) wirklich der Satz (35) elementar gefolgert werden kann; dies ist genau das Ergebnis des vorangegangenen Paragraphen. Mit Rücksicht auf (20) läßt sich dies in symmetrischer Form so ausdrücken: Aus

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \frac{x}{n} \log n = -1$$

ist auf elementarem Wege die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] \log n = -1$$

hergeleitet worden. Schon Herr Gram[1] hatte auf die Ähnlichkeit dieser beiden damals noch unbewiesenen Sätze hingewiesen.

Als Anhang zu diesen Entwicklungen will ich die Methode von p. 599 bis 602 auf die Frage anwenden, was sich aus dem von Stieltjes vermuteten Satze

$$M(x) = O(\sqrt{x}) \tag{37}$$

über die Größenordnung von $\psi(x)-x$ auf elementarem Wege ergibt. Stieltjes glaubte bekanntlich einen Beweis des Satzes (37) zu besitzen. Da er ihn jedoch niemals veröffentlicht hat und der Satz bis heute unbewiesen[2] ist, so ist nicht anzu-

[1] L. c. (siehe p. 597, Anm. 1), p. 238 und 299.

[2] Er besagt noch mehr als der von Riemann vermutete (und vielleicht gar nicht richtige) Satz, daß alle komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben; denn aus (37) folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ für $R(s) > \frac{1}{2}$, also die Richtigkeit der Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

für $R(s) > \frac{1}{2}$.

nehmen, daß Stieltjes' Gedankengang richtig war. Jedenfalls hat Stieltjes[1] elementar bewiesen, daß aus (37) für alle $\gamma > \frac{3}{4}$

$$\psi(x) = x + O(x^{\gamma}) \tag{38}$$

folgt; Herr Mertens[2] hat später aus (37) elementar die Folgerung

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{3}{4}} \log x)$$

gezogen. Ich will zeigen, daß sich ganz einfach die schärfere Relation[3]

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{2}{3}} \log x)$$

$\left(\text{also die Richtigkeit von (38) für alle } \gamma > \frac{2}{3}\right)$ aus (37) folgern läßt.[4]

---

1 »Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres.« Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 101 (1885), p. 369.

2 »Über eine zahlentheoretische Funktion.« Diese Sitzungsberichte, Bd. 106, Abt. IIa, 1897, p. 775.

3 Noch in den Jahren 1887 und 1891 teilte Stieltjes in zwei kürzlich veröffentlichten Briefen (Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, her. von Baillaud und Bourget, Bd. 2 [1905], p. 446 und 155 bis 156) an Hermite und Herrn Mittag-Leffler mit, daß er auf Grund von (37) nur für $\gamma > \frac{3}{4}$ die Richtigkeit der Relation (38) beweisen könne.

4 Es handelt sich hier nur um elementare Beweisanordnungen. Ich will jedoch nicht unerwähnt lassen, daß im Falle der Richtigkeit von (37) auf Grund der tieferen Eigenschaften der Zetafunktion (38) für alle $\gamma > \frac{1}{2}$ folgt. In der Tat hat Herr v. Koch bewiesen, daß im Falle der Richtigkeit der Riemann'schen, auf p. 605, Anm. 2 erwähnten Vermutung die Gleichung

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x)$$

besteht; vergl. seine Arbeit: »Sur la distribution des nombres premiers«, Acta mathematica, Bd. 24 (1901), p. 182, sowie den (unvollständigen) Beweis in Herrn Franels Arbeit: »Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann et son application à l'arithmétique«, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 41 (1896), p. 10 bis 18, und den neueren Beweis von Herrn Holmgren in »Om primtalens fördelning«, Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Bd. 59 (1902), p. 221 bis 225.

In der Tat ergibt sich aus (37) durch partielle Summation

$$g(x) = -\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{M(n)-M(n-1)}{n}$$

$$= -\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{M(n)}{n(n+1)} + \frac{M(x)}{[x]+1}$$

$$= O\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O\frac{1}{\sqrt{x}} = O(x^{-\frac{1}{2}})$$

und

$$1+f(x) = -\sum_{n=[x]+1}^{\infty} (g(n)-g(n-1)) \log n$$

$$= \sum_{n=[x]+1}^{\infty} g(n) \log\frac{n+1}{n} + g(x) \log([x]+1)$$

$$= O\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O(x^{-\frac{1}{2}} \log x) = O(x^{-\frac{1}{2}} \log x),$$

also analog wie auf p. 599 bis 602 unter Benutzung von (25)

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{x^{\frac{2}{3}}} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{k=1}^{x^{\frac{1}{3}}} \log k\, M\left(\frac{x}{k}\right) - M(x^{\frac{2}{3}}) T(x^{\frac{1}{3}})$$

$$= \sum_{n=1}^{x^{\frac{2}{3}}} \mu(n) \left(\frac{x}{n} \log\frac{x}{n} - \frac{x}{n} + O\left(\log\frac{x}{n}\right)\right) +$$

$$+ O\sum_{k=1}^{x^{\frac{1}{3}}} \log k \sqrt{\frac{x}{k}} + O(x^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{1}{3}} \log x)$$

$$= (x \log x - x) g(x^{\frac{2}{3}}) - x f(x^{\frac{2}{3}}) + O(x^{\frac{2}{3}} \log x) +$$

$$+ O\left(\sqrt{x} \log x \sum_{k=1}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$= (x \log x - x) O(x^{-\frac{1}{3}}) + x + x O(x^{-\frac{1}{3}} \log x) + O(x^{\frac{2}{3}} \log x) +$$
$$+ O(\sqrt{x} \log x . x^{\frac{1}{6}})$$
$$= x + O(x^{\frac{2}{3}} \log x).$$

Im folgenden wird durchweg wieder von solchen Sätzen die Rede sein, deren Richtigkeit feststeht.

§ 2.

In diesem Paragraphen soll aus dem Satz

$$\lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1 \tag{1}$$

der Satz

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0 \tag{4}$$

auf einem neuen, einfachen Wege gefolgert werden.

Wenn

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \log n = \chi(x)$$

gesetzt wird, so ist nach (20)

$$\psi(x) = -\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \log n \sum_{k=1}^{\frac{x}{n}} 1$$
$$= -\sum_{k=1}^{x} \sum_{n=1}^{\frac{x}{k}} \mu(n) \log n = -\sum_{k=1}^{x} \chi\left(\frac{x}{k}\right),$$

also

$$\chi(x) = -\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \psi\left(\frac{x}{n}\right).^{1} \tag{39}$$

---

[1] Dies ist die (wohlbekannte) arithmetische Übersetzung der Gleichung

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right),$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s}.$$

Es werde nun

$$\psi(x) = x + x\varepsilon(x) \tag{40}$$

gesetzt; dann ist nach (1) mit Rücksicht auf

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \{x\}$$

einerseits

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0 \tag{41}$$

und andererseits für alle $x \geqq 1$

$$|\varepsilon(x)| < c, \tag{42}$$

wo c eine absolute Konstante bezeichnet.[1] Aus (39) und (40) folgt

$$\chi(x) = -\sum_{n=1}^{x} \mu(n)\left(\frac{x}{n} + \frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

$$= -x\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n} - x\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right). \tag{43}$$

Es sei δ eine gegebene positive Größe; dann ist nach (41) für alle $x > \omega(\delta)$

$$|\varepsilon(x)| < \delta,$$

also für alle $x > \omega$ und $n < \frac{x}{\omega}$

$$\left|\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right| < \delta, \tag{44}$$

folglich unter Benutzung von (42) und (44)

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqq \left|\sum_{n=1}^{\frac{x}{\omega}}\frac{\mu(n)}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right| + \left|\sum_{n=\left[\frac{x}{\omega}\right]+1}^{x}\frac{\mu(n)}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right|$$

[1] Letzteres hatte schon Tschebyschef bewiesen; es folgt aus seiner oben mit (33) bezeichneten Relation.

$$< \delta \sum_{n=1}^{\frac{x}{\omega}} \frac{1}{n} + c \sum_{n=\left[\frac{x}{\omega}\right]+1}^{x} \frac{1}{n} \leqq \delta \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} + c \sum_{n=\left[\frac{x}{\omega}\right]+1}^{x} \frac{1}{n}. \tag{45}$$

Es ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{x} \frac{1}{n}}{\log x} = 1$$

und

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=\left[\frac{x}{\omega}\right]+1}^{x} \frac{1}{n} = \lim_{x=\infty} \log \frac{[x]}{\left[\frac{x}{\omega}\right]+1} = \log \omega;$$

nach (45) ist also für alle hinreichend großen x

$$\left| \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} \varepsilon\left(\frac{x}{n}\right) \right| < 2\delta \log x. \tag{46}$$

Ferner ist, wie Herr Gram[1] elementar gezeigt hat,

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1); \tag{47}$$

aus (43), (46) und (47) folgt

$$\chi(x) = O(x) + \{x \log x\} = \{x \log x\}. \tag{48}$$

Nun ist

$$M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \log n \cdot \frac{1}{\log n} = \sum_{n=1}^{x} (\chi(n) - \chi(n-1)) \frac{1}{\log n}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \chi(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\chi(x)}{\log([x]+1)},$$

---

[1] L. c. (siehe p. 597, Anm. 1), p. 197 bis 198 und p. 291.

also nach (48)

$$M(x) = O \sum_{n=1}^{x} n \log n \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \left\{\frac{x \log x}{\log([x]+1)}\right\}$$

$$= O \sum_{n=1}^{x} n \log n \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log^2 n} + \{x\}$$

$$= O \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\log n} + \{x\} = O\left(\frac{x}{\log x}\right) + \{x\} = \{x\},$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0, \tag{4}$$

was zu beweisen war.

§ 3.

Um den Satz (6), d. h. die Gleichung

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + \{\sqrt{x}\} \tag{49}$$

zu beweisen, habe ich a. a. O.[1] den Satz

$$M(x) = O\left(\frac{x}{\log x \log \log x}\right)$$

angewendet. Der folgende Beweis des Satzes (6) stützt sich nur auf

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0. \tag{4}$$

Es sei $\eta(x)$ der größte Wert von $\sqrt{\frac{|M(z)|}{z}}$ für alle $z \geqq \sqrt[4]{x}$ und $\delta(x)$ diejenige Funktion, welche für jedes x gleich dem größeren der beiden Werte $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ und $\eta(x)$ ist; dann ist offenbar nach (4)

$$\lim_{x=\infty} \eta(x) = 0,$$

[1] Siehe p. 591, Anm. 3.

also

$$\lim_{x=\infty} \delta(x) = 0.$$

Nun ist

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2}\right] = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n) \sum_{m=1}^{\frac{x}{n^2}} 1 = \sum_{n,m} \mu(n),$$

wo n und m alle Wertepaare durchlaufen, für welche $n^2 m \leqq x$ ist. Hieraus folgt

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\delta(x)\sqrt{x}} \mu(n) \sum_{m=1}^{\frac{x}{n^2}} 1 + \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^2(x)}} \sum_{n=1}^{\sqrt{\frac{x}{m}}} \mu(n) - \sum_{n=1}^{\delta(x)\sqrt{x}} \mu(n) \cdot \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^2(x)}} 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\delta(x)\sqrt{x}} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2}\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^2(x)}} M\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right) - M(\delta(x)\sqrt{x}) \left[\frac{1}{\delta^2(x)}\right]. \quad (50)$$

Es ist

$$\sum_{n=1}^{\delta(x)\sqrt{x}} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2}\right] = \sum_{n=1}^{\delta(x)\sqrt{x}} \mu(n) \frac{x}{n^2} + O(\delta(x)\sqrt{x})$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} - x \sum_{n=[\delta(x)\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} + \{\sqrt{x}\}.$$

Hierin ist

$$\sum_{n=[\delta(x)\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{n=[\delta(x)\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{M(n)-M(n-1)}{n^2}$$

$$= \sum_{n=[\delta(x)\sqrt{x}]+1}^{\infty} M(n)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{M(\delta(x)\sqrt{x})}{([\delta(x)\sqrt{x}]+1)^2}.$$

Alle hierin auftretenden Argumente von M sind

$$\geqq \delta(x)\sqrt{x} \geqq \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \sqrt{x} \geqq \sqrt[4]{x};$$

für alle diese n ist also

$$\sqrt{\frac{|M(n)|}{n}} \leqq \eta(x),$$

$$|M(n)| \leqq n\eta^2(x) \leqq n\delta^2(x);$$

dies gibt

$$\left|\sum_{n=[\delta(x)\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}\right| \leqq \delta^2(x) \sum_{n=[\delta(x)\sqrt{x}]+1}^{\infty} n \cdot \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} +$$

$$+ \delta^2(x) \frac{\delta(x)\sqrt{x}}{(\delta(x)\sqrt{x})^2}$$

$$= \delta^2(x) \cdot O \sum_{n=[\delta(x)\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\delta(x)}{\sqrt{x}} = O\left(\frac{\delta(x)}{\sqrt{x}}\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\};$$

folglich ist

$$\sum_{n=1}^{\delta(x)\sqrt{x}} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right] = \frac{6}{\pi^2}x + \{\sqrt{x}\}. \tag{51}$$

Ferner ist auch in der zweiten Summe von (50) jedes Argument von M mindestens $\delta(x)\sqrt{x} \geqq \sqrt[4]{x}$; also ist

$$\left|\sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^2(x)}} M\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\right| \leqq \delta^2(x) \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^2(x)}} \sqrt{\frac{x}{m}}$$

$$= \delta^2(x) O\left(\sqrt{x}\frac{1}{\delta(x)}\right) = O(\delta(x)\sqrt{x}) = \{\sqrt{x}\}; \tag{52}$$

endlich ist

$$M(\delta(x)\sqrt{x})\left[\frac{1}{\delta^2(x)}\right] = O\left(\delta(x)\sqrt{x}\,\delta^2(x)\frac{1}{\delta^2(x)}\right) = \{\sqrt{x}\}. \tag{53}$$

Aus (50), (51), (52) und (53) ergibt sich die Behauptung

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + \{\sqrt{x}\}, \tag{49}$$

d. h. der Satz (6).

§ 4.

Es ist bekannt, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \tag{54}$$

für jedes s mit dem reellen Teil 1 konvergiert; ich habe dies auf zwei Arten bewiesen, zuerst[1] unter Benutzung der tiefen Untersuchungen Herrn de la Vallée Poussins über die Zetafunktion und das Primzahlproblem, später[2] einfacher auf Grund meiner Hilfssätze über die Zetafunktion. Auch die bloße Tatsache, daß bei gegebenem $s = 1+ti$ (t reell)

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} = O(1) \tag{55}$$

ist [d. h. daß die Reihe (54) konvergiert oder höchstens in einem endlichen Unbestimmtheitsgebiet oszilliert], ist bisher nicht einfacher bewiesen worden. Nur für $t = 0$ ist dies durch Herrn Gram[3] geschehen, und ich will jetzt durch ähnliche Schlüsse für $t \gtrless 0$ die Richtigkeit der Relation (55) beweisen; dieser Weg ist fast elementar; aus der Theorie der Zetafunktion werden nur die beiden leicht beweisbaren Sätze[4] gebraucht, daß

$$\zeta(1+ti) \neq 0 \tag{56}$$

ist und daß

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1+ti}} = \zeta(1+ti) - \frac{1}{ti}\,\frac{1}{x^{ti}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{57}$$

ist.

---

[1] L. c. (siehe p. 598, Anm. 2), p. 184.

[2] L. c. (siehe p. 596, Anm. 2), p. 551.

[3] Siehe oben, p. 610.

[4] Literatur l. c. (siehe p. 598, Anm. 2), p. 82, beziehungsweise 107 und 111. (57) gilt auch für nicht ganze x.

Man erhält durch Anwendung von (47) und (57)

$$1=\sum_{k=1}^{x}\frac{1}{k^{1+ti}}\sum_{n|k}\mu(n)=\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n^{1+ti}}\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}}\frac{1}{m^{1+ti}}$$

$$=\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n^{1+ti}}\left(\zeta(1+ti)-\frac{1}{ti}\frac{n^{ti}}{x^{ti}}+O\left(\frac{n}{x}\right)\right)$$

$$=\zeta(1+ti)\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n^{1+ti}}-\frac{1}{ti\,x^{ti}}\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n}+O\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{x}$$

$$=\zeta(1+ti)\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n^{1+ti}}+O(1)+O(1),$$

$$\zeta(1+ti)\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n^{1+ti}}=O(1),$$

also wegen (56)

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n^{1+ti}}=O(1). \qquad (55)$$

Durch ein ähnliches Schlußverfahren hatte Herr Mertens[1] aus (56) hergeleitet, daß, wenn p alle Primzahlen durchläuft,

$$\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p^{1+ti}}=O(1) \qquad (58)$$

ist. Aus (55), (58) und der in (57) enthaltenen Relation

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^{1+ti}}=O(1)$$

[1] »Über die Konvergenz einer aus Primzahlpotenzen gebildeten unendlichen Reihe.« Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1887, p. 265 bis 269. Der Satz (56) war damals noch nicht bekannt, und Herr Mertens spricht daher a. a. O. nur von denjenigen $t \gtrless 0$, für welche er gilt.

folgt die Konvergenz der durch Multiplikation des allgemeinen Gliedes mit $\frac{1}{\log n}$ ($n \geqq 2$) entstehenden unendlichen Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s \log n}, \quad \sum_{p} \frac{1}{p^s}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n}$$

auf der Geraden $R(s) = 1$ (exklusive $s = 1$ für die beiden letzteren Reihen). Diese Reihen stellen für $R(s) > 1$, also auch für $R(s) = 1$ (exklusive $s = 1$) die analytischen Funktionen

$$\int_s^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta(s)} - 1\right) ds, \quad \log \zeta(s) - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{p} \frac{1}{p^{ms}},$$

$$\int_s^{\infty} (\zeta(s) - 1)\, ds$$

dar; aus der Tatsache, daß diese drei Funktionen für $s = 1 + ti$ ($t \gtrless 0$) regulär sind, kann also merkwürdigerweise gefolgert werden, daß die betreffenden Dirichlet'schen Reihen im Punkte $s = 1 + ti$ konvergieren. Das Umgekehrte wäre selbstverständlich, da der Punkt $s = 1 + ti$, wenn er singulär ist, nur eine rational-logarithmische Unendlichkeitsstelle der ersten Funktion oder eine logarithmische Unendlichkeitsstelle der zweiten Funktion sein könnte, was wegen des auf p. 592 erwähnten Stetigkeitssatzes mit der Konvergenz der Reihen im Punkte $s = 1 + ti$ unverträglich ist.

Zweiter Teil.

§ 5.

Es sei $\varkappa$ ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, k sein Grad; es mögen $\pi(x)$, $\vartheta(x)$, $\mu(n)$, $M(x)$, $g(x)$, $f(x)$ die auf p. 595 bis 596 angegebene Bedeutung haben; es sei ferner $F(n)$ die Anzahl der Ideale, deren Norm die ganze rationale Zahl n ist, und $H(x)$ die Anzahl der Ideale, deren Norm $\leqq x$ ist, also

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x} F(n) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} 1,$$

ferner

$$T(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \log N\mathfrak{n} = \sum_{n=1}^{x} F(n) \log n$$

und

$$\psi(x) = \vartheta(x)+\vartheta(\sqrt{x})+\vartheta(\sqrt[3]{x})+\ldots = \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta(\sqrt[m]{x}).$$

Dann besteht die von Herrn Poincaré[1] angegebene Identität

$$T(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right),$$

aus welcher

$$\psi(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \mu(\mathfrak{n}) T\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) \tag{59}$$

folgt. Es sei ferner an den Weber'schen[2] Satz

$$H(x) = \alpha x + O(x^{1-\frac{1}{k}}) \tag{60}$$

erinnert, wo α eine durch den Körper wohlbestimmte positive Konstante ist.[3] Aus (60) habe ich die Relationen[4]

---

[1] »Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff.« Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 8 (1892), p. 51.

[2] »Über einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung.« Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1896, p. 275 bis 281. — »Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern« (zweite Abhandlung). Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897), p. 89 bis 94.

[3] Es ist dieselbe wie in (17).

[4] L. c. (siehe p. 598, Anm. 2), p. 116, beziehungsweise 81.

$$T(x) = \alpha x \log x - \alpha x + O(x^{1-\frac{1}{k}} \log x) \tag{61}$$

und

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = \alpha \log x + \beta + O(x^{-\frac{1}{k}}) \tag{62}$$

gefolgert, wo β eine zweite, nur vom Körper abhängige Konstante bezeichnet.

Ich will in diesem Paragraphen zeigen, daß aus dem Satze

$$\lim_{x=\infty} f(x) = -\frac{1}{\alpha} \tag{17}$$

der Satz

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \tag{35}$$

folgt, d. h. wegen

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x) - \vartheta(x)}{x} = 0 \tag{63}$$

der Satz

$$\lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Dies wird sich durch eine Verallgemeinerung der elementaren Methode des § 1 ergeben.

Die Ausgangsgleichung (17) kann auch

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{n}) \log N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}} = -\frac{1}{\alpha} \tag{64}$$

geschrieben werden, wo die Ideale nach wachsender Norm angeordnet sind und die Reihenfolge der Ideale mit gleicher Norm unerheblich ist. In der Tat ist die Summe der absoluten Beträge der Glieder mit der Norm n nach (60)

$$\leqq F(n) \frac{\log n}{n} = \frac{\log n}{n} (H(n) - H(n-1))$$
$$= \frac{\log n}{n} (\alpha + O(n^{1-\frac{1}{k}})) = \{1\}.$$

Aus (64) folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}},$$

d. h. die Existenz von

$$\lim_{x=\infty} g(x);$$

denn $\frac{1}{\log N\mathfrak{n}}$ nimmt mit wachsendem $N\mathfrak{n}$ monoton zu 0 ab.

Der Wert dieses Limes ist $= 0$, wie ich durch die beiden auf p. 592 für den natürlichen Rationalitätsbereich angeführten Methoden zeigen will.

1. Wie ich a. a. O.[1] elementar bewiesen habe, ist

$$\log x\, g(x) - f(x) = O(1), \tag{65}$$

also nach (17)

$$\log x\, g(x) = O(1),$$

was für

$$\lim_{x=\infty} g(x) \gtrless 0$$

unmöglich ist.

2. Ohne Benutzung von (17) läßt sich direkt folgendermaßen einsehen, daß $g(x)$ keinen von Null verschiedenen Grenzwert haben kann. Es ist

$$\sum_{\mathfrak{m}|\mathfrak{k}} \mu(\mathfrak{m}) = 1 \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $\mathfrak{k}$ das Einheitsideal ist oder nicht; daher ist

$$1 = \sum_{N\mathfrak{k}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{k}} \sum_{\mathfrak{m}|\mathfrak{k}} \mu(\mathfrak{m}) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\frac{x}{N\mathfrak{n}}} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}}$$

$$= \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{n}}\, g\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right). \tag{66}$$

[1] L. c. (siehe p. 598, Anm. 2), p. 121.

Wäre nun

$$\lim_{x=\infty} g(x) = a > 0,$$

so wäre für alle $x > \omega$

$$g(x) > \frac{a}{2}$$

und für alle x

$$g(x) < b,$$

wo b eine Konstante ist, also nach (66)

$$1 = \sum_{Nn=1}^{\frac{x}{\omega}} \frac{1}{Nn} g\left(\frac{x}{Nn}\right) + \sum_{Nn=\left[\frac{x}{\omega}\right]+1}^{x} \frac{1}{Nn} g\left(\frac{x}{Nn}\right)$$

$$> \frac{a}{2} \sum_{Nn=1}^{\frac{x}{\omega}} \frac{1}{Nn} - b \sum_{Nn=\left[\frac{x}{\omega}\right]+1}^{x} \frac{1}{Nn}. \tag{67}$$

Nach (62) wird das erste Glied der rechten Seite von (67) mit x unendlich, während das zweite dem endlichen Grenzwerte

$$-b\alpha \lim_{x=\infty} \log \frac{[x]}{\left[\frac{x}{\omega}\right]+1} = -b\alpha \log \omega$$

zustrebt. Aus (67) ergibt sich also ein Widerspruch; daher kann nicht

$$a > 0$$

sein. Ebenso erkennt man, daß nicht

$$a < 0$$

sein kann.

Aus (64) folgt also

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0,$$

$$g(x) = -\sum_{Nn=[x]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{Nn} = -\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{G(n)}{n},$$

wo $G(n)$ die über alle Ideale mit der Norm n erstreckte Summe $\Sigma \mu \mathfrak{n}$ bezeichnet; daher ist

$$g(x) = -\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{G(n)\log n}{n} \frac{1}{\log n}$$

$$= -\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\alpha}+f(n)\right)-\left(\frac{1}{\alpha}+f(n-1)\right)\right)\frac{1}{\log n}$$

$$= -\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}+f(n)\right)\left(\frac{1}{\log n}-\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)\right)+$$

$$+\frac{\frac{1}{\alpha}+f(x)}{\log([x]+1)}$$

$$= \left\{\sum_{n=[x]}^{\infty}\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)+\frac{1}{\log x}\right\} = \left\{\frac{1}{\log x}\right\}, \quad (68)$$

und hieraus[1] folgt weiter

$$M(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x}\mu(\mathfrak{n}) = \sum_{n=1}^{x} G(n) = \sum_{n=1}^{x}(g(n)-g(n-1))n$$

$$= \sum_{n=1}^{x} g(n)(n-(n+1))+g(x)([x]+1)$$

$$= -\sum_{n=1}^{x} g(n)+g(x)([x]+1) = \left\{\frac{x}{\log x}\right\}. \quad (69)$$

Die Identität (59) ergibt nun

$$\psi(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x}\mu(\mathfrak{n}) \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\frac{x}{N\mathfrak{n}}} \log N\mathfrak{m} = \sum_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{n}) \log N\mathfrak{m},$$

[1] Oder auch direkt durch partielle Summation aus (17).

wo $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ alle Idealpaare durchlaufen, für welche $N(\mathfrak{n}\mathfrak{m}) \leqq x$ ist; daher ist

$$\psi(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \mu(\mathfrak{n}) \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\frac{x}{N\mathfrak{n}}} \log N\mathfrak{m} +$$

$$+ \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\log^{2k} x} \log N\mathfrak{m} \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{N\mathfrak{m}}} \mu(\mathfrak{n}) - \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \mu(\mathfrak{n}) \cdot \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\log^{2k} x} \log N\mathfrak{m}$$

$$= \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \mu(\mathfrak{n})\, T\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) + \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\log^{2k} x} \log N\mathfrak{m}\, M\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}}\right) -$$

$$- M\left(\frac{x}{\log^{2k} x}\right) T(\log^{2k} x). \qquad (70)$$

Nach (61) ist

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \mu(\mathfrak{n})\, T\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \mu(\mathfrak{n}) \left(\alpha \frac{x}{N\mathfrak{n}} \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} - \alpha \frac{x}{N\mathfrak{n}} + O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{k}}}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}} \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} \right) \right)$$

$$= (\alpha x \log x - \alpha x)\, g\left(\frac{x}{\log^{2k} x}\right) - \alpha x f\left(\frac{x}{\log^{2k} x}\right) +$$

$$+ O x^{1-\frac{1}{k}} \log x \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}}.$$

Hierin ist nach (68)

$$g\left(\frac{x}{\log^{2k} x}\right) = \left\{ \frac{1}{\log \frac{x}{\log^{2k} x}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\log x} \right\},$$

nach (17)

$$f\left(\frac{x}{\log^{2k} x}\right) = -\frac{1}{\alpha} + \{1\}$$

und wegen

$$H(x) = O(x)$$

$$\sum_{Nn=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \frac{1}{Nn^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \frac{H(n)-H(n-1)}{n^{1-\frac{1}{k}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} H(n)\left(\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\frac{1}{k}}}\right) + \frac{H\left(\frac{x}{\log^{2k} x}\right)}{\left(\left[\frac{x}{\log^{2k} x}\right]+1\right)^{1-\frac{1}{k}}}$$

$$= O\sum_{n=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} n\frac{1}{n^{2-\frac{1}{k}}} + O\left(\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\log^2 x}\right) = O\left(\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\log^2 x}\right);$$

also erhält man

$$\sum_{Nn=1}^{\frac{x}{\log^{2k} x}} \mu(n) T\left(\frac{x}{Nn}\right) = \{x\} + x + \{x\} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) = x + \{x\}. \quad (71)$$

Ferner ist nach (69) und (62)

$$\sum_{Nm=1}^{\log^{2k} x} \log Nm\, M\left(\frac{x}{Nm}\right) = \left\{\sum_{Nm=1}^{\log^{2k} x} \log Nm \frac{x}{Nm \log \frac{x}{Nm}}\right\}$$

$$= \left\{\log(\log^{2k} x)\frac{x}{\log \frac{x}{\log^{2k} x}} \sum_{Nm=1}^{\log^{2k} x} \frac{1}{Nm}\right\}$$

$$= \left\{\log\log x \frac{x}{\log x} \log\log x\right\} = \{x\}, \quad (72)$$

endlich nach (69) und (61)

$$M\left(\frac{x}{\log^{2k}x}\right)T(\log^{2k}x)=\left\{\frac{x}{\log^{2k}x\log x}\log^{2k}x\log\log x\right\}$$
$$=\{x\}. \tag{73}$$

Aus (70), (71), (72) und (73) ergibt sich

$$\psi(x)=x+\{x\},$$

was zu beweisen war.

Hätte ich übrigens nicht die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} f(x)=-\frac{1}{\alpha},$$

sondern die bloße Existenz dieses Grenzwertes ($=\gamma$) zu Grunde gelegt, so würde das im Vorangehenden eingeschlagene Verfahren zur Gleichung

$$\psi(x)=-\alpha\gamma x+\{x\} \tag{74}$$

geführt haben. Da ich a. a. O.[1] elementar gezeigt habe, daß der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty}\frac{\psi(x)}{x},$$

falls er existiert, gleich 1 ist, so folgt alsdann aus (74)

$$\gamma=-\frac{1}{\alpha},$$
$$\psi(x)=x+\{x\}.$$

§ 6.

Analog zu § 2 soll nunmehr aus

$$\lim_{x=\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}=1 \tag{1}$$

---

[1] L. c. (siehe p. 598, Anm. 2), p. 140 bis 142.

der Satz

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0 \tag{4}$$

gefolgert werden.

Wenn

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \mu(\mathfrak{n}) \log N\mathfrak{n} = \chi(x)$$

gesetzt wird, ist

$$\chi(x) = -\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \mu(\mathfrak{n})\, \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right); \tag{75}$$

diese Übersetzung der Gleichung

$$-\frac{\zeta_\mathfrak{x}'(s)}{\zeta_\mathfrak{x}^2(s)} = -\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{n}) \log N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^s} = \frac{1}{\zeta_\mathfrak{x}(s)} \cdot \left(-\frac{\zeta_\mathfrak{x}'(s)}{\zeta_\mathfrak{x}(s)}\right)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \cdot \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

(wo $\nu(\mathfrak{n})$ für Primidealpotenzen $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^m$ $(m \geqq 1)$ gleich $\log N\mathfrak{p}$ und sonst $= 0$ ist), ist leicht arithmetisch verifizierbar. In der Tat ist für jedes $\mathfrak{m}$

$$\sum_{\mathfrak{n}|\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{n})\, \nu\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}\right) = -\mu(\mathfrak{m}) \log N\mathfrak{m}, \tag{76}$$

also

$$-\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \mu(\mathfrak{n})\, \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) = -\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \mu(\mathfrak{n}) \sum_{N\mathfrak{k}=1}^{\frac{x}{N\mathfrak{n}}} \nu(\mathfrak{k})$$

$$= -\sum_{\substack{\mathfrak{n},\mathfrak{k} \\ N(\mathfrak{n}\mathfrak{k}) \leqq x}} \mu(\mathfrak{n})\, \nu(\mathfrak{k}) = -\sum_{N\mathfrak{m}=1}^{x} \sum_{\mathfrak{n}|\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{n})\, \nu\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}\right)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{x} \mu(\mathfrak{m}) \log N\mathfrak{m} = \chi(x).$$

Wenn nun

$$\psi(x) = x + x\varepsilon(x)$$

gesetzt wird, so ist nach (1) mit Rücksicht auf (63)

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0;$$

bei gegebenem δ ist also für alle $x > \omega(\delta)$

$$|\varepsilon(x)| < \delta,$$

also für alle $x > \omega$ und $N\mathfrak{n} < \frac{x}{\omega}$

$$\left|\varepsilon\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)\right| < \delta;$$

ferner ist für alle $x \geqq 1$

$$|\varepsilon(x)| < c,$$

wo c konstant ist. Daher folgt bei gegebenem δ für $x > \omega$ aus (75)

$$\chi(x) = -\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \mu(\mathfrak{n}) \left(\frac{x}{N\mathfrak{n}} + \frac{x}{N\mathfrak{n}}\,\varepsilon\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)\right)$$

$$= -xg(x) - x\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}}\,\varepsilon\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right),$$

$$|\chi(x)+xg(x)| < \delta x \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{\omega}} \frac{1}{N\mathfrak{n}} + cx \sum_{N\mathfrak{n}=\left[\frac{x}{\omega}\right]+1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{n}};$$

daher[1] ist für alle hinreichend großen x

$$|\chi(x)+xg(x)| < 2\delta\alpha x \log x + \delta\alpha x \log x = 3\delta\alpha x \log x;$$

[1] Vergl. den ähnlichen Schluß auf p. 620.

d. h. es ist

$$\chi(x)+xg(x)=\{x\log x\}. \tag{77}$$

Nun habe ich a. a. O.[1] elementar bewiesen, daß

$$g(x)=O(1) \tag{78}$$

ist; in Verbindung hiermit folgt aus (77)

$$\chi(x)=\{x\log x\}, \tag{79}$$

$$M(x)=\sum_{n=1}^{x} G(n)=\sum_{n=1}^{x} G(n)\log n\,\frac{1}{\log n}$$

$$=\sum_{n=1}^{x}(\chi(n)-\chi(n-1))\frac{1}{\log n},$$

was wörtlich wie auf p. 610 bis 611 aus (79) die Behauptung

$$M(x)=\{x\} \tag{80}$$

ergibt.

§ 7.

Aus

$$M(x)=\{x\} \tag{80}$$

folgt keineswegs, daß

$$g(x)=\{1\} \tag{81}$$

ist, wenn sich auch umgekehrt (80) aus (81) mit Rücksicht auf die Identität[2]

$$M(x)=-\sum_{n=1}^{x} g(n)+g(x)([x]+1)$$

leicht ergibt. Durch die Betrachtungen von § 6 folgt also nicht aus

$$\lim_{x=\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}=1 \tag{1}$$

---

[1] L. c. (siehe p. 598, Anm. 2), p. 119.
[2] Vergl. p. 621.

die Gleichung

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} = 0. \tag{82}$$

Ich werde jedoch durch Verallgemeinerung meiner Beweismethode[1] für den entsprechenden Satz der elementaren Zahlentheorie die Gleichung (82), d. h. den Satz (3) aus (1) herleiten.

Es ist

$$f(x) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n}) \log N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}} = -\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} g\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right); \tag{83}$$

denn aus (76) ergibt sich

$$-\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} g\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) = -\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \sum_{N\mathfrak{k}=1}^{\frac{x}{N\mathfrak{n}}} \frac{\mu(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}}$$

$$= -\sum_{N\mathfrak{m}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{m}} \sum_{\mathfrak{n}|\mathfrak{m}} \nu(\mathfrak{n})\mu\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}\right)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{m}) \log N\mathfrak{m} = f(x).$$

Wegen

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \nu(\mathfrak{n}) = \psi(x) = x + x\varepsilon(x)$$

folgt aus (83)

$$-f(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n} g\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n=1}^{x} \frac{n\varepsilon(n)-(n-1)\varepsilon(n-1)}{n} g\left(\frac{x}{n}\right)$$

[1] L. c. (siehe p. 591, Anm. 1).

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n=1}^{x} n\varepsilon(n)\left(\frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{n+1} g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n=1}^{x} \varepsilon(n)\left(g\left(\frac{x}{n}\right) - g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{x} \frac{\varepsilon(n)}{n+1} g\left(\frac{x}{n+1}\right). \quad (84)$$

Hierin ist, wenn C die Euler'sche Konstante bezeichnet,

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\frac{x}{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \sum_{n=1}^{\frac{x}{N\mathfrak{n}}} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \left(\log \frac{x}{N\mathfrak{n}} + C + O\frac{N\mathfrak{n}}{x}\right)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} + C \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} + \frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} 1; \quad (85)$$

nach (65), (78) und (60) hat jedes Glied der rechten Seite von (85) die Form $O(1)$; daher ist

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right) = O(1). \quad (86)$$

Nach Annahme von δ ist wegen (1) für $x > \omega(\delta)$

$$|\varepsilon(x)| < \delta,$$

und für alle x ist

$$|\varepsilon(x)| < c,$$

sowie nach (78)

$$|g(x)| < c_1.$$

Daher ist für alle $x > \omega$

$$\left|\sum_{n=1}^{x} \varepsilon(n)\left(g\left(\frac{x}{n}\right)-g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)\right|$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\omega} c(c_1+c_1)+\delta \sum_{n=\omega+1}^{x} \left|g\left(\frac{x}{n}\right)-g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|$$

$$= 2cc_1\omega+\delta \sum_{n=\omega+1}^{x} \left| \sum_{\mathfrak{n}=\left[\frac{x}{n+1}\right]+1}^{\frac{x}{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \right|$$

$$\leqq 2cc_1\omega+\delta \sum_{n=1}^{x} \sum_{N\mathfrak{n}=\left[\frac{x}{n+1}\right]+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = 2cc_1\omega+\delta \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{n}};$$

wegen (62) ist somit

$$\sum_{n=1}^{x} \varepsilon(n)\left(g\left(\frac{x}{n}\right)-g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right) = \{\log x\}. \tag{87}$$

Ebenso folgt für $x > \omega(\delta)$

$$\left|\sum_{n=1}^{x} \frac{\varepsilon(n)}{n+1}\, g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right| \leqq c_1 \sum_{n=1}^{x} \frac{|\varepsilon(n)|}{n}$$

$$< c_1\left(c \sum_{n=1}^{\omega} \frac{1}{n} + \delta \sum_{n=\omega+1}^{x} \frac{1}{n}\right),$$

also

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\varepsilon(n)}{n+1}\, g\left(\frac{x}{n+1}\right) = \{\log x\}. \tag{88}$$

(86), (87), (88) ergeben, in (84) eingesetzt,

$$-f(x) = O(1)+\{\log x\}+\{\log x\},$$
$$f(x) = \{\log x\},$$

also nach (65)

$$\log x g(x) - \{\log x\} = O(1),$$
$$\log x g(x) = \{\log x\},$$
$$g(x) = \{1\},$$

was zu beweisen war.

§ 8.

Unter Benutzung der Sätze

$$\zeta_\varkappa(1+ti) \neq 0$$

und

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} = \zeta_\varkappa(1+ti) - \frac{\alpha}{ti}\frac{1}{x^{ti}} + O\left(x^{-\frac{1}{k}}\right), \quad (t \gtrless 0),$$

die ich a. a. O.[1] bewiesen habe, ergibt sich analog zu § 4 folgender Beweis der Relation

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} = O(1),^{2}$$

wo $t \gtrless 0$ ist.

Es ist

$$1 = \sum_{N\mathfrak{l}=1}^{x} \frac{1}{N\mathfrak{l}^{1+ti}} \sum_{\mathfrak{n}|\mathfrak{l}} \mu(\mathfrak{n}) = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} \sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\frac{x}{N\mathfrak{n}}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{1+ti}}$$

$$= \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} \left(\zeta_\varkappa(1+ti) - \frac{\alpha}{ti}\frac{N\mathfrak{n}^{ti}}{x^{ti}} + O\left(\frac{N\mathfrak{n}^{\frac{1}{k}}}{x^{\frac{1}{k}}}\right)\right)$$

$$= \zeta_\varkappa(1+ti) \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} - \frac{\alpha}{tix^{ti}} \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} +$$

---

[1] L. c. (siehe p. 598, Anm. 2), p. 86 und 113.

[2] Tatsächlich konvergiert sogar die Reihe $\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$, wie ich in der auf p. 596, Anm. 2 zitierten Arbeit (p. 565) unter Anwendung tieferer Eigenschaften der Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ gezeigt habe.

$$+O\frac{1}{x^{\frac{1}{k}}}\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x}\frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}}$$

$$=\zeta_{\varkappa}(1+ti)\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x}\frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}+O(1)+O(1),$$

$$\zeta_{\varkappa}(1+ti)\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x}\frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}=O(1),$$

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{x}\frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}=O(1).$$

Über den Einfluß räumlich und zeitlich variierender Lichtreize auf die Gesichtswahrnehmung

von

E. Mach,

w. M. k. Akad.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1906.)

1. Vor 40 Jahren habe ich an rotierenden Scheiben, dann an Schatten und an den mannigfaltigsten Gesichtsobjekten Erscheinungen bemerkt, deren weitere Verfolgung mich zur Annahme einer eigentümlichen organischen Wechselbeziehung der Netzhautstellen geleitet hat.[1] Diese Erscheinungen lassen sich insofern noch am besten als Kontrasterscheinungen bezeichnen, als die bis dahin so benannten Phänomene als besondere Fälle der von mir beobachteten aufgefaßt werden können. Läßt man alles Unverbürgte, jede vorgefaßte Meinung beiseite, so kann das Tatsächliche in folgender Weise ausgedrückt werden: Die Beleuchtung einer Netzhautstelle wird nach Maßgabe der Abweichung dieser Beleuchtung von dem Mittel der Beleuchtungen der Nachbarstellen heller, beziehungsweise dunkler empfunden, je nachdem ihre Beleuchtung ober, beziehungsweise unter jenem Mittel liegt.

[1] Über die Wirkung der räumlichen Verteilung des Lichtreizes auf die Netzhaut. Diese Sitzungsberichte, Bd. 52, 1865; Fortsetzung Bd. 54, 1866; Fortsetzung Bd. 57, 1868. Die erste Seite der zweiten Abhandlung enthält einen offenbaren Lapsus, der aber auf das Folgende keinen Einfluß geübt hat. — Über die Abhängigkeit der Netzhautstellen voneinander. Vierteljahrsschrift für Psychiatrie, 1868. — Analyse der Empfindungen, Jena 1886, p. 92, 5. Aufl., 1906, p. 176.

Das Gewicht der Netzhautstellen in jenem Mittel ist hiebei als mit der Entfernung von der betrachteten Stelle rasch abnehmend zu denken. Man kann diese Beziehung auch annähernd (symbolisch) durch eine Formel ausdrücken. Nennen wir die Beleuchtungsstärke u einer gleichmäßigen matten Ebene $u = f(x,y)$, so ist die Helligkeitsempfindung v der entsprechenden Netzhautstelle bestimmt durch $u - m\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right)$, wobei m eine Konstante ist. Ist der geklammerte Ausdruck positiv, so wird die Helligkeitsempfindung abgeschwächt, im gegenteiligen Fall aber verstärkt. Es wird also v nicht nur von u, sondern auch von dessen zweiten Differentialquotienten beeinflußt. Diese Formel kann als eine kurze Zusammenfassung der Erscheinungen angesehen werden, solange die Krümmungsradien der Elemente der Fläche f (bei Reduktion der x, y auf die Netzhautbildgröße) als groß gegen den Durchmesser eines Netzhautelementes angenommen werden. Sie ist aber keine Maßformel, sondern ist nur so zu verstehen, daß mit dem Werte, den sie ergibt, auch die Helligkeit v wächst und abnimmt. Von einer eigentlichen Messung der Helligkeitsempfindung kann ja keine Rede sein. Die Netzhaut ist außerdem kein Kontinuum, für welches allein der Differentialquotient einen exakten Sinn hat, sondern besteht aus Elementen von endlicher Ausdehnung. Hat z. B. die Fläche, deren Gleichung $u = f(x, y)$ ist, Knickungen, so werden die zweiten Differentialquotienten von u unendlich und die Formel wird unbrauchbar. Das Auge sieht in diesem Falle natürlich keine unendlich großen Erhellungen und Verdunklungen, auf mathematische Linien beschränkt, sondern allerdings starke, aber verwaschene Erhellungen oder Verdunklungen, hellere oder dunklere Streifen.

Lassen wir uns durch die Beachtung des Helligkeitsmittels der Umgebung der betrachteten Netzhautstelle leiten, so wird unsere Erwartung nie enttäuscht.

2. Meine Abhandlungen sind lange fast unbekannt oder unbeachtet geblieben, so zwar, daß die betreffenden Tatsachen mehr als 30 Jahre später noch von unabhängigen Beobachtern

wieder entdeckt werden konnten.[1] Nachdem sich nun das Interesse der Physiologen und Physiker diesem Gegenstande zugewendet hat, möchte ich meiner früheren Darstellung doch einige Erläuterungen und Verbesserungen hinzufügen.

3. Ich beginne mit Bemerkungen über die Experimente, die ich seinerzeit mit den primitivsten Mitteln ausführen mußte. Wenn man den Schatten der Kante eines Hauses im Sonnenlicht mit einem weißen Papier auffängt, so bemerkt man dem oben erwähnten Gesetz gemäß an der Grenze zwischen dem Kernschatten K und dem Halbschatten H eine dunkle Linie d, an der Grenze zwischen dem Halbschatten H und dem voll erleuchteten Raum V eine helle Linie h, obgleich der Übergang an beiden Grenzen kontinuierlich ist und ohne Minimum oder Maximum stattfindet. Auch an dem eigenen Schatten, wenn derselbe auf recht gleichmäßigen Grund fällt, oder bei Bewegung selbst auf einem Sandwege, kann man dieselbe Beobachtung machen. In diesen Fällen wird die Erscheinung noch durch das diffuse Tageslicht abgestumpft, ebenso wie bei analogen Beobachtungen im hellen Zimmer. Sehr schön tritt jedoch die Erscheinung auf, wenn man im Dunkelzimmer das große Objektiv eines Fernrohres in die Heliostatenöffnung des Fensterladens einpaßt und bei entferntem Okular das Sonnenbild auf einer matten, durchscheinenden Tafel aus Glas oder Zelluloid auffängt. Dieser genügend gleichmäßig nach allen Seiten strahlenden Lichtquelle kann man durch undurchsichtige Schirme mit verschiedenen Öffnungen eine beliebige Größe und Form geben. Wünscht man eine größere Lichtquelle und ist eine geringere Intensität zureichend, so genügt ein kurzes, an die Heliostatenöffnung angefügtes, mit einer matten Tafel verschlossenes Rohr. Dann fällt einfach das Sonnenlicht ohne Linse ein und man setzt Diaphragmen D von beliebiger

[1] Vergl. H. Seeliger, Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Abhandlung der Münchener Akademie, 1896. — H. Haga und C. H. Wind, Beugung der Röntgenstrahlen. Wiedemann's Annalen, Bd. 68 (1899) p. 866. — C. H. Wind, Zur Demonstration einer von E. Mach entdeckten optischen Täuschung. Physik. Zeitschr. von Riecke und Simon, I, Nr. 10. — A. v. Obermayer, Über die Säume um die Bilder dunkler Gegenstände auf hellem Hintergrunde. Eder's Jahrbuch für Photographie, 1900.

Form und Größe der Öffnung unmittelbar an die matte Tafel. Der Schatten, welchen die durch D begrenzte erleuchtete Tafel von dem Rande R eines undurchsichtigen Schirmes auf einen weißen Papierschirm P wirft, zeigt nun die Erscheinung in voller Reinheit und Intensität. Zwischen K und H erscheint die bedeutend dunklere Linie d, zwischen H und V aber die hellere Linie h. Besser noch eignet sich zum Abfassen des Schattens von R statt eines ruhenden Papierschirmes eine weiße rotierende Papierscheibe. Fällt der Schatten auf bedrucktes oder sonst ungleichmäßig helles Papier, so sieht man von der Erscheinung nichts; dieselbe tritt aber durch eine Art Abstraktion sofort hervor, so wie man das Papier in seiner Ebene senkrecht gegen die Linien d oder h bewegt. Diese Linien können sich auch unter den günstigsten Umständen der Aufmerksamkeit zeitweilig ganz entziehen. Dann nimmt man dafür eine andere auffallende Erscheinung wahr. Es liege z. B. für den Beobachter K links, V rechts. Der Streifen zwischen d und h erscheint dann dem mit dem Rücken gegen das Licht gekehrten Beschauer entweder als ein konvexer, von rechts her beleuchteter Wulst oder als eine konkave, von links her beleuchtete Furche. Auf diese Erscheinung der Plastik kommen wir noch zurück.

4. Das eben beschriebene Verfahren, welches gegenüber der Anwendung rotierender, mit Sektoren bemalter Scheiben manche Vorteile und Bequemlichkeiten bietet, gestattet bei geringer Modifikation die Herstellung sehr mannigfaltiger Helligkeitsverteilungen. Es sei x die horizontale Mittellinie einer Diaphragmenöffnung D auf der matten Tafel. Die zu x senkrechte, die Grenze des Ausschnitts bestimmende Ordinate y werde nach oben und unten gleich und so gewählt, daß $y = f(x)$. Stellt man nun einen Schirm S mit einer langen vertikalen, zu y parallelen schmalen Spalte s und hinter denselben einen Papierschirm P, so erhält man auf diesem eine Helligkeitsverteilung, welche in dem Schnitt mit der Horizontalebene durch x (und nicht allzu weit von demselben) sehr nahe der Form $u = k . f(x)$ entspricht, wobei k einen konstanten Faktor bedeutet. Durch Wahl der Entfernung des P von D sowie durch passende Stellung von S auf der Strecke DP kann

über die Größe der Abbildung auf P verfügt werden. Außerdem hat noch die Breite der Spalte s auf Helligkeit und Schärfe der Abbildung Einfluß. Man wählt natürlich eine enge Spalte, doch nicht zu eng, um die Helligkeit zu sehr herabzusetzen und die Beugung nachteiligen Einfluß auf die Schärfe gewinnen zu lassen. Vorteilhaft ist es, statt der ruhenden beiderseits mattierten Zelluloidscheibe vor dem Diaphragma eine ebensolche rotierende Scheibe anzuwenden.

5. Um größere Helligkeit der Bilder zu gewinnen, macht man die Spalte s mehrere Zentimeter breit und paßt in dieselbe eine Zylinderlinse mit zu y paralleler Zylinderachse ein. Nun muß man allerdings dafür sorgen, daß SD und SP konjugierte Brennweiten seien. Wir werden von diesen Anordnungen Gebrauch machen, dieselben aber nicht mehr im einzelnen beschreiben, sondern auf das hier Gesagte verweisen.

6. Wir werfen von dem geraden vertikalen Rand R eines undurchsichtigen Schirmes durch eine hell erleuchtete matte Tafel einen Schatten. Die Diaphragmenöffnung wählen wir quadratisch mit vertikaler Seite, dann kreisförmig und wieder quadratisch mit vertikaler Diagonale. Die oberen Hälften der Ausschnitte, deren größte horizontale Dimensionen wir für alle drei dem Durchmesser des Kreises gleich nehmen, sind in der Fig. 1 durch Q, C, P dargestellt. Wir setzen voraus, daß die von allen Ausschnitten gelieferte Gesamtlichtstärke gleich ist, demnach die Lichtstärken der Flächeneinheit sich beziehungsweise wie 1 zu $4/\pi$ zu 2 verhalten. Man beobachtet dann, daß d zwischen K und H am dunkelsten und h zwischen H und V am hellsten ist im ersten Fall; beide sind noch sehr deutlich im zweiten Fall, treten aber viel schwächer auf im dritten Fall. Nennen wir wieder u die Beleuchtungstärke im Halbschattenraum, x die Abszisse auf der Mittellinie, von der Grenze des Kernschattens an gezählt, so veranschaulichen die Ordinaten der Kurven Q, C, P geradezu den Gang von $\frac{du}{dx}$ im Halbschattenraum, nur muß man sich dieselben beziehungsweise in den Verhältnissen 1, $4/\pi$, 2 vergrößert denken. Den Gang der Beleuchtungsstärke u im Halbschattenraum, der sich durch

Integration von $\frac{du}{dx}$ ergibt, stellen die Kurven im Felde $H_1 H_2 H_1' H_2'$ dar. Wie unmittelbar durch den Anblick der Figur sich ergibt, entspricht Q ein ganz gleichmäßiges Ansteigen von u, eine Gerade, welche bei H_1 und H_2' durch Knickung in Horizontale übergeht. Für P wird der Anschluß zwischen den Horizontalen durch zwei kongruente, zentrisch symmetrisch liegende Parabelstücke gebildet, die bei H_1 und H_2' mit den Scheiteln die Horizontalen und bei m sich selbst berühren. Die Kurve von u für C liegt zwischen den beiden vorigen und hat mit diesen die Punkte H_1, H_2' und m gemein.[1] Man sieht ohneweiters, daß die Abweichungen vom Mittel bei H_1, H_2' am größten sind für Q, am kleinsten für P, was mit dem Ergebnis der Versuche übereinstimmt.

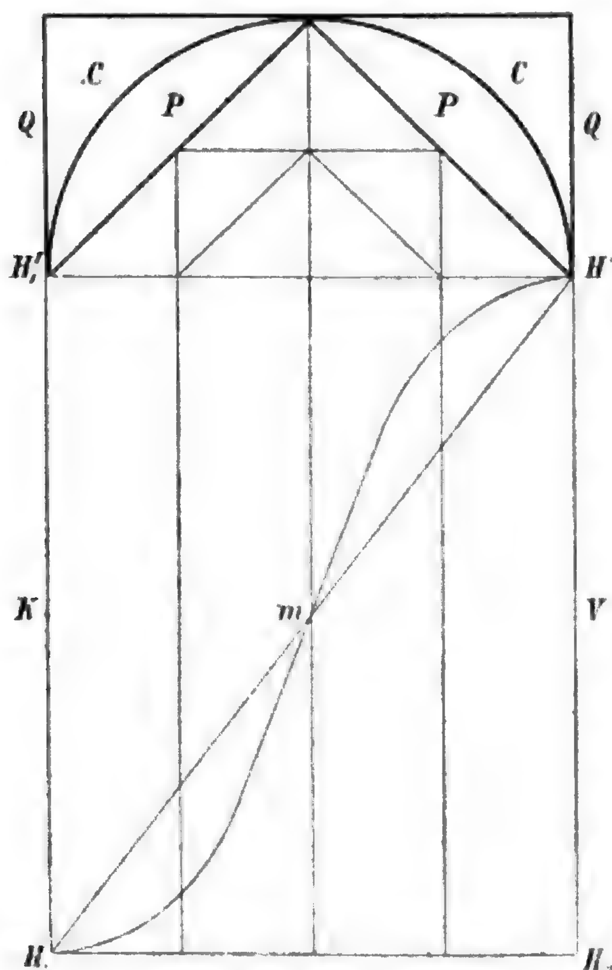


Fig. 1.

7. Die Versuche mit nur nach einer Richtung variierender Beleuchtungsstärke sind auf verschiedene Weise einfach ausführbar. Will man aber eine Fläche mit einer nach zwei Richtungen variierenden Beleuchtungsstärke versehen, so ist man schon in der Wahl der Mittel etwas beschränkt. Am bequemsten kombiniert man zwei nach verschiedenen Richtungen variierende Beleuchtungen in der Form

[1] Diese in die Figur nicht aufgenommene Kurve erhält man, indem man als Abszisse $r(1-\cos\alpha)$, als Ordinate $r^2/2.(\arcsin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$ aufträgt, wie sich durch eine einfache Integration, aber auch schon durch eine elementargeometrische Betrachtung ergibt. Die Rechnung gibt für die Anfangswerte

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0}=0,\quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=0}=\infty.$$

$\varphi(x)+\psi(y)$ oder auch in der zweiten Form $\varphi(x).\psi(y)$. Das erstere geschieht, indem man zwei verschiedene unabhängige Beleuchtungen summierend übereinanderlegt,[1] wobei aber die Wirkung einer Beleuchtung durch die andere abgestumpft wird. Die Abstufungen der Helligkeit bleiben stärker und verlieren nicht ihren Charakter durch das zweite Verfahren. Wenn eine Fläche die materielle Eigenschaft hat, bei gleichmäßiger Beleuchtung mit der Intensität i an verschiedenen Stellen in ungleicher Helligkeit, und zwar nach dem Gesetz $i\varphi(x)$ auszustrahlen, so wird sie bei der Beleuchtung $\psi(y)$ die Lichtverteilung $\varphi(x).\psi(y)$ darbieten. Das letztere geschieht z. B., wenn man auf eine mit weißen und schwarzen Sektoren bemalte rotierende Scheibe, deren Helligkeit nach der Richtung eines (vertikalen) Radius nach dem Gesetz $\varphi(x)$ variiert, im Dunkelzimmer den Schatten eines vertikalen Schirmrandes mit der horizontalen Helligkeitsvariation $\psi(y)$ fallen läßt. Wo sich x und y senkrecht kreuzen, hat man die der zweiten Form entsprechende Lichtverteilung. Denkt man sich in der undurchsichtigen rotierenden Scheibe statt der weißen Sektoren das Licht des Randschattens durchlassende Ausschnitte, so kann man dieselbe Lichtverteilung auf einem ruhenden Schirm erhalten. Die Sternscheibe Fig. 2, mit einem Randschatten kombiniert, zeigt zwei sich durchkreuzende Liniensysteme von der Art der oben durch d und h bezeichneten.

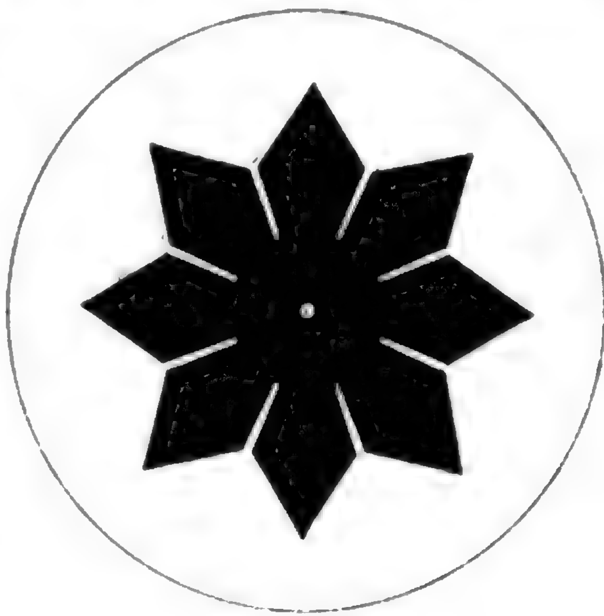


Fig. 2.

8. Mit Hilfe der in 3 bis 7 beschriebenen Vorkehrungen kann man in mannigfaltiger Weise nach einer Richtung

[1] Mann kann zwei Projektionen auf einem Schirm zur Deckung bringen oder auch das Bild einer rotierenden Scheibe durch Spiegelung in einem unbelegten Planglas mit einer zweiten rotierenden Scheibe optisch vereinigen.

variierende Helligkeiten auf rotierende Scheiben oder Zylinder projizieren, deren Helligkeit (Diffusionsvermögen, Albedo) nach der dazu senkrechten Richtung variiert. Man kann sich hiebei überzeugen, daß starke Krümmungen der der Gleichung $u = \varphi(x).\psi(y)$ entsprechenden Fläche optisch ähnlich, wenn auch schwächer wirken wie Knickungen. Solche Versuche habe ich vor 40 Jahren in etwas umständlicher Weise durch Überdeckung und Kreuzung durchsichtiger Photographien rotierender Scheiben und Zylinder ausgeführt. Die zarten Kollodiumplatten eigneten sich hiezu besser als die jetzt üblichen Trockenplatten mit ihrem gröberen Korn.[1]

9. Im allgemeinen dient unser optischer Apparat dazu, Flächen, Linien, Punkte, also Grenzen von räumlichen Gesichtsobjekten wahrzunehmen. Allein wir wissen alle, daß wir unter besonderen Umständen auch einen leuchtenden körperlichen Raum mit seinem ganzen Inhalt sehen können. Denken wir uns z. B. eine Anzahl kongruenter Rechtecke aus weißem Karton, die sich ungefähr unter gleichen Winkeln in den zusammenfallenden homologen Symmetralen schneiden, und lassen wir dieses System von »Flügeln« um die Symmetrale als Achse rasch rotieren, so sehen wir einen von weißem, gegen die Achse zu dichterem Nebel erfüllten Zylinder, einen in seinem ganzen Raum leuchtenden Zylinder, den wir von einem in durchscheinender zylindrischer Hülle eingeschlossenen leeren Raum ganz wohl zu unterscheiden wissen. Nehmen wir die Flächen dieser Rechtecke rot, setzen aber an die homologen Stellen derselben etwa kleine kongruente grüne Quadrate, so daß sich die Rotationsbahnen derselben vollständig decken, so sehen wir einen rot durchleuchteten Zylinder, in welchem ein grün durchleuchteter vierkantiger Ring schwebt. Die Kanten, die Flächen und die Körperlichkeit sind hiebei vollkommen deutlich. Jedes beliebige Fleckchen, welches wir auf den Flügelflächen anbringen, erscheint in der Rotation sofort körperlich. Durch Variation der

[1] Es führt zu keinem brauchbaren Ergebnis, eine mit Sektoren bemalte rotierende Scheibe durch eine zweite mit Ausschnitten versehene rotierende Scheibe zu betrachten oder zu beleuchten, weil zwei kombinierte Rotationen Radspeichenkurven erzeugen.

Versuche erkennt man aber doch, daß dieser Effekt nur durch günstige stereoskopische Verhältnisse, hinreichende Differenz beider monokularer Bilder, Kopfbewegungen u. s. w. gesichert ist. Die kleineren Abweichungen der Helligkeit vom Mittel der Umgebung, wie sie dem in 1 mitgeteilten Gesetz entsprechen, wird man im allgemeinen in durchleuchteten Räumen nicht wahrnehmen können, da die Lichter verschiedener Tiefen sich überdecken, übertäuben und keinen deutlichen stereoskopischen Effekt werden aufkommen lassen. Läßt man z. B. auf die rotierend einen Zylinderraum beschreibenden Flügel aus weißem Karton im Dunkelzimmer wie in 3 einen Randschatten fallen, so erhält man, an die dort gebrauchten Bezeichnungen anknüpfend, einen Kernschatten raum *K* und einen Halbschatten raum *H*, welche durch eine dunklere Ebene *d* gegeneinander abgegrenzt sind, während *H* selbst durch eine hellere Ebene *h* von dem Raum *V* geschieden ist. Man sieht aber *d* und *h* nur, wenn man sich fast in der Ebene *d* oder *h* befindet.

10. Die Summe der zwei zweiten Differentialquotienten, deren optische Bedeutung in 1 angegeben ist, erinnert jeden Physiker an den entsprechenden dreigliedrigen Ausdruck der Laplace'schen und Poisson'schen Gleichung, welche in allen Gebieten der Physik eine so wichtige Rolle spielt. Auch handelt es sich hier um keine bloße äußerliche Ähnlichkeit, wie schon das einfachste Beispiel lehrt. Betrachten wir etwa den Schatten eines vertikalen Schirmrandes, welcher durch ein leuchtendes Quadrat mit einem vertikalen Seitenpaar auf einer vertikalen weißen Tafel entworfen wird. Die Beleuchtungsstärke nimmt hier in *H* von *K* gegen *V* genau in demselben Maße zu wie das Potential zwischen zwei unendlichen parallelen ebenen Franklin'schen Tafeln, von welchen die erste (*d* entsprechende) zur Erde abgeleitet, die zweite (*h* entsprechende) aber positiv geladen ist. In der Tat sieht man bei dieser Darstellung die Ladungen als Abweichungen vom Mittel der Potentiale, und zwar die negative Ladung (bei *d*) als Verdunkelung, die positive Ladung (bei *h*) als Erhellung. Diese Beispiele ließen sich beliebig vermehren. Faßt man die Laplace-Poisson'sche Gleichung als Aussage über die Abweichung

eines Punktes vom Mittel der unendlich kleinen Umgebung in Bezug auf irgend eine Eigenschaft auf, so gelangt man leicht zu einer Erweiterung derselben für endliche Umgebungen.[1]

11. Es muß jedem Unbefangenen auffallen, daß die zweiten Differentialquotienten der Beleuchtungsstärke auf die Empfindung der Helligkeit einen so bedeutenden Einfluß üben, während die ersten Differentialquotienten in ihrer Wirkung sehr zurücktreten. Die konstante Steigung der Beleuchtungsstärke einer Fläche nach einer Richtung bemerkt man kaum. Es sind im Gegenteil besondere Veranstaltungen nötig, um sich von der großen Differenz der Beleuchtungsstärke nahe aneinander liegender Stellen unter diesen Umständen zu überzeugen. Die ersten Differentialquotienten, nach einer Richtung genommen, scheinen weniger die Wahrnehmung der Helligkeit als vielmehr jene der Plastik zu bestimmen. Jeder, der mit rotierenden Scheiben oder Zylindern experimentiert, die mit Sektoren von verschiedener Form versehen sind, kennt die schönen Erscheinungen der Plastik, welche dieselben darbieten. Wenn man die Fig. 3 als Zylindermantel verwendet, wobei *ab* parallel zur horizontalen Rotationsachse bleibt, so sieht man entweder vertikale, von rechts her beleuchtete Furchen oder von links her beleuchtete Wülste auf dem rotierenden Zylinder. Der geübte Beobachter kann leicht zwischen den beiden Eindrücken wählen und wechseln, sobald er dem von hinten einfallenden Licht den Rücken zukehrt. Sobald aber das Licht wirklich von rechts oder links einfällt und die durchscheinenden Hüllen der Bulbi nicht künstlich gegen dieses Licht geschützt sind, besteht ein starker Zwang, das erste, beziehungsweise das zweite Bild zu sehen. Das durch die Hüllen der Bulbi dringende Licht scheint hier eine mitbestimmende Rolle zu spielen, wie bei Fechner's »seitlichem Kerzen- und Fensterversuch«. Um diese Erscheinungen auf

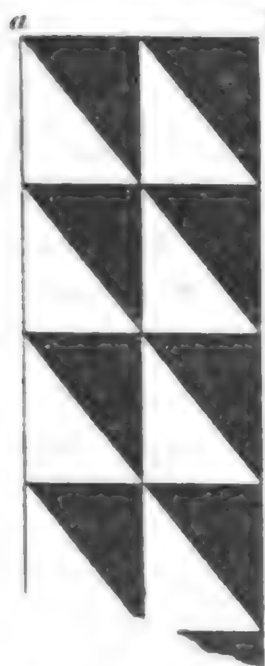


Fig. 3.

[1] Vergl. Prinzipien der Wärmelehre, 2. Aufl., 1900, p. 118.

einen übersichtlichen symbolischen Ausdruck zu bringen, denken wir uns eine konvexe oder konkave Zylinderfläche mit kreisförmiger horizontaler ebener Leitlinie und vertikaler Erzeugenden, das Licht aber horizontal von links oder rechts (senkrecht zur Medianebene des Beschauers) einfallend; die Richtung von rechts nach links oder umgekehrt heiße x, jene von vorn nach hinten oder umgekehrt heiße τ. Man kann dann sagen: Mit dem Wert des ersten Differentialquotienten der Beleuchtungsstärke des Flächenelementes $\frac{du}{dx}$ nimmt zu und ab der Wert des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2\tau}{dx^2}$, der Tiefe τ des beleuchteten Elementes nach derselben Richtung x.[1]

12. Besonders lebhaft tritt die durch Beleuchtung bedingte Plastik hervor, wenn die Beleuchtung zeitlich variiert. Der folgende Versuch ist sehr einfach. Man nehme (Fig. 4) einen rechteckigen Kartonschirm *abcd*, der um die Horizontalachse x drehbar, aber groß genug ist, um auch bei beträchtlicher Neigung gegen die Vertikale noch die ganze matte leuchtende Tafel zu decken. Dann schneide man das Fenster *mnpq* heraus und teile den ganzen Schirm durch den vertikalen Schnitt *yy* in zwei Teile, die um einen festen Winkel auf der Achse *xx* gegeneinander verdreht werden. Dreht man nun den ganzen Schirm vor der leuchtenden Tafel um *xx* hin- und her, so wird abwechselnd bald die rechte, bald die linke Hälfte der leuchtenden Tafel größer. Das Bild der Tafel, durch eine vertikale Spalte oder Zylinderlinse auf einem Schirm entworfen (vergl. 5), spiegelt uns aber ein Blatt mit vertikaler Knickungslinie vor, welches Drehungen um diese als Achse ausführt, wobei die beiden Hälften ihre Helligkeit tauschen.

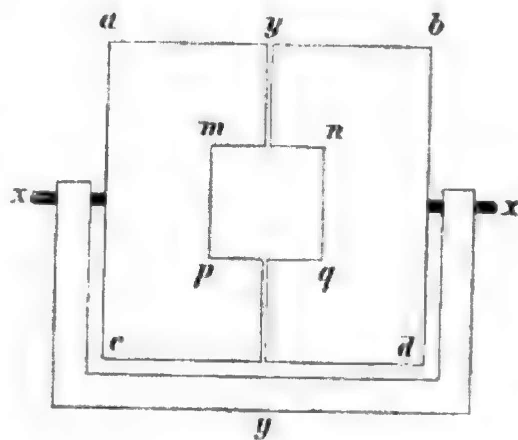


Fig. 4.

[1] Vergl. Analyse der Empfindungen, Jena, 1886, p. 87; 5. Aufl., 1906, p. 179.

13. Überraschend ist folgender Versuch. Die erleuchtete Zelluloidplatte wird durch ein Diaphragma begrenzt (Fig. 5), welches aus beweglichen Sektoren besteht. Diese Sektoren *S* drehen sich um Stifte *p*, die in die Zelluloidplatte *Z* fest eingelassen sind, und greifen mit Stiften *q* in einen Schieber *V*, durch den sie sämtlich in übereinstimmender Weise gedreht werden können, z. B. so, daß anfänglich alle links liegenden geradlinigen Begrenzungen der Sektoren vertikal sind, nach der Verschiebung aber die rechts liegenden Grenzen vertikal stehen. Wenn man nun von der so ausgerüsteten Platte mit Hilfe einer vertikalen Spalte oder einer Zylinderlinse ein Bild auf einem Schirm entwirft, so erblickt man auf diesem z. B. eine Anzahl vertikaler Furchen, die durch vorspringende Kanten voneinander getrennt sind. Bei Umstellung des Schiebers verwandelt sich jede Kante in einen schmalen Wulst, welcher breiter wird, schließlich die ganze Furche aufzehrt, so daß endlich nur durch einspringende Kanten getrennte Wülste übrig bleiben. Da die Auffassung des Bildes doppelsinnig ist, so kann bei derselben Verschiebung ebensogut die Umwandlung der Wülste in Furchen sich zeigen.

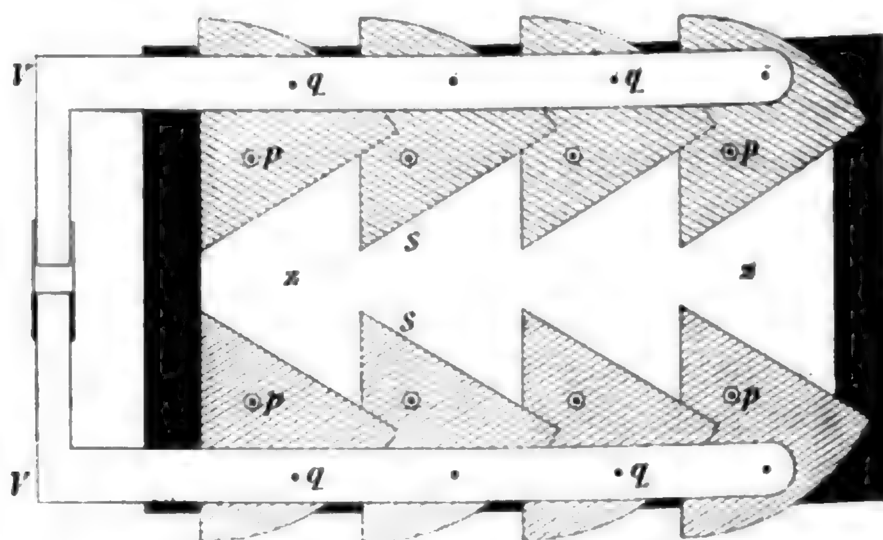


Fig. 5.

14. Der Verlauf der beschriebenen Erscheinung kann in allen Einzelheiten an der Konstruktion Fig. 6 *a* und *b* überschaut werden. Die Beleuchtungsstärke auf dem Projektionsschirm, auf die Abszisse *xx* bezogen, sei durch die Zickzacklinie dargestellt; sie bewege sich linear zwischen 0 und 1 hin

und her. Eine solche lineare Verteilung (Fig. 6 *a*) würde sich dem Beschauer bei I darbieten, wenn das von links einfallende Licht auf eine Reihe aneinander schließender Kreiszylinderquadranten[1] mit vertikaler Achse so treffen würde, daß es, jede in der Zeichnung links liegende Quadrantengrenze streifend, jede rechts liegende normal beleuchten müßte. Denselben Anblick hätte auch der Beschauer bei II, bei von rechts einfallendem Licht. Ändern wir die Lichtvariation wie in Fig. 6 *b*

Fig. 6 *a*.

etwas ab, so daß nun dieselbe Variation von 0 bis 1 ungleichsinnig und auf verschieden große Strecken entfällt, so sind jetzt abwechselnde Zylinderquadranten von ungleichem Kreisradius und alternierend gestellter Konkavität und Konvexität nötig, damit diese Lichtverteilung sich realisiere.

15. Es ist wohl kaum nötig, darauf hinzuweisen, daß die Struktur der Netzhaut nicht überall gleichmäßig und gleich fein ist. Der Einfluß der zweiten Differentialquotienten wird

[1] Vergl. die dritte der p. 633 erwähnten Abhandlungen, diese Sitzungsberichte, 1866, Oktoberheft.

also in den peripherischen Teilen der Netzhaut zurücktreten. Wenn ich einen Zylinder mit schwarzen und weißen geknickten Sektoren in Rotation versetze, so sehe ich beim Fixieren der betreffenden Stellen die hellen und dunklen Streifen sehr deutlich. Stelle ich mich aber in etwa 150 *cm* Entfernung von dem rotierenden Zylinder auf und bringe eine verschiebbare Marke neben demselben an, die ich fixiere, so kann ich durch Abmessen der Entfernung der Marke von den Streifenstellen in Millimetern leicht mich überzeugen, daß diese Streifen schon

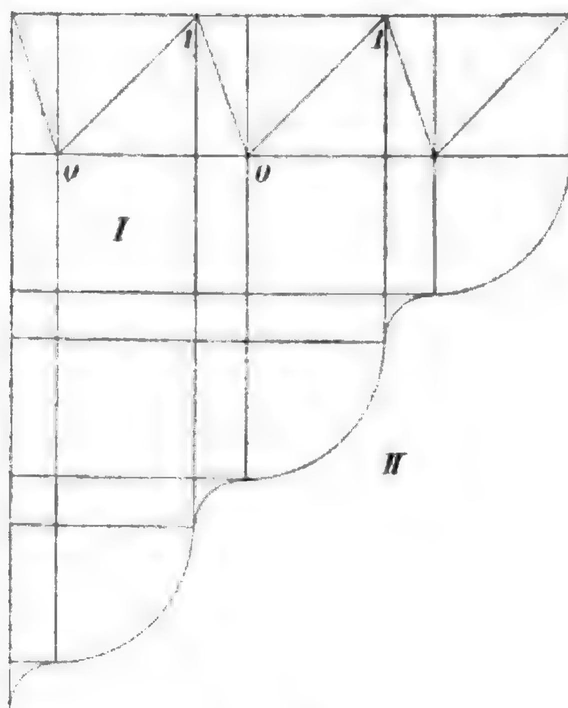


Fig. 6 *b*.

verschwinden, wenn der Fixationspunkt etwa 3 Grade seitwärts von denselben liegt. Allerdings muß ich sorgfältig darauf achten, unwillkürliche Blickbewegungen, welche schon durch die bloße Erinnerung an die seitwärts liegenden Streifen ausgelöst werden, zu unterdrücken.

16. Um mir eine Vorstellung davon zu verschaffen, wie weit ungefähr die Netzhautelemente von der fixierten Stelle liegen, welchen man noch einen merklichen Einfluß auf die letztere zuschreiben kann, verfuhr ich in folgender Art. Die hell erleuchtete matte Tafel wurde mit einem Diaphragma *D* bedeckt, dessen Öffnung die Form und Orientierung der Fig. 7 hatte. Von diesem leuchtenden Objekt entwarf eine in einen

Schirm eingepaßte Zylinderlinse *C* mit vertikaler Zylinderachse und mit der Brennweite von 60 *cm* auf einer matten Zelluloidscheibe *Z* ein scharfes Bild *B* von nahezu rechteckiger Form, welches, der Knickungstelle *kk* der Diaphragmenöffnung entsprechend, einen schönen vertikalen dunklen Streifen *ss* aufwies. Alle vertikalen Linien dieses Bildes zeigten bis nahe an das obere und untere Ende gleiche Helligkeit. Ich setzte mich nun hinter die Zelluloidscheibe *Z*, indem ich das Bild *B* in der Durchsicht betrachtete, so daß meine Augen in 1 *m* Entfernung von dem Bilde waren und daß *DCB* mit dem beobachtenden, den Streifen *ss* fixierenden Auge nahezu eine gerade Linie bildete. Auf die Empfindung der Netzhautstellen *ss* unter dem Mittel der Helligkeit der Umgebung haben nun die Stellen, welche von dem rechteckigen Teil der Diaphragmenöffnung alle gleich viel Licht erhalten, wie die Stellen *ss*, keinen ändernden Einfluß, während der Wert des Mittels allerdings steigt durch die Stellen, welche von dem V-förmigen Teil des Diaphragmas beleuchtet werden. Wenn nun mein Gehilfe,[1] mit einem zu *aa* parallelen Schirmrande den V-förmigen Teil der Diaphragmenöffnung zudeckend, langsam gegen *kk* vorrückte, so war der Streifen *ss* noch unverändert bei 7 *mm* Entfernung des Randes von *kk*, wurde undeutlicher bei Verkleinerung dieser Entfernung auf 5 *mm* und verschwand bei weiterer Verminderung auf 3 *mm*. Auf die Größe des Bildes *B* reduziert, entsprachen diese Entfernungen beziehungsweise 4·9, 3·5 und 2·1 *mm*. Die entsprechenden Gesichtswinkel betragen beziehungsweise 16′, 11′, 7′. Man darf also annehmen, daß bei dem angeführten Versuch auf die Verdunklung durch Kontrast an der fixierten Stelle jene Netzhautstellen keinen merklichen Einfluß mehr übten, welche von der fixierten um einen 16′ übersteigenden Gesichtswinkel abstanden. Wenn der

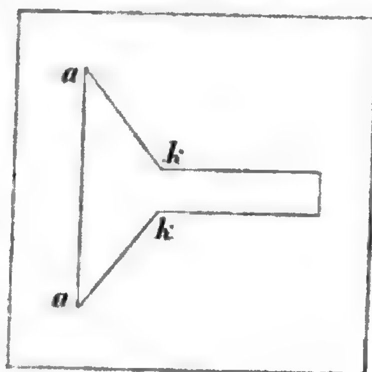


Fig. 7.

[1] Sämtliche hier beschriebenen Versuche habe ich in den Jahren 1903 bis 1906 bei günstigem Sonnenlicht unter Mithilfe meines Sohnes M. U. Dr. Ludwig Mach ausgeführt.

Streifen bei dem eben beschriebenen Prozeß sich abschwächt, so wird er nicht nur weniger dunkel, sondern auch dünner. Zuletzt hat man den Eindruck, als ob das gleichmäßig helle Feld, welches von dem rechteckigen Teil der Diaphragmenöffnung herrührt, an einen gleichmäßigen helleren, sehr schmalen Streifen grenzen würde, von dem es aber durch keine Kontur mehr geschieden zu sein scheint.

Konvergenzuntersuchungen zum Gesetze der Amplitudenabnahme bei Pendelbeobachtungen

von

Dr. **Adalbert Prey.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1906.)

Der Einfluß der umgebenden Luft auf die Schwingungen eines Pendels äußert sich in dreifacher Weise: im Auftrieb, im Luftwiderstand und in der Luftreibung.[1]

Der Auftrieb ist sehr leicht zu berechnen und bietet weiter keine Schwierigkeiten.

Der Einfluß des Luftwiderstandes besteht in dem Verluste an lebendiger Kraft, den das Pendel dadurch erleidet, daß es einen Stoß auf die umgebende Luft ausübt und derselben einen Teil seiner Bewegung mitteilt.[2] Mathematisch charakterisiert sich dieser Einfluß in einer scheinbaren Vergrößerung der Masse und der Trägheitsmomente des Pendels sowie im Auftreten eines dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Gliedes in der Differentialgleichung der Pendelbewegung.[3] Dem ersteren Umstande trägt die Anwendung des Reversionspendels Rechnung, das quadratische Glied verschwindet aber nur dann,

---

[1] O. E. Meyer, Über die innere Reibung der Gase (Annalen der Physik und Chemie, Bd. CXXV); Poisson, Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant (Mém. de l'Academie royale des sciences de l'institut de France, tome XI, 1832).

[2] O. E. Meyer, Über die pendelnde Bewegung einer Kugel unter dem Einflusse der inneren Reibung des umgebenden Mediums (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 73. Bd.).

[3] Clebsch, Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbaren Flüssigkeit (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 52. Bd.)

wenn das Pendel durch drei aufeinander senkrechte und durch den Schwerpunkt gehende Ebenen in acht symmetrische Teile zerlegt werden kann. Das ist bei unseren Reversionspendeln nicht der Fall, im Gegenteile, man legt den Schwerpunkt mit Absicht möglichst exzentrisch. Das betrachtete Glied verschwindet also nicht.

Der Einfluß der Luftreibung kombiniert sich mit dem aller übrigen Reibungserscheinungen und ist teils der ersten, teils der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional.

Die zu integrierende Differentialgleichung lautet daher:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\vartheta + \rho\frac{d\vartheta}{dt} \mp \sigma\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 0, \qquad \ldots 1)$$

in welcher die ersten beiden Glieder der gewöhnlichen Pendelgleichung angehören, die letzten beiden aber den Einfluß der Luft vorstellen; ρ und σ sind konstante Koeffizienten.

Das doppelte Vorzeichen des letzten Gliedes rührt davon her, daß der Widerstand immer der Geschwindigkeit entgegenwirken, also mit derselben sein Zeichen ändern muß. Das Glied mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit erfüllt diese Bedingung. Das quadratische Glied aber würde immer positiv bleiben, wenn man nicht bei Änderung der Bewegungsrichtung auch das Vorzeichen ändert. Das obere Zeichen gilt für negatives, das untere für positives $\frac{d\vartheta}{dt}$.

Daraus folgt zunächst, daß die Integration der Differentialgleichung nur über eine Schwingung ausgedehnt werden kann, weil für die nächste Schwingung eine andere Differentialgleichung gilt, nämlich jene, welche im letzten Gliede ein anderes Vorzeichen hat.

Wenn aber die Intergration nur über so kurze Zeit erstreckt wird, so ist es naheliegend, sich den Umstand zu nutze zu machen, daß während einer einzigen Schwingung der Einfluß des Widerstandes sehr gering ist, und entsprechende Vernachlässigungen eintreten zu lassen.

Die Methode, die man anwendet, ist die Variation der Konstanten. Läßt man zunächst die beiden störenden Glieder weg und führt die Substitution

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = k \sin\varphi \qquad \ldots 2)$$

ein, so lautet das vollständige Integral der ungestörten Pendelbewegung:

$$\lambda t + \gamma = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \qquad \ldots 3)$$

oder $\varphi = \mathrm{am}\,(\lambda t + \gamma, k)$, wobei

$$\frac{g}{l} = \lambda^2 \qquad \ldots 4)$$

gesetzt ist.

k und γ sind die Integrationskonstanten. Ihre Bedeutung im ungestörten Problem ergibt sich aus der Bedingung, daß für $t = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird. Ist α die Amplitude, so wird

$$k = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = K = \frac{\pi}{2}\left((1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \ldots\right). \qquad \ldots 5)$$

Indem man in bekannter Weise die Bedingungen für die Variation k und γ aufstellt, findet man:

$$\frac{d\vartheta}{dk} \cdot \frac{dk}{dt} + \frac{d\vartheta}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dk\,dt} \cdot \frac{dk}{dt} + \frac{d^2\vartheta}{d\gamma \cdot dt} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = -\rho\,\frac{d\vartheta}{dt} \pm \sigma\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \qquad \ldots 6)$$

Führt man die Differentiationen aus, indem man die Gleichung 2) anwendet, und löst nach $\frac{dk}{dt}$, respektive $\frac{d\gamma}{dt}$ auf, so ergibt sich[1] nach Gronau

$$\frac{dk}{dt} = -k\rho \cos^2 \operatorname{am}(\lambda t+\gamma) + 2\lambda k^2\sigma \cos^3 \operatorname{am}(\lambda t+\gamma)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\rho \sin \operatorname{am}(\lambda t+\gamma) \cos \operatorname{am}(\lambda t+\gamma) - 2\lambda k\sigma \sin \operatorname{am}(\lambda t+\gamma) \cos^2 \operatorname{am}(\lambda t+\gamma)}{\Delta \operatorname{am}(\lambda t+\gamma)}. \qquad \ldots 7)$$

wobei in Gleichung 6) das obere Zeichen genommen wurde.

Die Änderungen von k und γ sind natürlich von der Größenordnung ρ oder σ. Wenn man daher auf der rechten Seite der obigen Gleichungen γ und k, das als Modulus in den elliptischen Funktionen auftritt, konstant läßt, so entspricht dies der Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung ρ^2, $\rho\sigma$ oder σ^2. Außer diesen Gliedern vernachlässigt Gronau auch solche, welche außer ρ und σ in der ersten Potenz noch k in der dritten oder einer höheren Potenz enthalten.

Wenn man alle diese Vernachlässigungen zuläßt, kann man nach Oppolzer[2] gleich von Anfang an Entwicklungen nach k einführen, kann überdies die beiden störenden Glieder einzeln behandeln und die Resultate addieren. Dann kommt die Lösung des Problems auf die Integration der beiden Systeme von Differentialgleichungen hinaus:

---

[1] Gronau, Über die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel mit Rücksicht auf die Newton'schen Pendelversuche. Danzig, 1850.

[2] Th. v. Oppolzer, Beiträge zur Ermittlung der Reduktion auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen (diese Sitzungsberichte, LXXXVI. Bd., Wien, 1882).

$$\left.\begin{aligned}\frac{dk}{dt} &= -pk\sin^2\lambda t \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -p\sin\lambda t\cos\lambda t\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\frac{dk}{dt} &= -2k^2\lambda\sigma\sin^3\lambda t \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -2k\lambda\sigma\sin^2\lambda t\cos\lambda t\end{aligned}\right\} \quad \ldots 8)$$

Das Integral stellt den Verlauf von k und γ während der ersten Schwingung vor und enthält außer der Zeit t die Anfangswerte k_0 und γ_0. Nimmt man für t die Dauer einer Schwingung, wobei ein Näherungswert genügt, so erhält man die Werte von k und γ für das Ende der ersten Schwingung, ausgedrückt durch k_0 und γ_0. Der Ausdruck lautet nach Gronau und Oppolzer, wenn für k wieder die Amplitude nach Gleichung 4) $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ eingeführt wird:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -\left(\frac{p\pi}{2\lambda}\alpha_0 + \frac{4}{3}\sigma\alpha_0^2\right) \qquad \gamma_1 = \gamma_0 = \frac{\pi}{2}. \quad \ldots 9)$$

Da jede folgende Schwingung immer nur eine Wiederholung desselben Vorganges ist, so muß ohne Rücksicht auf die Bewegungsrichtung dieselbe Beziehung zwischen je zwei beliebigen aufeinanderfolgenden α und γ gelten. Es ist also auch

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = -\left(\frac{p\pi}{2\lambda}\alpha_{n-1} + \frac{4}{3}\sigma\alpha_{n-1}^2\right) \qquad \gamma_n = \gamma_{n-1}, \quad \ldots 10)$$

wobei α_{n-1} die Amplitude zu Anfang, α_n die Amplitude zu Ende der $n$ten Schwingung bedeutet, wodurch die Integration der Gleichung mit geändertem Vorzeichen erspart wird.

Um jetzt α_n als Funktion von α_0 darzustellen, wäre in obiger Gleichung α_{n-1} durch α_{n-2} auszudrücken, dann α_{n-2} durch α_{n-3} und so fort. Die Ausführung dieser Rücksubstitution scheitert an Konvergenzschwierigkeiten.

Man hat daher einen anderen Weg eingeschlagen. Ist die Zahl p der Schwingungen groß, so kann man eine Schwingung als Differential dp auffassen und kann den obigen Ausdruck, der die Änderung von α während einer Schwingung vorstellt, in der Form schreiben:

$$d\alpha = -\left(\frac{p\pi}{2\lambda}\alpha + \frac{4}{3}\sigma\alpha^2\right)dp. \quad \ldots 11)$$

Das ist wieder eine Differentialgleichung, die nun ohne weitere Vernachlässigungen integriert werden kann und zu dem folgenden geschlossenen Ausdruck führt:

$$\varepsilon p = \log \operatorname{nat} \frac{\alpha_0(1+\beta\alpha_p)}{\alpha_p(1+\beta\alpha_0)}, \qquad \ldots 12)$$

wobei abkürzungsweise

$$\frac{\rho\pi}{2\lambda} = \varepsilon \qquad \frac{8\lambda\sigma}{3\pi\rho} = \beta \qquad \ldots 13)$$

gesetzt ist und α_p die Amplitude der p^{ten} Schwingung bedeutet. Für die letztere findet man aus dieser Gleichung:

$$\alpha_p = \frac{\alpha_0}{(1+\beta\alpha_0)e^{\varepsilon p} - \beta\alpha_0}. \qquad \ldots 14)$$

Dieser Ausdruck gibt nun zu folgender Bemerkung Anlaß: Entwickelt man den Nenner in eine Reihe, was bei den bekannten Eigenschaften der Exponentiellen immer möglich ist, so erhält man für denselben:

$$1 + \varepsilon p(1+\beta\alpha_0) + \frac{\varepsilon^2 p^2}{2!}(1+\beta\alpha_0)^2 + \ldots$$

Eine rasche Konvergenz wird diese Reihe nur besitzen, wenn εp eine kleine Größe ist. Nun ist ε allerdings eine sehr kleine Größe, dafür ist aber p eine Zahl, die sehr wohl den Betrag von mehreren Tausenden erreicht, so daß εp die Einheit stark übersteigen kann. Dann wird aber die obige Reihe sehr langsam konvergieren und es ist klar, daß es nicht gestattet ist, etwa die Glieder mit ε^2 schon zu vernachlässigen. Nun ist aber ε^2 von der Ordnung ρ^2 und Glieder dieser Ordnung wurden zu Anfang vernachlässigt. Es ist also nicht von vornherein einzusehen, daß diese Vernachlässigungen statthaft sind. Die Entscheidung darüber kann erst getroffen werden, wenn die fraglichen Glieder bis über die Integration nach der Schwingungsanzahl mitgeführt worden sind.

Die Berechtigung der obigen Formel erschien daher zweifelhaft und aus diesem Grunde wurde die nachstehende Untersuchung unternommen. Sie dürfte schon deshalb nicht ganz

überflüssig sein, weil die Reduktion einer größeren Anzahl von Beobachtungsreihen, darunter der Oppolzer'schen zur Bestimmung der Schwere in Wien auf der fraglichen Formel beruht.

Es ist gelungen, nachzuweisen, daß die Mitnahme von Gliedern höherer Ordnung bei der Behandlung der Gleichungen 7) die Formel 12) nur um Beträge alteriert, die unbedenklich vernachlässigt werden können.

I.

Um die Rechnungen nicht allzu sehr zu komplizieren, sollen zunächst nur die Glieder, welche die höheren Potenzen von k, dafür aber nur die ersten Potenzen von ρ und σ enthalten, mitgenommen werden. Die Glieder mit ρ^2, $\rho\sigma$ und σ^2 werden speziell behandelt. Faßt man dann beide Resultate zusammen, so erscheinen nur mehr Glieder mit den Faktoren $\rho^2 k^3$, $\rho\sigma k^3$ und $\sigma^2 k^3$ vernachlässigt, welche noch um eine Ordnung höher sind.

Wir kehren also zu den Gleichungen 7) zurück und wollen dieselben integrieren unter der Bedingung, daß k und γ auf der rechten Seite als Konstante zu betrachten sind.

Wir führen mit Hilfe der Gleichung

$$\varphi = \operatorname{am}(\lambda t + \gamma)$$

wieder den Winkel φ ein und setzen nach Gleichung 3)

$$d(\lambda t+\gamma) = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned} dk &= -\frac{k\rho}{\lambda}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\cdot d\varphi + 2k^2\sigma\frac{\cos^3\varphi}{\Delta\varphi}\cdot d\varphi \\ d\gamma &= \frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(\Delta\varphi)^2}\cdot d\varphi - 2k\sigma\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{(\Delta\varphi)^2}\cdot d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots 15)$$

Das erste Glied führt, da es eine gerade Potenz von cos φ enthält, auf ein elliptisches Integral zweiter Gattung; die anderen sind nicht elliptisch und führen auf Arkustangenten und Logarithmen. Da man daher, um auf brauchbare Ausdrücke zu kommen, sowieso zu Reihenentwicklungen greifen muß, so kann man dieselben auch vor der Integration einführen und vermeidet damit die komplizierten Integrale.

Soll die Veränderung von k und γ während der ersten Schwingung gefunden werden, so sind als Grenzen jene Werte von φ einzuführen, welche zu Anfang und Ende dieser Schwingung gehören. Das sind nach Gleichung 2) und 5):

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Nun ist, wie man leicht findet,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \cdot d\varphi = \left(\frac{1}{2}+\frac{k^2}{16}\right)\pi, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi} = 0, \qquad \ldots 16)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^3\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \cdot d\varphi = -\frac{4}{3} - \frac{2}{15}k^2, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi} = 0,$$

daher

$$k_1 - k_0 = -k\frac{\rho\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{2}+\frac{k^2}{16}\right) - 2k^2\sigma\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{15}k^2\right) \qquad \ldots 17)$$

$$\gamma_1 - \gamma_0 = 0.$$

Die Größe γ bleibt also auch hier konstant, denn es ist

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} = \gamma_{n-2} = \ldots = \gamma_1 = \gamma_0. \qquad \ldots 18)$$

Die Gleichung für k aber, in derselben Weise wie 9) und 10) behandelt, gibt:

$$\frac{dk}{dp} = -\frac{k\rho\pi}{2\lambda}\left(1+\frac{16}{3}\frac{k\lambda\sigma}{\rho\pi}\right) - \frac{k^3\rho\pi}{16\lambda} - \frac{4}{15}k^4\sigma \qquad \ldots 19)$$

oder, wenn man zur Abkürzung nach 13)

$$\frac{\rho\pi}{2\lambda} = \varepsilon \qquad \frac{8}{3}\frac{\sigma\lambda}{\rho\pi} = \beta$$

setzt, das erste Glied heraushebt und den Klammerausdruck nach k entwickelt,

$$\frac{dk}{dp} = -k\varepsilon(1+2\beta k)\left[1+\frac{k^2}{8}\left(1-\frac{2}{5}\beta k\right)\right]$$

oder

$$\frac{dk}{-\varepsilon k(1+2\beta k)}\left[1-\frac{k^2}{8}\left(1-\frac{2}{5}\beta k\right)\right]=dp$$

und endlich:

$$dp=\frac{dk}{-\varepsilon k(1+2\beta k)}+\frac{k}{8\varepsilon}\left(1-\frac{12}{5}\beta k\right)dk. \qquad \ldots 20)$$

Das Integral, von der unteren Grenze k_0 an genommen, gibt:

$$\varepsilon p=\log\text{nat}\,\frac{k_0}{k}\cdot\frac{1+2\beta k}{1+2\beta k_0}+\frac{k^2-k_0^2}{16}-\beta\,\frac{k^3-k_0^3}{10}. \qquad \ldots 21)$$

Wenn man bedenkt, daß

$$k=\sin\frac{\alpha}{2} \qquad k_0=\sin\frac{\alpha_0}{2}$$

ist, so erkennt man sofort, daß das erste Glied dieser Gleichung mit 12) identisch ist, nur mit dem Unterschiede, daß dort für den Sinus einfach der Bogen gesetzt ist, ohne Rücksicht auf die Glieder mit α^3.

Um die Formel 21) numerisch auf ihr Verhältnis zu 12) zu prüfen, entnehmen wir den Oppolzer'schen Untersuchungen die folgenden Zahlen, die für den österreichischen Pendelapparat gelten:[1]

$$\frac{\rho\pi}{2\lambda}=\varepsilon=0\cdot03 \qquad \beta=\frac{8\lambda\sigma}{3\pi\rho}=0\cdot01. \qquad \ldots 22)$$

In ε ist als Zeiteinheit der Zeitraum von einer Koinzidenz zur nächsten gewählt. Nehmen wir statt dessen wieder die Dauer einer Schwingung, so wird beiläufig

$$\varepsilon=\frac{0\cdot03}{170}. \qquad \ldots 23)$$

Drücken wir die Amplitude nicht in Bogenminuten, sondern in absoluten Einheiten aus, so ist statt β

$$3437\cdot7\,\beta \qquad \ldots 24)$$

zu setzen.

Nach Formel 14) findet sich dann, daß eine Amplitude von 120′ nach 7200 Schwingungen (etwa 2 Stunden) auf 18·08′ sinkt. Wir rechnen nun mit diesen Werten nach Formel 21)

[1] Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungsbureaus, XIV. Bd., Wien, 1906.

die Zahl p zurück. Wir finden, wenn wir die Resultate für die einzelnen Glieder getrennt schreiben:

$$p = 7199\cdot85-0\cdot11+0\cdot10 = 7199\cdot84.$$

Es tritt also die Amplitude 18·08′ bei Berücksichtigung der höheren Glieder um 0·16 Schwingungen früher ein. Da es bei der Beobachtung von Amplituden auch auf ganze Schwingungen nicht ankommt, da sich die Amplitude sehr langsam ändert, so kann der obige Unterschied als ganz unwesentlich bezeichnet werden.

Damit ist die erste Kategorie von Gliedern erledigt. In diesem Falle war das Resultat vorauszusehen. Die betrachteten Glieder entstehen aus den rasch konvergierenden Reihenentwicklungen nach k. Es kann also für die Differentialgleichung keine andere Form als 19) auftreten. Es sind daher auch die weiteren Entwicklungen immer möglich und das Resultat erscheint in Form der stark konvergierenden Reihe 21).

II.

Komplizierter liegt die Sache bezüglich der Glieder mit ρ^2, $\rho\sigma$ oder σ^2.

Führen wir die Vernachlässigung der höheren Glieder in k, die nach dem früheren gerechtfertigt ist, in den Gleichungen 15) durch, so erhalten sie, da $\varphi = \lambda t + \frac{\pi}{2}$ wird, die Form:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= -\rho k \sin^2 \lambda t - 2k^2 \lambda\sigma \sin^3 \lambda t \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -\rho \sin \lambda t \cos \lambda t - 2k\lambda\sigma \sin^2 \lambda t \cos \lambda t.^{1} \end{aligned} \qquad \ldots 25)$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit der ersten, welche nur die Unbekannte k enthält. Sie ist ein Spezialfall der Clairantschen Gleichung, deren Integration nach bekannten Grundsätzen erfolgt. Durch Multiplikation mit k^{-2} und Substitution von $\frac{1}{k} = y$, $\rho \sin^2 \lambda t = P$ und

---

[1] Es wird sich später an der Hand numerischer Werte zeigen, daß nicht ρ und σ, sondern ρ und σk als Größen gleicher Ordnung aufzufassen sind: ebenso auch ρ^2, $\rho\sigma k$ und $\sigma^2 k^2$. Die Glieder treten auch immer in dieser Form auf.

$$2\lambda\sigma \sin^3 \lambda t = Q, \qquad \ldots 26)$$

geht dieselbe über in

$$\frac{dy}{dt} = Py + Q \qquad \ldots 27)$$

deren Integral lautet:

$$y = e^{\int P dt} \int Q e^{-\int P dt} dt + c_1 e^{\int P dt}, \qquad \ldots 28)$$

worin c_1 die Integrationskonstante bedeutet. Wir führen die angezeigten Integrationen aus, vereinfachen dieselben aber durch Reihenentwicklungen, wobei wir Glieder von der Ordnung ρ^2, $\rho\sigma$ und σ^2 beibehalten.

Es ergibt sich:

$$\int P dt = \rho \int \sin^2 \lambda t = \frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t),$$

daher

$$e^{\int P dt} = e^{\frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)} = 1 + \frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t) + \\ + \frac{1}{2!}\,\frac{\rho^2}{16\lambda^2}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)^2$$

$$e^{-\int P dt} = e^{-\frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)} = 1 - \frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t) + \qquad \ldots 29) \\ + \frac{1}{2!}\,\frac{\rho^2}{16\lambda^2}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)^2.$$

Die Entwicklungen sind rasch konvergiert, weil t die Dauer einer Schwingung nicht übersteigt.

Ferner mit derselben Genauigkeit:

$$Q \cdot e^{-\int P dt} = 2\lambda\sigma \sin^3 \lambda t \left[1 - \frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)\right]$$

und

$$\int Q \cdot e^{-\int P dt} dt = 2\lambda\sigma \int \sin^3 \lambda t - \frac{\rho\sigma}{2} \int (2\lambda t - \sin 2\lambda t) \sin^3 \lambda t \, dt.$$

Wir ersetzen $\sin^3 \lambda t$ durch:

$$\frac{3}{4} \sin \lambda t - \frac{1}{4} \sin 3\lambda t$$

und haben der Reihe nach die folgenden Integrale:

$$\int \sin \lambda t \, dt = -\frac{1}{\lambda} \cos \lambda t$$

$$\int \sin 3\lambda t \, dt = -\frac{1}{3\lambda} \cos 3\lambda t$$

$$\int \lambda t \sin \lambda t \, dt = -t \cos \lambda t + \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t$$

$$\int \lambda t \sin 3\lambda t \, dt = -\frac{t}{3} \cos 3\lambda t + \frac{1}{9\lambda} \sin 3\lambda t$$

$$\int \sin \lambda t \sin 2\lambda t \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t - \frac{1}{3\lambda} \sin 3\lambda t \right]$$

$$\int \sin 2\lambda t \sin 3\lambda t \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t - \frac{1}{5\lambda} \sin 5\lambda t \right].$$

Damit wird:

$$\int Q \cdot e^{-\int P dt} dt = \sigma \left[\frac{1}{6} \cos 3\lambda t - \frac{3}{2} \cos \lambda t \right] - \frac{3}{4} \rho \sigma \left[-t \cos \lambda t + \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \right]$$
$$+ \frac{1}{4} \rho \sigma \left[-\frac{t}{3} \cos 3\lambda t + \frac{1}{9\lambda} \sin 3\lambda t \right]$$

$$+\frac{3}{16}\rho\sigma\left[\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t-\frac{1}{3\lambda}\sin 3\lambda t\right]$$
$$-\frac{1}{16}\rho\sigma\left[\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t-\frac{1}{5\lambda}\sin 5\lambda t\right]$$
$$=\sigma\left[\frac{1}{6}\cos 3\lambda t-\frac{3}{2}\cos\lambda t\right]+\rho\sigma t\left[\frac{3}{4}\cos\lambda t-\frac{1}{12}\cos 3\lambda t\right]$$
$$+\frac{\rho\sigma}{\lambda}\left[-\frac{5}{8}\sin\lambda t-\frac{5}{144}\sin 3\lambda t+\frac{1}{80}\sin 5\lambda t\right]. \qquad \ldots 30)$$

Dieser Ausdruck ist nach Gleichung 28) mit

$$e^{\int P dx}=1+\frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t-\sin 2\lambda t)$$

zu multiplizieren. Zu den Gliedern zweiter Ordnung in 30) tritt dann noch das Produkt:

$$\frac{\rho\sigma}{4\lambda}\left[\frac{1}{6}\cos 3\lambda t-\frac{3}{2}\cos\lambda t\right]\cdot[2\lambda t-\sin 2\lambda t]$$

hinzu, welches sich nach einfacher Reduktion in die Form setzen läßt:

$$-\rho\sigma t\left[\frac{3}{4}\cos\lambda t-\frac{1}{12}\cos 3\lambda t\right]+\frac{\rho\sigma}{\lambda}\left[\frac{5}{24}\sin\lambda t+\frac{3}{16}\sin 3\lambda t-\frac{1}{48}\sin 5\lambda t\right].$$

Fügen wir dies zur rechten Seite von 30) hinzu, so heben sich die Glieder, welche t als Faktor haben, weg und es ist:

$$e^{\int P dx} \cdot \int Q \cdot e^{-\int P dt}\, dt = \sigma\left[\frac{1}{6}\cos 3\lambda t - \frac{3}{2}\cos\lambda t\right] +$$
$$+ \frac{\rho\sigma}{\lambda}\left[-\frac{5}{12}\sin\lambda t + \frac{11}{72}\sin 3\lambda t - \frac{1}{120}\sin 5\lambda t\right].$$

Nach 28) und 29) wird somit endlich:

$$y = c_1\left[1 + \frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t) + \frac{\rho^2}{32\lambda^2}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)^2\right]$$
$$+ \sigma\left[\frac{1}{6}\cos 3\lambda t - \frac{3}{2}\cos\lambda t\right] + \frac{\rho\sigma}{\lambda}\left[-\frac{5}{12}\sin\lambda t\right.$$
$$\left. + \frac{11}{72}\sin 3\lambda t - \frac{1}{120}\sin 5\lambda t\right].$$

Der reziproke Wert dieses Ausdruckes ist die Größe k, daher

$$k = \frac{1}{c_1}\left\{1 - \frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t) - \frac{\sigma}{c_1}\left(\frac{1}{6}\cos 3\lambda t - \frac{3}{2}\cos\lambda t\right)\right.$$
$$+ \frac{\rho^2}{16\lambda^2}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)^2 + \frac{\sigma^2}{c_1^2}\left(\frac{1}{6}\cos 3\lambda t - \frac{3}{2}\cos\lambda t\right)^2$$
$$+ \frac{2\rho\sigma}{4\lambda c_1}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)\left(\frac{1}{6}\cos 3\lambda t - \frac{3}{2}\cos\lambda t\right)$$
$$- \frac{\rho^2}{32\lambda^2}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)^2$$
$$\left. - \frac{\rho\sigma}{c_1\lambda}\left[-\frac{5}{12}\sin\lambda t + \frac{11}{72}\sin 3\lambda t - \frac{1}{120}\sin 5\lambda t\right]\right\}$$

oder reduziert

$$k = \frac{1}{c_1}\left\{1 - \frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t - \sin 2\lambda t) - \frac{\sigma}{c_1}\left(\frac{1}{6}\cos 3\lambda t - \frac{3}{2}\cos\lambda t\right)\right.$$
$$+ \frac{\rho^2}{32\lambda^2}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)^2 \qquad \ldots 31)$$
$$+ \frac{\sigma^2}{c_1^2}\left(\frac{41}{36} + \frac{7}{8}\cos 2\lambda t - \frac{1}{4}\cos 4\lambda t + \frac{1}{72}\cos 6\lambda t\right)$$

$$+\frac{\rho\sigma}{c_1\lambda}\left(\frac{5}{6}\sin\lambda t+\frac{2}{9}\sin 3\lambda t-\frac{1}{30}\sin 5\lambda t\right)$$

$$+\frac{\rho\sigma}{c_1}t\left(-\frac{3}{2}\cos\lambda t+\frac{1}{6}\cos 3\lambda t\right)\Big\}.$$

Durch Einsetzen des gefundenen Wertes für k in 25) und nachfolgende Integration ergibt sich der Ausdruck für γ. Da das zweite Glied auf der rechten Seite schon den Faktor σ enthält, so brauchen in k nur noch Glieder erster Ordnung berücksichtigt zu werden. Es ist somit

$$\gamma=\gamma_0-\rho\int\sin\lambda t\cos\lambda t\,dt-\frac{2\lambda\sigma}{c_1}\int\sin^2\lambda t\cos\lambda t$$

$$\cdot\left[1-\frac{\rho}{4\lambda}(2\lambda t-\sin 2\lambda t)-\frac{\sigma}{c_1}\left(\frac{1}{6}\cos 3\lambda t-\frac{3}{2}\cos\lambda t\right)\right]dt.$$

Es treten daher folgende Integrale auf:

$$\int\sin\lambda t\cos\lambda t\,dt=-\frac{1}{4\lambda}\cos 2\lambda t$$

$$\int\sin^2\lambda t\cos\lambda t\,dt=\frac{1}{3\lambda}\sin^3\lambda t=\frac{1}{3\lambda}\left(\frac{3}{4}\sin\lambda t-\frac{1}{4}\sin 3\lambda t\right)$$

$$\int t\sin^2\lambda t\cos\lambda t\,dt=\frac{t}{3\lambda}\left(\frac{3}{4}\sin\lambda t-\frac{1}{4}\sin 3\lambda t\right)$$

$$+\frac{1}{4\lambda^2}\left(\cos\lambda t-\frac{1}{9}\cos 3\lambda t\right)$$

$$\int\sin^2\lambda t\cos\lambda t\cdot\sin 2\lambda t\,dt=-\frac{1}{4\lambda}\left(\cos\lambda t+\frac{1}{6}\cos 3\lambda t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{10}\cos 5\lambda t\right)$$

$$\int\sin^2\lambda t\cos^2\lambda t\,dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4\lambda}\sin 4\lambda t\right)$$

$$\int\sin^2\lambda t\cos\lambda t\cdot\cos 3\lambda t\,dt=-\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{2\lambda}\sin 2\lambda t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\lambda}\sin 4\lambda t+\frac{1}{6\lambda}\sin 6\lambda t\right).$$

Mit diesen Ausdrücken findet sich:

$$\gamma = c_2 + \frac{\rho}{4\lambda}\cos 2\lambda t - \frac{2\sigma}{3c_1}\left(\frac{3}{4}\sin\lambda t - \frac{1}{4}\sin 3\lambda t\right)$$
$$+ \frac{\rho\sigma}{c_1}\left[\frac{t}{3}\left(\frac{3}{4}\sin\lambda t - \frac{1}{4}\sin 3\lambda t\right)\right] \qquad \ldots 32)$$
$$+ \frac{\rho\sigma}{c_1\lambda}\left[\frac{3}{8}\cos\lambda t - \frac{1}{144}\cos 3\lambda t - \frac{1}{80}\cos 5\lambda t\right]$$
$$- \frac{\sigma^2\lambda}{c_1^2}\left(\frac{5}{12}t - \frac{1}{48\lambda}\sin 2\lambda t - \frac{5}{48\lambda}\sin 4\lambda t + \frac{1}{144\lambda}\sin 6\lambda t\right).$$

Zunächst führen wir nun statt der beiden Integrationskonstanlen c_1 und c_2 die Werte k_0 und γ_0 für $t = 0$ ein. Es findet sich für $t = 0$

$$k_0 = \frac{1}{c_1}\left\{1 + \frac{4\sigma}{3c_1} + \frac{16\sigma^2}{9c_1^2}\right\} \qquad \ldots 33)$$

$$\gamma_0 = c_2 + \frac{\rho}{4\lambda} + \frac{16\rho\sigma}{45c_1\lambda}. \qquad \ldots 34)$$

Die Auflösung der ersten Gleichung ergibt

$$\frac{1}{c_1} = k_0\left(1 - \frac{4}{3}k_0\sigma + \frac{16}{9}k_0^2\sigma^2\right). \qquad \ldots 35)$$

Indem wir dann in der zweiten Gleichung im letzten Gliede $\frac{1}{c_1}$ durch k_0 ersetzen können, findet sich mit derselben Genauigkeit:

$$c_2 = \gamma_0 - \frac{\rho}{4\lambda} - \frac{16\rho\sigma k_0}{45\lambda}. \qquad \ldots 36)$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen 31) und 32) ein, so wird jetzt

$$k = k_0\left\{1 - \frac{4}{3}k_0\sigma + \frac{16}{9}k_0^2\sigma^2\right.$$
$$- \left(\frac{\rho}{4\lambda} - \frac{1}{3}\frac{k_0\rho\sigma}{\lambda}\right)(2\lambda t - \sin 2\lambda t)$$
$$+ \frac{\rho^2}{32\lambda^2}(2\lambda t - \sin 2\lambda t)^2 \qquad \ldots 37)$$

$$-\left(\sigma k_0-\frac{8}{3}k_0^2\sigma^2-k_0\rho\sigma t\right)\left(-\frac{3}{2}\cos\lambda t+\frac{1}{6}\cos 3\lambda t\right)$$

$$+\sigma^2 k_0^2\left(\frac{41}{36}+\frac{7}{8}\cos 2\lambda t-\frac{1}{4}\cos 4\lambda t+\frac{1}{72}\cos 6\lambda t\right)$$

$$+\frac{\rho\sigma k_0}{\lambda}\left(\frac{5}{6}\sin\lambda t+\frac{2}{9}\sin 3\lambda t-\frac{1}{30}\sin 5\lambda t\right)\Bigg\}.$$

$$\gamma=\gamma_0-\frac{\rho}{4\lambda}-\frac{16}{45}\frac{\rho\sigma k_0}{\lambda}$$

$$+\frac{\rho}{4\lambda}\cos 2\lambda t$$

$$\ldots 38)$$

$$-\left(\frac{2}{3}\sigma k_0-\frac{8}{9}\sigma^2 k_0^2-\frac{1}{3}\rho\sigma k_0 t\right)\left(\frac{3}{4}\sin\lambda t-\frac{1}{4}\sin 3\lambda t\right)$$

$$-\sigma^2 k_0^2\left(\frac{5}{12}\lambda t-\frac{1}{48}\sin 2\lambda t-\frac{5}{48}\sin 4\lambda t+\frac{1}{144}\sin 6\lambda t\right)$$

$$+\frac{\rho\sigma k_0}{\lambda}\left(\frac{3}{8}\cos\lambda t-\frac{1}{144}\cos 3\lambda t-\frac{1}{80}\cos 5\lambda t\right).$$

Um die k und γ, die zu den Endpunkten der einzelnen Schwingungen gehören, zu bestimmen, müssen zuerst die entsprechenden Werte der Zeit berechnet werden. Wir bezeichnen dieselben der Reihe nach mit $t_0(=0)$, t_1, $t_2\ldots t_n$. Bei der ungestörten Bewegung hatten diese Größen die Werte 0, $\frac{\pi}{\lambda}$, $\frac{2\pi}{\lambda}\ldots\frac{n\pi}{\lambda}$. Für unseren Fall können wir diese als Näherungswerte auffassen und setzen:

$$t_n=\frac{n\pi}{\lambda}+z_n,$$

wo z_n eine kleine Größe ist.

Es ist dann

$$k_n=k_{\frac{n\pi}{\lambda}}+\left(\frac{dk}{dt}\right)_{\frac{n\pi}{\lambda}}z_n \quad\text{und}\quad \gamma_n=\gamma_{\frac{n\pi}{\lambda}}+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{\frac{n\pi}{\lambda}}z_n,$$

wobei der Index $\frac{n\pi}{\lambda}$ bezeichnet, daß die Werte für $t=\frac{n\pi}{\lambda}$ zu nehmen sind.

Nun ist aber nach 25)

$$\left(\frac{dk}{dt}\right)_{\frac{n\pi}{\lambda}} = 0, \quad \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{\frac{n\pi}{\lambda}} = 0.$$

Es können also bei Berechnung der $k_1, k_2 \ldots k_n$ und $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ statt der Werte $t_1, t_2 \ldots t_n$ die Werte $\frac{\pi}{\lambda}, \frac{2\pi}{\lambda} \ldots \frac{n\pi}{\lambda}$ wie bei der ungestörten Bewegung gesetzt werden. Es wird so zunächst für $n = 1$

$$k_1 = k_0 \left\{1 - \frac{\rho\pi}{2\lambda} - \frac{8}{3}\sigma k_0 + \frac{\rho^2\pi^2}{8\lambda^2} + \frac{64}{9}\sigma^2 k_0^2 + \frac{2\rho\sigma k_0 \pi}{\lambda}\right\}. \qquad \ldots 39)$$

Was zwischen k_0 und k_1 gilt, muß in derselben Weise für k_1 und k_2, k_2 und k_3, allgemein k_{n-1} und k_n gelten. Es ist also auch:

$$k_n = k_{n-1} \left\{1 - \frac{\rho\pi}{2\lambda} - \frac{8}{3}\sigma k_{n-1} + \frac{\rho^2\pi^2}{8\lambda^2} + \frac{64}{9}\sigma^2 k_{n-1}^2 + \frac{2\rho\sigma k_{n-1}\pi}{\lambda}\right\}. \qquad \ldots 40)$$

Unter Einführung der Abkürzungen

$$a = \frac{\rho\pi}{2\lambda} - \frac{\rho^2\pi^2}{8\lambda^2}$$
$$b = \frac{8}{3}\sigma - \frac{2\rho\sigma\pi}{\lambda} \qquad \ldots 41)$$
$$c = \frac{64}{9}\sigma^2$$

geht dieser Ausdruck über in:

$$k_n - k_{n-1} = -a k_{n-1} - b k_{n-1}^2 + c k_{n-1}^3, \qquad \ldots 42)$$

wodurch die Änderung von k während einer Schwingung dargestellt wird. Nehmen wir wieder diese Größe als Differential dk, genommen nach der Schwingungszahl p, so ist

$$dk = (-ak - bk^2 + ck^3)\,dp,$$

welche Gleichung zu integrieren ist.

Es ist also

$$p = \int_{k_0}^{k} \frac{dk}{ck\left(-\frac{a}{c} - \frac{b}{c}k + k^2\right)},$$

daher durch Partialbruchzerlegung

$$cp = A \log \frac{k}{k_0} + B \log \frac{k - \frac{b}{2c} - \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c}}}{k_0 - \frac{b}{2c} - \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c}}}$$

$$+ C \log \frac{k - \frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c}}}{k_0 - \frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c}}}, \quad \ldots 43)$$

wobei die Konstanten A, B, C bestimmt sind durch die Ausdrücke

$$A = -\frac{c}{a} \qquad B = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{2a\sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c}}}\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{2a\sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c}}}\right) \qquad \ldots 44)$$

oder

$$A = -\frac{c}{a} \qquad B = \frac{c}{2a}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2}}}\right]$$

$$C = \frac{c}{2a}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2}}}\right].$$

Die Größe $\frac{4ac}{b^2}$ ist nach 41) von der Ordnung ρ, also eine kleine Größe. Wir können daher die Wurzelgrößen entwickeln und finden

$$\sqrt{1+\frac{4ac}{b^2}} = 1 + \frac{2ac}{b^2} - \frac{2a^2c^2}{b^4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4ac}{b^2}}} = 1 - \frac{2ac}{b^2},$$

somit

$$\frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{b^2}{4c^2}+\frac{a}{c}} = \frac{b}{2c}\left[1+\sqrt{1+\frac{4ac}{b^2}}\right]$$

$$= \frac{b}{2c}\left[2+\frac{2ac}{b^2}-\frac{2a^2c^2}{b^4}\right] = \frac{b}{c}+\frac{a}{b}-\frac{a^2c}{b^3}$$

$$\frac{b}{2c} - \sqrt{\frac{b^2}{4c^2}+\frac{a}{c}} = \frac{b}{2c}\left[1-\sqrt{1+\frac{4ac}{b^2}}\right] \qquad \ldots 45)$$

$$= \frac{b}{2c}\left[-\frac{2ac}{b^2}+\frac{2a^2c^2}{b^4}\right] = -\frac{a}{b}+\frac{a^2c}{b^3}$$

$$B = \frac{c}{2a}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}}\right] = \frac{c}{2a}\cdot\frac{2ac}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$C = \frac{c}{2a}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4ac}{b^2}}}\right] = \frac{c}{a}-\frac{c^2}{b^2}.$$

Die Vernachlässigung der Glieder $\frac{c^2}{b^2}$ und $\frac{a^2c}{b^3}$, die von der Ordnung σ^2, respektive ρ^2 sind, führt nun zu

$$B = 0$$

$$C = \frac{c}{a}. \qquad \ldots 46)$$

Die ganze Gleichung 43) wird durch c teilbar und geht nach Multiplikation mit a sofort über in

$$ap = \log\text{nat}\,\frac{k_0}{k}\cdot\frac{k+\frac{a}{b}}{k_0+\frac{a}{b}}, \qquad \ldots 47)$$

welche Form identisch ist mit der gebräuchlichen Formel.

Es fragt sich, ob diese Vernachlässigungen erlaubt sind. Dies läßt sich wieder an der Hand numerischer Werte entscheiden und wir wollen zu diesem Zwecke abermals die Verhältnisse des österreichischen Pendelapparates heranziehen.

Unter Zugrundelegung der Werte aus 22) findet man, da $\frac{\pi}{\lambda}$ näherungsweise gleich 1·006 ist:

$$\log \rho = 6\cdot 5451 \qquad \log a = 6\cdot 2467$$ [1]

$$\log \sigma = 7\cdot 6601 \qquad \log b = 8\cdot 0861$$

$$\log c = 6\cdot 1722.$$

Hiebei geben die Glieder zweiter Ordnung in a und b noch keine Einheit der vierten Stelle;

$$A = -0\cdot 8424$$
$$B = 0\cdot 0001$$
$$C = 0\cdot 8423.$$

Man findet ferner $\frac{b}{c} = 82\cdot 03.$

Da nun k und k_0 kleine Größen sind, so erkennt man, daß der Zähler und der Nenner im zweiten Logarithmus der Gleichung 43) einander sehr nahe gleich werden, so daß der Logarithmus nahe gleich Null wird; überdies ist B nahe gleich 0, in der Tat gibt die Rechnung für einen extremen Fall ($\alpha_0 = 120'$, $\alpha = 18'$) für das zweite Glied auf der rechten Seite von 43) nur eine Einheit der achten Stelle.

Das Glied $\frac{a^2 c}{b^3}$ ergibt sich zu

$$\frac{a^2 c}{b^3} = 0\cdot 000002555.$$

Es ist gegen

$$\frac{a}{b} = 0\cdot 01447$$

so klein, daß es bei vierstelliger Rechnung überhaupt nicht berücksichtigt werden kann. Die Vernachlässigungen, die zu 46) führen, sind also vollständig gerechtfertigt und es ist

[1] Vergl. Anmerkung p. 658.

somit erwiesen, daß die Mitnahme der Glieder zweiter Ordnung in 42) keine Änderung der Formeln bedingt und auch keine merkliche Steigerung der Genauigkeit zur Folge hat.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung der Größe γ. Aus 38) folgt für das Ende der ersten Schwingung, d. i. für $t = \frac{\pi}{\lambda}$

$$\gamma_1 = \gamma_0 - \frac{5}{12}\pi\sigma^2 k_0^2 - \frac{32}{45}\cdot\frac{\rho\sigma k_0}{\lambda}. \qquad \ldots 48)$$

Diese Gleichung muß für Anfang und Ende jeder einzelnen Schwingung gelten. Wir haben also das System:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma_0 - \frac{5}{12}\pi\sigma^2 k_0^2 - \frac{32}{45}\frac{\rho\sigma k_0}{\lambda} \\
\gamma_2 &= \gamma_1 - \frac{5}{12}\pi\sigma^2 k_1^2 - \frac{32}{45}\frac{\rho\sigma k_1}{\lambda} \qquad \ldots 49) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_n &= \gamma_{n-1} - \frac{5}{12}\pi\sigma^2 k_{n-1}^2 - \frac{32}{45}\frac{\rho\sigma k_{n-1}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Addieren wir diese Gleichungen, so finden wir:

$$\gamma_n = \gamma_0 - \frac{5}{12}\pi\sigma^2 \sum_0^{n-1} k^2 - \frac{32}{45}\frac{\rho\sigma}{\lambda}\sum_0^{n-1} k. \qquad \ldots 50)$$

Um den Einfluß der Glieder zweiter Ordnung zu beurteilen — Glieder erster Ordnung kommen überhaupt nicht vor — ersetzen wir alle k durch das größte: k_0. Dann ist der Betrag dieser Glieder jedenfalls kleiner als

$$\frac{5}{12} p\pi\sigma^2 k_0^2 + \frac{32}{45} p \frac{\rho\sigma k_0}{\lambda}, \qquad \ldots 51)$$

d. i. mit den früher gegebenen Werten und $p = 7200$:

$$0 \cdot 0001. \qquad \ldots 52)$$

Um zu erkennen, was dies austrägt, müssen wir bedenken, daß nach 3) sich eine Veränderung von γ in der Beobachtung der Zeit äußert; die letztere erfolgt zur Zeit des Durchganges

des Pendels durch die Ruhelage, während die oben abgeleiteten Werte von k und γ für die größten Elongationen gelten. Um die zu dem $n+1^{\text{ten}}$ Durchgange des Pendels durch die Ruhelage gehörigen Werte von k und γ zu bestimmen, haben wir in den Formeln 37) und 38) k_0 und γ_0 durch k_n und γ_n zu ersetzen und $t=\frac{\pi}{2\lambda}$, nämlich einer halben Schwingungsdauer gleich zu nehmen. Die Änderung von k während dieser halben Schwingung beträgt im Maximum, also in unserem Falle für $\alpha=\alpha_0=120'$

$$-0\cdot 0002\,k_0=-0'01$$

die Änderung von γ:

$$-0\cdot 0001. \qquad \ldots 53)$$

Die erstere kann immer vernachlässigt werden; die letztere ist so groß wie 52) und kann daher nur dann vernachlässigt werden, wenn γ überhaupt konstant genommen werden darf.

Wir wenden nun Gleichung 3) auf den $n+1^{\text{ten}}$ Durchgang des Pendels durch die Ruhelage an. Dieser erfolgt mit großer Annäherung zu dem Zeitpunkt $t=\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{\lambda}$. Wir setzen also genauer:

$$t_{\frac{2n+1}{2}}=\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{\lambda}+y_{\frac{2n+1}{2}}. \qquad \ldots 54)$$

Ferner ist nach 2) genau $\varphi=(n+1)\pi$, weil ϑ gleich Null wird. Dann lautet die Gleichung 3):

$$\lambda\left[\frac{2n+1}{2}\,\frac{\pi}{\lambda}+y_{\frac{2n+1}{2}}\right]+\gamma_{\frac{2n+1}{2}}=(n+1)\pi\left\{1+\frac{k^2_{\frac{2n+1}{2}}}{4}\cdots\right\} \ldots 55)$$

Vor allem ist zu erkennen, daß eine Veränderung $\Delta\gamma$ von γ mit dem Betrage $\frac{\Delta\gamma}{\lambda}$ in y eingeht. Der Einfluß von $\Delta\gamma$ auf die Durchgangszeit wird also, da λ nahezu gleich π ist, höchstens:

$$0\cdot 0002:3\cdot 14 \text{ Sekunden},$$

also eine Größe, die unter allen Umständen vernachlässigt werden kann. Stellt man nicht Durchgangsbeobachtungen, sondern Koinzidenzbeobachtungen an, so wird die Sache etwas

ungünstiger, indem die Veränderung von γ dann mit einem Betrage eingeht, der so oftmal größer ist als der obige, als von einer Koinzidenz zur nächsten Sekunden nötig sind; in unserem Falle sind das 170. Das gibt aber erst etwa

0·012 Sekunden,

ein Betrag, der sich noch vollständig der Beobachtung entzieht. Man kann also γ als konstant ansehen, und zwar ist nach 4)

$$\gamma = \gamma_0 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k_0^2}{4} + \ldots\right). \qquad \ldots 56)$$

Dadurch sind wir sowohl in Bezug auf k wie auf γ zu der bekannten Formel zurückgekommen und damit ist bewiesen, daß die schon bei Aufstellung der Gleichung 10) vernachlässigten Glieder auch bei Summierung über die ganze Anzahl der Schwingungen einflußlos bleiben.

Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung

von

K. W. Fritz Kohlrausch.

Aus dem II. physikalischen Institut der Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1906.)

Die von Rutherford und Soddy begründete Zerfallstheorie geht von der Annahme aus, daß die Atome radioaktiver Substanzen einer Umwandlung unterworfen sind. Der Zerfall erfolgt nach dem Exponentialgesetz $n = Ne^{-\lambda t}$, wo N die Anzahl der Atome zur Zeit $t_0 = 0$, λ eine Konstante und n die Zahl der nach der Zeit t noch vorhandenen Atome bedeutet. Durch Differentiation erhält man $\frac{dn}{dt} = -\lambda n$, das heißt, der Teil der vorhandenen Atome, der in der Zeiteinheit einer Veränderung unterliegt, ist gegeben durch λ; $\frac{1}{\lambda}$ wird als »mittlere Lebensdauer« der betreffenden Atome bezeichnet.

Man gelangt zu diesem Gesetz auch auf anderem Wege. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom innerhalb einer gegebenen Zeit eine Umwandlung erfährt, wird desto größer, je größer die Zeit ist. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom in der Zeit Δt, wobei Δt sehr klein sein möge, eine Umwandlung erfährt, mit $\lambda \Delta t$, so wird die Wahrscheinlichkeit w_1, daß dieses Atom in der gleichen Zeit nicht verändert wird: $w_1 = 1 - \lambda \Delta t$; für die Zeiten $2\Delta t, 3\Delta t, \ldots k\Delta t$ erhält man:

$$w_2 = (1-\lambda\Delta t)^2$$
$$w_3 = (1-\lambda\Delta t)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_k = (1-\lambda\Delta t)^k.$$

Setzt man jetzt $k\Delta t = \delta$ und $-\frac{\lambda\delta}{k} = \frac{1}{\omega}$, so geht w_k über in $w_k = \left(1-\frac{\lambda\delta}{k}\right)^k = \left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right]^{-\lambda\delta}$.

Für große Werte von k wird auch ω groß und man erhält: $w_k = e^{-\lambda\delta}$. Von einer großen Anzahl N gleichartiger solcher Atome werden die nach der Zeit δ noch vorhandenen gegeben sein durch $Ne^{-\lambda\delta} = n$, und zwar wird n durch dieses Abklingungsgesetz desto sicherer definiert sein, je größer N ist. Ist hingegen N keine sehr große Zahl, dann wird die tatsächliche Abklingung von obigem Gesetz abweichen, das heißt, n wird gewissen Schwankungen unterworfen sein. Die Größe dieser »Streuung« wurde von E. v. Schweidler[1] mit Hilfe des Bernoulli'schen Theorems[2] berechnet.

Können in einer Reihe von s Versuchen nur zwei einander ausschließende Ereignisse A und B mit den Wahrscheinlichkeiten $p = \frac{m_1}{s}$, beziehungsweise $q = \frac{m_2}{s}$, wobei m_1 und m_2 die günstigen Fälle darstellen, eintreten, so ist die Wahrscheinlichkeit W, daß m_1 zwischen den Grenzen $ps \pm \nu$ und gleichzeitig m_2 zwischen den Grenzen $qs \pm \nu$ liegt, gegeben durch:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\nu\sqrt{\frac{1}{2spq}}} e^{-t^2} dt.$$

Wendet man diese Formel auf die Lösung des vorliegenden Problems an und setzt man zu diesem Zwecke $e^{-\lambda\delta} = 1-\alpha$ und dementsprechend $1-e^{-\lambda\delta} = \alpha$, so ergibt sich, da die beiden einander ausschließenden Ereignisse A und B in diesem Falle

[1] Premier Congrès international pour l'étude de la Radiologie et de l'Ionisation: »Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung«.

[2] Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften, I, D. 1.

dem Verwandeltwerden und dem Nichtverwandeltwerden entsprechen:

$$m_1 = N(1-\alpha);\ m_2 = N\alpha;\ s = N;\ p = 1-\alpha;\ q = \alpha.$$

Daher wird die Wahrscheinlichkeit W', daß $n = N\alpha$ zwischen den Grenzen $N\alpha \pm N\alpha\sigma$ liegt:

$$W' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{N\alpha\sigma\sqrt{\frac{1}{2N\alpha(1-\alpha)}}} e^{-t^2} dt.$$

Nach einer der Fehlerrechnung[1] entnommenen Formel ist die obere Integralgrenze das Produkt aus der Grenze, die der Fehler nicht übersteigen soll, und aus h, dem sogenannten »Maße der Präzision«; aus h wird der mittlere Fehler η gefunden mittels der Beziehung $\eta = \frac{1}{h\sqrt{2}}$. Da die Fehlergrenze hier $N\alpha\sigma$ ist, so wird:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2N\alpha(1-\alpha)}}$$

und

$$\eta = \sqrt{N\alpha(1-\alpha)}.$$

Drückt man jetzt noch den mittleren Fehler in Bruchteilen des Normalwertes αN aus und bezeichnet ihn dann mit $\bar{\varepsilon}$, so wird

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\eta}{N\alpha} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{N\alpha}}.$$

Wählt man die Zeit δ klein gegen die mittlere Lebensdauer $\frac{1}{\lambda}$ eines Atoms, dann ist α ebenfalls sehr klein, $1-\alpha$ nahezu gleich 1 und der prozentuelle Fehler $\bar{\varepsilon}$ erhält die Gestalt:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{N\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{Z}}.$$

»Das heißt, die mittlere Schwankung ist nur abhängig von der Zahl Z, der Anzahl von Atomen, die bei strenger Gültigkeit

[1] Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften, I, D. 2.

des Gesetzes $n = Ne^{-\lambda t}$ innerhalb der Zeit δ zur Umwandlung gelangen würden, und zwar gleich der reziproken Wurzel aus dieser Zahl.«

Diese von E. v. Schweidler gefundene Beziehung konnte empirisch nachgewiesen werden.

Die benutzte Versuchsanordnung war folgende: Zwei Messingkästchen A und B (Fig. 1) von 9 cm^2 Querschnitt und

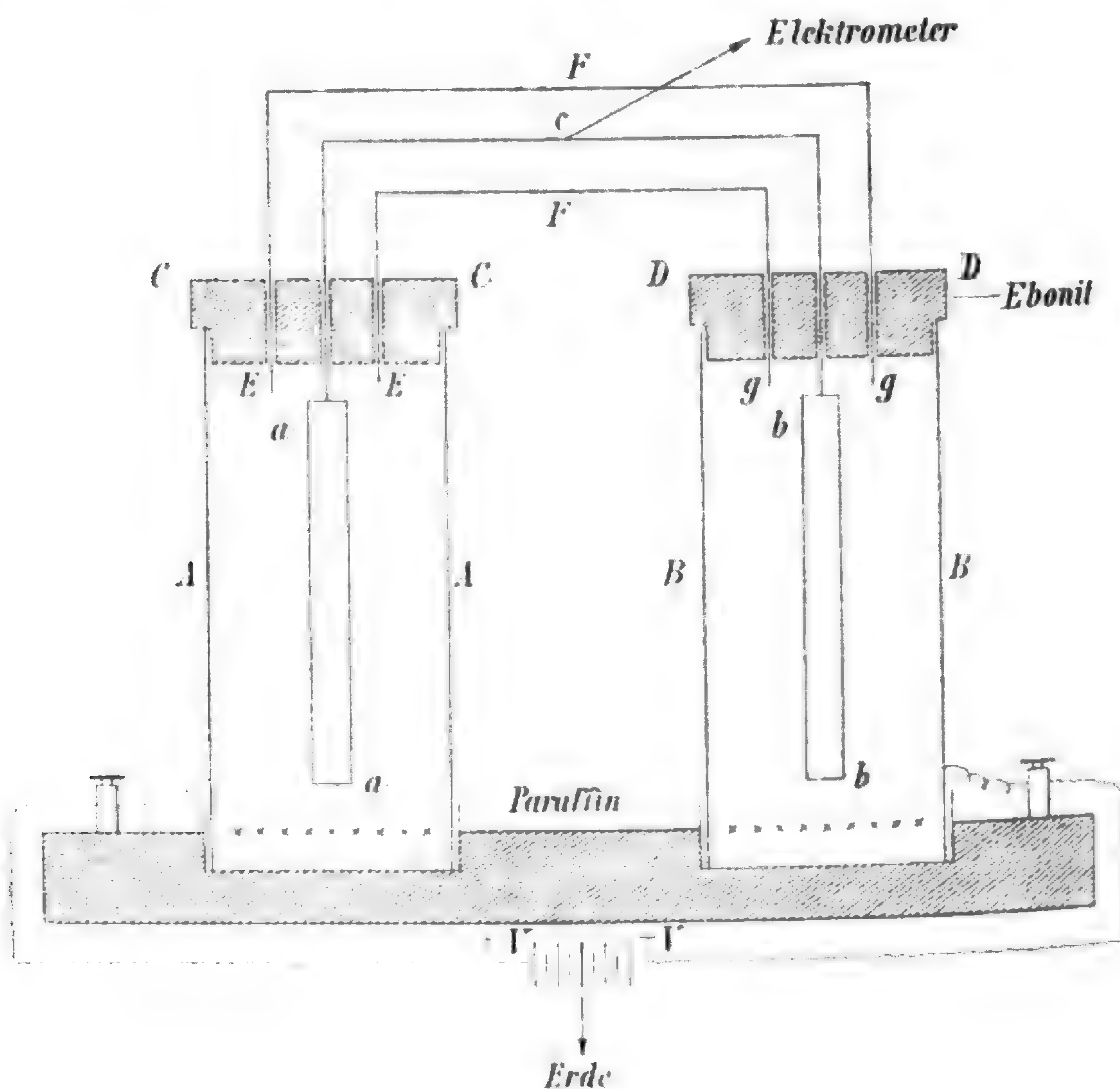


Fig. 1.

7 *cm* Höhe wurden oben durch die Ebonitdeckel C und D verschlossen und isoliert voneinander in Paraffin befestigt. Der hufeisenförmig gebogene Messingstab acb ragte mit seinen freien verdickten Enden a und b durch die isolierenden Ebonitdeckel 5 *cm* tief in die Kästchen hinein und war bei c mit dem einen Quadrantenpaar eines Nernst-Dolezalek'schen Elektrometers (Kapazität = 120 *cm*) verbunden, dessen anderes

Quadrantenpaar geerdet wurde. Der außerhalb der Kästchen befindliche Teil des Messingstabes sowie die Elektrometerzuleitung wurden zur Vermeidung äußerer Störungen von geerdeten Messingröhren umgeben (EFG), die den Ebonitdeckel durchsetzten und so gleichzeitig einen Schutzring gegen direkte Ladung des Stabes durch A und B bildeten. Auf den Boden der beiden Kästchen wurden zwei nahezu gleich stark aktive, α-strahlende Präparate gelegt, bestehend aus Silberblechen, auf die mittels Elektrolyse Polonium niedergeschlagen worden war. Jedes Kästchen konnte mit dem einen Pol einer in der Mitte geerdeten Akkumulatorenbatterie verbunden und während der Dauer eines Versuches auf konstantem Potential gehalten werden. Wurde die Verbindung zwischen den Kästchen und der Batterie hergestellt, dann erzeugte die auf A und B sitzende positive, beziehungsweise negative Ladung auf den gegenüberstehenden Messingstäben a und b eine Influenzladung, die geerdet wurde. Wenn nun die in A und B liegenden Poloniumpräparate exakt gegeneinander hätten ausgeglichen werden können, so hätte nach Aufhebung der Erdleitung infolge der Schwankungen in der α-Strahlung ein Pendeln der Elektrometernadel um den Nullpunkt der Skala stattfinden müssen. Da eine solche Ausgleichung der aktiven Substanzen nur sehr schwer erreichbar war, so war bei den Versuchen die beobachtete Schwankung übergelagert über eine langsame Aufladung der Nadel. War kein ionisierender Körper in den Kästchen, dann blieb die Nadel vollkommen ruhig.

Daß sich die in A und B auftretenden Abweichungen vom Normalwert in ihrer Wirkung auf die Nadel gegenseitig verstärken, kann bewiesen werden. Bezeichnet man die wahren Beobachtungsfehler, die erfolgen würden, wenn entweder A oder B allein in Verwendung wäre, mit Δ beziehungsweise Δ', so ist der wahre Beobachtungsfehler einer Messung, wo beide Kästchen zugleich wirken, gegeben durch $\Delta \pm \Delta'$, wobei beide Vorzeichen gleich möglich sind. Wirkt nur eines der Kästchen, so ist der mittlere Fehler aus einer größeren Anzahl von Beobachtungen definiert durch:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n-1}, \text{ beziehungsweise } \varepsilon_2^2 = \frac{[\Delta'\Delta']}{n-1};$$

sind sie zugleich in Tätigkeit, dann wird der mittlere Fehler

$$\varepsilon^2 = \frac{[(\Delta \pm \Delta')(\Delta \pm \Delta')]}{n-1} = \frac{[\Delta\Delta]+[\Delta'\Delta'] \pm 2[\Delta\Delta']}{n-1};$$

da aber bei einer genügend großen Anzahl von Versuchen das doppelte Fehlerprodukt gleich oft mit dem positiven wie mit dem negativen Vorzeichen vorkommen wird, so kann $\pm 2[\Delta\Delta']$ gleich Null gesetzt werden, und es bleibt:

$$\varepsilon^2 = \frac{[\Delta\Delta]+[\Delta'\Delta']}{n-1} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2.$$

Nimmt man jetzt noch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon'$ an, dann wird $\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{2}$; der gemessene mittlere Fehler wird also $\sqrt{2}$ mal so groß als der mittlere Fehler, der auftreten würde, wenn nur ein Kästchen in Benützung wäre.

Bei dieser Versuchsanordnung wurden eventuelle, durch Störungen in der Akkumulatorenbatterie bedingte Fehler auf ein Minimum herabgedrückt, da sich diese Fehler, solange sie symmetrisch in der Batterie auftreten, in ihrer Wirkung auf die Nadel gegenseitig aufheben müssen. Ferner gestattete diese Anordnung trotz der hohen Empfindlichkeit des Meßinstrumentes (200 Teilstriche für ein Volt) doch die Benützung beliebig stark aktiver Präparate, was, wie eine einfache Überlegung zeigt, von Vorteil für den Versuch ist. Die auf a und b in der Zeit δ aufgeladene Elektrizitätsmenge i ist, wenn wir annehmen, daß Sättigungsstrom herrscht und jedes α-Partikel 80.000[1] Ionenpaare erzeugt,

$$i = 3\cdot 4 \,.\, 10^{-10} \,.\, 8 \,.\, 10^4 Z = 27\cdot 2 \,.\, 10^{-6} Z.$$

Es wird also $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{Z}} = 5\cdot 22 \,.\, 10^{-3} \frac{1}{\sqrt{i}}$; der tatsächlich auftretende Fehler ε wird dann:

$$\varepsilon = i\bar{\varepsilon} = 5\cdot 22 \,.\, 10^{-3} \sqrt{i},$$

---

[1] Rutherford, Phil. Mag. (6), 10, p. 207 (1905).

also proportional der Wurzel aus der Stromstärke. Ein mittlerer Fehler ε wird daher um so leichter konstatierbar sein, je größer i gewählt werden kann. Aus dieser Darstellung sieht man ferner, daß ε abhängig ist von der den Kästchen A und B erteilten Ladung, da bei Verwendung ein und derselben Substanz mit Änderung der zugeführten Potentialdifferenz auch eine Änderung von i erfolgt.

Die Messungen wurden in der Weise vorgenommen, daß die Anzahl der Teilstriche, über die sich die Elektrometernadel in einer Minute bewegte, notiert und aus 30 solchen Beobachtungen der mittlere Fehler ε nach der bekannten Formel $\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-1}}$ berechnet wurde. Das Mittel über vier aus solchen Messungsreihen erhaltene Resultate wurde als endgültiger Wert für ε betrachtet. Im folgenden möge ein Beispiel einer solchen Versuchsreihe gegeben sein; a sind die beobachteten Werte, x der wahrscheinlichste Wert und Δ die wahren Beobachtungsfehler.

a	$a-x=\Delta$	Δ^2	a	$a-x=\Delta$	Δ^2
80	7	49	57	—16	256
94	21	441	102	29	841
86	13	169	43	—30	900
85	12	144	81	8	64
52	—21	441	61	—12	144
128	55	3025	53	—20	400
75	2	4	87	14	196
88	15	225	22	—51	2601
144	71	5041	78	5	25
59	—14	196	43	—30	900
38	—35	1225	78	5	25
92	19	361	26	—47	2209
58	—15	225	74	1	1
37	—36	1296	113	40	1600
94	21	441	66	—7	49

$$\Sigma a = 2194 \qquad \Sigma \Delta^2 = 23494$$

$$\alpha = \frac{\Sigma a}{30} = 73; \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{29}} = \mathbf{28}.$$

Die Versuche wurden bei verschiedenen Potentialdifferenzen gemacht und geben, wenn man die angewandte Span-

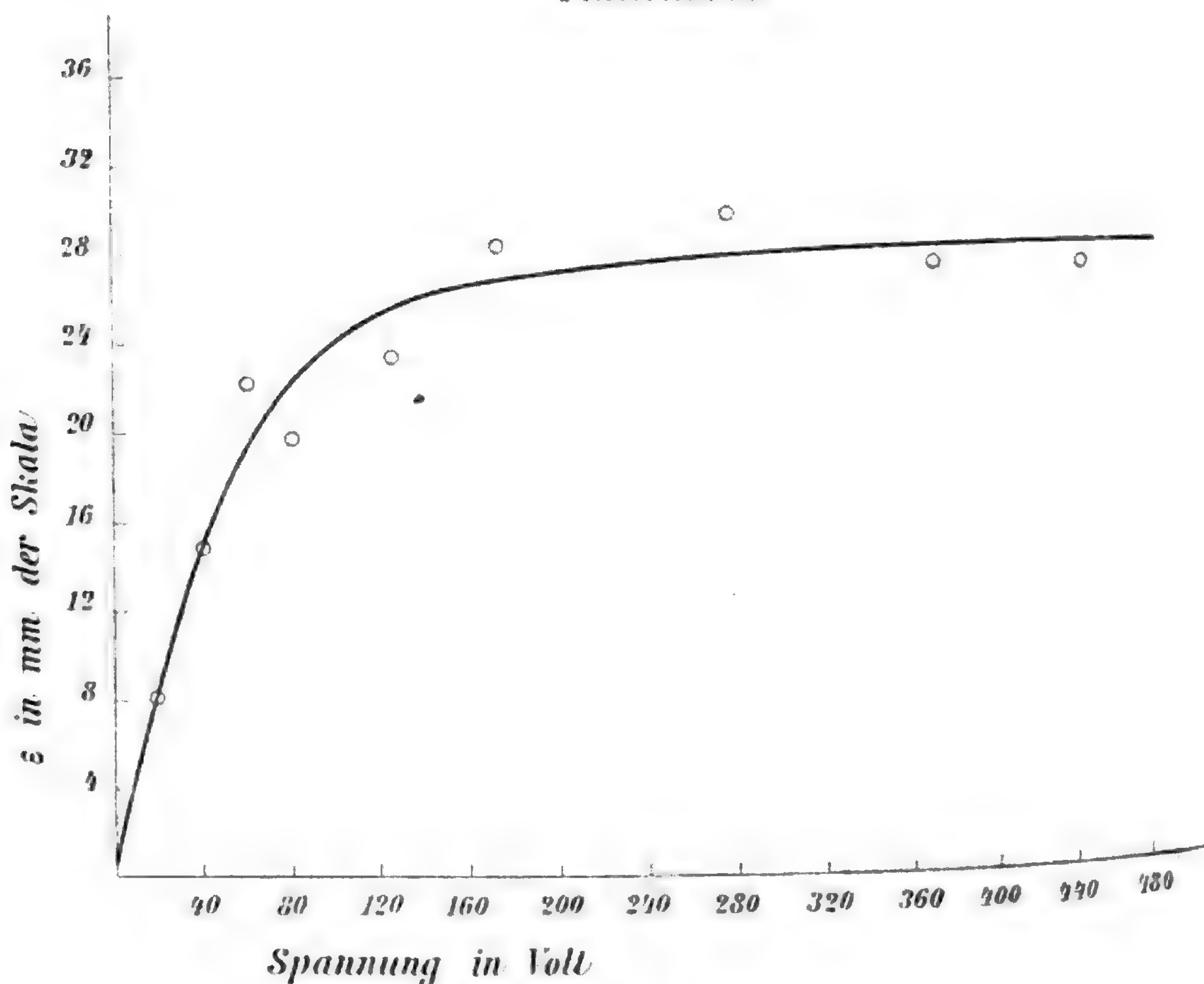


Fig. 2.

nung in Volt als Abszisse, die mittleren Fehler ε in Millimetern der Fernrohrskala als Ordinaten aufträgt, die Fehlerkurve (Fig. 2).

Um einen Vergleich der empirisch gewonnenen Resultate mit den der Theorie nach zu erwartenden zu ermöglichen, wurde die Stärke des in einem der Kästchen enthaltenen Präparates galvanometrisch gemessen und aus der so erhaltenen

Stromkurve (Fig. 3) der mittlere Fehler berechnet. Es ergab sich, daß die gemessenen Fehler zwar in der Größenordnung mit den berechneten Fehlern übereinstimmten, im allgemeinen aber höher als diese waren. Eine vollständige Übereinstimmung war nicht zu erwarten, da 1. bei drei verschiedenen Methoden drei verschiedene Werte für die Elektrometerkapazität erhalten

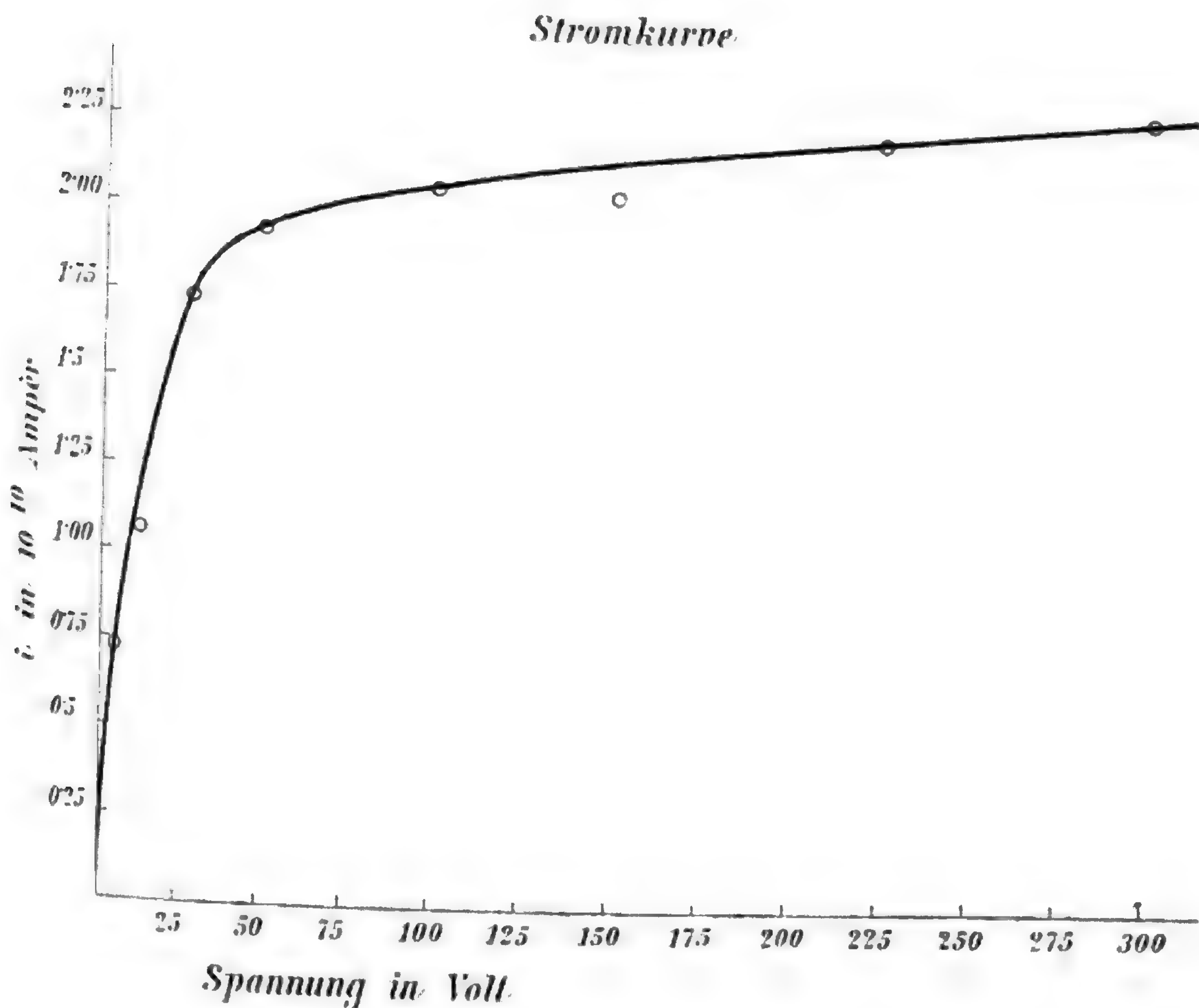


Fig. 3.

wurden, also der gleich 120 *cm* angenommene Wert unsicher ist; 2. die Entfernung zwischen A und a, beziehungsweise B und b zu klein war, um eine vollständige Ausnützung der α-Strahlung zu ermöglichen, und da 3. bei den empirisch gewonnenen Werten die Beobachtungsfehler den eigentlichen Wert von ε vergrößerten. Aus 1. und 2. folgt eine Ungenauigkeit im berechneten, aus 3. eine Ungenauigkeit im gemessenen

Fehler. Immerhin aber macht der Größenunterschied zwischen diesen beiden Werten die Annahme wahrscheinlich, daß noch eine zweite Schwankung von anderer Ursache als der bisher angenommenen über die betrachtete Streuung gelagert ist und so den zu erwartenden mittleren Fehler s vergrößert.

Über die mutmaßliche Zeit der Wiederauffindung des Halley'schen Kometen bei seiner nächsten Erscheinung

von

Dr. J. Holetschek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1906.)

Da wir mit Sicherheit darauf rechnen können, daß der Halley'sche Komet bei seiner nächsten Erscheinung, in welcher er nach den Rechnungen von Pontécoulant im Mai 1910 durch seine Sonnennähe geht, schon bei einem viel größeren Radiusvektor aufgefunden werden wird als in der letzten (1835), so erscheint es von Wichtigkeit, schon jetzt einiges über seinen heliozentrischen und geozentrischen Lauf während der nächsten Jahre zu wissen, damit bei einer etwaigen Auffindung eines kometenähnlichen Objektes in der betreffenden Himmelsgegend leicht erkannt werden kann, ob dasselbe mit dem Halley'schen Kometen identifiziert werden darf oder nicht.

Ich habe daher einer Aufforderung des Herrn Direktors Hofrat Weiß, einige diesbezügliche Orientierungsrechnungen zu machen, sehr gern entsprochen und teile hier die wichtigsten der gefundenen Resultate mit. Benützt wurden die Bahnelemente von Pontécoulant (Comptes rendus, tome 58, p. 828; siehe auch Connaissance des Temps von 1900 an, p. 6):

$$T = 1910 \text{ Mai } 16 \cdot 45 \text{ m. Z. Paris}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi - \Omega &= 111^\circ\, 32'\, 19'' \\ \Omega &= 57 \quad 10 \quad 33 \\ i &= 162 \quad 13 \quad 9 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{Äquin.}\\ 1910 \text{ Mai } 16 \cdot 5\end{array}$$

$$\log q = 9 \cdot 837019$$

$$e = 0 \cdot 961733$$

$$\log a = 1 \cdot 254196$$

Infolge einer besonderen Kombination der Störungen ist, wie Pontécoulant a. a. O., p. 826, bemerkt hat, die für die nächste Wiederkehr sich ergebende Umlaufszeit des Kometen ($74^1/_2$ Jahre) die kürzeste unter allen, welche seit 1531 beobachtet worden sind. Außerdem fällt bei der Vergleichung dieses Elementensystems mit früheren sofort ins Auge, daß die Periheldistanz q diesmal wesentlich größer und die Exzentrizität wesentlich kleiner ist als in irgend einer der früheren Erscheinungen.

Mit diesen Elementen habe ich nun einige Positionen des Kometen während der nächsten Jahre berechnet, und zwar insbesondere für solche Zeitpunkte, in denen der Komet nahezu in Opposition mit der Sonne ist, also seine Auffindung unter sonst gleichen Umständen mehr begünstigt erscheint als in anderen Jahreszeiten.

M. Z. Paris			α	δ	r	Δ
1906	Dezember	31·5....	100° 7′	+ 9°34′	11·07	10·11
1907	November	1·5....	102 24	+10 44	9·18	8·72
	Dezember	1·5....	99 36	10 28	8·99	8·14
	Dezember	31.5....	95 28	10 35	8·78	7·82
1908	Jänner	30·5....	91 18	11 4	8·58	7·80
	Februar	29·5....	88 26	+11 48	8·37	8·01
1908	November	1·5....	97 33	+12 27	6·54	5·97
	Dezember	1·5....	92 46	12 9	6·29	5·39
	Dezember	31·5....	85 58	12 14	6·04	5·10
1909	Jänner	30·5....	79 32	12 44	5·79	5·12
	März	1·5....	75 37	+13 36	5·53	5·35
1909	September	2·5....	91 8	+17 46	3·75	3·99
	Oktober	2·5....	90 50	17 41	3·42	3·13
	November	1·5....	83 44	17 33	3·08	2·30
	Dezember	1·5....	64 33	16 29	2·73	1·74
	Dezember	31·5....	39 2	13 7	2·35	1·69
1910	Jänner	30·5....	23 25	+10 38	1·96	1·96

Da die von Pontécoulant für die letzte Erscheinung des Halley'schen Kometen ($T = 1835$ November 15) vorausberech-

nete Perihelzeit mit der tatsächlichen bis auf 3 Tage und die kurz vor der Wiederkehr des Kometen bekannt gemachte sogar bis auf einen Tag gestimmt hat, so dürfte die Unsicherheit auch diesmal nur eine geringe sein.

Es darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß Pontécoulant in seiner zitierten Notice (a. a. O., p. 826) als Perihelzeit 1910 Mai 24·37 abgeleitet, dagegen in der Zusammenstellung der Elemente auf p. 828 ganz unerwartet 1910 Mai 16·95 angesetzt hat. Diese letztere Angabe ist zwar auf p. 915 desselben Bandes dahin richtiggestellt, daß statt 16·95 der erste Wert, nämlich 24·37 stehen soll, doch ist trotzdem in der Connaissance des Temps (seit 1900) und im Annuaire du Bureau des Longitudes als Zeit des Periheldurchganges der 16. Mai beibehalten, und zwar Mai 16·45; im Annuaire steht Mai 16, 23^h, weil hier seit 1900 der Tag von Mitternacht an gezählt wird. Da nun also dieser Zahlenwert jetzt in beiden Publikationen Jahr für Jahr wiederkehrt, so habe ich ihn, wie man sieht, auch bei meinen obigen Rechnungen angenommen.

Übrigens hat die Differenz hier keinen wesentlichen Nachteil, da unter den vorausberechneten Bahnelementen die Perihelzeit ohnehin das unsicherste ist, aus welchem Grunde es, auch wenn die große Abweichung unbemerkt geblieben wäre, ohnehin nicht unterlassen worden wäre, die Bahn von Pontécoulant auch noch unter Annahme einer wesentlich geänderten Perihelzeit zur Rechnung zu verwenden. Ich habe, um für jeden Fall den Einfluß einer Abweichung der Perihelzeit auf die geozentrischen Positionen des Kometen darzulegen, für einige der obigen Tage noch je zwei Positionen gerechnet, welche einer Verschiebung des Periheldurchganges um ∓30 Tage entsprechen. Dadurch ergab sich:

		α	δ
1907 Dezember 31·5	-30^d	94°57′	+10°41′
	T	95 28	10 35
	$+30^d$	95 58	+10 29
1908 Dezember 31·5	-30^d	84°41′	+12°25′
	T	84 58	12 14
	$+30^d$	87 8	+12 3

		α	δ
1909 Oktober 2·5	-30^d	89°29′	+18°37′
	T	90 50	17 41
	$+30^d$	92 0	+16 56
1909 Dezember 1·5	-30^d	54°48′	+16°56′
	T	64 33	16 29
	$+30^d$	70 54	+15 54

Die Änderungen sind in der ersten Zeit, wie auf Grund der großen Distanzen zu erwarten war, so geringfügig, daß die Auffindung des Kometen nicht wesentlich erschwert werden kann, auch wenn die Periheldistanz sehr fehlerhaft sein sollte. Später, also bei zunehmender Annäherung des Kometen, wird der Einfluß einer Unrichtigkeit der Perihelzeit auf die geozentrischen Positionen allerdings größer, doch ist dann zugleich auch schon die Helligkeit des Kometen eine bedeutendere, so daß also hier die größere Unsicherheit der Position durch eine größere Auffälligkeit des Kometen ziemlich ausgeglichen wird.

Der kleinste Radiusvektor, bis zu welchem die obigen Rechnungen fortgeführt sind ($r = 1 \cdot 96$), kommt, wie man gleich sehen wird, fast genau demjenigen gleich, bei welchem der Komet im Jahre 1835 aufgefunden worden ist, so daß also in dieser Beziehung ein vollständiger Anschluß dieser Rechnungen an die letzte Erscheinung des Kometen hergestellt ist.

Damit aber auch darüber ein Urteil abgegeben werden kann, wie sich die Helligkeit des Kometen bei noch größeren Radienvektoren verhalten dürfte, bleibt gegenwärtig kaum etwas anderes übrig, als den Kometen empirisch mit anderen zu vergleichen, und zwar abgesehen von solchen, die überhaupt in sehr großen Distanzen beobachtet worden sind, insbesondere mit denjenigen, welche ihm bezüglich der Periheldistanz und des Helligkeitsgrades möglichst gleich oder wenigstens nahe kommen. Man muß hauptsächlich solche Kometen wählen, weil andere zu einer direkten Vergleichung weniger geeignet sind, indem es ein Komet mit einer sehr kleinen Periheldistanz zu einer bedeutenden Helligkeitssteigerung und Schweifentwicklung bringen kann, auch wenn er an sich, also in großen

Distanzen, kein ansehnlicher Himmelskörper ist, während andrerseits Kometen mit sehr großen Periheldistanzen, auch wenn sie an sich recht ansehnlich sind, in der Sonnennähe nur eine geringe Steigerung erfahren.

Es können sodann Anhaltspunkte zur Beurteilung der mutmaßlichen Helligkeit des Kometen in sehr großen Distanzen oder wenigstens Andeutungen über dieselbe gewonnen werden, wenn auch noch darauf geachtet wird, in welchem Grade die Helligkeit der einzelnen Kometen auf ihrem Wege zum Perihel zu- und nach dem Perihel abgenommen hat.

Der Halley'sche Komet ist in seiner ersten vorausberechneten Erscheinung ($T = 1759$, März 12) am 77. Tage vor dem Perihel, und zwar bei $r = 1 \cdot 6$, $\Delta = 1 \cdot 1$ aufgefunden, aber erst vom 50. Tage an andauernd beobachtet worden, während er andrerseits bis zum 102. Tage nach dem Perihel, und zwar bis zu $r = 1 \cdot 9$, $\Delta = 2 \cdot 0$ verfolgt werden konnte.

In der Erscheinung 1835/36, in welcher er am 15. November 1835 durch das Perihel gegangen ist, wurde er schon 102 Tage vor dem Perihel, nämlich am 5. August 1835, und zwar bei $r = 1 \cdot 95$, $\Delta = 2 \cdot 44$ gefunden, worauf er andrerseits bis zum 183., beziehungsweise 185. Tage nach dem Perihel (17. Mai 1836 in München, 19. Mai in Breslau), und zwar bis zu $r = 3 \cdot 0$, $\Delta = 2 \cdot 7$ verfolgt worden ist. Die erste Entdeckung gelang zu Rom mit einem sechszölligen Refraktor (17 *cm* Öffnung); der Komet war aber damals noch so lichtschwach, daß er nur mit einem eigens konstruierten Okular und auch da nur in der Mitte des Gesichtsfeldes wahrzunehmen war. Zwei Wochen später, nämlich am 20. August, wurde er in Dorpat, am 21. August in Berlin, Wien, Kremsmünster gesehen u. s. w. Daß die Auffindung zu Dorpat trotz der bedeutenden optischen Kraft des neunzölligen Refraktors erst verhältnismäßig spät gelungen ist, hat seinen Grund zum Teil darin, daß dort die Dämmerung noch störend war. Der Komet nahm nun mit zunehmender Annäherung an die Sonne rasch an Helligkeit zu, und zwar viel rascher als nach dem Verhältnis $1 : r^2\Delta^2$ zu erwarten gewesen wäre. Reduziert man die direkt angegebenen oder indirekt angedeuteten Helligkeitsgrade H unter Annahme des genannten Helligkeitsverhältnisses, d. h. durch Subtraktion von $5 \log r\Delta$ auf $r = 1$,

$\Delta = 1$, so findet man unter anderen die im folgenden Tableau angesetzten Helligkeitswerte H_1.[1]

		H	r	Δ	$5 \log r\Delta$	H_1
1835 August	5	13^m(?)	1·95	2·44	+3·4	9^m6(?)
	21	10·5	1·72	1·94	+2·6	7·9
	27	10·0	1·63	1·74	+2·3	7·7
September	23, 24	5·4	1·21	0·75	−0·2	5·6
Sept. 30 bis Okt.	3	3·0	1·08	0·44	−1·6	4·6
Oktober	10, 12	1·7	0·95	0·19	−3·7	5·4
	15 bis 18	1	0·86	0·26	−3·2	4·2

Der Maximalwert von H_1, der sich also aus der Zeit der kleinsten Radienvektoren ergibt, befindet sich auf Grund der Diskussion sämtlicher Erscheinungen des Halley'schen Kometen zwischen 4^m0 und etwa 3^m5.

Wenn nun nach anderen Kometen gefragt wird, die in großen Distanzen beobachtet worden sind, so soll man, wie schon bemerkt, in erster Linie nur solche Kometen in Betracht ziehen, die der Sonne im Perihel ebenso nahe gekommen sind und denselben Maximalwert der Helligkeit erlangt haben wie der Halley'sche. Die Auswahl ist aber wegen dieser zweifachen Bedingung eine sehr beschränkte und man muß, um eine hinlänglich große Anzahl von Vergleichsobjekten zu erhalten, auch noch solche Kometen heranziehen, bei denen man diese Bedingungen, insbesondere die zweite, nur angenähert erfüllt findet.

Beschränkt man sich überdies auf diejenigen Kometen, die bezüglich ihrer Helligkeit ausreichend beobachtet worden sind, so findet man solche fast ausschließlich nur im 19. Jahrhundert und hier bietet sich zunächst der von 1807 ($T =$ September 18) mit $q = 0 \cdot 65$ dar. Er ist nach dem Perihel bis $r = 3 \cdot 1$, $\Delta = 3 \cdot 7$ beobachtet worden, somit noch etwas weiter als der Halley'sche in der Erscheinung 1835/36. Als reduzierte Helligkeit findet man aus den bald nach dem Periheldurchgang vorgenommenen Helligkeitsschätzungen einen in der Nähe von 2^m8 liegenden Wert und selbst aus den letzten, bei

[1] Vergl. »Untersuchungen über die Größe und Helligkeit der Kometen und ihrer Schweife«; 63. Band der Denkschriften der mathem.-naturw. Klasse, p. 565 (249).

den größten Distanzen angestellten Beobachtungen den zwar wesentlich geringeren, aber immerhin noch bedeutenden Wert 6 bis 7^m, so daß also der Halley'sche Komet gegen diesen merklich zurücksteht.

Noch mehr ist dies bei dem großen Kometen 1811 I ($T =$ September 12) der Fall, obwohl derselbe eine wesentlich größere Periheldistanz besitzt als der Halley'sche, nämlich $q = 1\cdot04$. Er ist nach dem Perihel bis $r = 4\cdot5$, $\Delta = 3\cdot5$ verfolgt worden und seine auf $r = 1$, $\Delta = 1$ reduzierte Helligkeit übertrifft wesentlich sowohl die des Halley'schen als auch die des Kometen von 1807, indem ihr Maximalwert zwischen der 1. und 2. Größe liegt und sogar der geringste Wert, welcher sich aus den letzten Beobachtungen bei den größten Distanzen ergibt, kaum geringer als 6. Größe ist.

Etwas weniger ansehnlich als der Komet 1811 I, aber immerhin dem von 1807 recht nahe kommend, zeigt sich der große Komet 1858 VI ($T =$ September 29, $q = 0\cdot58$). Er ist schon 120 Tage vor dem Perihel (bei $r = 2\cdot2$, $\Delta = 2\cdot5$) entdeckt und bis zum 155. Tage nach demselben (bis $r = 2\cdot7$, $\Delta = 3\cdot1$) beobachtet worden. Aus der Zeit vor dem Perihel besitzen wir drei längere Reihen von Helligkeitsangaben, aus denen hier einige Werte ausgewählt und auf $r = 1$, $\Delta = 1$ reduziert worden sind. Die Distanzen sind der Ephemeride von Hill in Astr. Nachr., Bd. 64 entnommen.

1858		H	r	Δ	$5 \log r\Delta$	H_1
Juni	14	10·5(?)	2·06	2·50	+3·6	7^m(?)
August	19	7	1·05	1·94	+1·6	5·4
	29	6	0·90	1·71	+0·9	5·1
September	8	5	0·75	1·43	+0·2	4·8
	12	3	0·70	1·30	−0·2	3·2
	17	2	0·64	1·14	−0·7	2·7
	28	1	0·58	0·77	−1·8	2·8
Oktober	3	0·2	0·58	0·63	−2·2	2·4
	9	0·2	0·61	0·54	−2·4	2·6

Es hat also, wie man sieht, nicht nur die beobachtete, sondern auch die reduzierte Helligkeit gegen das Perihel recht auffällig zugenommen, und zwar nahe in demselben Maße wie

beim Halley'schen Kometen, aber mit dem wesentlichen Unterschied, daß die Helligkeitswerte hier bedeutender sind als dort.

Aus der Zeit der größten Helligkeit des Kometen (im ersten Drittel des Oktober) bieten sich die Vergleichungen des Kometenkopfes mit dem Sterne Arktur (α Bootis) dar, welche einerseits von Pape in Altona, andrerseits von J. Schmidt, der sich damals in Wien befand, gemacht worden sind. Nach Schmidt war der Kometenkopf am 3. und dann wieder am 9. Oktober dem genannten Sterne an Helligkeit gleich, während er ihn an den zwischen diesen zwei liegenden Tagen noch merklich übertraf. Es ist dementsprechend für den 3. und 9. Oktober als Helligkeit des Kometenkopfes die des Arktur angesetzt worden. Der Maximalwert von H_1 ist nach diesen letzten Zahlen gewiß nicht geringer, sondern sogar noch etwas bedeutender als 2^m5.

Während die bisher vorgeführten drei Kometen den Halley-schen bezüglich des Helligkeitsgrades übertreffen, kommt ihm der große Komet 1874 III ($T =$ Juli 9, $q = 0 \cdot 68$) in dieser Beziehung viel näher und bleibt sogar schon etwas hinter ihm zurück. Entdeckt am 82. Tage vor dem Perihel bei $r = 1 \cdot 7$, $\Delta = 1 \cdot 6$ ist er mit einer Unterbrechung von nur 10 Tagen 6 Monate lang bis zum 102. Tage nach dem Perihel, als $r = 1 \cdot 9$, $\Delta = 1 \cdot 8$ war, beobachtet worden und hat vor dem Perihel nach den Beobachtungen von J. Schmidt in Athen für das bloße Auge unter anderen die nachstehenden Helligkeiten H gezeigt, welche in der letzten Kolumne auf $r = 1$, $\Delta = 1$ reduziert sind.

	H	r	Δ	$5 \log r\Delta$	H_1
1874 Juni 1	6^m5	1·01	1·28	+0·6	5·9
6	6·0	0·94	1·20	+0·3	5·7
10	5·5	0·89	1·13	0·0	5·5
15	5·0	0·83	1·04	—0·3	5·3
19	4·5	0·79	0·95	—0·6	5·1
27	4·0	0·72	0·77	—1·3	5·3
30	3·5	0·70	0·70	—1·6	5·1
Juli 4	3·0	0·68	0·60	—1·9	4·9
8	2·5	0·68	0·51	—2·3	4·8
9	2·0	0·68	0·48	—2·4	4·4
13	1·5	0·68	0·40	—2·8	4·3

Man sieht, daß die Zunahme der reduzierten Helligkeit gegen das Perihel, obschon bestimmt ausgesprochen, doch nicht so bedeutend ist wie beim Halley'schen und den anderen bisher vorgeführten Kometen und daß auch das Maximum der reduzierten Helligkeit, für welches sich aus sechs in der Zeit vom 9. bis 13. Juli angestellten Helligkeitsbestimmungen 4^m3 ergibt, hinter dem des Halley'schen Kometen zurückbleibt.

Fast denselben Helligkeitsgrad wie 1874 III hat der große Komet 1881 III gezeigt ($T =$ Juni 16, $q = 0 \cdot 73$), nur mit dem Unterschiede, daß dieser Komet hauptsächlich nach dem Perihel beobachtet worden ist. Die Helligkeitsangaben sind von J. Riem in seiner Dissertation über die Bahn dieses Kometen (auf welche Abhandlung hier verwiesen werden muß) auf $r = 1$, $\Delta = 1$ reduziert worden und die Zusammenstellung der Resultate zeigt, daß sich für die Zeit vom 22. Juni bis 18. Juli im Mittel $H_1 = 4^m5$ ergibt. Dieser Komet steht daher gegen den Kometen 1874 III nur wenig, gegen den Halley'schen jedoch um einen verhältnismäßig großen Betrag zurück, konnte aber trotzdem nach dem Perihel (zu Cambridge, U. S.) bis zum 14. Februar 1882 beobachtet werden, an welchem Tage $r = 3 \cdot 7$, $\Delta = 3 \cdot 8$ war.

Bis zu noch größeren Distanzen, nämlich bis $r = 4 \cdot 4$, $\Delta = 5 \cdot 2$, also bis zu einem Radiusvektor, welcher schon mit dem beim Kometen 1811 I angegebenen wetteifert, ist der Komet 1882 II verfolgt worden, doch kann derselbe mit dem Halley'schen nicht direkt verglichen werden, weil seine Periheldistanz außerordentlich klein ist ($q = 0 \cdot 008$) und überhaupt seine Erscheinung von Umständen begleitet war, wie sie in der Regel nicht vorkommen.

Wir können nunmehr die Hauptresultate der bisherigen Vergleichungen kurz dahin formulieren, daß der Halley'sche Komet bezüglich seines Helligkeitsgrades H_1 (Maximalwert nahe an 3^m7) einerseits durch die Kometen 1874 III (4^m3) und 1881 III (4^m5), andrerseits durch die Kometen 1807 (2^m8) und 1858 VI (2^m5) begrenzt ist und überdies auch bezüglich des Grades der Zu- oder Abnahme der Helligkeitswerte H_1 vor, beziehungsweise nach dem Perihel in ziemlich demselben Verhältnis zwischen diesen Kometen zu liegen scheint.

Wenn wir nun nach den größten Distanzen überhaupt fragen, bei denen bisher Kometen beobachtet worden sind, so finden wir solche Kometen nicht nur in der Gegenwart, sondern vereinzelt auch schon in früheren Zeiten (1729), doch können dieselben mit dem Halley'schen nicht direkt verglichen werden, weil bei ihnen nicht nur die Distanzen, in denen sie beobachtet wurden, sondern auch schon die Periheldistanzen sehr groß waren, so daß keine wesentliche Annäherung an die Sonne stattfinden konnte, weshalb es denn auch keiner dieser Kometen zu einer Helligkeitssteigerung und Schweifentwicklung gebracht hat, welche der des Halley'schen zu vergleichen wäre. Andrerseits müssen sie aber, da sie sich trotz der großen Distanzen, bei denen sie zur Beobachtung gelangt sind, immerhin noch verhältnismäßig hell gezeigt haben, als sehr ansehnliche Himmelskörper bezeichnet werden, die bei wesentlich größerer Annäherung an die Sonne den Halley'schen wahrscheinlich noch übertroffen haben würden.

Der Komet von 1729 mit der größten bisher bekannten Periheldistanz ($q = 4 \cdot 05$) muß, da er trotz seiner großen Abstände von der Sonne und von der Erde (selbst im Minimum $r = 4 \cdot 07$, $\Delta = 3 \cdot 12$) mit den geringen Hilfsmitteln der damaligen Zeit beobachtet und bis $r = 4 \cdot 46$, $\Delta = 5 \cdot 17$ verfolgt werden konnte, ja in der ersten Zeit seiner Erscheinung sogar mit bloßem Auge, wenn auch nur schwer zu erkennen war, als der größte und hellste unter allen bisher bekannten Kometen bezeichnet werden; man findet als reduzierte Helligkeit nahezu 0^m0, d. h. einen Helligkeitsgrad, welcher den der Sterne 1. Größe noch um eine Größenklasse übertrifft.

Nahezu dasselbe, wenn auch in einem geringeren Grade, gilt von dem Kometen, welcher in der zweiten Hälfte des Jahres 1746 beobachtet, aber erst im Jahre 1747 in einem Sonnenabstande von $q = 2 \cdot 20$ durch sein Perihel gegangen ist. Sein Abstand von der Sonne r war am Anfang des Beobachtungszeitraumes $3 \cdot 15$, am Ende desselben $2 \cdot 42$, sein Abstand von der Erde Δ beim Beginn der Beobachtungen $2 \cdot 21$, beim Schlusse derselben $2 \cdot 89$ und seine reduzierte Helligkeit liegt in der Nähe von 2^m0, ist also ebenfalls viel bedeutender als die des Halley'schen Kometen.

Was die Kometen der Gegenwart betrifft, so sind hier sechs ausgewählt worden und die für die Vergleichung wichtigsten Zahlen in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Es ist q die Periheldistanz, r und Δ die größte Distanz von der Sonne, beziehungsweise Erde, bei welcher der betreffende Komet beobachtet worden ist, und H_1 die größte auf $r = 1$, $\Delta = 1$ reduzierte (in Größenklassen ausgedrückte) Helligkeit, welche aus den Beobachtungen abgeleitet werden konnte und also meistens aus den dem Perihel zunächst liegenden Helligkeitsbestimmungen herrührt.

Komet	Periheldistanz q	Größte Distanz		Maximalwert von H_1
		r	Δ	
1889 I	1·81	6·4	6·3	4^m0
1889 II	2·26	5·1	4·1	7·5
1903 II	2·78	2·9	3·3	6·5
1904 I	2·71	5·2	5·8	4·5
1904 II	1·88	2·9	3·4	7·7
1905 IV	3·32	4·2	3·3	6·1

Bezüglich der beim Kometen 1889 I angesetzten Distanzen wäre noch zu bemerken, daß dieser Komet, nachdem er schon bis zum Radiusvektor $r = 6 \cdot 4$ beobachtet worden war, später, als r bereits bis $8 \cdot 2$ angestiegen war, von einem anderen Beobachter nochmals gesehen wurde, daß jedoch nach einer Mitteilung des Berechners der Bahn das zuletzt gesehene Objekt mit dem Kometen nicht identifiziert werden kann, weil die beobachtete Position von der berechneten zu weit abweicht. Übrigens nimmt dieser Komet auch in dem Falle, daß sich die angezweifelte Beobachtung wirklich auf ein anderes Objekt beziehen sollte, unter den Kometen, die in außerordentlich großen Distanzen beobachtet worden sind, bis jetzt noch immer die oberste Stelle ein.

Faßt man in der Tabelle die Maximalwerte von H_1 ins Auge, so zeigt schon eine flüchtige Vergleichung mit anderen

Kometen, daß diese Helligkeitswerte als sehr bedeutende bezeichnet werden müssen und daß die Behauptung, diese Kometen würden, wenn durch wesentlich kleinere Periheldistanzen eine bedeutendere Annäherung an die Sonne ermöglicht gewesen wäre, eine noch viel größere und sogar die des Halley'schen Kometen übertreffende Helligkeit erlangt haben, berechtigt erscheint. Dies ist bei den Kometen 1889 I und 1904 I, deren reduzierte Helligkeit tatsächlich schon hier der des Halley'schen fast gleich, beziehungsweise sehr nahe kommt, geradezu gewiß und bei den anderen mindestens sehr wahrscheinlich.

Wenn man nun von diesen in großen Distanzen beobachteten Kometen einen Übergang zu der mutmaßlichen Helligkeit des Halley'schen Kometen in großen Distanzen machen will, so darf zunächst nicht übersehen werden, daß die zur Vergleichung vorgeführten Distanzen fast alle zu Beobachtungen nach dem Perihel gehören, während es sich hier um das Sichtbarwerden eines Kometen bei großen Distanzen vor dem Perihel handelt, und es ist daher noch zu untersuchen, ob die nunmehr abzuleitenden Folgerungen durch diesen Umstand wesentlich geändert werden können.

Im allgemeinen ist der Beobachter, der das Sichtbarwerden eines Kometen feststellen soll, gegen denjenigen, der den Kometen bis zum Verschwinden verfolgt, im Nachteil; denn es ist viel leichter, einen bereits sichtbaren Kometen nach und nach bis zum gänzlichen Unsichtbarwerden zu verfolgen, als einen erst sichtbar werdenden, insbesondere wenn seine Position nicht sehr genau bekannt ist, gleich am ersten Tage seiner beginnenden Sichtbarkeit sofort zu bemerken. Diese Differenz gilt jedoch nur für visuelle Beobachtungen; für photographische Aufnahmen besteht sie nicht, wenigstens nicht in demselben Maße.

Eine andere Verschiedenheit kann daher kommen, daß die Kometen nach dem Perihel gewöhnlich heller sind, als sie bei demselben Radiusvektor vor dem Perihel waren, indem sie das Maximum ihrer Helligkeit meist erst einige Zeit nach dem Periheldurchgang erreichen. Es ist jedoch sehr fraglich, ob diese Differenz zwischen den Helligkeiten bei demselben

Radiusvektor vor und nach dem Perihel auch noch bei sehr großen Radienvektoren besteht und ob sie, wenn sie hier tatsächlich noch vorhanden ist, eine so bedeutende Größe hat, daß sie leicht wahrgenommen werden kann.

Man braucht sich also bei den Folgerungen über die mutmaßliche Zeit des Sichtbarwerdens des Halley'schen Kometen, die ja ohnehin nur ganz allgemeiner Natur sein können, durch die hier hervorgehobenen Umstände nicht beirren zu lassen, sondern kann Helligkeitsverhältnisse, die bei großen Radienvektoren nach dem Perihel beobachtet worden sind, in erster Annäherung auch für die gleich großen Radienvektoren vor dem Perihel annehmen.

Beachten wir nun, um zu dem angestrebten Schlusse zu gelangen, daß (infolge der Abweichung der beobachteten Helligkeiten von dem Verhältnis $1:r^2\Delta^2$) die Helligkeitszunahme beim Halley'schen Kometen im Jahre 1835, wie der Gang in der Reihe der reduzierten Helligkeitswerte H_1 zeigt, schon in dem kurzen Zeitraum vom dritten bis zum ersten Monat vor dem Perihel eine sehr bedeutende gewesen ist und daß ebenso auch bei denjenigen Kometen, zwischen welche er bezüglich seines Helligkeitsgrades eingeschätzt werden konnte, sowohl die Zunahme vor dem Perihel (1858 VI, 1874 III) als auch die Abnahme nach dem Perihel (1807, 1881 III) recht auffällig, wenn auch nicht überall in demselben Grade hervortritt, so ist die Folgerung nicht abzuweisen, daß die Helligkeit des Halley-schen Kometen in den großen Distanzen, in welchen die zuletzt vorgeführten Kometen, insbesondere 1889 I, 1889 II und 1904 I beobachtet worden sind, eine verschwindend kleine ist, sowohl vor als nach dem Perihel; jedenfalls geringer als diejenige Helligkeit, in welcher sich die zuletzt vorgeführten sechs Kometen gezeigt haben.

Es dürfen demzufolge bezüglich der Zeit des Sichtbarwerdens des Halley'schen Kometen die nachstehenden Behauptungen ausgesprochen werden.

In der Opposition 1906/7, für welche oben nur ein einziger Tag in Rechnung gezogen wurde, ist ein Suchen nach dem Kometen wegen der außerordentlichen Größe der Distanzen ($r = 11·1$, $\Delta = 10·1$) noch ganz aussichtslos und auch in der

Opposition 1907/8 ($r = 8\cdot8$, $\Delta = 7\cdot8$) ist die Wahrscheinlichkeit seiner Auffindung noch verschwindend klein. Dagegen ist die Auffindung des Kometen in der Opposition 1908/9 ($r = 6\cdot0$, $\Delta = 5\cdot1$) nicht mehr ausgeschlossen und, falls er hier noch nicht gefunden sein sollte, in der zweiten Hälfte des Jahres 1909 ($r = 3\cdot7$, $\Delta = 4\cdot0$), spätestens aber gegen das Ende desselben ($r = 2\cdot4$, $\Delta = 1\cdot7$) mit Sicherheit zu erwarten.

Im Jänner 1910 erreicht der Komet, wenn sein Periheldurchgang wirklich im Mai 1910 stattfindet, dieselbe Helligkeit, welche er bei seiner Auffindung im August 1835 gezeigt hat, und in der zweiten Hälfte des März dürfte er für das bloße Auge sichtbar werden.

Bei den obigen Folgerungen über das erste Sichtbarwerden des Kometen ist zunächst an ein Aufsuchen desselben mit großen Teleskopen gedacht. Es ist jedoch gar nicht unwahrscheinlich, daß der Komet auf photographischem Wege schon früher gefunden wird als mit dem Fernrohr, ähnlich wie der Encke'sche Komet bei seiner letzten Erscheinung im Herbste 1904. Jedenfalls hat die Gegenwart die Mittel, den Kometen schon bei viel größeren Radienvektoren zu finden, als es in der letzten Erscheinung (von der vorletzten gar nicht zu reden) geschehen ist, und andrerseits wird die erste Auffindung, mag sie nun früher oder später auf dem einen oder anderen Wege gelingen, einen wichtigen Beitrag zur Erweiterung unserer Kenntnisse der Helligkeitsverhältnisse dieses Kometen liefern.

Untersuchungen über radioaktive Substanzen.

(VII. Mitteilung.)

Über die aktiven Bestandteile des Radiobleis

von

Dr. **Stefan Meyer** und Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1906.)

Die Untersuchungen K. Hofmann's und seiner Mitarbeiter,[1] E. Rutherford's[2] und unsere eigenen[3] haben zu der Anschauung geführt, daß das sogenannte Radioblei die mit den Restaktivitäten des Radiums identischen Zerfallsprodukte RaD, RaE und RaF enthalte. RaD ist strahlenlos, mit der Halbierungskonstante seines Zerfalles von zirka 40 Jahren; RaE ist β-strahlend; RaF gleich Polonium ist α-strahlend mit der Halbierungskonstante von rund 140 Tagen.

Für die Halbierungskonstante von RaE fand Rutherford[4] aus dem Abfall einer Restaktivität auf einem Bleche, von welchem durch Glühen RaD und RaF mindestens zum größten Teil entfernt worden war, 4·5 Tage; aus einem Anstiege

[1] K. Hofmann und E. Strauss, Ber. d. deutsch. chem. Ges., 33, p. 3126 (1900); K. Hofmann, L. Gonder und V. Wölfl, Ann. d. Phys., 15, p. 615 (1904).

[2] E. Rutherford, Phil. mag., 10, p. 290 (1905).

[3] St. Meyer und E. v. Schweidler, Wiener Anzeiger, Nr. 25 (1904); diese Sitzber., CXIV, II a, p. 393 und 1195 (1905); CXV, II a, p. 63 (1906).

[4] E. Rutherford, Phil. mag., 10, p. 293 (1905).

6 Tage. Wir haben an auf Palladiumblech aus Radiobleichlorid niedergeschlagenem Produkte 6·3 Tage bestimmt[1] und kürzlich hat Giesel[2] 6·14 Tage angegeben.

Wir haben versucht durch Elektrolyse diese aktiven Bestandteile zu trennen oder mindestens einzelne Komponenten im Überschusse zu erhalten.[3]

Das Ausgangsmaterial war Bleichlorid, das von den Herren L. Haitinger und C. Ulrich bei der Radiumdarstellung aus Uranpecherz als Nebenprodukt erhalten worden war. Da dasselbe in Wasser ziemlich schwer löslich ist, verwendeten wir zur Elektrolyse in Acetat verwandeltes Produkt.

Bei einer Stromdichte von zirka 4.10^{-6} Ampère pro 1 cm^2 scheidet sich aus der Lösung, deren spezifisches Gewicht bei Zimmertemperatur 1·18 (d. i. 22% wasserfreies Salz) betrug, an der Kathode bloß Polonium ab, wie man aus dem Mangel von durchdringender Strahlung und dem von Anfang an mit einer Halbierungskonstanten von 137 Tagen eintretenden langsamen Abfall der Aktivität zeigen kann. Das Platinblech als Kathode bleibt dabei ganz blank.

Bei einer Stromdichte von zirka 10^{-5} Ampère pro 1 cm^2 scheidet sich RaE+RaF ab; das Platinblech zeigt nach einer Weile einen dünnen gelblichen Belag, vermutlich von einer Spur von Bleioxyd. Bei einer Stromdichte von 10^{-4} Ampère pro 1 cm^2 und höheren wird RaD+RaE+RaF abgelagert, dabei wird aber gleichzeitig auch immer Blei mit abgeschieden.

Es ist somit Polonium (RaF) elektrochemisch edler als RaE und dieses wieder als RaD, während Blei gleich oder eher edler zu sein scheint als RaD.

Bei dieser Elektrolyse scheidet sich an der Anode ein schwarzer Belag von Bleisuperoxyd ab. Auffallenderweise enthält dieses Produkt aber nicht RaD, RaE und Polonium (RaF) im Gleichgewicht, sondern Polonium im Überschusse, wie sich aus dem Absinken der Aktivität ergibt.

---

[1] St. Meyer und E. v. Schweidler, Diese Sitzber., CXIV, II a, p. 1202 (1905).

[2] F. Giesel, Ber. d. deutsch. chem. Ges., 39, p. 780 (1906).

[3] Vergl. St. Meyer und E. v. Schweidler, Wiener Anzeiger, 26. April 1906, p. 161.

Wir haben die elektrolytische Trennung zunächst hauptsächlich dazu verwendet, um Ra*E* genauer kennen zu lernen.

Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. In diesen bedeutet J die Stromstärke in Volt pro Minute zu der jeweiligen Zeit in Tagen, bei einer Kapazität der Elektroskopanordnung von zirka 10 *cm*. Die Blechstücke waren dabei alle in dreifach Stanniol, d. i. eine Schichtdicke von 0·03 *mm* Dicke eingewickelt, wobei alle α-Strahlung absorbiert ist. Die Kolumnen log $(J-a)$ sind erhalten nach Abzug des nach langer Zeit erzielten Endwertes a, der den mit der in geringem Ausmaß vorhandenen Menge von Ra*D* im Gleichgewicht befindlichen Teile von Ra*E* darstellt. Ihre Werte sind in den Figuren 1 und 2 eingezeichnet.[1] Die Stromdichten, bei welchen die Proben I bis VIII abgeschieden wurden, betrugen für I 2.10^{-5}, für II und III zirka 5.10^{-5} Ampère pro 1 cm^2. Die Proben II und III wurden, bevor sie zur Untersuchung gelangten, hellrot geglüht, wobei das Platinblech sich an den Stellen, an welchen Bleipunkte angesetzt waren, durchlöcherte. Die Proben IV und V wurden bei einer etwa zehnmal höheren Stromdichte erhalten. Die Platinbleche trugen eine ziemlich große Menge von Blei und wurden vor der Untersuchung in Essigsäure gekocht, wobei das Blei größtenteils in Lösung ging. Probe VI wurde bei einer Stromdichte von 6.10^{-5} Ampère pro 1 cm^2 erhalten.

Wie aus Fig. 1 ersichtlich ist, liefern Nr. I bis V nahezu lineare Abfälle, denen die Halbierungskonstanten für

Probe I	.......4·86	Tage
» II	.......4·87	»
» III	.......5·05	»
» IV	.......4·86	»
» V	.......4·96	»

entsprechen.

[1] In den Figuren sind die einzelnen Kurven, um das Bild nicht zu stören, zum Teil parallel verschoben, und zwar I um —0·1, III um +0·2, IV um —0·3, V um —0·1, VI um —0·3.

Fig. 2.

Tage	I		II		III	
	J	log (J—0·38)	J	log(J—0·10)	J	log (J—0·11)
0	36·56	1·558	16·4	1·212	14·4	1·155
1	32·5	1·507	14·2	1·149	12·5	1·093
2	28·8	1·453	12·4	1·090	10·9	1·033
3	25·1	1·393	—	—	—	—
4	21·6	1·326	9·4	0.969	8·4	0·919
5	18·7	1·262	8·0	0·898	7·1	0·845
6	16·2	1·200	—	—	—	—
7	14·3	1·144	—	—	—	—
8	12·3	1·077	—	—	—	—
9	10·9	1·021	4·6	0·653	4·3	0·623
10	9·36	0·953	4·0	0·591	3·7	0·556
11	8·14	0·890	3·5	0·532	3·3	0·505
12	7·19	0·833	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—
14	5·60	0·718	—	—	—	—
15	4·78	0·643	2·0	0·279	1·9	0·255
16	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—	—
21	—	—	0·92	9·914—10	0·9	9·903
22	2·04	0·220	—	—	—	—
23	—	—	—	—	—	—
24	1·60	0·086	—	—	—	—
26	—	—	0·5	9·602—10	—	—
28	—	—	0·4	9·477—10	—	—
39	—	—	0·2	9·00 —10	0·2	8·95 —10
42	0·48	9·00—10	—	—	—	—
56	—	—	0·15	—	0·14	—
66	0·38	—	—	—	—	—
70	—	—	0·10	—	0·11	—

Tage	IV		V		VI	
	J	log (J—0·4)	J	log (J—0·25)	J	log (J—0·45)
0	16·2	1·199	11·6	1·047	21·40	1·321
1	13·8	1·127	10·2	0·998	19·15	1·272
2	12·1	1·068	8·95	0·940	16·96	1·229
3	10·7	1·013	7·75	0·875	15·30	1·172
4	9·50	0·959	6·65	0·806	13·60	1·119
5	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	10·15	0·987
7	6·40	0·778	4·50	0·628	8·92	0·928
8	5·60	0·716	3·95	0·568	7·71	0·861
9	—	—	—	—	6·86	0·807
10	4·15	0·574	3·00	0·439	5·93	0·739
11	—	—	—	—	5·30	0·686
12	—	—	—	—	4·78	0·637
13	—	—	—	—	4·33	0·589
14	2·50	0·322	1·90	0·217	3·79	0·524
15	—	—	—	—	3·42	0·473
16	—	—	—	—	—	—
17	1·80	0·146	1·31	0·025	—	—
18	—	—	—	—	2·40	0·290
19	—	—	—	—	2·14	0·228
20	—	—	—	—	—	—
21	1·22	9·914—10	—	—	—	—
22	—	—	0·77	9·716—10	—	—
23	—	—	—	—	1·46	0·004
24	—	—	—	—	1·30	9·929—10
29	0·61	9·322—10	0·42	9·230—10	—	—
37	0·53	9·114—10	0·30	8·7 —10	—	—
50	0·4	—	0·25	—	—	—
54	—	—	—	—	0·45	—

Tage	VII		VIII		IX	
	J	log (J—2·0)	J	log (J—1·75)	J	log (J—0·15)
0	16·4	1·158	17·4	1·195	22·2	1·342
1	13·6	1·064	15·5	1·138	18·8	1·270
2	12·3	1·011	13·95	1·086	16·6	1·215
3	11·0	1·954	12·3	1·023	—	—
4	—	—	—	—	12·6	1·094
5	9·0	0·845	9·80	0·906	10·7	1·023
6	8·0	0·778	8·70	0·842	—	—
7	7·05	0·703	7·65	0·775	—	—
8	6·30	0·634	6·85	0·712	—	—
9	—	—	—	—	6·30	0·789
10	—	—	—	—	5·50	0·736
11	—	—	—	—	4·80	0·677
12	4·50	0·398	4·60	0·455	—	—
13	—	—	—	—	—	—
14	—	—	—	—	—	—
15	3·60	0·204	3·60	0·267	3·10	0·484
16	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—	—
21	2·80	9·903—10	2·50	9·875—10	1·60	0·161
26	2·44	9·646—10	—	—	0·96	9·909
28	2·35	9·544—10	1·98	9·362—10	0·85	9·845
37	2·17	9·230—10	1·80	8·70 —10	—	—
39	—	—	—	—	0·30	9·176
56	2·0	—	1·75	—	0·15	—

Tage	X		XI		XII	
	J	log (J—0·25)	J	log (J—4·4)	J	log (J—3·9)
0	20·94	1·305	7·91	0·545	8·79	0·689
1	17·8	1·245	7·40	0·477	8·20	0·634
2	15·6	1·187	7·00	0·415	7·70	0·580
3	—	—	6·65	0·352	7·20	0·519
4	11·8	1·063	6·35	0·290	6·80	0·462
5	10·0	0·989	6·03	0·212	6·40	0·398
6	—	—	5·75	0·130	6·05	0·332
7	—	—	—	—	—	—
8	—	—	5·40	0·000	5·50	0·204
9	6·00	0·760	—	—	—	—
10	5·20	0·695	5·20	9·903—10	5·10	0·079
11	4·60	0·639	5·13	9·863—10	4·98	0·033
12	—	—	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—
14	—	—	4·90	9·699—10	4·62	9·857—10
15	2·90	0·423	—	—	—	—
16	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	4·43	9·724—10
18	—	—	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—	—
21	1·60	0·130	—	—	—	—
23	—	—	4·47	8·80 —10	4·18	9·447—10
26	1·00	9·877—10	—	—	—	—
27	—	—	4·45	8·7 —10	4·10	9·301—10
28	0·90	9·813—10	—	—	—	—
39	0·40	9·176—10	—	—	—	—
45	—	—	4·40	—	3·9	—
56	0·25	—	—	—	—	—

Tage	XIII		XIV	
	J	log (J—0·3)	J	log (J—0·3)
11	5·10	0·681	5·00	0·672
12	4·70	0·644	4·55	0·628
16	2·90	0·415	2·90	0·415
17	2·60	0·362	2·60	0·362
19	2·10	0·255	2·10	0·255
25	1·26	9·982—10	1·15	9·929—10
31	0·82	9·716—10	0·79	9·690—10
47	0·45	—	0·4	—
56	0·3	—	0·3	—

Probe VI zeigt keinen linearen Verlauf mehr. Den ersten 10 Tagen entspricht hier eine Halbierungskonstante von 5·02 Tagen, vom zehnten bis zu 25 Tagen jedoch eine bereits unzweifelhaft größere von 5·2 Tagen.

In noch viel ausgesprochenerem Maße zeigen diese allmähliche Verflachung die folgenden Proben VII bis XII sowie die Nr. XIII und XIV, bei welchen überhaupt nur der bereits verflachte Teil zur Beobachtung gelangte.

Hievon wurden die Proben Nr. IX und X gleichzeitig mit Nr. II und III erhalten, gelangten aber ungeglüht zur Untersuchung. Nr. XIII und XIV sind bei einer Stromdichte von zirka 7.10^{-5} Ampère pro 1 cm^2 gewonnen, die übrigen bei beträchtlich höheren Stromdichten, so zwar, daß überall ziemlich viel Blei mitabgeschieden war.

Die daraus erhaltenen logarithmischen Kurven (Fig. 2[1]) zeigen alle zu Beginn einen steileren Abfall, der sich allmählich verflacht. Berechnet man die Halbierungskonstanten für die ersten und für die letzten Tage, so erhält man aus

[1] Hier sind bei den Eintragungen die Kurven VII um +0·3, VIII um —0·3, X um —0·1, XI um +0·5, XII um +0·1, XIII um +0·5 und XIV um +0·6 parallel verschoben.

Nr.	Intervall	HC	Intervall	HC
VII	0 bis 15 Tage	4·83 Tage	15 bis 25 Tage	5·96 Tage
VIII	0 » 10	4·84	15 » 21	6·02
IX	0 » 5	4·7	11 » 26	5·87
X	0 » 5	4·8	15 » 26	6·08
XI	0 » 5	4·6	15 » 25	6·4
XII	0 » 10	4·93	14 » 24	6·47
XIII	—	—	11 » 25	5·79
XIV	—	—	11 » 25	5·73

Wie man daraus entnehmen kann, entspricht dem anfänglichen Abfall eine Konstante, die mit derjenigen der Kurven I bis V übereinstimmt und die im Mittel 4·8 Tage beträgt, während nach längerer Zeit abermals logarithmischer Abfall, aber mit einer größeren Halbierungskonstante, die zwischen 6 und 6·5 Tagen gelegen ist, eintritt.

Diese Erscheinungen lassen sich unter den folgenden Annahmen deuten:

Radium *E* ist kein einheitlicher Körper, sondern besteht aus zwei aufeinander folgenden Zerfallsprodukten RaE_1 und RaE_2.

RaE_1 ist strahlenlos, bei Rotglut von Platin verdampflich, in heißer Essigsäure löslich und elektrochemisch unedler als RaE_2. Seine Halbierungskonstante beträgt 6 bis 6·5 Tage.

Das eigentliche β-strahlende Produkt ist RaE_2 mit einer Halbierungskonstante von 4·8 Tagen. Es steht elektrochemisch zwischen Polonium und RaE_1.

Diesen Annahmen entspricht es, daß bei der Elektrolyse mit steigender Stromdichte zunächst nur Polonium, dann Polonium und RaE_2 (z. B. Nr. I), dann Po, RaE_2 und RaE_1 (Nr. VI bis XIV) mit mehr oder weniger Ra*D* abgeschieden wird. Die durch Glühen (Nr. II und III) und die durch Kochen in Essigsäure (Nr. IV und V) von RaE_1 befreiten Proben zeigen das Verhalten wie Nr. I, d. i. den Abfall von fast reinem RaE_2. Die übrigen Proben VI bis XIV enthalten RaE_2 und RaE_1, ersteres im Überschuß, so daß die Abklingung sich asymptotisch derjenigen von RaE_1 anschließt.

Damit erklären sich auch zugleich die Resultate Rutherford's,[1] der an einem geglühten (daher von RaD und RaE_1 befreiten), Radiumrestaktivität tragenden Platinblech als Halbierungskonstante des β-strahlenden Produktes zirka 4·5 Tage im Abfall erhielt, dagegen aus der Kurve des Ansteigens der β-Aktivität im anderen Falle auf zirka 6 Tage schloß. Ebenso sind unsere älteren Resultate an einem Palladiumblech[2] (6·3 Tage) und die Giesel's[3] (6·1 Tage) durch die Annahme der Existenz von RaE_1 verständlich.

Da die relativ kurzlebigen Produkte RaE_1 und RaE_2 von einer RaD-haltigen Lösung in wenigen Tagen großenteils nacherzeugt werden, kann man aus der gleichen Acetatlösung immer wieder in Zwischenräumen weniger Tage Proben davon auf elektrolytischem Wege entnehmen. Naturgemäß erhält man aber in den späteren Proben nur mehr sehr wenig Polonium, da dasselbe zu seiner Nacherzeugung längere Zeit braucht.

Bei einigen Kurven zeigt sich eine leichte Anfangsstörung, am deutlichsten bei Nr. I und VI, so zwar, daß der Abfall in den ersten Tagen etwas langsamer erscheint als später. Wir können derzeit nicht mit Sicherheit angeben, ob diese Anfangskrümmungen reell sind oder nicht. Im ersteren Falle könnten sie auf ein weiteres Zwischenprodukt hinweisen.

Zur weiteren Charakteristik des β-strahlenden RaE_2 können die Absorptionskoeffizienten herangezogen werden.

Tabelle 1 und 2 zeigt den Gang der Absorption durch Stanniol verschiedener Dicke x, Tabelle 3 durch Aluminium. Fig. 3 und 4 zeigen das Verhalten in graphischer Darstellung.

Tabelle 1.

Radiobleichlorid; Stanniol.

x	J	$\log J$
$x = 0$ *cm*	$J = 38·2$ Volt/Min.	$\log J = 1·502$
0·00125 *cm*	2·74	0·438
0·00250	2·23	0·348
0·00375	1·81	0·258
0·00625	1·25	0·097

[1] E. Rutherford, Phil. mag., 10, p. 293 (1905).

[2] St. Meyer und E. v. Schweidler, diese Sitzber., CXIV, II a, p. 1202 (1905).

[3] F. Giesel, Ber. d. deutsch. chem. Ges., 39, p. 780 (1906).

Tabelle 2.

Elektrolytischer Niederschlag; Stanniol.

$x = 0\cdot00300$ *cm*	$J = 37\cdot46$ Volt/Min.	$\log J = 1\cdot574$
0·00425	30·17	1·480
0·00550	24·73	1·393
0·00925	14·71	1·167
0·01175	10·16	1·069
0·01675	5·13	0·710

Tabelle 3.

Elektrolytischer Niederschlag; Aluminium.

$x = \delta + 0$ *cm*	$J = 15\cdot29$ Volt/Min.	$\log J = 1\cdot184$
$\delta + 0\cdot022$ *cm*	6·12	0·787
$\delta + 0\cdot044$	2·30	0·362
$\delta + 0\cdot066$	0·85	0·929—1

δ ist hiebei eine Schichtdicke von 0·003 *cm* Stanniol.

Die Strahlung kann in erster Annäherung als homogen gelten und man erhält daraus für die Absorptionskoeffizienten λ — definiert aus $J = J_0 e^{-\lambda x}$ — und die Halbierungsdicken *HD*, d. i. die Schichtdicke, welche die Hälfte der auffallenden Strahlen absorbiert, aus:

Tabelle 1 für Stanniol.....	$\lambda = 158 \frac{1}{cm}$,	$HD = 0\cdot0044$ *cm*
» 2 » »	145	$0\cdot0048_3$
» 3 » Aluminium ..	43·8	0·016

Für $x = \delta + 1\cdot5$ *mm* Blei war $J \leqq 0\cdot01$ Volt/Min. im Anschluß an die Werte der Tabelle 2, woraus folgt, daß der Betrag einer eventuellen γ-Strahlung höchstens 0·3 Promille der β-Strahlung ausmachen kann.

Untersucht man die Strahlung einer Radiumrestaktivität, d. i. der Summe Ra*D* bis Po, wie man sie durch lange Exposition eines Bleches in Radiumemanation erhalten kann, auf Absorption durch Aluminium und zieht der Reihe nach die β-Strahlung, welche RaE_2 zugehört, und die α-Strahlung, die dem Polonium zu eigen ist, ab, so verbleibt ein Rest von sehr

weicher Strahlung. Dieselbe nimmt, für sich betrachtet, in erster Annäherung logarithmisch mit der Dicke der absorbierenden Schicht ab und die Hälfte der Anfangsstrahlung ist bereits durch $1 \cdot 5 . 10^{-4}$ *cm* Aluminium verschluckt. Welchem der Produkte Ra*D*, RaE_1, RaE_2 diese Strahlung angehört, läßt sich vorläufig noch nicht entscheiden. Bezüglich weiterer Details verweisen wir auf unsere IX. Mitteilung.[1]

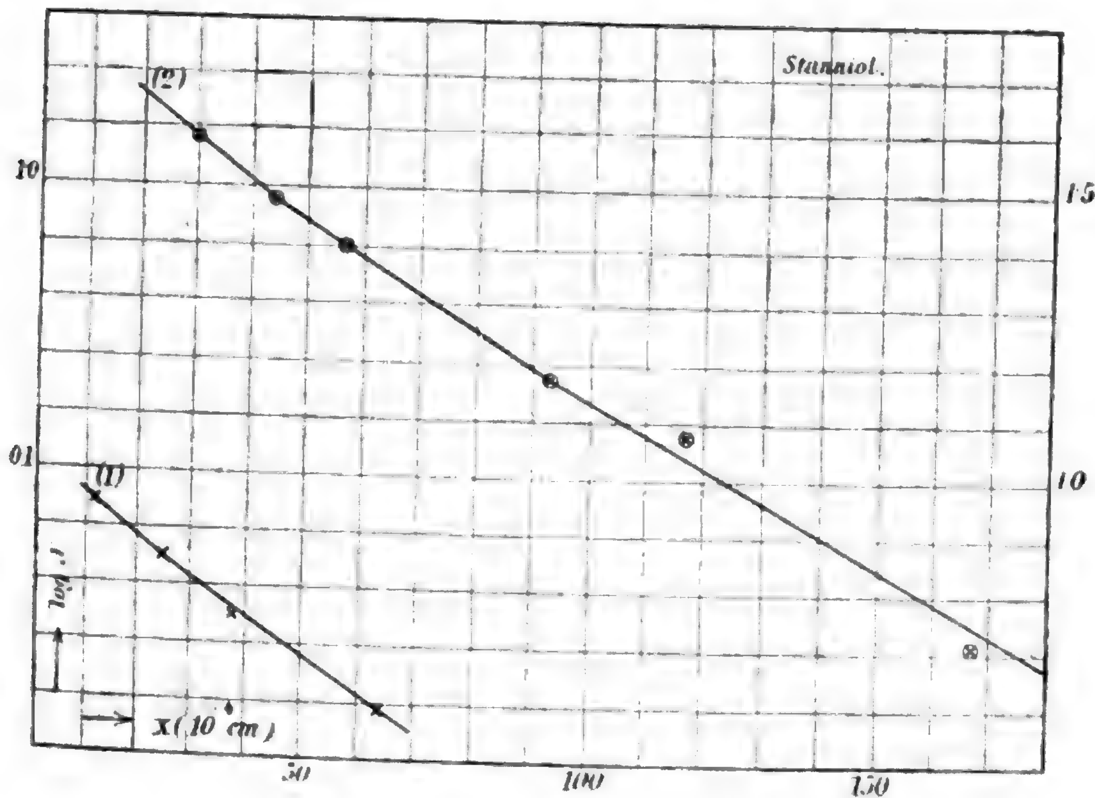


Fig. 3.

Im Anschluß sei erwähnt, daß wir den Versuch gemacht haben, aus den an einem durch Radiumemanation induzierten Bleche erhaltenen Resultaten die Halbierungskonstante von Ra*D* zu bestimmen. Hiezu benötigt man die Kenntnis der im Moment der Unterbrechung der Induktion vorhandenen Menge Ra*C* und der daraus entwickelten Menge Polonium. Unter der Annahme, daß im Gleichgewicht Ra*C* und Po gleich starke α-Strahlung aussenden, ergibt sich aus unseren Versuchen der Wert von *HC* = zirka 24 Jahre. *HC* würde noch kleiner, wenn man berücksichtigte, daß die α-Partikel des Poloniums als

[1] Diese Sitzb., 21. Juni 1906.

langsamere eine geringere ionisierende Wirkung ausüben als die des Ra *C*. Andrerseits ist zu berücksichtigen, daß bekannter-

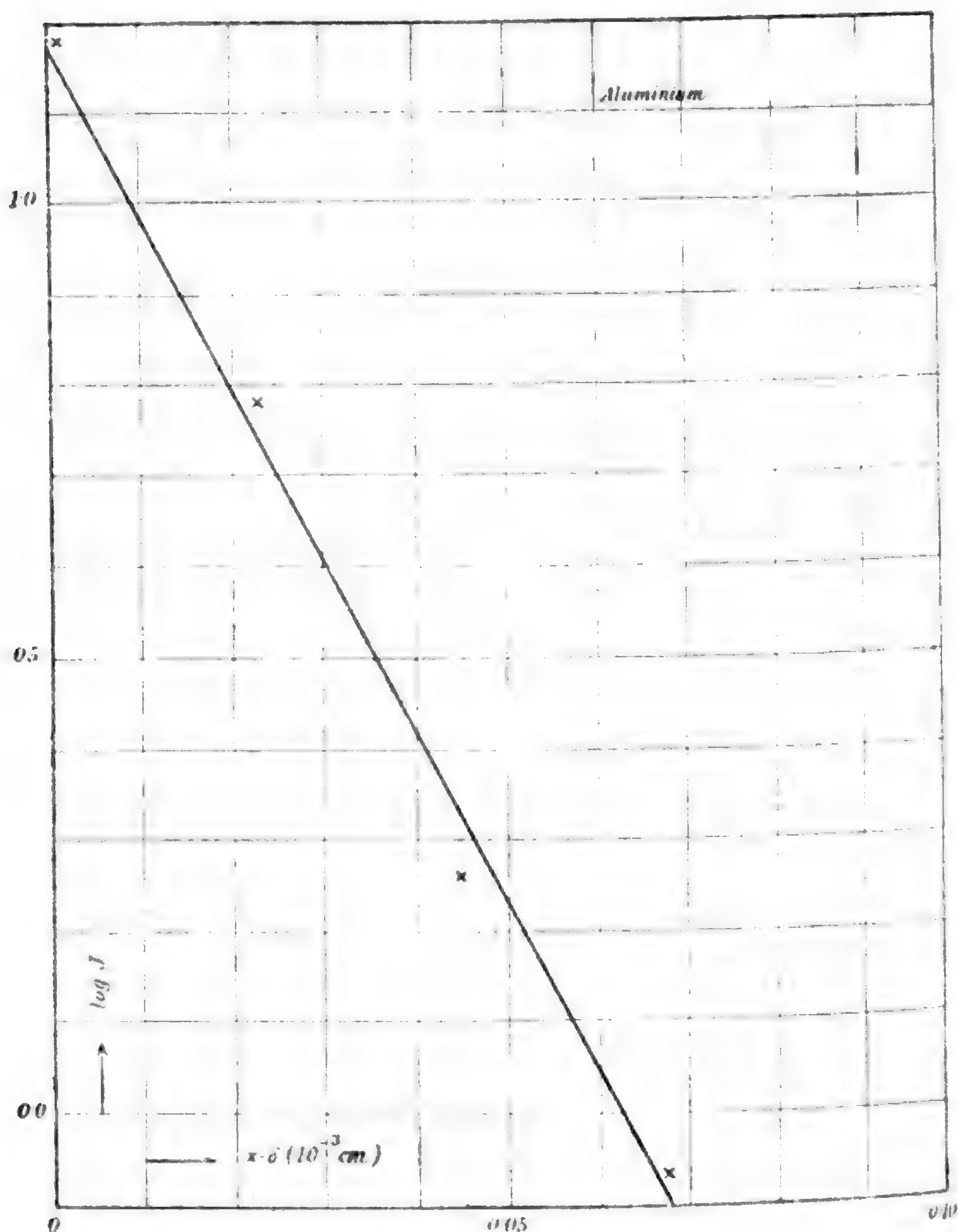


Fig. 4.

maßen Ra *C* sich leicht auf mechanischem Wege von seiner Unterlage loslösen läßt, so daß ein zu kleiner Betrag von Ra *C* in Rechnung gestellt sein könnte. Wir möchten daher der Abweichung unseres Resultates von dem Rutherford's (40 Jahre) noch keine Bedeutung beilegen.

Faßt man die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung zusammen, so ergibt sich:

1. Polonium ist elektrochemisch edler als die β-strahlende Substanz RaE und dieses wieder edler als RaD.

Durch Elektrolyse gelingt die Trennung.

2. RaE ist kein einheitlicher Körper, sondern besteht aus:

RaE_1 mit der Halbierungskonstante 6 bis 6·5 Tage; strahlenlos; bei Rotglut flüchtig; in heißer Essigsäure löslich; und

RaE_2 mit der $HC = 4 \cdot 8$ Tage; β-strahlend; elektrochemisch edler als RaE_1; bei Rotglut nicht flüchtig.

3. Die β-Strahlung von RaE_2 ist in erster Annäherung homogen und charakterisiert durch die Absorptionskoeffizienten

$\lambda = 44 \frac{1}{cm}$ für Aluminium, $\lambda = 151 \frac{1}{cm}$ für Stanniol.

4. Radiumrestaktivität, d. i. die Summe RaD + RaE_1 + RaE_2 + Po sendet außer der α-Strahlung des Po und der β-Strahlung des RaE_2 noch eine sehr weiche Strahlenart aus, deren Hälfte durch $1 \cdot 5 . 10^{-4}$ *cm* Aluminium absorbiert wird.

Untersuchungen über radioaktive Substanzen.

(IX. Mitteilung.)

Einige Versuche über die Absorption der α-Strahlung in Aluminium

von

Dr. **Stefan Meyer** und Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem II. Physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 9 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1906.)

Untersuchungen über die Absorption der Becquerelstrahlen haben zuerst zur sicheren Erkenntnis geführt, daß man es hier mit sehr verschiedenen Strahlengattungen zu tun habe. Seither sind die α-, β- und γ-Strahlen wohldefinierte Erscheinungen geworden und insbesondere die letzte Zeit hat durch die Arbeiten von E. Rutherford, W. H. Bragg und R. Kleeman u. a. bereits viele Eigenschaften dieser Strahlen dem Verständnis näher gebracht. Speziell die Untersuchungen über die Absorption der α-Strahlungen in Luft haben dazu auch noch eine Reihe neuer Erscheinungen zu Tage gefördert; einige der letzteren harren aber noch der Klärung und insbesondere über die Art der Bewegung der α-Partikel im absorbierenden Medium sind allgemein angenommene Anschauungen noch nicht vorhanden.

Die folgenden Mitteilungen verfolgen den Zweck, hiezu noch einiges Material beizubringen.

Wir haben die Absorption durch dünne Metallschichten, besonders durch Aluminiumfolien untersucht. Um einfache

Versuchsbedingungen zu erhalten, haben wir das strahlende Material dazu in unmeßbar dünner Schicht verwendet. Dies war ohneweiters ermöglicht bei Radium *C*, Thorium *B* und Aktinium *B*, aber auch bei elektrolytisch in unsichtbar dünnem Niederschlag auf Platinblech abgelagertem Polonium und in erster Annäherung bei einer sehr dünnen Schicht eines von *UX* befreiten Uranpräparates.

Die Präparate befanden sich auf kleinen Blechstücken. Die induzierenden Körper waren für Ac*B*, Th*B* und Ra*C* die Emanationen von Aktinium, Radiothorium und eines starken Radiumbromids; alle diese Substanzen waren von L. Haitinger und C. Ulrich hergestellt.

Die Meßanordnung bestand in einem Elster-Geitel'schen Elektroskop mit auf dem Hals aufgesetzter Platte, das als Zerstreuungskörper ein kleines Tischchen trug. Über dieses war ein größerer Topf auf die geerdete Platte aufgesetzt. Die Kapazität betrug zirka 10 *cm*. Die Dimensionen waren so gewählt, daß die α-Strahlung immer vollkommen absorbiert wurde. Die Präparate wurden auf das Tischchen gelegt und mit Aluminiumfolien oder Stanniolblättern bedeckt und der Sättigungsstrom gemessen.

Bei jenen Substanzen, welche eine β-Strahlung besaßen, wurde auf graphischem Wege aus den Logarithmen der Strahlungsintensität bei größerer Schichtdicke der Betrag der β-Strahlung für kleinere Schichtdicken bestimmt.

Bei Aktinium *B* erweist sich zwischen 30 und 80 $cm.10^{-4}$ Aluminiums die β-Strahlung als homogen ($\log J_\beta$ mit Schichtdicke x linear); bei Thor *B* gleichfalls in dem hiefür maßgebenden Intervall von 40 bis 70 $cm.10^{-4}$. Bei Radium *C*, wo die β-Strahlung schon für dünne absorbierende Schichten inhomogen ist und abnehmenden Absorptionskoeffizienten besitzt, ist die Extrapolation natürlich etwas willkürlich, jedoch vermag die dadurch hineingebrachte kleine Unsicherheit keine wesentliche Beeinflussung der Resultate hervorzurufen.

In den folgenden Tabellen bedeuten x die Schichtdicke in $cm.10^{-4}$, J die unmittelbar gefundenen Werte der Aktivität, J_β den der β-Strahlung zugehörigen Teil des Sättigungsstromes,

endlich J_α die Werte der aus $J - J_\beta$ gewonnenen reinen α-Strahlung. Alle Angaben sind auf $J = 100$ für $x = 0$ reduziert. Bei der sehr intensiven Strahlung von Th*B* wurde die Absorption auch noch durch dickere Schichten von Aluminium gemessen und erwies sich dabei als inhomogen mit abnehmendem Absorptionskoeffizienten.

Die Werte von J sind naturgemäß unter Berücksichtigung der Abklingung auf gleiche Beobachtungszeiten reduziert. Die Reduktion erfolgte bei Ac*B* mittels der Halbierungskonstante $HC = 36$ Minuten, bei Th*B* (Versuchsbeginn einen halben Tag nach Entnahme vom induzierenden Körper) $HC = 10 \cdot 6$ Stunden, bei Ra*C* (Versuchsbeginn mehr als 4 Stunden nach Entnahme) mit $HC = 26 \cdot 7$ Minuten (vergl. F. v. Lerch).

Tabelle 1 bis 4 und Fig. 1 bis 3 beziehen sich auf Aluminium. Eine einzelne Folie desselben hatte die Dicke von $2 \cdot 2 . 10^{-4}$ *cm*. Tabelle 5 und Fig. 4 beziehen sich auf Stanniol. Ein Stanniolblatt hatte die Dicke von $1 \cdot 0 . 10^{-3}$ *cm*.

Als Halbierungsdicke, d. i. die Schichtdicke des absorbierenden Mittels, bei welcher die Hälfte der auffallenden Strahlung verschluckt ist, ergab sich dabei für die β-Strahlungen von

	durch Aluminium	durch Stanniol
Ac*B*......	0·012 *cm*	0·009 *cm*
Th*B*	0·007	0·011

für den homogenen Bereich.

Tabelle 1.

Absorption der Strahlung von AcB durch Aluminium.

Schicht-dicke in $cm.10^{-4}$	Gesamt-strahlung J	α-Strahlung		β+γ-Strahlung		
		$\log J_\alpha$	J_α	$\log J_{\beta+\gamma}$	$J_{\beta+\gamma}$	
0	100·0	1·998	99·5	9·680	0·479	
2	86·2	1·933	85·7	9·675	0·473	
4	69·4	1·838	68·9	9·669	0·467	
6	55·2	1·738	54·7	9·664	0·461	
8	44·0	1·638	43·5	9·659	0·456	
10	33·8	1·523	33·3	9·653	0·450	extrapoliert
15	16·2	1·199	15·8	9·639	0·436	
20	5·63	0·717	5·21	9·626	0·423	
25	1·66	0·097	1·25	9·612	0·409	
30	0·54	9·143	0·14	9·600	0·398	
35	0·39	7·301	0·002	9·586	0·385	
40	0·38	—	—	9·574	0·375	
45	0·36	—	—	9·561	0·364	
50	0·35	—	—	9·547	0·352	
60	0·33	—	—	9·520	0·331	
70	0·31	—	—	9·495	0·313	

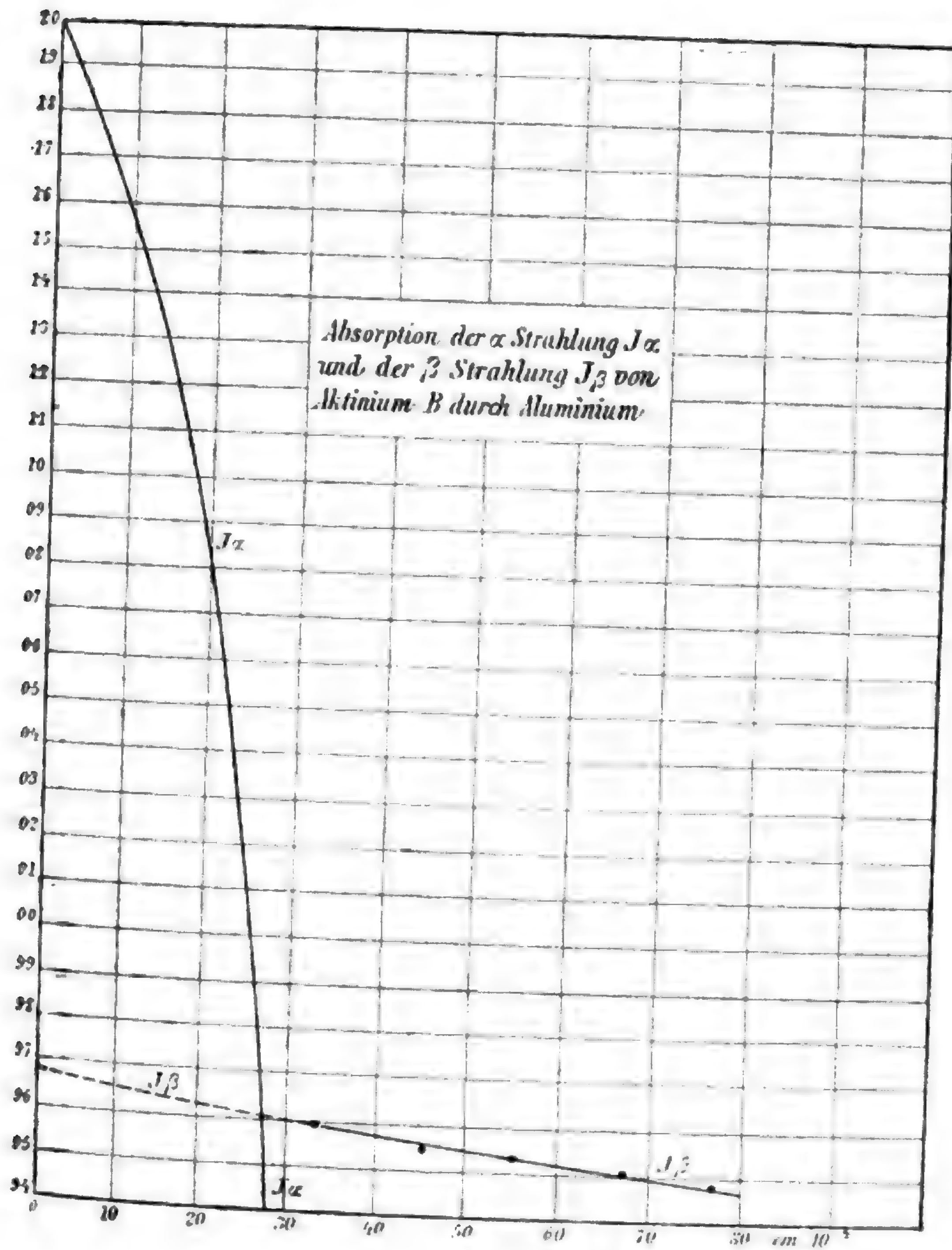

Absorption der α Strahlung Jα
und der β Strahlung Jβ von
Aktinium B durch Aluminium
Jα
Jβ
Jα
Jβ
0
10
20
30
40
50
60
70
80
cm 10

Fig. 1.

Tabelle 2.

Absorption der Strahlung von ThB durch Aluminium.

Schicht-dicke in $cm.10^{-4}$	Gesamt-strahlung J	α-Strahlung		β+γ-Strahlung		
		$\log J_\alpha$	J_α	$\log J_{\beta+\gamma}$	$J_{\beta+\gamma}$	
0	100·0	1·992	98·24	0·245	1·76	extrapoliert
2	93·3	1·962	91·6	0·236	1·72	extrapoliert
4	83·4	1·912	81·7	0·228	1·69	extrapoliert
6	73·3	1·855	71·6	0·220	1·66	extrapoliert
8	63·6	1·792	62·0	0·211	1·63	extrapoliert
10	53·1	1·712	51·5	0·203	1·59	extrapoliert
15	31·0	1·470	29·5	0·182	1·52	extrapoliert
20	16·9	1·187	15·4	0·161	1·45	extrapoliert
25	7·99	0·820	6·61	0·140	1·38	extrapoliert
30	3·44	0·332	2·15	0·110	1·29	extrapoliert
35	1·53	9·45	0·28	0·097	1·25	extrapoliert
40	1·19	7·59	0·004	0·076	1·19	
45	1·13	—	—	0·055	1·13	
50	1·08	—	—	0·034	1·08	
55	1·03	—	—	0·013	1·03	
60	0·98	—	—	9·992	0·98	
70	0·89	—	—	9·950	0·89	

Tabelle 3.

Absorption der Strahlung von ThB durch dickere Schichten von Aluminium.

Schichtdicke in $cm.10^{-2}$	$\log J$	J
2	2·000	100·0
4	1·730	53·8
6	1·525	33·5
8	1·360	22·9
10	1·230	17·0
12	1·100	12·6
14	0·995	9·9
16	0·920	8·3
18	0·870	7·4
20	0·845	7·0

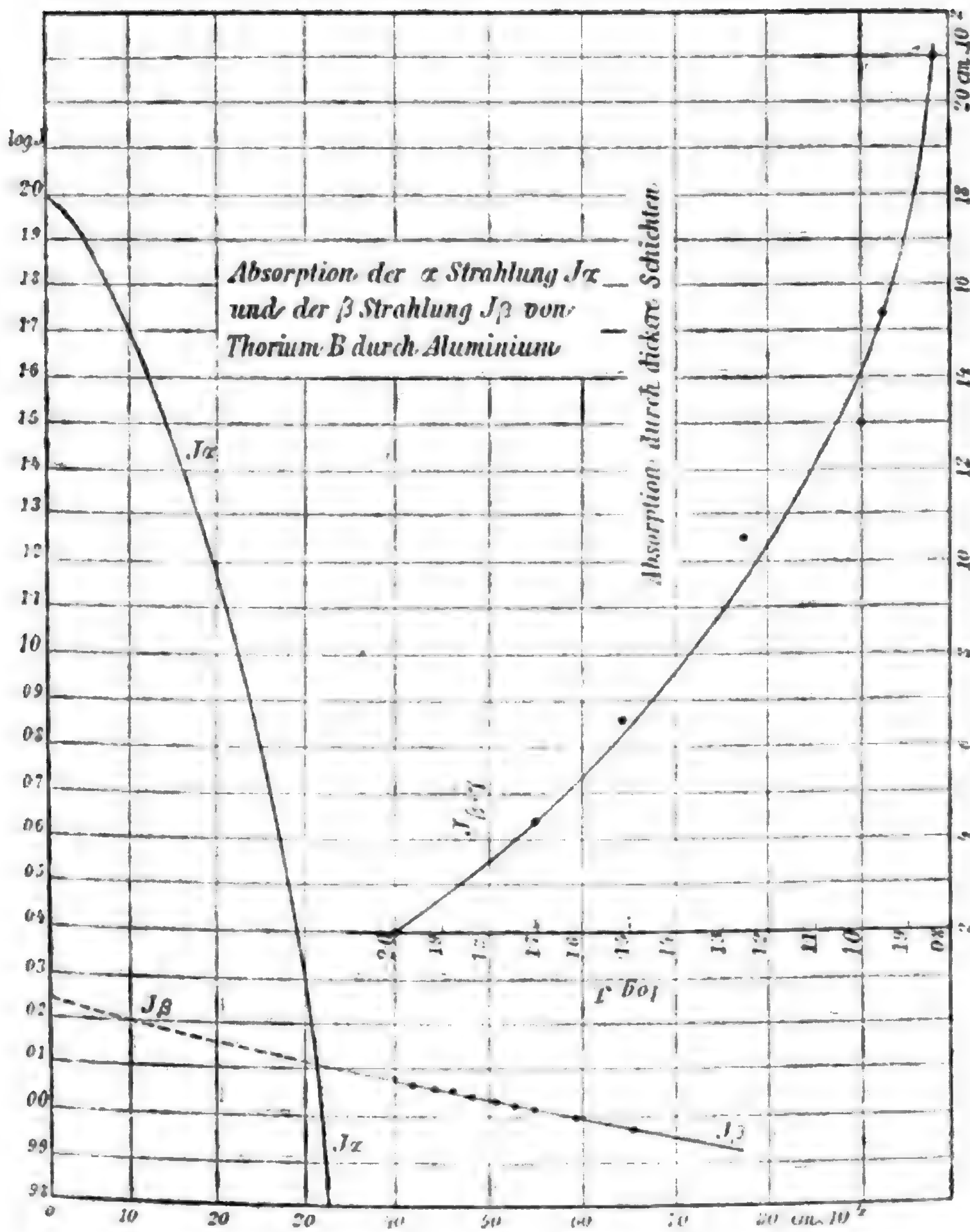

Absorption der α Strahlung Jα und der β Strahlung Jβ von Thorium B durch Aluminium
Absorption durch dickere Schichten
log J
Jα
Jβ
log J
20 cm 10⁻²
80 cm 10⁻²

Fig. 2.

Tabelle 4.

Absorption der Strahlung von Radium *C* durch Aluminium.

Schicht-dicke in $cm.10^{-4}$	Gesamt-strahlung J	α-Strahlung		β+γ-Strahlung		
		$\log J_\alpha$	J_α	$\log J_{\beta+\gamma}$	$J_{\beta+\gamma}$	
0	100·0	1·987	96·94	0·485	3·06	extrapolierte Werte
2	94·5	1·962	91·6	0·455	2·85	
4	87·2	1·927	84·5	0·427	2·67	
6	76·1	1·867	73·6	0·400	2·51	
8	66·5	1·807	64·1	0·375	2·37	
10	58·2	1·747	55·9	0·355	2·26	
15	40·1	1·580	38·1	0·300	2·00	
20	25·1	1·370	23·4	0·240	1·74	
25	15·1	1·130	13·5	0·190	1·55	
30	7·78	0·807	6·41	0·135	1·37	
35	4·51	0·520	3·31	0·080	1·20	
40	1·38	9·480	0·30	0·035	1·08	
45	0·97	—	—	9·985–10	0·97	
50	0·87	—	—	9·940	0·87	
60	0·76	—	—	9·880	0·76	
70	0·67	—	—	9·825	0·67	
80	0·61	—	—	9·785	0·61	
90	0·57	—	—	9·755	0·57	
100	0·54	—	—	9·733	0·54	
120	0·50	—	—	9·700	0·50	
140	0·47	—	—	9·670	0·47	
160	0·44	—	—	9·640	0·44	
180	0·42	—	—	9·625	0·42	

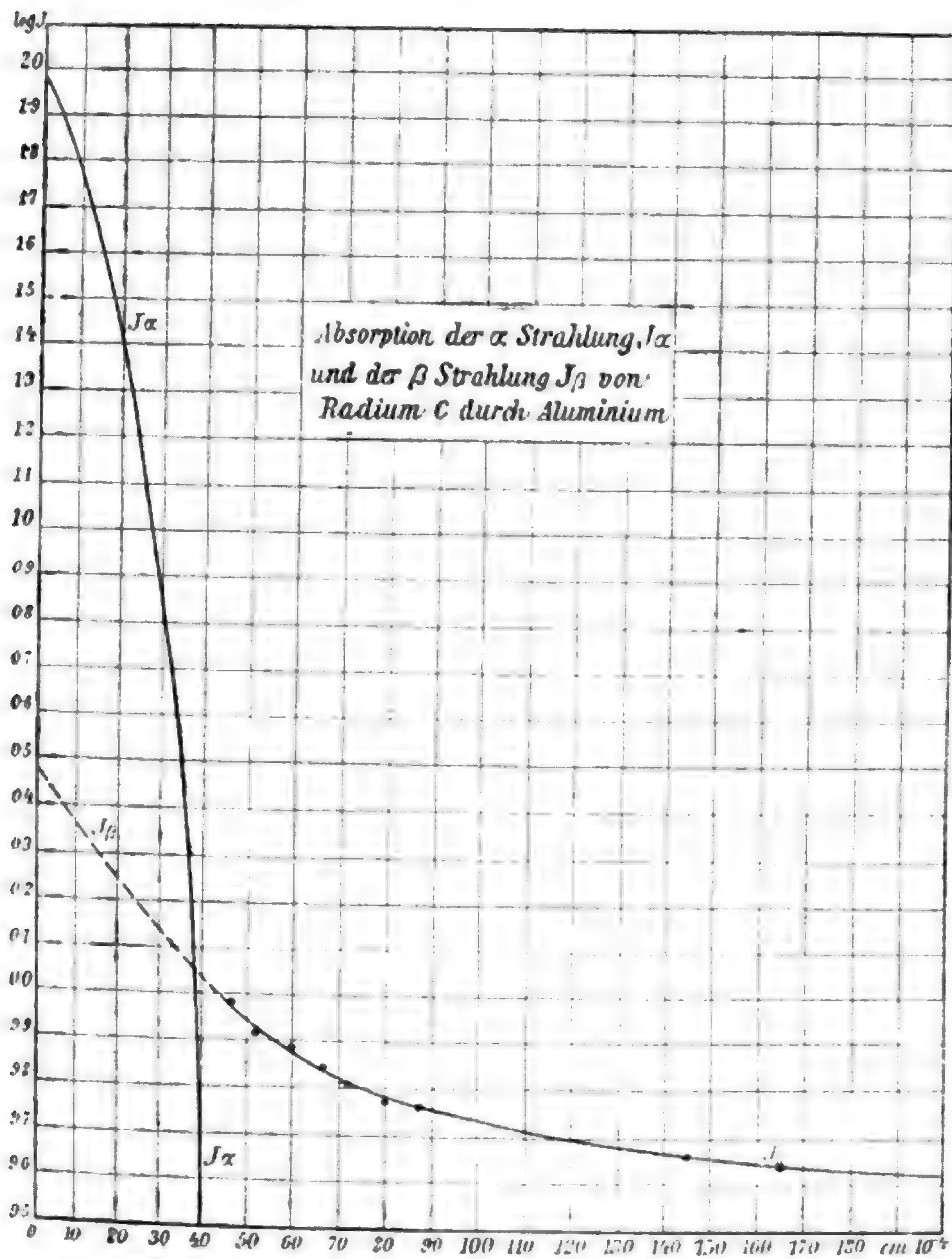

log J
Absorption der α Strahlung, Jα
und der β Strahlung Jβ von
Radium C durch Aluminium
Jα
Jβ
cm 10^{-4}

Fig. 3.

Tabelle 5.

Absorption durch Stanniol.

Schichtdicke in $cm.10^{-4}$	Gesamtstrahlung		α-Strahlung				β+γ-Strahlung			
	Ac*B*	Th*B*	Ac*B*		Th*B*		Ac*B*		Th*B*	
	J	J	$\log J_\alpha$	J_α	$\log J_\alpha$	J_α	$\log J_\beta$	J_β	$\log J_\beta$	J_β
0	100·0	100·0	1·993	98·4	1·997	99·2	0·200	1·59	9·90	0·77
10	33·0	46·5	1·500	31·7	1·660	45·8	0·127	1·34	9·86	0·73
20	1·12	15·7	8·0 −10	0·01	1·180	15·2	0·044	1·11	9·83	0·68
30	0·94	3·65	—	—	0·48	3·0	9·971	0·94	9·81	0·65
40	0·79	0·92	—	—	9·50 −10	0·3	9·898	0·79	9·79	0·62
50	0·67	0·58	—	—	—	—	9·825	0·67	9·76	0·58
60	0·58	0·54	—	—	—	—	9·76	0·58	9·73	0·54
70	0·53	0·51	—	—	—	—	9·72	0·53	9·71	0·51
80	0·48	0·48	—	—	—	—	9·68	0·48	9·68	0·48
90	0·44	0·45	—	—	—	—	9·64	0·44	9·65	0·45
100	0·40	0·42	—	—	—	—	9·60	0·40	9·62	0·42
110	—	0·39	—	—	—	—	—	—	9·59	0·39
120	—	0·37	—	—	—	—	—	—	9·57	0·37
130	—	0·35	—	—	—	—	—	—	9·54	0·35
140	—	0·32	—	—	—	—	—	—	9·51	0·32
150	—	0·30	—	—	—	—	—	—	9·48	0·30
160	—	0·29	—	—	—	—	—	—	9·46	0·29
170	—	0·27	—	—	—	—	—	—	9·43	0·27
180	—	0·25	—	—	—	—	—	—	9·40	0·25
190	—	0·23	—	—	—	—	—	—	9·37	0·23

Bildet man das Verhältnis der β-Strahlung zur α-Strahlung für die Schichtdicke $x = 0$, so erhält man für

		Aluminium	Stanniol
Ac *B*	$\frac{J_\beta}{J_\alpha} =$	0·5%	1·6%
Th *B*		1·8	0·8
Ra *C*		3·2	—

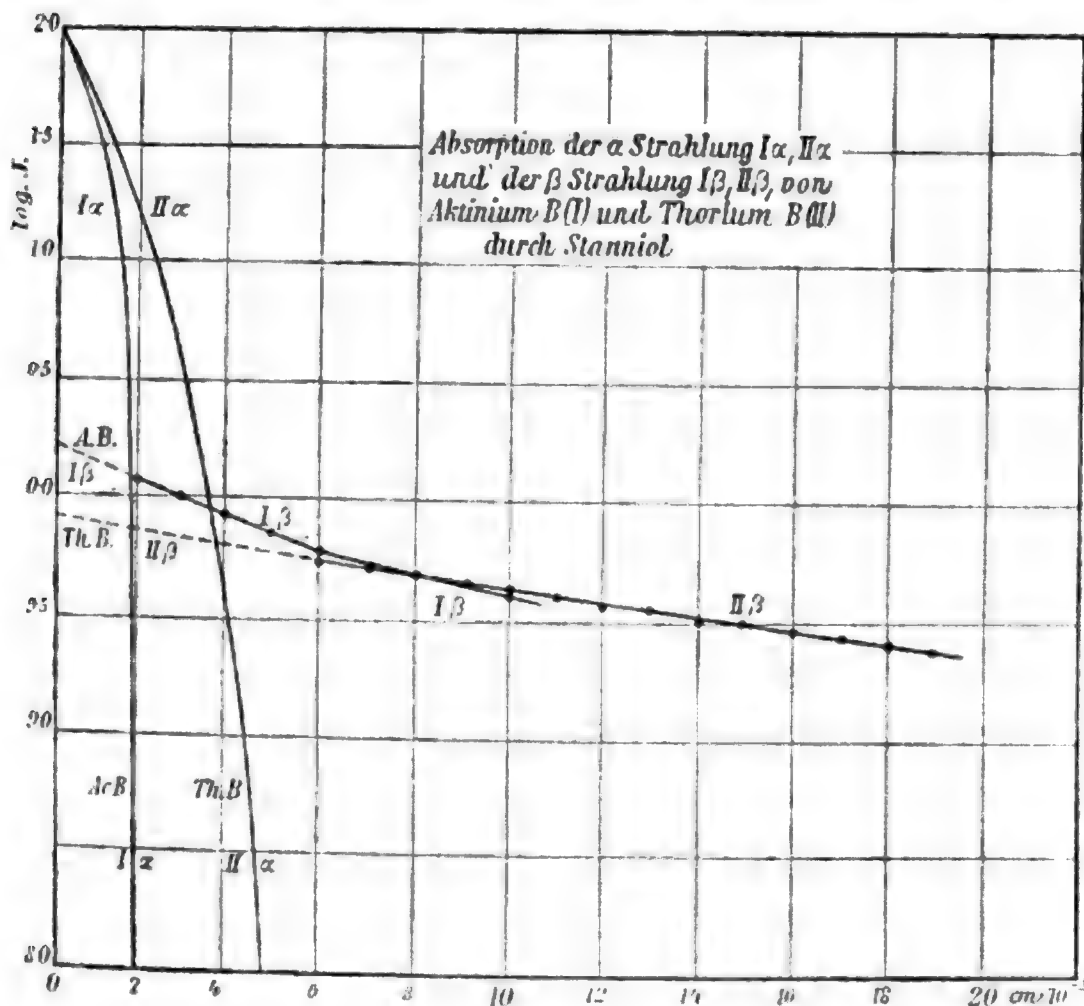


Fig. 4.

Das ergibt für Aluminium und Zinn nicht die gleichen Werte. Daraus ist zu schließen, daß, durch die β-Strahlungen hervorgerufen, noch eine Sekundärstrahlung hinzukommt, die für Al und Sn verschieden ist.

Es schien auch von Interesse, die Strahlung einer Radiumrestaktivität zu untersuchen, wie sie auf radiuminduzierten Blechen nach langer Zeit in nahezu ausgereiftem Zustande

erhalten wird. Eine solche stellt dann RaD, RaE_1, RaE_2 und Polonium im Gleichgewicht dar.

In der Tabelle 6 enthält die erste Kolumne die Dicke der absorbierenden Schicht Aluminium x in $cm.10^{-4}$, die zweite die direkt gemessenen Werte des Sättigungsstromes J der gesamten Restaktivität, die dritte die zugehörigen Logarithmen. Aus den letzten Werten dieser Kolumne sind unter Zugrundelegung des Absorptionskoeffizienten der β-Strahlung von RaE_2[1] für Aluminium, d. i. $\lambda = 45 \frac{1}{cm}$, die Logarithmen der Strahlungswerte der β-Strahlung in Kolumne 4 berechnet und in der fünften die zugehörigen Stromwerte J_β eingetragen. Die Kolumne $J - J_\beta$ enthält demnach die Werte der leicht absorbierbaren Strahlung der Restaktivität. In der letzten Kolumne sind daneben die Werte für Poloniumstrahlung angeführt, die man aus den früher angeführten Beobachtungen erhält, wenn man für $x = 12$ Übereinstimmung herbeiführt. In Fig. 5 sind die Resultate der beiden letzten Kolumnen wiedergegeben.

[1] Vergl. St. Meyer und E. v. Schweidler, diese Sitzber., VII. Mitt., 15. Juni 1906.

Tabelle 6.

Absorption der Strahlung von Restaktivität $RaD + RaE_1 + RaE_2 + Po$.

x = Dicke des Aluminiums in $cm . 10^{-4}$	J	$\log J$	$\log J_\beta$	J_β	$J - J_\beta$	J_{Po}
0	96·6	1·985	0·240	1·74	94·9	76·6
2	70·8	1·850	0·236	1·72	69·1	62·3
4	53·7	1·730	0·232	1·70	52·0	49·4
6	40·8	1·610	0·228	1·69	39·1	38·4
8	31·6	1·500	0·224	1·68	29·9	29·5
10	24·0	1·380	0·220	1 66	22·3	22·1
12	17·4	1·241	0·216	1·64	15·8	15·8
14	12·4	1·093	0·212	1·63	10·8	10·8
16	7·95	0·900	0·208	1·61	6·34	6·9
18	5·13	0·710	0·204	1·60	3·53	4·1
20	3·02	0·480	0·200	1·59	1·43	2·0
22	2·09	0·320	0·196	1·57	0·52	0·7
24	1·86	0·270	0·192	1·56	0·30	0·2
26	1·70	0·230	0·188	1·54	0·16	0·03
28	1·60	0·205	0·184	1·53	0·07	0·00
30	1·52	0·183	0·180	1·52	—	—
40	1·45	0·160	0·160	1·45	—	—
50	1·38	0·140	0·140	1·38	—	—

Subtrahiert man demnach von der Strahlung der Restaktivität der Reihe nach die RaE_2 zugehörige β-Strahlung und die α-Strahlung des Poloniums, so erübrigt als $J - J_\beta - J_{Po}$ noch eine Reststrahlung. Diese übergelagerte Strahlung liefert die Werte:

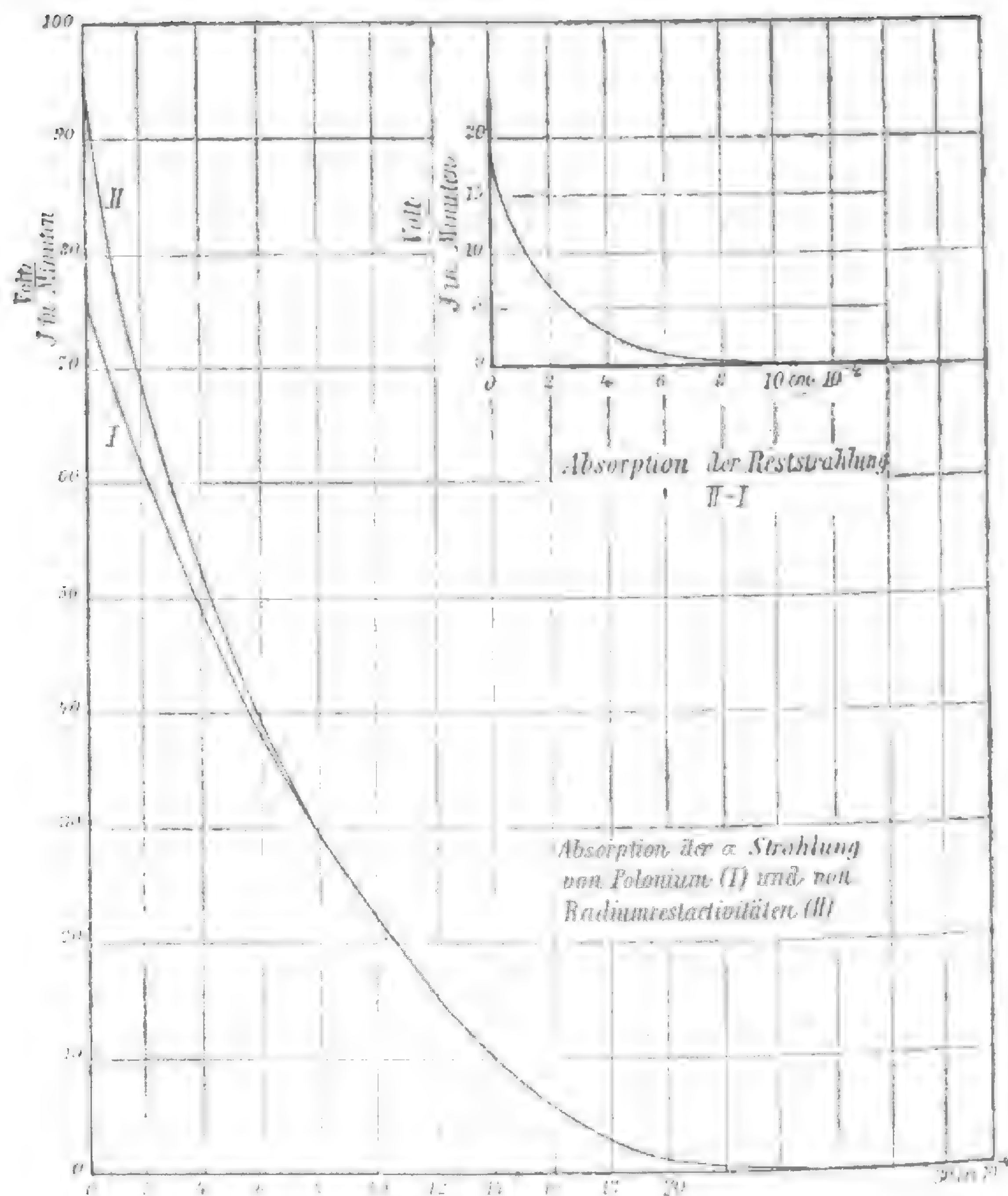


Fig. 5.

Dicke der absorbierenden Schicht Aluminium x in $cm.10^{-4}$	J_R in $\frac{\text{Volt}}{\text{Minuten}}$
0	18·3
1	11·0
2	6·8
3	4·5
4	2·6
5	1·7
6	0·75
8	0·4
10	0·0

Diese Strahlung erscheint in erster Annäherung als homogen und liefert als Halbierungsdicke des Aluminiums $HD = 1 \cdot 5 . 10^{-4}\, cm$ (vergl. Fig. 5, oben).

Die naheliegende Annahme einer Sekundärstrahlung ist in diesem Falle abzuweisen. Eine von α-Partikeln herrührende Sekundärstrahlung müßte in der Poloniumkurve in gleicher Weise auftreten; wenn dieselbe aber von β-Strahlen erzeugt würde, so würde dadurch die Absorption in der ersten Schichte scheinbar verringert und es müßte die Differenz zwischen Kurve II und I von $x = 0$ an zunächst wachsen, während sie sich tatsächlich verkleinert.

Die folgende Tabelle 7 enthält eine Zusammenstellung der α-Strahlungen für verschiedene Dicken von Aluminium, die den Substanzen U*X*-freies Uran, Polonium, Aktinium *B* und Thorium *B* sowie Radium *C* zugehören. In Fig. 6 sind die Logarithmen dieser Strahlungen eingetragen.

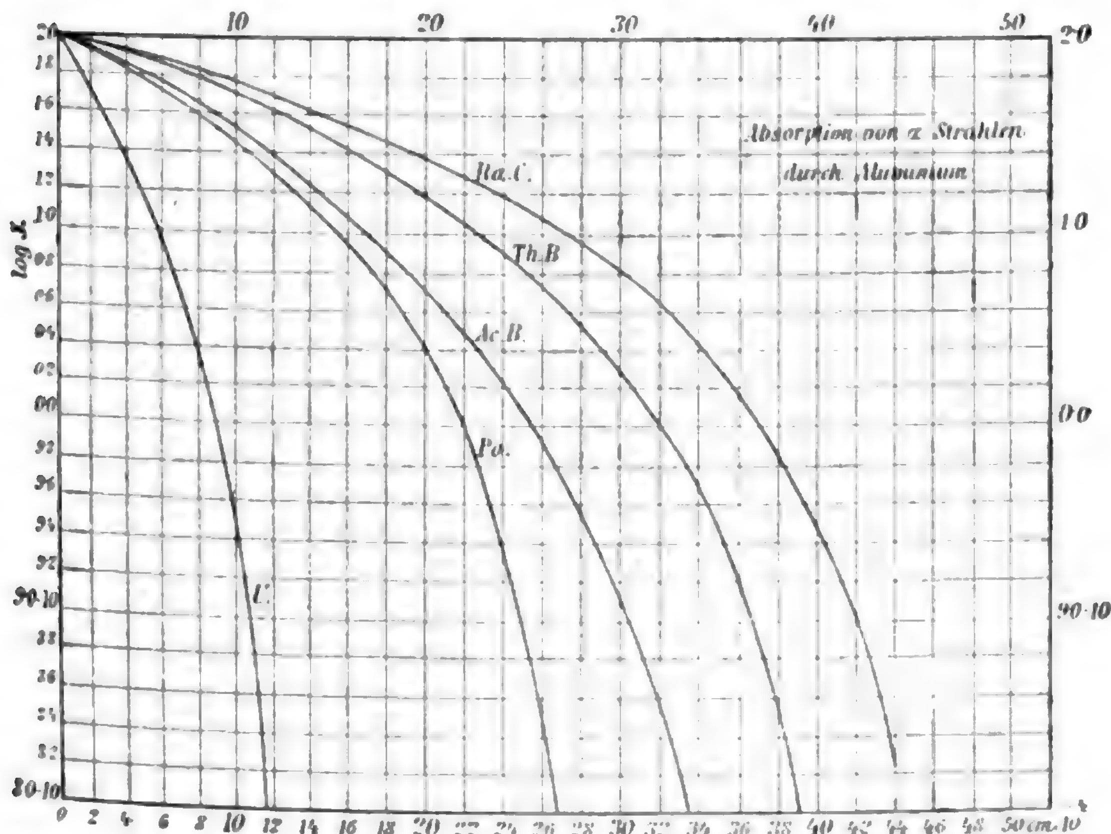


Fig. 6.

Tabelle 7.

Dicke der absorbierenden Schicht Aluminium x in $cm.10^{-4}$	α-Strahlung von									
	Ra C		Th B		Ac B		Po		U	
	J	log J	J	log J	J	log J	J	log J	J	log J
0	100·0	2·000	100·0	2·000	100·0	2·000	100·0	2·000	100·0	2·000
2	91·4	1·975	93·3	1·970	86·1	1·935	81·3	1·910	51·5	1·712
4	85·2	1·930	83·2	1·920	69·2	1·840	64·6	1·810	23·2	1·366
6	75·9	1·880	73·0	1·863	55·0	1·740	50·2	1·700	8·84	0·946
8	66·1	1·820	63·1	1·800	43·7	1·640	38·5	1·585	2·51	0·40
10	57·6	1·760	52·5	1·720	33·5	1·525	28·9	1·460	0·35	9·54–10
12	49·0	1·690	43·2	1·635	25·1	1·400	20·7	1·315		
14	41·7	1·620	34·7	1·540	18·2	1·260	14·2	1·150	0·07	8·84–10 ... $x = 11$
16	35·5	1·550	27·2	1·435	12·6	1·100	9·13	0·960		
18	29·5	1·470	20·9	1·320	8·52	0·930	5·37	0·730		
20	24·3	1·385	15·7	1·195	5·38	0·730	2·69	0·430		
22	19·9	1·300	11·5	1·060	3·16	0·500	1·00	0·000		
24	15·9	1·200	8·13	0·910	1·76	0·245	0·25	9·400–10		
26	12·3	1·090	5·50	0·740	0·89	9·950–10	0·033	8·52 –10		
28	9·33	0·970	3·63	0·560	0·38	9·580–10	0·001	7·10 –10		
30	6·61	0·820	2·19	0·340	0·14	9·150–10	—	—		
32	4·37	0·640	1·12	0·050	0·036	8·560–10	—	—		
34	2·57	0·410	0·484	9·685–10	0·005	7·70 –10	—	—		
36	1·42	0·150	0·166	9·220–10	—	—	—	—		
38	0·692	9·84–10	0·036	8·550–10	—	—	—	—		
40	0·309	9·49–10	0·004	7·60 –10	—	—	—	—		
42	0·103	9·01–10	—	—	—	—	—	—		
44	0·020	8·30–10	—	—	—	—	—	—		

Bildet man den Ausdruck $-\frac{1}{J}\frac{dJ}{dx} = -\frac{d \log \operatorname{nat} J}{dx} = \lambda$, so kann man diesen als den Absorptionskoeffizienten bezeichnen. Die betreffenden Werte sind in Tabelle 8 und in Fig. 7 die ausgeglichenen Kurven eingetragen.

Tabelle 8.

Absorption durch Aluminium $\lambda . 10^{-4}$ ($^1/_{cm}$).

Schichtdicke x in $cm . 10^{-4}$	Ra C	Th B	Ac B	Po	U
0	0·040	0·050	0·090	0·105	0·310
2	0·045	0·055	0·095	0·110	0·360
4	0·050	0·060	0·103	0·116	0·435
6	0·055	0·067	0·110	0·127	0·535
8	0·060	0·075	0·120	0·142	0·690
10	0·066	0·085	0·135	0·158	1·44
12	0·072	0·095	0·150	0·177	—
14	0·078	0·105	0·170	0·197	—
16	0·085	0·117	0·190	0·225	—
18	0·093	0·130	0·210	0·250	—
20	0·100	0·145	0·235	0·297	—
22	0·110	0·160	0·260	0·395	—
24	0·120	0·180	0·295	0·550	—
26	0·135	0·210	0·343	0·785	—
28	0·158	0·250	0·450	1·3	—
30	0·190	0·308	0·650	—	—
32	0·227	0·400	1·1	—	—
34	0·275	0·520	—	—	—
36	0·333	0·680	—	—	—
38	0·400	0·950	—	—	—
40	0·495	(39...1·04)	—	—	—
42	0·675	—	—	—	—
44	0·925	—	—	—	—

Man sieht daraus die bereits bekannte Eigenschaft der α-Strahlung, mit zunehmender absorbierender Schichtdicke weniger durchdringlich zu werden, was sich darin äußert, daß die Kurven der log J_α nach oben konvex gekrümmt erscheinen, während die λ-Kurven beschleunigt ansteigen. Ferner erkennt man daraus das verschiedene Verhalten der Substanzen in Bezug auf die Durchdringlichkeit der Strahlungen, indem sich diesbezüglich abnehmend die Reihenfolge Ra*C*, Th*B*, Ac*B*, Po, U ergibt.

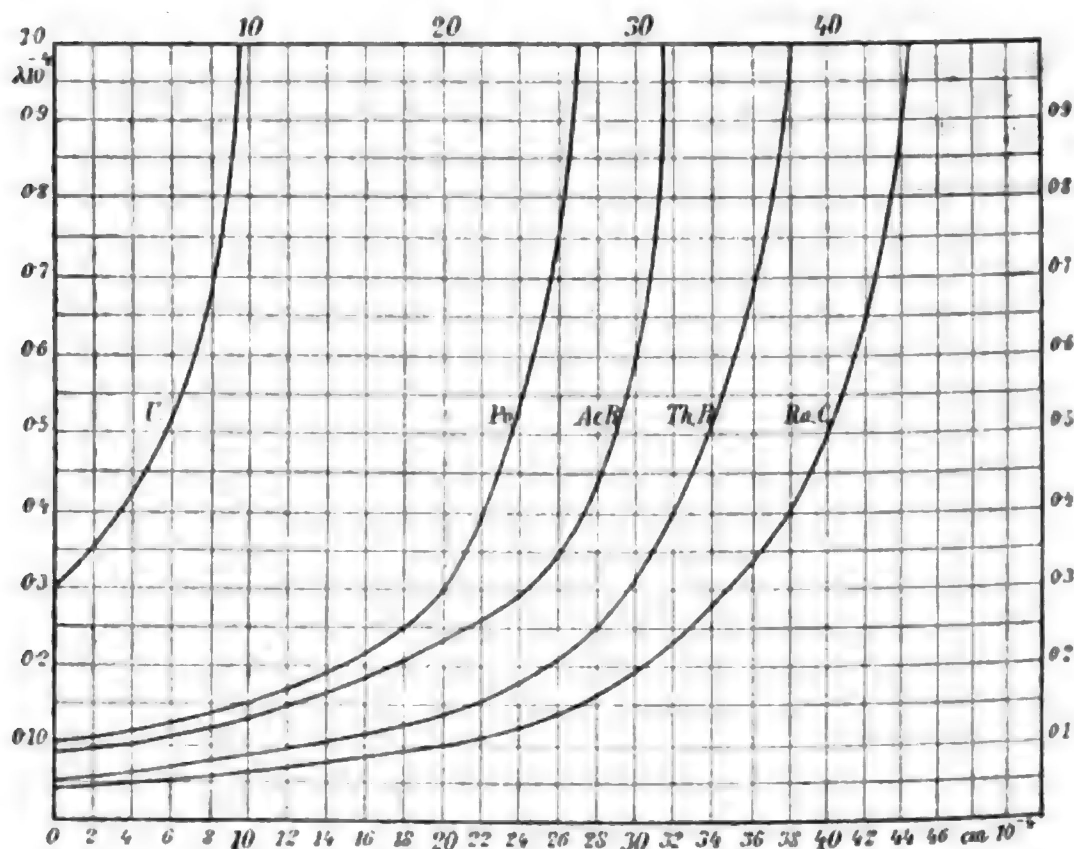


Fig. 7.

Besondere Beachtung verdient in dieser Hinsicht die Stellung der Thorinduktion, deren Strahlung bei uns etwas weicher erscheint als die des Ra*C*, während E. Rutherford und H. T. Brooks[1] sie gleich durchdringlich wie die der Radiuminduktion fanden und O. Hahn[2] dagegen neuerdings berichtet, daß die Strahlung seines Th*B*, respektive Th*C* in Luft bedeutend durchdringlicher ist als die von Ra*C*.

---

[1] E. Rutherford, Radioactivity, 2. Aufl., p. 164 (1905).
[2] Hahn, Phil. mag., 11, p. 796 (1906); Phys. Zeitschr., 7, p. 412 (1906).

Unabhängig von jeder speziellen Annahme über das Gesetz der Absorption, bloß unter der Voraussetzung, daß die α-Partikel verschiedener strahlender Substanzen identisch sind und die Absorption bloß eine Funktion ihrer Geschwindigkeit ist, ergibt sich, daß der Verlauf von λ als Funktion von x für verschiedene Substanzen identisch wird, wenn die Anfangswerte die gleichen sind. Es müßten demnach durch Parallelverschiebung in horizontaler Richtung die λ-Kurven der Fig. 6 zur Deckung gebracht werden können. In erster Annäherung stehen damit die Ergebnisse unserer Figur in Einklang.

Solange das Gesetz, nach welchem die λ-Kurve verläuft, noch nicht sichergestellt ist, können als Charakteristika der einzelnen Substanzen die Beträge von λ_0 für $x = 0$ und die Extinktionsdicken σ, das sind die Werte von x, bei welchen alle α-Strahlung absorbiert ist, herangezogen werden.

Es werden so für Absorption durch Aluminium gefunden:

	für U	Po	Ac*B*	Th*B*	Ra*C*
λ_0 ($^1/_{cm}$)	3100	1050	900	500	400
σ in 10^{-4} *cm* Aluminium ...	10	28	32	40	45

Für die Relation Mc Clung's und O. Hahn's, nach welchen als absorbierendes Mittel 10^{-4} *cm* Aluminium äquivalent 0·16 *cm* Luft zu setzen wäre, ergäben sich aus unseren Zahlen als Extinktionsdicken in Luft

	für U	Po	Ac*B*	Th*B*	Ra*C*
σ in Zentimeter Luft.........	1·6	4·5	5·1	6·4	7·2

Im folgenden sind zwei Tabellen gegeben, welche für die α-Strahlung der untersuchten Substanzen die Werte $q = -\frac{dJ}{dx}$ enthalten. In der Tabelle 9 ist q direkt aus $\frac{J_1 - J_2}{x_2 - x_1}$ berechnet und für die aufeinanderfolgenden Intervalle angegeben; in der Tabelle 10 dagegen ist aus den bereits ausgeglichenen Kurven für J und λ (vergl. Fig. 6 und 7) für $x = 0, 2, 4, \ldots 10^{-4}$ *cm* das Produkt $J\lambda = -J \frac{d}{dx} \log \operatorname{nat} J = -\frac{dJ}{dx}$ gebildet. Dieser

letzteren Tabelle 10 entspricht die graphische Darstellung in Fig. 8.

Tabelle 9.

$$q = -\frac{dJ}{dx} \text{ für } J_0 = 100.$$

Dicke der absorbierenden Schicht Aluminium zwischen $cm.10^{-4}$	U	Po	AcB	ThB	RaC
0—2	24·25	9·35	6·95	3·35	2·80
2—4	14·3	8·35	8·45	5·05	4·60
4—6	7·20	7·20	7·10	5·10	4·65
6—8	3·17	5·85	5·65	5·05	4·40
8—9	1·28	—	—	—	—
8—10	—	4·80	5·10	5·30	4·25
9—11	0·58	—	—	—	—
10—12	—	4·10	4·20	4·65	4·30
12—14	—	3·25	3·45	4·25	3·65
14—16	—	2·55	2·80	3·75	3·10
16—18	—	1·88	2·05	3·15	3·00
18—20	—	1·34	1·57	2·60	2·60
20—22	—	0·85	1·11	2·10	2·20
22—24	—	0·38	0·70	1·70	2·00
24—26	—	0·11	0·44	1·32	1·80
26—28	—	0·02	0·26	0·94	1·50
28—30	—	—	0·12	0·72	1·36
30—32	—	—	0·05	0·54	1·12
32—34	—	—	0·02	0·32	0·90
34—36	—	—	—	0·16	0·58
36—38	—	—	—	0·07	0·37
38—40	—	—	—	0·02	0·19
40—42	—	—	—	—	0·11
42—44	—	—	—	—	0·04

Tabelle 10.

$q = J\lambda$ für $J_0 = 100$.

Dicke der absorbierenden Schicht Aluminium in $cm.10^{-4}$	U	Po	Ac*B*	Th*B*	Ra*C*
0	31·0	10·5	9·00	5·00	4·00
2	18·5	8·94	8·19	5·02	4·25
4	10·1	7·50	7·13	4·99	4·26
6	4·72	6·37	6·04	4·89	4·17
8	1·73	5·46	5·24	4·73	3·96
10	0·50	4·56	4·52	4·46	3·81
12	0·00	3·66	3·77	4·10	3·52
16	—	2·06	2·40	3·19	3·01
20	—	0·80	1·26	2·27	2·43
22	—	0·40	0·82	1·83	2·19
24	—	0·14	0·52	1·46	1·90
26	—	0·03	0·31	1·15	1·66
28	—	0·00	0·17	0·90	1·48
30	—	—	0·09	0·68	1·26
32	—	—	0·04	0·45	0·99
34	—	—	0·00	0·25	0·71
36	—	—	—	0·11	0·47
38	—	—	—	0·03	0·28
40	—	—	—	0·00	0·15
44	—	—	—	—	0·02

Das Resultat ist, daß q im allgemeinen mit wachsendem x abfällt; nur bei einigen Substanzen zeigt sich zu Beginn ein Ansteigen zu einem Maximum, und zwar gerade bei jenen, die eine durchdringliche β-Strahlung besitzen (Ra *C*, Th *B*), während die reinen α-Strahler (U, Po) dieses Maximum nicht zeigen. Für Schichtdicken größer als 6.10^{-4} *cm* fällt q bei allen untersuchten Präparaten stetig ab.

Dieses Resultat ist von Bedeutung wegen des abweichenden Verhaltens der Absorption in Aluminium gegenüber der in Luft.

Bei Absorption in Luft hat die Größe q zugleich die Bedeutung der Ionisation pro Längeneinheit. Die Versuche von H. W. Bragg,[1] R. K. Mc Clung,[2] B. Kučera und B. Mašek,[3] O. Hahn[4] und H. L. Bronson[5] zeigen nun, daß in Luft die

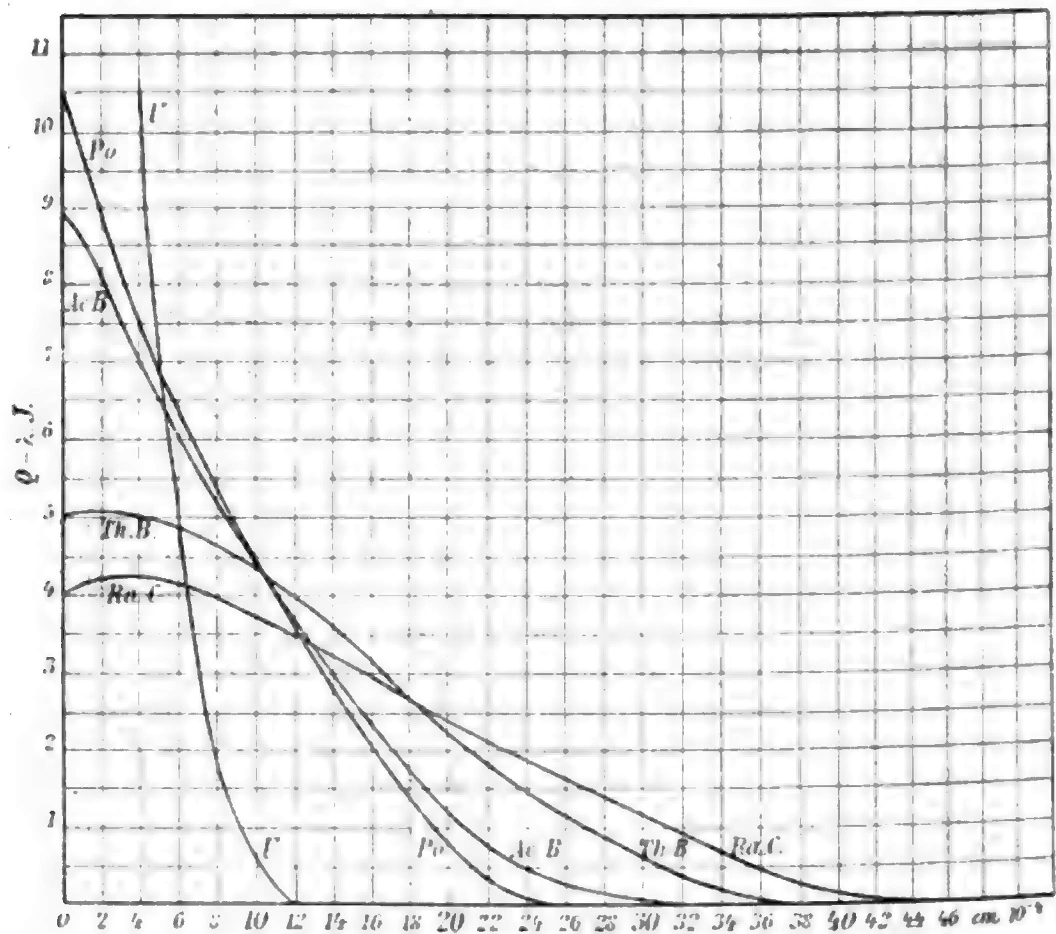


Fig. 8.

Größe q — unter der ja bei unseren Versuchen ebenfalls realisierten Bedingung, daß die radioaktive Substanz eine sehr dünne Schicht bilde — zunächst langsam, dann rascher zu einem Maximum ansteigt, hierauf rasch zu Null abfällt. Der Gang von q und der hieraus folgende von J als Funktion der

1 H. W. Bragg, Jahrb. d. Rad. u. Elektr., *2*, 16 (1905).
2 R. K. Mc Clung, Phil. Mag., (6) *11*, 131 (1906).
3 B. Kučera und B. Mašek, Physik. Zeitschr., *7*, 337 (1906).
4 O. Hahn, Phil. Mag., (6) *11*, 793 (1906).
5 H. L. Bronson, Phil. Mag., (6), *11*, 806 (1906).

durchstrahlten Luftdicke x sind in folgender Fig. 9 schematisch dargestellt.

Wäre der Absorptionsvorgang in Metallen und in Luft vollkommen analog, so daß unabhängig von der Geschwindigkeit der α-Partikel bestimmte Schichtdicken eines Metalles und der Luft einander äquivalent gesetzt werden könnten, so müßte auch in Metallen kurz vor der gänzlichen Extinktion der

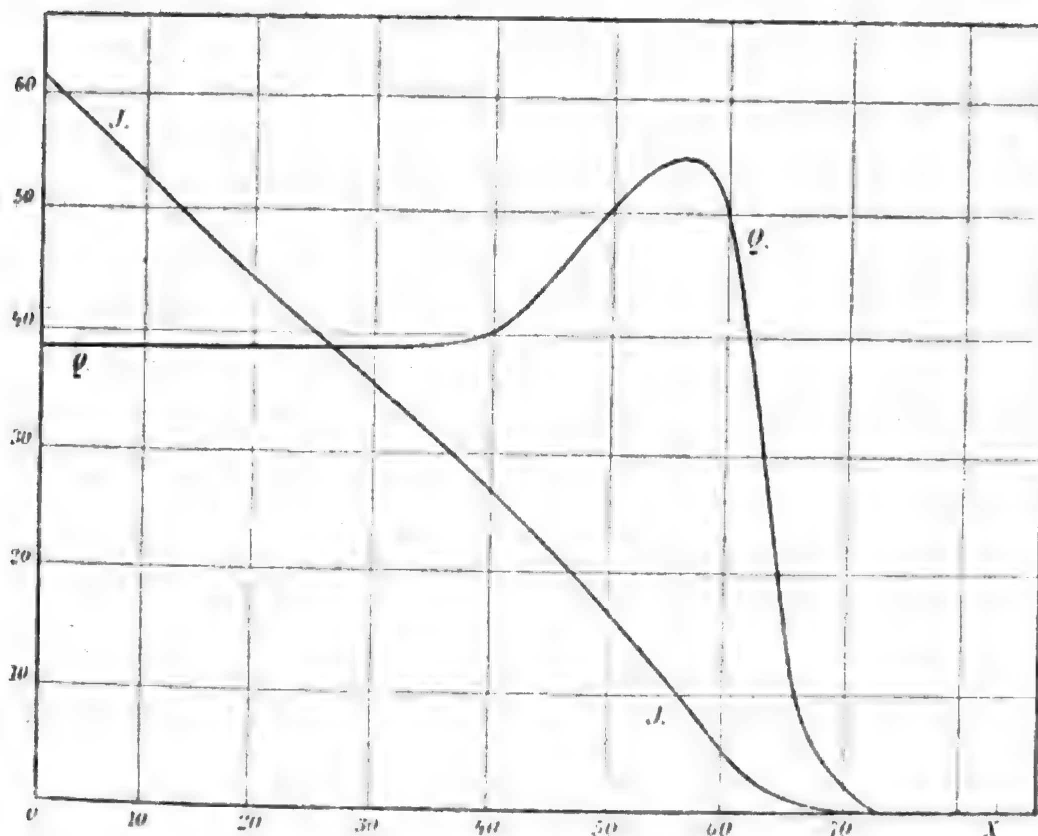


Fig. 9.

Strahlung ein Maximum von q auftreten. Da dies tatsächlich nicht der Fall ist, kann obige Annahme nicht streng richtig sein; die Schichtdicke eines Metalles, welche in Bezug auf Absorption der α-Strahlung einer Luftplatte von 1 *cm* Dicke äquivalent ist, hängt ab von der Geschwindigkeit der α-Partikel.

Bloß versuchsweise soll im folgenden eine einfache theoretische Annahme über die Absorption der α-Strahlen in festen Körpern in ihren Konsequenzen geprüft und mit den experimentellen Resultaten verglichen werden.

Die zu Grunde gelegten Annahmen sind:

1. In einem festen Körper erfährt ein α-Partikel einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand:

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v.$$

2. Die durch den bei vollständiger Absorption in Luft entstehenden Sättigungsstrom gemessene Intensität J der Strahlung ist proportional dem Überschuß der kinetischen Energie der α-Partikel über einen bestimmten kritischen Grenzwert:

$$J = A(v^2 - c^2).$$

Es bedeutet somit c jene Geschwindigkeit, unterhalb welcher keine Ionisation in Luft hervorgebracht wird.

3. Die α-Partikel einer homogenen radioaktiven Substanz haben gleiche Anfangsgeschwindigkeiten und diese sind über alle Richtungen gleichmäßig verteilt.

Es ergibt sich hieraus:

$$v = v_0 e^{-\beta t} = v_0\left(1 - \frac{x}{s}\right),$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, x der im festen Körper vom α-Partikel zurückgelegte Weg und s identisch mit $\frac{v_0}{\beta}$ ist. Es wird:

$v = 0$ für $x = s$ (Flugweite)

$v = c$ für $x = \sigma = s\left(1 - \frac{c}{v_0}\right)$ (Extinktionsdicke).

Betrachtet man zunächst ein Parallelstrahlenbündel, so erhält man weiterhin:

$$J = A(v^2 - c^2) = J_0(1 - ax + bx^2) \quad \text{für} \quad x \leqq \sigma$$
$$J = 0 \quad \text{für} \quad x \geqq \sigma,$$

wobei

$$a = \frac{2}{s\left(1 - \frac{c^2}{v_0^2}\right)} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{s^2\left(1 - \frac{c^2}{v_0^2}\right)} = \frac{a}{2s}.$$

ist, und

$$q = -\frac{dJ}{dx} = J_0[a - 2bx] \quad \text{für} \quad x \leqq \sigma$$

$$q = 0 \quad \text{für} \quad x \geqq \sigma.$$

Bei parallelen Strahlen würde also die Größe q mit der durchstrahlten Schichtdicke x linear abnehmen.

Etwas komplizierter wird der Ausdruck für die Intensität der Strahlung als Funktion der durchstrahlten Schichtdicke, wenn man berücksichtigt, daß die von einer radioaktiven Fläche ausgehenden α-Partikel gleichmäßig nach allen Richtungen sich bewegen. Bezeichnet man mit ϑ den Winkel, den die Geschwindigkeit eines Teilchens mit der Normalen zur absorbierenden Platte bildet, so ergibt sich durch eine einfache Überlegung:

$$J = \int_0^{\vartheta_1} J_0 \sin\vartheta \, d\vartheta \left(1 - a\frac{x}{\cos\vartheta} + b\frac{x^2}{\cos^2\vartheta}\right).$$

Dabei ist die obere Grenze ϑ_1 durch jenen Winkel gegeben, für welchen die Strecke $\frac{x}{\cos\vartheta} = \sigma$, der Extinktionsdicke wird, also $\vartheta_1 = \arccos\frac{x}{\sigma}$.

Das Resultat der Integration ist:

$$x \leqq \sigma; \; J = J_0\left\{1 + x\left(b\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) + ax \log\operatorname{nat}\frac{x}{\sigma} - bx^2\right\}$$

$$x \geqq \sigma; \; J = 0$$

und daraus:

$$x \leqq \sigma; \; q = -\frac{dJ}{dx} = J_0\left\{\frac{1}{\sigma} - a - b\sigma + 2bx - a\log\operatorname{nat}\frac{x}{\sigma}\right\}.$$

Für $x = 0$ wird $q = \infty$, d. h. die Kurve von $q = f(x)$ beginnt für $x = 0$ mit unendlich steilem Abfall und verläuft, nach oben konkav, mit stetig abnehmender Steilheit; für $x = \sigma$ bricht dann die Kurve mit einem kleinen Endwert diskontinuierlich ab.

Von den Störungen, die sich nur bei den zugleich auch β-strahlenden Substanzen zeigen und die daher wohl auf die

β-Strahlung als Ursache zurückgeführt werden können, abgesehen, ist der Verlauf der aus unseren Messungen erhaltenen Kurven für q (vergl. Fig. 8) mit diesem Resultat in qualitativer Übereinstimmung.

Zusammenfassung der wichtigsten Resultate.

Es wurde die Absorption der Strahlung von U, Po, Ac*B*, Th*B* und Ra*C* in Aluminium untersucht; durch Extrapolation wurde der Betrag der α- und der β-Strahlung separat bestimmt. Nach steigender Durchdringlichkeit der α-Strahlung geordnet, ergeben die untersuchten Substanzen die obige Reihenfolge. Zur genaueren Charakteristik werden verwendet der Absorptionskoeffizient für unendlich dünne absorbierende Schichten (λ_0) und die »Extinktionsdicke« σ, das ist jene Schichtdicke, welche die α-Strahlung vollkommen absorbiert. Es ergab sich (für Aluminium als absorbierendes Medium)

bei	U	Po	Ac*B*	Th*B*	Ra*C*
λ_0 ($^1/_{cm}$)	3100	1050	900	500	400
$10^4 . \sigma$ (cm)...	10	28	32	40	45

Eine eingehende Diskussion der für die α-Strahlung erhaltenen Resultate zeigt, daß das Gesetz der Absorption in Metallen und in Luft nicht identisch ist.

Die Annahme, daß in festen Körpern das α-Partikel einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand erfährt, führt zu Resultaten, die mit den experimentellen Ergebnissen in qualitativer Übereinstimmung stehen.

Über die Auflösung linearer Quaternionengleichungen

von

Dr. Lothar Schrutka Edler v. Rechtenstamm,
Assistent an der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1906.)

1. Die Forderung, lineare Quaternionengleichungen aufzulösen, tritt schon bei Hamilton gelegentlich der Differentiation impliziter Funktionen von Quaternionen auf (Hamilton, Elements of Quaternions, p. 435; deutsche Ausgabe, I, p. 639). Hamilton führt sie auf eine spezielle Form, die sogenannte lineare Vektorgleichung, zurück und löst diese auf eine sehr sinnreiche und für die Rechnung ziemlich bequeme Weise, wobei aber in die Endformel unbestimmte Vektoren (die nur linear unabhängig sein müssen) eingehen. Er deutet ferner einige andere Methoden an (Elements, p. 491, 493, 494; deutsche Ausgabe, I, p. 739, 743, 745) und gibt schließlich für einen speziellen Fall, nämlich für die lineare Quaternionengleichung mit zwei Gliedern, eine direkte Lösungsmethode (Elements, p. 410; deutsche Ausgabe p. 595; vergl. Tait, Elementary Treatise, p. 123; deutsche Ausgabe [Handbuch der Quaternionen] p. 104). In den Nummern 16 bis 24 soll nun eine direkte Lösungsmethode für die allgemeinste lineare Quaternionengleichung angegeben werden, welche von der letzterwähnten Hamilton'schen ausgeht. Vorher sollen noch einige einfache Relationen und Rechnungsregeln für Quaternionen entwickelt werden, welche teils an sich Interesse besitzen, teils in den folgenden Partien zur Anwendung kommen.

2. In dieser Arbeit sollen durchwegs Quaternionen mit griechischen, reelle Zahlen hingegen mit lateinischen Buch-

staben bezeichnet werden; für die drei Hamilton'schen Einheiten i, j, k wähle ich aus diesem Grunde die schon von Hankel (Theorie der komplexen Zahlensysteme, p. 141) angewendete Bezeichnung $\iota_1, \iota_2, \iota_3$.

Von den in der Quaternionentheorie üblichen Bezeichnungen $S\alpha$, $V\alpha$, $K\alpha$, $T\alpha$, $U\alpha$, $N\alpha$ verwende ich hier nur die letzte $N\alpha$; das Zeichen $K\alpha$ für die Konjugierte einer Quaternion α ersetze ich durch $\mathring{\alpha}$, weil $K\alpha$ viele Formeln allzu unübersichtlich machen würde; $S\alpha$ und $V\alpha$ sind entbehrlich, weil der Skalar einer Quaternion α durch

$$\frac{1}{2}(\alpha+\mathring{\alpha}), \qquad \ldots(1)$$

der Vektor

$$\frac{1}{2}(\alpha-\mathring{\alpha}) \qquad \ldots(2)$$

gegeben ist; die Begriffe Tensor und Versor endlich treten in den folgenden Untersuchungen überhaupt nicht auf.

3. Einige bekannte Formeln, welche häufig benützt werden, sollen hier noch zusammengestellt werden. Der Skalar eines Produktes hängt nur von der zyklischen Anordnung der Faktoren ab:

$$\alpha\beta+\mathring{\beta}\mathring{\alpha} = \beta\alpha+\mathring{\alpha}\mathring{\beta} \qquad \ldots(3)$$

und allgemeiner

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma\ldots\delta\varepsilon+\mathring{\varepsilon}\mathring{\delta}\ldots\mathring{\gamma}\mathring{\beta}\mathring{\alpha} &= \beta\gamma\ldots\delta\varepsilon\alpha+\mathring{\alpha}\mathring{\varepsilon}\mathring{\delta}\ldots\mathring{\beta}\mathring{\gamma} = \ldots = \\ &= \varepsilon\alpha\beta\gamma\ldots\delta+\mathring{\delta}\ldots\mathring{\gamma}\mathring{\beta}\mathring{\alpha}\mathring{\varepsilon}. \end{aligned} \qquad \ldots(4)$$

Die Formel (3) wird gewöhnlich durch Ausrechnung des Skalars aus den Koordinaten bewiesen; einfacher ist folgender Beweis:

$$\begin{aligned} \alpha\beta+\mathring{\beta}\mathring{\alpha} &= \alpha\beta+\alpha\mathring{\beta}-\alpha\mathring{\beta}+\mathring{\beta}\mathring{\alpha} = \alpha(\beta+\mathring{\beta})-\alpha\mathring{\beta}+\mathring{\beta}\mathring{\alpha} = \\ &= (\beta+\mathring{\beta})\alpha-\alpha\mathring{\beta}+\mathring{\beta}\mathring{\alpha} = \beta\alpha-\alpha\mathring{\beta}+\mathring{\beta}(\alpha+\mathring{\alpha}) = \\ &= \beta\alpha-\alpha\mathring{\beta}+(\alpha+\mathring{\alpha})\mathring{\beta} = \beta\alpha+\mathring{\alpha}\mathring{\beta}, \end{aligned} \qquad \ldots(5)$$

zu dem nur zu bemerken ist, daß $\alpha+\mathring{\alpha}$ und $\beta+\mathring{\beta}$ reell und daher als Faktoren mit jeder Quaternion vertauschbar sind.

Sind $\varkappa$, λ, μ Vektoren:

$$\begin{aligned}\varkappa &= k_1\iota_1+k_2\iota_2+k_3\iota_3,\\ \lambda &= l_1\iota_1+l_2\iota_2+l_3\iota_3,\\ \mu &= m_1\iota_1+m_2\iota_2+m_3\iota_3,\end{aligned} \qquad \ldots(6)$$

so ist (Hamilton, Elements, p. 322; deutsche Ausgabe, I, p. 447)

$$\varkappa\lambda\mu+\mathring{\varkappa}\mathring{\lambda}\mathring{\mu} = \varkappa\lambda\mu-\mu\lambda\varkappa = -\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3\\ l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{vmatrix}. \qquad \ldots(7)$$

4. Die vier Koordinaten einer Quaternion lassen sich durch diese und die vier Einheiten $1, \iota_1, \iota_2, \iota_3$ darstellen. Ist nämlich

$$\alpha = a_0+a_1\iota_1+a_2\iota_2+a_3\iota_3, \qquad \ldots(8)$$

so wird

$$\begin{aligned}\iota_1\alpha\iota_1 &= -a_0-a_1\iota_1+a_2\iota_2+a_3\iota_3,\\ \iota_2\alpha\iota_2 &= -a_0+a_1\iota_1-a_2\iota_2+a_3\iota_3,\\ i_3\alpha\iota_3 &= -a_0+a_2\iota_2+a_2\iota_2-a_3\iota_3,\end{aligned} \qquad \ldots(9)$$

also

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}[\alpha-\iota_1\alpha\iota_1-\iota_2\alpha\iota_2-\iota_3\alpha\iota_3],\text{ [1]}\\ a_1 &= \frac{1}{4}[\alpha\iota_1+\iota_1\alpha-\iota_2\alpha\iota_3+\iota_3\alpha\iota_2],\\ a_2 &= \frac{1}{4}[\alpha\iota_2+\iota_1\alpha\iota_3+\iota_2\alpha-\iota_3\alpha\iota_1],\\ a_3 &= \frac{1}{4}[\alpha\iota_3-\iota_1\alpha\iota_2+\iota_2\alpha\iota_1+\iota_3\alpha];\end{aligned} \qquad \ldots(10)$$

daraus für Skalar und Vektor

$$\alpha+\mathring{\alpha} = \frac{1}{2}[\alpha-\iota_1\alpha\iota_1-\iota_2\alpha\iota_2-\iota_3\alpha\iota_3] \qquad \ldots(11)$$

und

$$\alpha-\mathring{\alpha} = \frac{1}{2}[3\alpha+\iota_1\alpha\iota_1+\iota_2\alpha\iota_2+\iota_3\alpha\iota_3]; \qquad \ldots(12)$$

---

[1] Diese Darstellung erwähnt Hurwitz in seiner Abhandlung »Über die Zahlentheorie der Quaternionen«, Göttinger Nachrichten (1896), p. 337.

für die Konjugierte

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{2}[\alpha + \iota_1 \alpha \iota_1 + \iota_2 \alpha \iota_2 + \iota_3 \alpha \iota_3] \qquad \ldots (13)$$

und für die Norm

$$N\alpha = -\frac{1}{2}[\alpha^2 + (\iota_1 \alpha)^2 + (\iota_2 \alpha)^2 + (\iota_3 \alpha)^2] =$$
$$= -\frac{1}{2}[\alpha^2 + (\alpha \iota_1)^2 + (\alpha \iota_2)^2 + (\alpha \iota_3)^2]. \qquad \ldots (14)$$

5. Mehrere Quaternionen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ heißen linear unabhängig, wenn zwischen ihnen keine lineare Beziehung mit reellen Koeffizienten

$$\alpha a + b\beta + c\gamma + \ldots = 0 \qquad \ldots (15)$$

besteht (der Fall, daß alle Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ verschwinden, ist dabei selbstverständlich außer acht zu lassen), sonst linear abhängig.

Die beiden Reihen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \ldots$ sind offenbar stets gleichzeitig linear abhängig oder unabhängig.

Zwei Quaternionen α und β sind linear abhängig oder nicht, je nachdem ihr Quotient oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine beliebige von den Zahlen $\alpha\dot{\beta}$ oder $\dot{\beta}\alpha$ reell ist oder nicht.

6. Ich definiere drei Symbole $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ durch folgende Gleichungen:

$$(\alpha\beta) = \frac{1}{2}(\alpha\dot{\beta} - \beta\dot{\alpha}), \qquad \ldots (16)$$

$$(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{3}[(\alpha\beta)\gamma + (\beta\gamma)\alpha + (\gamma\alpha)\beta], \qquad \ldots (17)$$

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{1}{4}[(\alpha\beta\gamma)\dot{\delta} - (\beta\gamma\delta)\dot{\alpha} + (\gamma\delta\alpha)\dot{\beta} - (\delta\alpha\beta)\dot{\gamma}]. \ldots (18)$$

Die in jedem der Symbole auftretenden Quaternionen sollen kurz als dessen Komponenten bezeichnet werden.

$(\alpha\beta)$ ist offenbar ein Vektor. Führt man (17) und (18) aus, so erhält man

$$(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{6}[\alpha\dot{\beta}\gamma - \alpha\dot{\gamma}\beta - \beta\dot{\alpha}\gamma + \beta\dot{\gamma}\alpha + \gamma\dot{\alpha}\beta - \gamma\dot{\beta}\alpha] \ldots (19)$$

und

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{1}{24}[\alpha\dot\beta\gamma\dot\delta - \alpha\dot\beta\delta\dot\gamma - \alpha\dot\gamma\beta\dot\delta + \alpha\dot\gamma\delta\dot\beta + \alpha\dot\delta\beta\dot\gamma - \alpha\dot\delta\gamma\dot\beta -$$
$$- \beta\dot\alpha\gamma\dot\delta + \beta\dot\alpha\delta\dot\gamma + \beta\dot\gamma\alpha\dot\delta - \beta\dot\gamma\delta\dot\alpha - \beta\dot\delta\alpha\dot\gamma + \beta\dot\delta\gamma\dot\alpha + \quad \ldots(20)$$
$$+ \gamma\dot\alpha\beta\dot\delta - \gamma\dot\alpha\delta\dot\beta - \gamma\dot\beta\alpha\dot\delta + \gamma\dot\beta\delta\dot\alpha + \gamma\dot\delta\alpha\dot\beta - \gamma\dot\delta\beta\dot\alpha -$$
$$- \delta\dot\alpha\beta\dot\gamma + \delta\dot\alpha\gamma\dot\beta + \delta\dot\beta\alpha\dot\gamma - \delta\dot\beta\gamma\dot\alpha - \delta\dot\gamma\alpha\dot\beta + \delta\dot\gamma\beta\dot\alpha].$$

Neben diesen symmetrischen Formeln existiert eine Anzahl kürzerer, welche sich mehr für die Berechnung eignen.

Die Form (19) für $(\alpha\beta\gamma)$ läßt sich in drei gleiche Summanden zerlegen. Es ist nämlich

$$\alpha\dot\beta\gamma - \gamma\dot\beta\alpha = \beta\dot\gamma\alpha - \alpha\dot\gamma\beta = \gamma\dot\alpha\beta - \beta\dot\alpha\gamma. \quad \ldots(21)$$

Es genügt eine der beiden Relationen zu beweisen. Bilden wir die Differenz der beiden ersten Ausdrücke, so erhalten wir

$$(\alpha\dot\beta\gamma - \gamma\dot\beta\alpha) - (\beta\dot\gamma\alpha - \alpha\dot\gamma\beta) = \alpha(\dot\beta\gamma + \dot\gamma\beta) - (\gamma\dot\beta + \beta\dot\gamma)\alpha = 0, \quad \ldots(22)$$

denn die beiden Ausdrücke $\dot\beta\gamma + \dot\gamma\beta$ und $\gamma\dot\beta + \beta\dot\gamma$ sind reell und nach (3) einander gleich. Es ist daher

$$(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha\dot\beta\gamma - \gamma\dot\beta\alpha) = \frac{1}{2}(\beta\dot\gamma\alpha - \alpha\dot\gamma\beta) = \frac{1}{2}(\gamma\dot\alpha\beta - \beta\dot\alpha\gamma). \quad \ldots(23)$$

Wir können daher (18) durch folgende Formel ersetzen:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{1}{8}[\alpha\dot\beta\gamma\dot\delta - \gamma\dot\beta\alpha\dot\delta - \beta\dot\gamma\delta\dot\alpha + \delta\dot\gamma\beta\dot\alpha + \gamma\dot\delta\alpha\beta - \alpha\dot\delta\beta\dot\gamma -$$
$$- \delta\dot\alpha\beta\dot\gamma + \beta\dot\alpha\delta\dot\gamma] \quad \ldots(24)$$

und weiter durch

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{1}{8}[(\alpha\dot\beta\gamma\dot\delta + \delta\dot\gamma\beta\dot\alpha) + (\gamma\dot\delta\alpha\dot\beta + \beta\dot\alpha\delta\dot\gamma) - (\alpha\dot\delta\gamma\dot\beta + \beta\dot\gamma\delta\dot\alpha) -$$
$$- (\gamma\dot\beta\alpha\dot\delta + \delta\dot\alpha\beta\dot\gamma)]. \quad \ldots(25)$$

Diese Darstellung zeigt, daß $(\alpha\beta\gamma\delta)$ eine reelle Zahl ist. Da nach (4)

$$\alpha\dot\beta\gamma\dot\delta + \delta\dot\gamma\beta\dot\alpha = \gamma\dot\delta\alpha\dot\beta + \beta\dot\alpha\delta\dot\gamma \quad \ldots(26)$$

und

$$\alpha\dot\delta\gamma\dot\beta + \beta\dot\gamma\delta\dot\alpha = \dot\gamma\beta\alpha\dot\delta + \delta\dot\alpha\beta\dot\gamma \quad \ldots(27)$$

ist, so können wir noch einfacher

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{1}{4}[(\alpha\dot{\beta}\gamma\ddot{\delta}+\delta\dot{\gamma}\beta\ddot{\alpha})-(\gamma\dot{\beta}\alpha\ddot{\delta}+\delta\ddot{\alpha}\beta\dot{\gamma})] =$$

$$= \frac{1}{2}[(\alpha\beta\gamma)\ddot{\delta}+\delta(\dot{\gamma}\dot{\beta}\ddot{\alpha})] \qquad \ldots(28)$$

setzen.

7. Alle drei Ausdrücke $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ haben die Eigenschaft, bei einer Vertauschung zweier Komponenten ihr Zeichen zu wechseln, wie aus den Formeln (16), (19) und (20) sofort zu ersehen ist. Allgemein erhält man hieraus folgende Relationen:

$$(\alpha\beta) = -(\beta\alpha), \qquad \ldots(29)$$

$$(\alpha\beta\gamma) = -(\alpha\gamma\beta) = -(\beta\alpha\gamma) = (\beta\gamma\alpha) = (\gamma\alpha\beta) = -(\gamma\beta\alpha) \ldots(30)$$

und

$$\begin{aligned}(\alpha\beta\gamma\delta) &= (\alpha\beta\delta\gamma) = -(\alpha\gamma\beta\delta) = (\alpha\gamma\delta\beta) = \\ &= (\alpha\delta\beta\gamma) = -(\alpha\delta\gamma\beta) = \\ &= -(\beta\alpha\gamma\delta) = (\beta\alpha\delta\gamma) = (\beta\gamma\alpha\delta) = -(\beta\gamma\delta\alpha) = \\ &= -(\beta\delta\alpha\gamma) = (\beta\delta\gamma\alpha) = \\ &= (\gamma\alpha\beta\delta) = -(\gamma\alpha\delta\beta) = -(\gamma\beta\alpha\delta) = (\gamma\beta\delta\alpha) = \\ &= (\gamma\delta\alpha\beta) = -(\gamma\delta\beta\alpha) = \\ &= -(\delta\alpha\beta\gamma) = (\delta\alpha\gamma\beta) = (\delta\beta\alpha\gamma) = -(\delta\beta\gamma\alpha) = \\ &= -(\delta\gamma\alpha\beta) = (\delta\gamma\beta\alpha).\end{aligned} \qquad \ldots(31)$$

Hieraus folgt sofort, daß $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ verschwinden, sobald zwei von ihren Komponenten gleich werden.

Man erhält ferner

$$(\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}) = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}\beta\dot{\gamma}-\dot{\gamma}\beta\dot{\alpha}) = -(\alpha\beta\gamma)^{\cdot} \qquad \ldots(32)$$

und

$$(\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}) = \frac{1}{4}[(\dot{\alpha}\beta\dot{\gamma}\delta+\dot{\delta}\gamma\dot{\beta}\alpha)-(\dot{\gamma}\beta\dot{\alpha}\delta+\dot{\delta}\alpha\dot{\beta}\gamma)] =$$

$$= \frac{1}{4}[(\beta\dot{\gamma}\delta\dot{\alpha}+\alpha\dot{\delta}\gamma\dot{\beta})-(\delta\dot{\gamma}\beta\dot{\alpha}+\alpha\dot{\beta}\gamma\dot{\delta})] = \qquad \ldots(33)$$

$$= (\beta\gamma\delta\alpha) = -(\alpha\beta\gamma\delta).$$

Für $(\alpha\beta)$ gibt es keine so einfache Relation; setzt man aber in (21)

$$\gamma = 1, \qquad \ldots(34)$$

so erhält man

$$\alpha\mathring{\beta}-\mathring{\beta}\alpha=\beta\alpha-\alpha\beta=\dot{\alpha}\beta-\beta\dot{\alpha} \qquad \ldots(35)$$

und, wenn man α durch $\dot{\alpha}$, β durch $\mathring{\beta}$ ersetzt,

$$\dot{\alpha}\beta-\beta\dot{\alpha}=\mathring{\beta}\dot{\alpha}-\dot{\alpha}\mathring{\beta}=\alpha\mathring{\beta}-\mathring{\beta}\alpha; \qquad \ldots(36)$$

hieraus folgt aber

$$(\alpha\beta)+(\dot{\alpha}\mathring{\beta})=\frac{1}{2}(\alpha\mathring{\beta}-\beta\dot{\alpha}+\dot{\alpha}\beta-\mathring{\beta}\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}(\beta\alpha-\alpha\beta+\mathring{\beta}\dot{\alpha}-\dot{\alpha}\mathring{\beta})=(\beta\dot{\alpha})+(\mathring{\beta}\alpha). \qquad \ldots(37)$$

Die Formeln (35) und (36) liefern noch, auf die Produkte $\alpha\mathring{\beta}$ und $\gamma\mathring{\delta}$ angewendet:

$$\alpha\mathring{\beta}\gamma\mathring{\delta}-\gamma\mathring{\delta}\alpha\mathring{\beta}=\beta\dot{\alpha}\delta\dot{\gamma}-\delta\dot{\gamma}\beta\dot{\alpha}=\gamma\mathring{\delta}\beta\dot{\alpha}-\beta\dot{\alpha}\gamma\mathring{\delta}=$$

$$=\delta\dot{\gamma}\alpha\mathring{\beta}-\alpha\mathring{\beta}\delta\dot{\gamma}. \qquad \ldots(38)$$

8. Die Ausdrücke $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ sind in Bezug auf jede Komponente distributiv, d. h. es ist

$$(\alpha+\alpha', \beta)=(\alpha\beta)+(\alpha'\beta), \qquad \ldots(39)$$

$$(\alpha+\alpha', \beta, \gamma)=(\alpha\beta\gamma)+(\alpha'\beta\gamma), \qquad \ldots(40)$$

$$(\alpha+\alpha', \beta, \gamma, \delta)=(\alpha\beta\gamma\delta)+(\alpha'\beta\gamma\delta). \qquad \ldots(41)$$

Für eine reelle Zahl c ist

$$(c\alpha, \beta)=c(\alpha\beta), \qquad \ldots(42)$$

$$(c\alpha, \beta, \gamma)=c(\alpha\beta\gamma), \qquad \ldots(43)$$

$$(c\alpha, \beta, \gamma, \delta)=c(\alpha\beta\gamma\delta). \qquad \ldots(44)$$

Ferner ist für eine Quaternion ε

$$(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon)=(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)=N(\varepsilon)(\alpha\beta), \qquad \ldots(45)$$

$$(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon)=N(\varepsilon)(\alpha\beta\gamma)\varepsilon, \qquad \ldots(46)$$

$$(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma)=N(\varepsilon)\varepsilon(\alpha\beta\gamma), \qquad \ldots(47)$$

$$(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon)=(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma, \varepsilon\delta)=N^2(\varepsilon)(\alpha\beta\gamma\delta). \qquad \ldots(48)$$

Die Ausdrücke $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ bleiben unverändert, wenn zu einer Komponente ein reelles Vielfaches der

(beziehungsweise einer) anderen addiert wird. Denn nach (39) und (42) ist

$$(\alpha+c\beta, \beta) = (\alpha\beta)+c(\beta\beta) = (\alpha\beta)+c\cdot 0 = (\alpha\beta). \qquad \ldots (40)$$

Ebenso ist der Beweis in den beiden anderen Fällen zu führen. Diese Bemerkung leistet bei der Ausrechnung spezieller, numerisch gegebener Beispiele gute Dienste.

9. Die Verbindung der Ausdrücke, mit denen wir uns hier beschäftigen, untereinander liefert noch eine Anzahl interessanter Relationen.

Es ist zunächst

$$(\alpha\beta)\alpha = \frac{1}{2}[\alpha\mathring{\beta}\alpha - \beta N(\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha\mathring{\beta}\alpha - N(\alpha)\beta] = \alpha(\mathring{\beta}\dot{\alpha}), \qquad \ldots (50)$$

$$(\alpha\beta\gamma)\dot{\alpha} = \frac{1}{2}[\alpha\mathring{\beta}\gamma\dot{\alpha} - \gamma\mathring{\beta}N(\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha\mathring{\beta}\gamma\dot{\alpha} - N(\alpha)\gamma\mathring{\beta}] = \alpha(\mathring{\beta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}) = -\alpha(\alpha\beta\gamma)^{\cdot} \qquad \ldots (51)$$

$(\alpha\beta\gamma\delta)$ ist als reelle Größe mit jedem Quaternionenfaktor vertauschbar.

Ferner ist

$$((\alpha\beta), (\alpha\gamma)) = \frac{1}{8}[\alpha\mathring{\beta}\gamma\dot{\alpha} - \alpha\mathring{\beta}\alpha\dot{\gamma} - \beta\dot{\alpha}\gamma\dot{\alpha} + \beta N(\alpha)\dot{\gamma} - \alpha\dot{\gamma}\beta\dot{\alpha} +$$
$$+ \alpha\dot{\gamma}\alpha\mathring{\beta} + \gamma\dot{\alpha}\beta\dot{\alpha} - \gamma N(\alpha)\mathring{\beta}] =$$
$$= \frac{1}{8}[\alpha\mathring{\beta}\gamma\dot{\alpha} - \gamma\mathring{\beta}(N(\alpha) - \alpha\mathring{\beta}\alpha\dot{\gamma} + \alpha\dot{\gamma}\alpha\mathring{\beta} - \qquad \ldots (52)$$
$$- \beta\dot{\alpha}\gamma\dot{\alpha} + \gamma\dot{\alpha}\beta\dot{\alpha} + \beta\dot{\gamma}N(\alpha) - \alpha\dot{\gamma}\beta\dot{\alpha}] =$$
$$= \frac{1}{8}[6(\alpha\beta\gamma)\dot{\alpha} - 2\alpha(\mathring{\beta}\dot{\alpha}\dot{\gamma})] = (\alpha\beta\gamma)\dot{\alpha} = \alpha(\mathring{\beta}\dot{\gamma}\dot{\alpha});$$

$$((\alpha\beta), (\gamma\delta)) + ((\alpha\gamma), (\delta\beta)) + ((\alpha\delta), (\beta\gamma)) = 3(\alpha\beta\gamma\delta), \qquad \ldots (53)$$

wie (20) sofort erkennen läßt;

$$((\alpha\beta),(\alpha\gamma),(\alpha\delta)) = \frac{1}{2}[-(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\delta)+(\alpha\delta)(\alpha\gamma)(\alpha\beta)] =$$

$$= \frac{1}{4}[-(\beta\alpha\gamma)\dot{\alpha}\alpha\ddot{\delta}+\alpha(\beta\alpha\gamma)\delta\dot{\alpha}-\alpha\ddot{\delta}(\gamma\alpha\beta)\dot{\alpha}+$$
$$+\delta\dot{\alpha}\alpha(\dot{\gamma}\dot{\alpha}\ddot{\beta})] = \qquad \ldots(54)$$
$$= \frac{1}{2}[N\alpha\cdot(\beta\alpha\gamma\delta)+\alpha(\ddot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\gamma}\ddot{\delta})\dot{\alpha}] = N(\alpha)(\alpha\beta\gamma\delta)$$

nach (23), (52), (32), (28), (31) und (33).

Hieraus kann man weiter schließen:

$$N(\alpha)(\alpha\gamma)(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\gamma)((\alpha\beta),(\alpha\gamma),(\alpha\delta)) = (((\alpha\gamma),(\alpha\beta)),(\alpha\gamma),(\alpha\delta))) =$$
$$(\alpha(\gamma\alpha\beta),\alpha(\gamma\alpha\delta)) = N(\alpha)((\gamma\alpha\beta),(\gamma\alpha\delta)), \qquad \ldots(55)$$

indem man der Reihe nach dreimal (52), hierauf (45) anwendet; also ist

$$((\gamma\alpha\beta),(\gamma\alpha\delta)) = (\alpha\gamma)\cdot(\alpha\beta\gamma\delta). \qquad \ldots(56)$$

Der Fall $\alpha = 0$ macht offenbar keine Schwierigkeit, da dann diese Werte beide gleich Null sind.

Endlich ist

$$((\alpha\beta\gamma),(\alpha\beta\delta),(\alpha\gamma\delta),(\beta\gamma\delta)) = \frac{1}{3}[(((\alpha\beta\gamma),(\alpha\beta\delta)),((\alpha\gamma\delta),(\beta\gamma\delta)))+$$
$$+(((\alpha\beta\gamma),(\alpha\gamma\delta)),((\beta\gamma\delta),(\alpha\beta\delta)))+$$
$$+(((\alpha\beta\gamma),(\beta\gamma\delta)),((\alpha\beta\delta),(\alpha\gamma\delta)))] =$$
$$= \frac{1}{3}[((\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma\delta),(\alpha\beta)(\alpha\beta\gamma\delta))+ \qquad \ldots(57)$$
$$+((\beta\delta)(\alpha\gamma\beta\delta),(\gamma\alpha)(\alpha\gamma\delta\beta))+$$
$$+((\alpha\delta)(\beta\gamma\alpha\delta),(\beta\gamma)(\beta\gamma\alpha\delta))=$$
$$= \frac{1}{3}(\alpha\beta\gamma\delta)^2\cdot[((\alpha\beta),(\gamma\delta))+((\beta\delta),(\alpha\gamma))+$$
$$+((\alpha\delta),(\beta\gamma))] = (\alpha\beta\gamma\delta)^3.$$

10. Die Ausdrücke $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ liefern bequeme Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Quaternionen. Es gilt nämlich der Satz:

Zwei Quaternionen α, β, drei Quaternionen α, β, γ, vier Quaternionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind linear unabhängig

oder nicht, je nachdem $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ von Null verschieden ist oder nicht.

Der Beweis jeder der drei Aussagen dieses Satzes zerfällt in zwei Teile.

Wenn α, β linear abhängig sind, so besteht eine Relation

$$a\alpha + b\beta = 0; \qquad \dots (58)$$

mindestens einer der Koeffizienten a, b muß von Null verschieden sein; es sei etwa a ein solcher, dann ist

$$\alpha = -\frac{b}{a}\beta \qquad \dots (59)$$

und

$$(\alpha\beta) = \left(\alpha, -\frac{b}{a}\alpha\right) = -\frac{b}{a}(\alpha\alpha) = 0. \qquad \dots (60)$$

Umgekehrt, ist

$$0 = (\alpha\beta) = \frac{1}{2}(\alpha\mathring{\beta} - \beta\mathring{\alpha}) \qquad \dots (61)$$

und ist etwa β von Null verschieden, so folgt aus (61), wenn rechts mit β multipliziert wird,

$$0 = \frac{1}{2}[\alpha\mathring{\beta}\beta - \beta\mathring{\alpha}\beta] = N(\beta)\alpha - \frac{1}{2}(\alpha\mathring{\beta} + \beta\mathring{\alpha})b, \qquad \dots (62)$$

eine lineare Relation zwischen α und β, deren Koeffizienten reell sind und nicht beide verschwinden, weil $N(\beta)$ unter ihnen vorkommt. α läßt sich als reelles Vielfaches von β darstellen. Die Schlußbemerkung in Nr. 5 führt offenbar zu demselben Resultat.

11. Wenn die drei Quaternionen α, β, γ linear abhängig sind, so besteht eine Relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0; \qquad \dots (63)$$

von den Koeffizienten muß wenigstens einer von Null verschieden sein; ist a ein solcher, so ist

$$\alpha = -\frac{b}{a}\beta - \frac{c}{a}\gamma \qquad \dots (64)$$

und nach Nr. 8

$$(\alpha\beta\gamma) = \left(-\frac{b}{a}\beta - \frac{c}{a}\gamma, \beta, \gamma\right) = (0, \beta, \gamma) = 0. \qquad \ldots(65)$$

Ist umgekehrt

$$0 = (\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{3}[(\alpha\beta)\gamma + (\beta\gamma)\alpha + (\gamma\alpha)\beta] \qquad \ldots(66)$$

und sind die drei Größen $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$ nicht alle drei Null (in diesem Falle wären nach dem Vorhergehenden sogar je zwei der Größen α, β, γ linear abhängig), so sei

$$(\alpha\beta) \neq 0; \qquad \ldots(67)$$

multipliziert man (66) links mit $(\alpha\beta)$:

$$0 = \frac{1}{3}[(\alpha\beta)^2\gamma + (\alpha\beta)(\beta\gamma)\alpha + (\alpha\beta)(\gamma\alpha)\beta], \qquad \ldots(68)$$

so hat man bereits eine Relation mit reellen Koeffizienten zwischen α, β, γ; denn $(\alpha\beta)^2$ ist als Quadrat eines Vektors reell, ferner ist

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(\beta\gamma) &= \frac{1}{4}[N(\beta)\alpha\dot\gamma - \alpha\dot\beta\gamma\dot\beta - \beta\dot\alpha\beta\dot\gamma + \beta\dot\alpha\gamma\dot\beta)] = \\ &= \frac{1}{4}[\beta\dot\gamma\alpha\dot\beta + \beta\dot\alpha\gamma\dot\beta - (\gamma\dot\beta\alpha\dot\beta + \beta\alpha\beta\dot\gamma)] = \qquad \ldots(69) \\ &= \frac{1}{4}[N(\beta)(\alpha\dot\gamma + \gamma\dot\alpha) - (\gamma\dot\beta\alpha\dot\beta + \beta\dot\alpha\beta\dot\gamma)],\end{aligned}$$

da wegen (66) und (23)

$$\dot\beta\alpha\dot\gamma = \dot\gamma\alpha\dot\beta, \quad \alpha\dot\beta\gamma = \gamma\dot\beta\alpha \qquad \ldots(70)$$

ist; ebenso ist

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(\gamma\alpha) &= \frac{1}{4}[\alpha\dot\beta\gamma\dot\alpha - \alpha\dot\beta\alpha\dot\gamma - \beta\dot\alpha\gamma\dot\alpha + N(\alpha)\beta\dot\gamma] = \\ &= \frac{1}{4}[N\alpha(\beta\dot\gamma + \gamma\dot\beta) - (\alpha\dot\beta\alpha\dot\gamma + \gamma\dot\alpha\beta\dot\alpha)]. \qquad \ldots(71)\end{aligned}$$

γ läßt sich hiernach als reelle Kombination von α und β darstellen.

12. Sind endlich vier Quaternionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ linear abhängig, so besteht eine Gleichung

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta = 0. \qquad \ldots(72)$$

Ist hierin a von Null verschieden, so folgt daraus

$$\alpha = -\frac{b}{a}\beta-\frac{c}{a}\gamma-\frac{d}{a}\delta \qquad \ldots(73)$$

und

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \left(-\frac{b}{a}\beta-\frac{c}{a}\gamma-\frac{d}{a}\delta, \beta, \gamma, \delta\right) = (0, \beta, \gamma, \delta) = 0. \quad \ldots(74)$$

Umgekehrt, ist

$$0 = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{1}{4}[\alpha(\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)-\beta(\dot\gamma\dot\delta\dot\alpha)+\gamma(\dot\delta\dot\alpha\dot\beta)-\delta(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)] \quad \ldots(75)$$

und sind nicht alle vier Größen $(\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)$, $(\dot\gamma\dot\delta\dot\alpha)$, $(\dot\delta\dot\alpha\dot\beta)$, $(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)$ gleich Null, so sei $(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)$ von Null verschieden. Multipliziert man rechts mit $(\gamma\beta\alpha)$, so ergibt sich

$$0 = \frac{1}{4}[\alpha(\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)(\gamma\beta\alpha)-\beta(\dot\gamma\dot\delta\dot\alpha)(\gamma\beta\alpha)+\gamma(\dot\delta\dot\alpha\dot\beta)(\gamma\beta\alpha)-$$
$$-\delta(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma(\gamma\beta\alpha)]. \quad \ldots(76)$$

Dies ist bereits eine Relation mit reellen Koeffizienten. Denn es ist z. B.

$$(\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)(\gamma\beta\alpha) = (\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)(\alpha\gamma\beta) =$$
$$= \frac{1}{4}[\dot\beta\gamma\dot\delta\alpha\dot\gamma\beta-\dot\beta\gamma\dot\delta\beta\dot\gamma\alpha-\dot\delta\gamma\dot\beta\alpha\dot\gamma\beta+N(\beta)N(\gamma)\dot\delta\alpha] =$$
$$= \frac{1}{4}[N(\beta)\cdot N(\gamma)(\dot\alpha\delta+\dot\delta\alpha)-(\dot\beta\gamma\dot\alpha\beta\dot\gamma\delta+\dot\delta\gamma\dot\beta\alpha\dot\gamma\delta)], \quad \ldots(77)$$

weil nach (75) und (28)

$$\dot\delta\alpha\dot\gamma\beta+\dot\delta\beta\dot\gamma\alpha = \dot\gamma\beta\dot\alpha\delta-\dot\alpha\beta\dot\gamma\delta \qquad \ldots(78)$$

ist. δ läßt sich also als lineare Kombination von α, β und γ darstellen.

13. Fünf Quaternionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sind stets linear abhängig. Denn es besteht auf jeden Fall folgende Relation:[1]

$$(\beta\gamma\delta\varepsilon)\alpha+(\gamma\delta\varepsilon\alpha)\beta+(\delta\varepsilon\alpha\beta)\gamma+(\varepsilon\alpha\beta\gamma)\delta+(\alpha\beta\gamma\delta)\varepsilon=0. \quad \ldots(79)$$

Sie wäre nur dann nicht beweiskräftig, wenn alle fünf Klammerausdrücke verschwänden. Dann wären aber nach Nr. 12 schon je vier von den fünf Quaternionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ linear abhängig.

Um die Relation (79) zu beweisen, bringe ich sie auf die Form

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[(\beta\gamma\delta\varepsilon)\alpha-\alpha(\ddot{\beta}\dot{\gamma}\ddot{\delta}\dot{\varepsilon})]+\frac{1}{2}[(\gamma\delta\varepsilon\alpha)\beta-\beta(\dot{\gamma}\ddot{\delta}\dot{\varepsilon}\dot{\alpha})]+\\ &+\frac{1}{2}[(\delta\varepsilon\alpha\beta)\gamma-\gamma(\ddot{\delta}\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}\ddot{\beta})]+\frac{1}{2}[(\varepsilon\alpha\beta\gamma)\delta-\delta(\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}\ddot{\beta}\dot{\gamma})]+\\ &+\frac{1}{2}[(\alpha\beta\gamma\delta)\varepsilon-\varepsilon(\dot{\alpha}\ddot{\beta}\dot{\gamma}\ddot{\delta})]=0.\end{aligned} \quad \ldots(80)$$

und wende die Darstellung (28) an. Sie nimmt nach Weglassung des Faktors $\frac{1}{4}$ die Form folgender Gleichung an:

$$\begin{aligned}&\beta(\dot{\gamma}\ddot{\delta}\dot{\varepsilon})\alpha+\gamma(\ddot{\delta}\ddot{\beta}\dot{\varepsilon})\alpha+\delta(\dot{\varepsilon}\ddot{\beta}\dot{\gamma})\alpha+\varepsilon(\dot{\gamma}\ddot{\beta}\ddot{\delta})\alpha+\\ &+\alpha(\dot{\gamma}\ddot{\delta}\dot{\varepsilon})\beta+\alpha(\ddot{\delta}\ddot{\beta}\dot{\varepsilon})\gamma+\alpha(\dot{\varepsilon}\ddot{\beta}\dot{\gamma})\delta+\alpha(\dot{\gamma}\ddot{\beta}\ddot{\delta})\varepsilon+\\ &+\gamma(\ddot{\delta}\dot{\varepsilon}\dot{\alpha})\beta+\delta(\dot{\varepsilon}\dot{\gamma}\dot{\alpha})\beta+\varepsilon(\dot{\alpha}\dot{\gamma}\ddot{\delta})\beta+\alpha(\ddot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\varepsilon})\beta+\\ &+\beta(\ddot{\delta}\dot{\varepsilon}\dot{\alpha})\gamma+\beta(\dot{\varepsilon}\dot{\gamma}\dot{\alpha})\delta+\beta(\dot{\alpha}\dot{\gamma}\ddot{\delta})\varepsilon+\beta(\ddot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\varepsilon})\alpha+\\ &+\delta(\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}\ddot{\beta})\gamma+\varepsilon(\dot{\alpha}\ddot{\delta}\ddot{\beta})\gamma+\alpha(\ddot{\beta}\ddot{\delta}\dot{\varepsilon})\gamma+\beta(\dot{\varepsilon}\ddot{\delta}\dot{\alpha})\gamma+\\ &+\gamma(\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}\ddot{\beta})\delta+\gamma(\dot{\alpha}\ddot{\delta}\ddot{\beta})\varepsilon+\gamma(\ddot{\beta}\ddot{\delta}\dot{\varepsilon})\alpha+\gamma(\dot{\varepsilon}\ddot{\delta}\dot{\alpha})\beta+\\ &+\varepsilon(\dot{\alpha}\ddot{\beta}\dot{\gamma})\delta+\alpha(\ddot{\beta}\dot{\varepsilon}\dot{\gamma})\delta+\beta(\dot{\gamma}\dot{\varepsilon}\dot{\alpha})\delta+\gamma(\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}\ddot{\beta})\delta+\\ &+\delta(\dot{\alpha}\ddot{\beta}\dot{\gamma})\varepsilon+\delta(\ddot{\beta}\dot{\varepsilon}\dot{\gamma})\alpha+\delta(\dot{\gamma}\dot{\varepsilon}\dot{\alpha})\beta+\delta(\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}\ddot{\beta})\gamma+\\ &+\alpha(\ddot{\beta}\dot{\gamma}\ddot{\delta})\varepsilon+\beta(\dot{\gamma}\dot{\alpha}\ddot{\delta})\varepsilon+\gamma(\ddot{\delta}\dot{\alpha}\ddot{\beta})\varepsilon+\delta(\ddot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\gamma})\varepsilon+\\ &+\varepsilon(\ddot{\beta}\dot{\gamma}\ddot{\delta})\alpha+\varepsilon(\dot{\gamma}\dot{\alpha}\ddot{\delta})\beta+\varepsilon(\ddot{\delta}\dot{\alpha}\ddot{\beta})\gamma+\varepsilon(\ddot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\gamma})\delta=0,\end{aligned} \quad \ldots(81)$$

deren Richtigkeit mit Hilfe der Formeln (30) ohneweiters zu bestätigen ist.

---

[1] Eine andere Darstellung dieser Relation gibt Hamilton in den Elements, p. 492, deutsche Ausgabe p. 741 (Tait, Treatise p. 129, Handbuch p. 109).

Ist nun

$$(\alpha\beta\gamma\delta) \neq 0, \qquad \ldots(82)$$

so läßt sich daraus eine Darstellung von ε als reelle Kombination von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestimmen. Wir haben also den Satz:

Durch vier linear unabhängige Quaternionen läßt sich jede Quaternion linear mit reellen Koeffizienten darstellen.

Diese Darstellung ist überdies eindeutig bestimmt. Denn ist

$$\varepsilon = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta \qquad \ldots(83)$$

und auch

$$\varepsilon = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + d'\delta, \qquad \ldots(84)$$

so ergibt sich durch Subtraktion

$$0 = (a-a')\alpha + (b-b')\beta + (c-c')\gamma + (d-d')\delta, \qquad \ldots(85)$$

folglich, da $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ linear unabhängig sein sollen,

$$\begin{aligned} a &= a', \\ b &= b', \\ c &= c', \\ d &= d'. \end{aligned} \qquad \ldots(86)$$

14. Sind fünf Quaternionen durch ihre Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3, \\ \beta &= b_0 + b_1\iota_1 + b_2\iota_2 + b_3\iota_3, \\ \gamma &= c_0 + c_1\iota_1 + c_2\iota_2 + c_3\iota_3, \\ \delta &= d_0 + a_1\iota_1 + d_2\iota_2 + d_3\iota_3, \\ \varepsilon &= e_0 + e_1\iota_1 + e_2\iota_2 + e_3\iota_3, \end{aligned} \qquad \ldots(87)$$

so läßt sich ebenfalls zeigen, daß zwischen ihnen eine lineare Relation bestehen muß; denn setzen wir diese unbestimmt an:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon = 0, \qquad \ldots(88)$$

so ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung die Bedingungen:

$$\begin{aligned} a a_0 + b b_0 + c c_0 + d d_0 + e e_0 &= 0, \\ a a_1 + b b_1 + c c_1 + d d_1 + e e_1 &= 0, \\ a a_2 + b b_2 + c c_2 + d d_2 + e e_2 &= 0, \\ a a_3 + b b_3 + c c_3 + d d_3 + e e_3 &= 0, \end{aligned} \quad \ldots (89)$$

vier Gleichungen für die fünf homogen auftretenden Unbekannten a, b, c, d, e; sie haben bekanntlich mindestens eine Lösung, bei der nicht alle Werte der Unbekannten gleich Null sind; diese wird, wenn diese Determinanten nicht sämtlich Null sind, durch

$$\begin{vmatrix} b_0 & c_0 & d_0 & e_0 \\ b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & d_0 & e_0 & a_0 \\ c_1 & d_1 & e_1 & a_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & a_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_0 & e_0 & a_0 & b_0 \\ d_1 & e_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & e_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & e_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} e_0 & a_0 & b_0 & c_0 \\ e_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad \ldots (90)$$

gegeben. Da die Relation, wie aus Nr. 13 hervorgeht, im allgemeinen bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt ist, so läßt sich bereits schließen, daß sich die Größen

$$(\alpha\beta\gamma\delta) \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad \ldots (91)$$

nur um einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden werden. Aus dem speziellen Falle $1, \iota_1, \iota_2, \iota_3$ ergibt sich als Wert dieses Proportionalfaktors -1.

Dies läßt sich nun auch durch Rechnung nachweisen.

15. Man geht am zweckmäßigsten von der Gleichung (54) aus.

Es ist

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) = {} & (-a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_2 b_3 + a_3 b_2)\iota_1 + \\ & + (-a_0 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_0 - a_3 b_1)\iota_2 + \\ & + (-a_0 b_3 - a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)\iota_3 \end{aligned} \quad \ldots (92)$$

u. s. w. Wendet man die Formel (7) an, so erhält man

$$N(\alpha)(\alpha\beta\gamma\delta) =$$

$$\begin{vmatrix} -a_0 b_1 + a_1 b_0 & -a_0 b_2 + a_1 b_3 & -a_0 b_3 - a_1 b_2 \\ \quad -a_2 b_3 + a_3 b_2 & \quad + a_2 b_0 - a_3 b_1 & \quad + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\ -a_0 c_1 + a_1 c_0 & -a_0 c_2 + a_1 c_3 & -a_0 c_3 - a_1 c_2 \\ \quad -a_2 c_3 + a_3 c_2 & \quad + a_2 c_0 - a_3 c_1 & \quad + a_2 c_1 + a_3 c_0 \\ -a_0 d_1 + a_1 d_0 & -a_0 d_2 + a_1 d_3 & -a_0 d_3 - a_1 d_2 \\ \quad -a_2 d_3 + a_3 d_2 & \quad + a_2 d_0 - a_3 d_1 & \quad + a_2 d_1 + a_3 d_0 \end{vmatrix} \quad \ldots (93)$$

Diese Determinante zerfällt in $4^3 = 64$ Determinanten, von denen 40 verschwinden, weil sie proportionale Spalten haben; es ergibt sich

$$N(\alpha)(\alpha\beta\gamma\delta) =$$

$$= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \left[-a_0 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - a_2 \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} \right] -$$

$$- a_0 a_1 a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_3 & c_0 \\ d_1 & d_3 & d_0 \end{vmatrix} + a_0 a_1 a_3 \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_3 \end{vmatrix} + \quad \ldots (94)$$

$$+ a_0 a_1 a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & b_2 \\ c_1 & c_0 & c_2 \\ d_1 & d_0 & d_2 \end{vmatrix} - a_0 a_1 a_2 \begin{vmatrix} b_0 & b_2 & b_1 \\ c_0 & c_2 & c_1 \\ d_0 & d_2 & d_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_0 a_2 a_3 \begin{vmatrix} b_3 & b_2 & b_0 \\ c_3 & c_2 & c_0 \\ d_3 & d_2 & d_0 \end{vmatrix} - a_0 a_2 a_3 \begin{vmatrix} b_2 & b_0 & b_3 \\ c_2 & c_0 & c_3 \\ d_2 & d_0 & d_3 \end{vmatrix} -$$

$$- a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ d_3 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} + a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_1 \\ d_2 & d_3 & d_1 \end{vmatrix}.$$

Die letzten acht Summanden heben einander paarweise auf und man erhält, wenn man den Faktor

$$N(\alpha) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad \ldots (95)$$

wegläßt, das gesuchte Resultat

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = -\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}. \qquad \ldots (96)$$

16. Ein Produkt, welches eine unbekannte Größe ξ linear enthält, hat folgende allgemeine Gestalt:

$$\alpha\xi\beta. \qquad \ldots (97)$$

Eine linearhomogene Funktion von ξ wird daher die Form

$$f(\xi) = \Sigma\,\alpha\xi\beta \qquad \ldots (98)$$

und eine lineare Gleichung für ξ die Form

$$\Sigma\,\alpha\xi\beta = \omega \qquad \ldots (99)$$

haben.

Es läßt sich jedoch zeigen, daß die allgemeinste linearhomogene Funktion von ξ,

$$f(\xi) = \Sigma\,\alpha\xi\beta, \qquad \ldots (100)$$

nicht mehr als vier Glieder zu enthalten braucht und daß man in der viergliedrigen Form überdies nach Belieben entweder die vier linken oder die vier rechten Koeffizienten willkürlich vorschreiben kann (mit der einzigen Beschränkung, daß dieselben jedesmal ein Quadrupel von linear unabhängigen Quaternionen bilden müssen). Denn sollen etwa die linear unabhängigen Quaternionen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die linken Koeffizienten werden, so zerlege man alle Zahlen α nach diesen vier Quaternionen:

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 \qquad \ldots (101)$$

und es wird

$$f(\xi) = \Sigma\,(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4)\xi\beta =$$
$$= \alpha_1\xi\,\Sigma\,k_1\beta + \alpha_2\xi\,\Sigma\,k_2\beta + \alpha_3\xi\,\Sigma\,k_3\beta + \alpha_4\xi\,\Sigma\,k_4\beta, \qquad \ldots (102)$$

also wenn

$$\begin{aligned} \Sigma k_1 \beta &= \beta_1, \\ \Sigma k_2 \beta &= \beta_2, \\ \Sigma k_3 \beta &= \beta_3, \\ \Sigma k_4 \beta &= \beta_4 \end{aligned} \qquad \ldots (103)$$

gesetzt wird,

$$f(\xi) = \alpha_1 \xi \beta_1 + \alpha_2 \xi \beta_2 + \alpha_3 \xi \beta_3 + \alpha_4 \xi \beta_4. \qquad \ldots (104)$$

Genau ebenso wäre die zweite Hälfte des Satzes zu beweisen.

Es genügt also die Auflösung einer linearen Gleichung mit vier Gliedern auf der linken Seite. Naturgemäß spielen hiebei die Fälle von linearen Gleichungen mit einem, zwei oder drei Gliedern auf der linken Seite die Rolle von leichter zu erledigenden Spezialfällen.

17. Der Fall der Gleichung mit einem Gliede links,

$$\alpha \xi \beta = \omega, \qquad \ldots (105)$$

bietet keine Schwierigkeiten. Durch Multiplikation mit $\dot{\alpha}$ links, mit $\dot{\beta}$ rechts ergibt sich sofort

$$N(\alpha) \xi N(\beta) = \dot{\alpha} \omega \dot{\beta}, \qquad \ldots (106)$$

$$\xi = \frac{\dot{\alpha} \omega \dot{\beta}}{N(\alpha) N(\beta)}. \qquad \ldots (107)$$

18. Die Gleichung mit zwei Gliedern links,

$$\alpha_1 \xi \beta_1 + \alpha_2 \xi \beta_2 = \omega, \qquad \ldots (108)$$

hat Hamilton, wie schon in Nr. 1 erwähnt, gelöst.

Sein Verfahren bezieht sich auf die vereinfachte Gleichung

$$\alpha_1 \xi + \xi \beta_2 = \omega, \qquad \ldots (109)$$

die man aus (108) jederzeit herleiten kann, läßt sich aber in folgender Weise für die allgemeine Form (108) brauchbar machen. Man führe folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1) &= A_1, & N(\beta_1) &= B_1, \\ N(\alpha_2) &= A_2, & N(\beta_3) &= B_2 \end{aligned} \qquad \ldots (110)$$

und

$$\dot{\alpha}_1 \omega \mathring{\beta}_1 + \dot{\alpha}_2 \omega \mathring{\beta}_2 = \Omega \qquad \ldots (111)$$

und multipliziere nun (108) mit folgenden Paaren von linken und rechten Faktoren:

$$B_1 \dot{\alpha}_1 \text{ und } 1, \qquad \ldots (112)$$

$$\dot{\alpha}_2 \text{ und } \mathring{\beta}_1 \beta_2; \qquad \ldots (113)$$

dies ergibt

$$B_1 A_1 \xi \beta_1 + B_1 \dot{\alpha}_1 \alpha_2 \xi \beta_2 = B_1 \dot{\alpha}_1 \omega, \qquad \ldots (114)$$

$$\dot{\alpha}_2 \alpha_1 \xi B_1 \beta_2 + A_2 \xi \beta_2 \mathring{\beta}_1 \beta_2 = \dot{\alpha}_2 \omega \mathring{\beta}_1 \beta_2; \qquad \ldots (115)$$

addiert man diese beiden Resultate, so erhält man, da A_1, A_2, B_1 und $\dot{\alpha}_1 \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \alpha_1$ als reelle Faktoren mit ξ vertauscht werden dürfen, die eingliedrige Gleichung

$$\xi [B_1 A_1 \beta_1 + B_1 (\dot{\alpha}_1 \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \alpha_1) \beta_2 + A_2 \beta_2 \mathring{\beta}_1 \beta_2] =$$
$$= B_1 \dot{\alpha}_1 \omega + \dot{\alpha}_2 \omega \mathring{\beta}_1 \beta_2. \qquad \ldots (116)$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt als Endresultat für ξ einen Bruch $\frac{\Xi}{N}$, wo

$$\Xi = \dot{\alpha}_1 \alpha_2 \Omega \beta_1 \mathring{\beta}_2 + \dot{\alpha}_2 \alpha_1 \Omega \beta_2 \mathring{\beta}_1 + (A_1 B_1 + A_2 B_2) \Omega \qquad \ldots (117)$$

und

$$N = (A_1 B_1 + A_2 B_2)^2 + (A_1 B_1 + A_2 B_2)(\dot{\alpha}_1 \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \alpha_1)(\beta_1 \mathring{\beta}_2 + \beta_2 \mathring{\beta}_1) +$$
$$+ (\dot{\alpha}_1 \alpha_2 \dot{\alpha}_1 \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \alpha_1 \dot{\alpha}_2 \alpha_1) B_1 B_2 + A_1 A_2 (\beta_1 \mathring{\beta}_2 \beta_1 \mathring{\beta}_2 + \beta_2 \mathring{\beta}_1 \beta_2 \mathring{\beta}_1) \ldots (118)$$

ist.

19. Es sei nun eine Gleichung mit drei Gliedern gegeben:

$$\alpha_1 \xi \beta_1 + \alpha_2 \xi \beta_2 + \alpha_3 \xi \beta_3 = \omega \qquad \ldots (119)$$

und es werde wieder zur Abkürzung

$$\begin{aligned} N(\alpha_1) &= A_1, & N(\beta_1) &= B_1, \\ N(\alpha_2) &= A_2, & N(\beta_2) &= B_2, \\ N(\alpha_3) &= A_3, & N(\beta_3) &= B_3, \end{aligned} \qquad \ldots (120)$$

$$\dot{\alpha}_1 \omega \mathring{\beta}_1 + \dot{\alpha}_2 \omega \mathring{\beta}_2 + \dot{\alpha}_3 \omega \mathring{\beta}_3 = \Omega \qquad \ldots (121)$$

gesetzt. Hier führt das im vorigen Falle angewendete Verfahren nicht mehr ohneweiters zum Ziel, dagegen gelingt es, durch

eine Umformung das Resultat auf den Fall der zweigliedrigen Gleichung zurückzuführen.

Wenden wir zunächst das erwähnte Verfahren sinngemäß auf die Gleichung (119) an, so haben wir folgende Multiplikatorenpaare zu wählen:

$$B_1\dot{\alpha}_1 \text{ und } 1, \qquad \ldots(122)$$

$$\dot{\alpha}_2 \text{ und } \mathring{\beta}_1\beta_2, \qquad \ldots(123)$$

$$\dot{\alpha}_3 \text{ und } \mathring{\beta}_1\beta_3 \qquad \ldots(124)$$

und bekommen folgendes Resultat:

$$B_1A_1\xi\beta_1+B_1\dot{\alpha}_1\alpha_2\xi\beta_2+B_1\dot{\alpha}_1\alpha_3\xi\beta_3 = B_1\dot{\alpha}_1\omega, \qquad \ldots(125)$$

$$\dot{\alpha}_2\alpha_1\xi B_1\beta_2+A_2\xi\beta_2\mathring{\beta}_1\beta_2+\dot{\alpha}_2\alpha_3\xi\beta_3\mathring{\beta}_1\beta_2 = \dot{\alpha}_2\omega\mathring{\beta}_1\beta_2, \qquad \ldots(126)$$

$$\dot{\alpha}_3\alpha_1\xi B_1\beta_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2\xi\beta_2\mathring{\beta}_1\beta_3+A_3\xi\beta_3\mathring{\beta}_1\beta_3 = \dot{\alpha}_3\omega\mathring{\beta}_1\beta_3, \qquad \ldots(127)$$

daraus durch Addition

$$\begin{aligned}\xi[B_1A_1\beta_1+(\dot{\alpha}_1\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1)B_1\beta_2+(\dot{\alpha}_1\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1)B_1\beta_3+A_2\beta_2\mathring{\beta}_1\beta_2+\\ +A_3\beta_3\mathring{\beta}_1\beta_3]+\dot{\alpha}_2\alpha_3\xi\beta_3\mathring{\beta}_1\beta_2+\dot{\alpha}_3\alpha_2\xi\beta_2\mathring{\beta}_1\beta_3 =\\ = B_1\dot{\alpha}_1\omega+\dot{\alpha}_2\omega\mathring{\beta}_1\beta_2+\dot{\alpha}_3\omega\mathring{\beta}_1\beta_3. \qquad \ldots(128)\end{aligned}$$

Dies ist zwar wieder eine dreigliedrige Gleichung, in welcher aber die linken Koeffizienten 1, $\dot{\alpha}_2\alpha_3$ und $\dot{\alpha}_3\alpha_2$ linear abhängig sind, und dieser Umstand gestattet uns, die Gleichung auf eine solche mit zwei Gliedern zurückzuführen, indem wir Gebrauch von folgender Identität machen:

$$\begin{aligned}\varkappa\xi\lambda+\dot{\varkappa}\xi\mu &= \frac{1}{2}(\varkappa+\dot{\varkappa})\xi(\lambda+\mu)+\frac{1}{2}(\varkappa+\dot{\varkappa})\xi(\lambda-\mu) =\\ &= \xi\cdot\frac{1}{2}(\varkappa+\dot{\varkappa})(\lambda+\mu)+\frac{1}{2}(\varkappa-\dot{\varkappa})\xi(\lambda-\mu); \qquad \ldots(129)\end{aligned}$$

setzen wir hierin

$$\varkappa = \dot{\alpha}_2\alpha_3, \qquad \ldots(130)$$

$$\lambda = \beta_3\mathring{\beta}_1\beta_2, \qquad \ldots(131)$$

$$\mu = \beta_2\mathring{\beta}_1\beta_3, \qquad \ldots(132)$$

so hat eines der beiden so entstehenden Glieder den linken Koeffizienten 1 und kann mit dem ersten Gliede in (128)

vereinigt werden, so daß wir folgende zweigliedrige Gleichung erhalten:

$$\begin{aligned}\xi[B_1 A_1 \beta_1 + (\dot\alpha_1 \alpha_2 + \dot\alpha_2 \alpha_1) B_1 \beta_2 + (\dot\alpha_1 \alpha_3 + \dot\alpha_3 \alpha_1) B_1 \beta_3 + \\ + A_2 \beta_2 \mathring\beta_1 \beta_2 + A_3 \beta_3 \mathring\beta_1 \beta_3 + \\ + \frac{1}{2}(\dot\alpha_2 \alpha_3 + \dot\alpha_3 \alpha_2)(\beta_3 \mathring\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \mathring\beta_1 \beta_3)] + \\ + 2(\dot\alpha_2 \dot\alpha_3)\xi(\beta_3 \beta_1 \beta_2) = B_1 \dot\alpha_1 \omega + \dot\alpha_2 \omega \mathring\beta_1 \beta_2 + \dot\alpha_3 \omega \mathring\beta_1 \beta_3.\end{aligned} \quad \ldots(133)$$

Diese Gleichung kann nun nach der vorhin angegebenen Methode aufgelöst werden. Im Interesse einer übersichtlicheren Rechnung sollen dabei die Rollen der linken und der rechten Koeffizienten vertauscht werden. Als Multiplikatorenpaare sind daher zu wählen:

$$\begin{aligned}1 \text{ und } B_1 A_1 \mathring\beta_1 + (\dot\alpha_1 \alpha_2 + \dot\alpha_2 \alpha_1) B_1 \mathring\beta_2 + (\dot\alpha_1 \alpha_3 + \dot\alpha_3 \alpha_1) B_1 \mathring\beta_3 + \\ + A_2 \beta_2 \mathring\beta_1 \beta_2 + A_3 \beta_3 \mathring\beta_1 \beta_3 + \\ + \frac{1}{2}(\dot\alpha_2 \alpha_3 + \dot\alpha_3 \alpha_2)(\beta_2 \mathring\beta_1 \beta_3 + \beta_3 \mathring\beta_1 \beta_2),\end{aligned} \quad \ldots(134)$$

$$2(\dot\alpha_2 \dot\alpha_3) \quad \text{und} \quad (\mathring\beta_2 \mathring\beta_1 \mathring\beta_3). \quad \ldots(135)$$

20. Um die Rechnung tatsächlich durchzuführen, empfiehlt es sich, einige Abkürzungen einzuführen:

$$B_1 \dot\alpha_1 \omega + \dot\alpha_2 \omega \mathring\beta_1 \beta_2 + \dot\alpha_3 \omega \mathring\beta_1 \beta_3 = \varphi(\omega), \quad \ldots(136)$$

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \eta, \quad \ldots(137)$$

$$2(\beta_3 \beta_1 \beta_2) = \sigma, \quad \ldots(138)$$

$$(\dot\alpha_2 \dot\alpha_3) = \vartheta; \quad \ldots(139)$$

dann wird die Gleichung

$$\xi[\varphi(\eta) - \vartheta \cdot \sigma] + \vartheta \xi \sigma = \varphi(\omega), \quad \ldots(140)$$

und die Multiplikatorenpaare werden

$$1 \text{ und } (\varphi(\eta))^{\cdot} + \dot\sigma \vartheta, \quad \ldots(141)$$

$$\vartheta \text{ und } \dot\sigma. \quad \ldots(142)$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}\xi[N(\varphi(\eta)) + \varphi(\eta)\dot\sigma\vartheta - \vartheta\sigma(\varphi(\eta))^{\cdot} - \vartheta^2 N(\sigma)] + \\ + \vartheta\xi[\sigma(\varphi(\eta))^{\cdot} + N(\sigma)\vartheta] = \varphi(\omega)(\varphi(\eta))^{\cdot} + \varphi(\omega)\dot\sigma\vartheta,\end{aligned} \quad \ldots(143)$$

$$\vartheta\xi[\varphi(\eta)\dot\sigma - N(\sigma)\vartheta] + \vartheta^2 \xi N(\sigma) = \vartheta\varphi(\omega)\cdot\dot\sigma, \quad \ldots(144)$$

also

$$[N(\varphi(\eta))+\varphi(\eta)\dot{\sigma}\vartheta-\vartheta\sigma(\varphi(\eta))^{\cdot}-\vartheta^2 N(\sigma)+\vartheta[\sigma(\varphi(\eta))^{\cdot}+\varphi(\eta)\dot{\sigma}]+$$
$$+\vartheta^2 N(\sigma)]\xi=\varphi(\omega)(\varphi(\eta))^{\cdot}+\varphi(\omega)\dot{\sigma}\vartheta+\vartheta\varphi(\omega)\dot{\sigma} \quad \ldots(145)$$

oder

$$[N\varphi(\eta)+\varphi(\eta)\dot{\sigma}\vartheta+\vartheta\varphi(\eta)\dot{\sigma}]\xi=$$
$$=\varphi(\omega)(\varphi(\eta))^{\cdot}+\varphi(\omega)\dot{\sigma}\vartheta+\vartheta\varphi(\omega)\dot{\sigma}. \quad \ldots(146)$$

Wir beginnen mit der Ausrechnung bei der rechten Seite; nach den ersten Reduktionen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&A_1B_1\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_1+A_1B_1\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_1+A_1B_1\alpha_3\xi\dot{\beta}_1\beta_3\dot{\beta}_1+\\
&+B_1A_2\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_2+B_1A_2B_2\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_2+\\
&+B_1A_3\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_3\beta_1\dot{\beta}_3+B_1A_3B_3\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_3+\\
&+B_1A_2B_2\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_1+B_1B_2\dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_1+\\
&+B_1A_3B_3\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_1+B_1B_3\dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_1+\\
&+B_1^2\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_2+A_1B_1^2\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_2+\\
&+B_1^2\dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_3+A_1B_1^2\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_3+ \qquad \ldots(147)\\
&+B_1\dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_3+B_1\dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_3+\\
&+B_1\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_1\beta_3\dot{\beta}_2+B_1\dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_1\beta_3\dot{\beta}_2+\\
&+B_1\dot{\alpha}_3\alpha_2\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_3\beta_1\dot{\beta}_2+B_1\dot{\alpha}_2\alpha_3\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_3+\\
&+B_1B_2\dot{\alpha}_2\alpha_3\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_3+B_1B_3\dot{\alpha}_3\alpha_2\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_2+\\
&+B_1A_2\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_2\beta_3\dot{\beta}_2+B_1A_2B_2\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_3+\\
&+B_1A_3\dot{\alpha}_2B\dot{\beta}_3\dot{\beta}_2\beta_3+B_1A_3B_3\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_2.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält den Faktor B_1, der Rest läßt sich auf eine symmetrische Form bringen. Man kann ihn nämlich durch

$$\begin{aligned}
&(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)\Omega+\\
&\qquad+\dot{\alpha}_1\alpha_2\Omega\beta_1\dot{\beta}_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1\Omega\beta_2\dot{\beta}_1+\\
&\qquad+\dot{\alpha}_1\alpha_3\Omega\beta_1\dot{\beta}_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1\Omega\beta_3\dot{\beta}_1+ \qquad \ldots(148)\\
&\qquad+\dot{\alpha}_2\alpha_3\Omega\beta_2\dot{\beta}_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2\Omega\beta_3\dot{\beta}_2+\\
&\qquad-S(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\omega(\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3)
\end{aligned}$$

ersetzen. Der Koeffizient von ξ ergibt sich am einfachsten aus (147), wenn ω durch η ersetzt wird, als

$$
\begin{aligned}
&(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)^2+\\
&\quad+(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)[(\dot{\alpha}_1\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1)(\beta_1\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_1)+\\
&\qquad+(\dot{\alpha}_1\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1)(\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1)+(\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2)(\beta_2\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_2)]+\\
&\quad+A_1A_2(\beta_1\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_1)+(\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_1\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_2\alpha_1)B_1B_2+\\
&\quad+A_1A_3(\beta_1\dot{\beta}_3\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1\beta_3\dot{\beta}_1)+(\dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_1\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_3\alpha_1)B_1B_3+\\
&\quad+A_2A_3(\beta_2\dot{\beta}_3\beta_2\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_2\beta_3\dot{\beta}_2)+(\dot{\alpha}_2\alpha_3\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2\dot{\alpha}_3\alpha_2)B_2B_3+\\
&\quad+A_1(\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2)(\beta_1\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_1)+\\
&\qquad\qquad+(\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_1\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_2\alpha_1)B_1(\beta_2\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_2)+\\
&\quad+A_2(\dot{\alpha}_1\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1)(\beta_2\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_2)+\\
&\qquad\qquad+(\dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2)B_2(\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1)+\\
&\quad+A_3(\dot{\alpha}_1\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1)(\beta_3\dot{\beta}_1\beta_3\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_3\beta_1\dot{\beta}_3)+\\
&\qquad\qquad+(\dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_3\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_3\dot{\alpha}_1\alpha_3)B_3(\beta_2\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_2)+ \qquad \ldots(149)
\end{aligned}
$$

Da er schon reell ist, so ist die Lösung hiemit geliefert.

21. Wir gehen nun zur viergliederigen Gleichung

$$\alpha_1\xi\beta_1+\alpha_2\xi\beta_2+\alpha_3\xi\beta_3+\alpha_4\xi\beta_4=\omega \qquad \ldots(150)$$

über. Wieder sei

$$
\begin{aligned}
N(\alpha_1)&=A_1, & N(\beta_1)&=B_1,\\
N(\alpha_2)&=A_2, & N(\beta_2)&=B_2,\\
N(\alpha_3)&=A_3, & N(\beta_3)&=B_3,\\
N(\alpha_4)&=A_4, & N(\beta_4)&=B_4,
\end{aligned}
\qquad \ldots(151)
$$

$$\dot{\alpha}_1\omega\dot{\beta}_1+\dot{\alpha}_2\omega\dot{\beta}_2+\dot{\alpha}_3\omega\dot{\beta}_3+\dot{\alpha}_4\omega\dot{\beta}_4=\Omega.$$

Für die Durchführung der Rechnung erweist es sich als zweckmäßig, die Gleichung auf eine Form zu bringen, in welcher unter den Koeffizienten auf einer Seite, etwa der rechten, ein Skalar und drei Vektoren vorkommen. Dies geschieht, indem man rechts mit $\dot{\beta}_1$ multipliziert und die Zerlegungen

$$
\begin{aligned}
\beta_2\dot{\beta}_1&=\frac{1}{2}(\beta_2\dot{\beta}_1+\beta_1\dot{\beta}_2)+(\beta_2\beta_1),\\
\beta_3\dot{\beta}_1&=\frac{1}{2}(\beta_3\dot{\beta}_1+\beta_1\dot{\beta}_3)+(\beta_3\beta_1), \qquad \ldots(152)\\
\beta_4\dot{\beta}_1&=\frac{1}{2}(\beta_4\dot{\beta}_1+\beta_1\dot{\beta}_4)+(\beta_4\beta_1)
\end{aligned}
$$

benützt; setzt man noch

$$\alpha_1 B_1 + \frac{1}{2}\alpha_2(\beta_2\mathring{\beta}_1 + \beta_1\mathring{\beta}_2) + \frac{1}{2}\alpha_3(\beta_3\mathring{\beta}_1 + \beta_1\mathring{\beta}_3) + $$
$$+ \frac{1}{2}\alpha_4(\beta_4\mathring{\beta}_1 + \mathring{\beta}_1\beta_4) = \alpha'_1,$$

$$\begin{aligned} (\beta_2\beta_1) &= \vartheta_2, \\ (\beta_3\beta_1) &= \vartheta_3, \\ (\beta_4\beta_1) &= \vartheta_3, \\ \omega\mathring{\beta} &= \omega', \end{aligned} \qquad \ldots (153)$$

so ergibt sich als neue Gleichung

$$\alpha'_1\xi + \alpha_2\xi\vartheta_2 + \alpha_3\xi\vartheta_3 + \alpha_4\xi\vartheta_4 = \omega'. \qquad \ldots (154)$$

Wir führen noch die Abkürzungen

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1) &= A'_1, \\ \dot{\alpha}'_1\omega' - \dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2 - \dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3 - \dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4 &= \Omega' \end{aligned} \qquad (155)$$

ein.

22. Behandelt man nun diese Gleichung so, wie vorhin die dreigliedrige, so sind als Multiplikatorenpaare die folgenden zu verwenden:

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha}'_1 \text{ und } 1, \\ &\dot{\alpha}_2 \text{ und } \vartheta_2, \\ &\dot{\alpha}_3 \text{ und } \vartheta_3, \\ &\dot{\alpha}_4 \text{ und } \vartheta_4. \end{aligned} \qquad \ldots (156)$$

Man erhält

$$A'_1\xi + \dot{\alpha}'_1\alpha_2\xi\vartheta_2 + \dot{\alpha}'_1\alpha_3\xi\vartheta_3 + \dot{\alpha}'_1\alpha_4\xi\vartheta_4 = \dot{\alpha}'_1\omega', \qquad \ldots (157)$$

$$\dot{\alpha}_2\alpha'_1\xi\vartheta_2 + A_2\xi\vartheta_2^2 + \dot{\alpha}_2\alpha_3\xi\vartheta_3\vartheta_2 + \dot{\alpha}_2\alpha_4\xi\vartheta_4\vartheta_2 = \dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2, \qquad \ldots (158)$$

$$\dot{\alpha}_3\alpha'_1\xi\vartheta_3 + \dot{\alpha}_3\alpha_2\xi\vartheta_2\vartheta_3 + A_3\xi\vartheta_3^2 + \dot{\alpha}_3\alpha_4\xi\vartheta_4\vartheta_3 = \dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3, \qquad \ldots (159)$$

$$\dot{\alpha}_4\alpha'_1\xi\vartheta_4 + \dot{\alpha}_4\alpha_2\xi\vartheta_2\vartheta_4 + \dot{\alpha}_4\alpha_3\xi\vartheta_3\vartheta_4 + A_4\xi\vartheta_4^2 = \dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4 \qquad \ldots (160)$$

und als Summe

$$\xi[A'_1 + A_2\vartheta_2^2 + A_3\vartheta_3^2 + A_4\vartheta_4^2 + (\dot{\alpha}'_1\alpha_2 + \dot{\alpha}_2\alpha'_1)\vartheta_2 + (\dot{\alpha}'_1\alpha_3 + \dot{\alpha}_3\alpha'_1)\vartheta_3 +$$
$$+ (\dot{\alpha}'_1\alpha_4 + \dot{\alpha}_4\alpha'_1)\vartheta_4] +$$

$$\begin{aligned} &+ \dot{\alpha}_2\alpha_3\xi\vartheta_3\vartheta_2 + \dot{\alpha}_3\alpha_2\xi\vartheta_3\vartheta_2 + \\ &+ \dot{\alpha}_2\alpha_4\xi\vartheta_4\vartheta_2 + \dot{\alpha}_4\alpha_2\xi\vartheta_2\vartheta_4 + \\ &+ \dot{\alpha}_3\alpha_4\xi\vartheta_4\vartheta_3 + \dot{\alpha}_4\alpha_3\xi\vartheta_3\vartheta_4 = \\ &= \dot{\alpha}'_1\omega' + \dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2 + \dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3 + \dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4. \end{aligned} \qquad \ldots (161)$$

Wendet man nun hier dieselbe Zerlegung wie im Falle der dreigliederigen Gleichung an:

$$\dot{\alpha}_2\alpha_3\xi\vartheta_3\vartheta_2+\dot{\alpha}_3\alpha_2\xi\vartheta_2\vartheta_3 =$$
$$= \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2)\xi(\vartheta_3\vartheta_2+\vartheta_2\vartheta_3)+2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\xi(\vartheta_2\vartheta_3),$$
$$\dot{\alpha}_2\alpha_4\xi\vartheta_4\vartheta_2+\dot{\alpha}_4\alpha_2\xi\vartheta_2\vartheta_4 =$$
$$= \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_2\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_2)\xi(\vartheta_4\vartheta_2+\vartheta_2\vartheta_4)+2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_2\vartheta_4), \quad \ldots(162)$$
$$\dot{\alpha}_3\alpha_4\xi\vartheta_4\vartheta_3+\dot{\alpha}_4\alpha_3\xi\vartheta_3\vartheta_4 =$$
$$= \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_3\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_3)\xi(\vartheta_4\vartheta_3+\vartheta_3\vartheta_4)+2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_3\vartheta_4)$$

(die einfachere Gestalt der zweiten Glieder rechts hat ihren Grund darin, daß ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 Vektoren sind) und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned}&A_1'+A_2\vartheta_2^2+A_3\vartheta_3^2+A_4\vartheta_4^2+\\&+(\dot{\alpha}_1'\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1')\vartheta_2+\\&+(\dot{\alpha}_1'\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1')\vartheta_3+\\&+(\dot{\alpha}_1'\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_1')\vartheta_4+\\&+\frac{1}{2}(\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2)(\vartheta_3\vartheta_2+\vartheta_2\vartheta_3)+\\&+\frac{1}{2}(\dot{\alpha}_2\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_2)(\vartheta_4\vartheta_2+\vartheta_2\vartheta_4)+\\&+\frac{1}{2}(\dot{\alpha}_3\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_3)(\vartheta_4\vartheta_3+\vartheta_3\vartheta_4)=\delta,\end{aligned} \quad \ldots(163)$$

so ergibt sich

$$\xi\delta+2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\xi(\vartheta_2\vartheta_3)+2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_2\vartheta_4)+2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_3\vartheta_4) =$$
$$= \dot{\alpha}_1'\omega'+\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2+\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3+\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4. \quad \ldots(164)$$

Diese Gleichung hat denselben Charakter wie die transformierte Gleichung (154), nur sind die Rollen der linken und der rechten Koeffizienten vertauscht. Wir wenden auf sie dasselbe Verfahren noch ein zweites Mal an, multiplizieren also mit folgenden Faktorenpaaren:

1 und $\mathring{\delta}$.

$$
\begin{array}{lll}
2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3) & \text{»} & -(\vartheta_2\vartheta_3), \\
2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4) & \text{»} & -(\vartheta_2\vartheta_4), \\
2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4) & \text{»} & -(\vartheta_3\vartheta_4);
\end{array}
\qquad \ldots (165)
$$

dies ergibt:

$$
\xi N(\delta)+2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\xi(\vartheta_2\vartheta_3)\mathring{\delta}+2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_2\vartheta_4)\mathring{\delta}+2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_3\vartheta_4)\mathring{\delta}=
$$
$$
=\dot{\alpha}_1'\omega'\mathring{\delta}+\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2\mathring{\delta}+\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3\mathring{\delta}+\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4\mathring{\delta}, \qquad \ldots (166)
$$

$$
-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\xi\delta(\vartheta_2\vartheta_3)-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)^2\xi(\vartheta_2\vartheta_3)^2-
$$
$$
-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_2\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_3)-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_3\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_3)=
$$
$$
=-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\dot{\alpha}_1'\omega'(\vartheta_2\vartheta_3)-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_3)-
$$
$$
-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_3)-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4(\vartheta_2\vartheta_3), \qquad \ldots (167)
$$

$$
-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\xi\delta(\vartheta_2\vartheta_4)-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\xi(\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_2\vartheta_4)-
$$
$$
-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)^2\xi(\vartheta_2\vartheta_4)^2-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_3\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_4)=
$$
$$
=-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_1'\omega'(\vartheta_2\vartheta_4)-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_4)-
$$
$$
-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_4)-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4(\vartheta_2\vartheta_4), \qquad \ldots (168)
$$

$$
-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\xi\delta(\vartheta_3\vartheta_4)-4(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\xi(\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_3\vartheta_4)-
$$
$$
-4(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_2\vartheta_4)(\vartheta_3\vartheta_4)-4(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)^2\xi(\vartheta_3\vartheta_4)^2=
$$
$$
=-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_1'\omega'(\vartheta_3\vartheta_4)-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2(\vartheta_3\vartheta_4)-
$$
$$
-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3(\vartheta_3\vartheta_4)-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4(\vartheta_3\vartheta_4). \qquad \ldots (169)
$$

Dies wird nun addiert; mit Hilfe der Zerlegungen

$$
-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_2\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_3)-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\xi(\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_2\vartheta_4)=
$$
$$
=-2[(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)+(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)]\xi[(\vartheta_2\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_3)+(\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_2\vartheta_4)]+
$$
$$
+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_2\xi\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4),
$$

$$
-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_3\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_3)-4(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\xi(\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_3\vartheta_4)=
$$
$$
=-2[(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)+(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)]\xi[(\vartheta_3\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_3)+(\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_3\vartheta_4)+
$$
$$
+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_3\xi\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4),
$$

$$
-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_3\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_4)-4(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\xi(\vartheta_2\vartheta_4)(\vartheta_3\vartheta_4)=
$$
$$
=-2[(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)+(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)]\xi[(\vartheta_3\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_4)+(\vartheta_2\vartheta_4)(\vartheta_3\vartheta_4)]+
$$
$$
+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_4\xi\vartheta_4(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4), \qquad \ldots (170)
$$

bei deren Aufstellung die Formel (52) benützt wurde, und der abkürzenden Bezeichnung

$$N(\delta)-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)^2(\vartheta_2\vartheta_3)^2-4(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)^2(\vartheta_2\vartheta_4)^2-4(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)^2(\vartheta_2\vartheta_4)^2+$$
$$+2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)[(\vartheta_2\vartheta_3)\mathring{\delta}-\delta(\vartheta_2\vartheta_3)]+2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)[(\vartheta_2\vartheta_4)\mathring{\delta}-\delta(\vartheta_3\vartheta_4)]+$$
$$+2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)[(\vartheta_3\vartheta_4)\mathring{\delta}-\delta(\vartheta_3\vartheta_4)]-$$
$$-2[(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)+(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)][(\vartheta_2\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_3)+(\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_2\vartheta_4)]-$$
$$-2[(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)+(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)][(\vartheta_3\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_3)+(\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_3\vartheta_4)]-$$
$$-2[(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)+(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)][(\vartheta_3\vartheta_4)(\vartheta_2\vartheta_4)+(\vartheta_2\vartheta_4)(\vartheta_3\vartheta_4)]=$$
$$=\gamma \qquad \ldots(171)$$

erhält man folgendes Resultat:

$$\gamma\xi+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_2\xi\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_3\xi\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)+$$
$$+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_4\xi\vartheta_4(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)=\ldots \qquad \ldots(172)$$

Multipliziert man nun die Gleichung (154) links mit $8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)$ und rechts mit $(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)$:

$$8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_1'\xi(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_2\xi\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)+$$
$$+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_3\xi\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)+8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_4\xi\vartheta_4(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)=$$
$$=8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\omega'(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4), \qquad \ldots(173)$$

subtrahiert diese Gleichung von dem oben erhaltenen Resultat und beachtet dabei, daß $(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)$ nach (7) reell ist, so erhält man eine Gleichung mit einem einzigen Glied:

$$[\gamma-8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\alpha_1'(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)]\xi=\dot{\alpha}_1'\omega'\mathring{\delta}+\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2\mathring{\delta}+\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3\mathring{\delta}+\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4\mathring{\delta}-$$
$$-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\dot{\alpha}_1'\omega'(\vartheta_2\vartheta_3)-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_3)-$$
$$-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_3)-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4(\vartheta_2\vartheta_3)-$$
$$-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_1'\omega'(\vartheta_2\vartheta_4)-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_4)-$$
$$-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_4)-2(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4(\vartheta_2\vartheta_4)-$$
$$-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_1'\omega'(\vartheta_3\vartheta_4)-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_2\omega'\vartheta_2(\vartheta_3\vartheta_4)-$$
$$-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_3\omega'\vartheta_3(\vartheta_3\vartheta_4)-2(\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\dot{\alpha}_4\omega'\vartheta_4(\vartheta_3\vartheta_4)-$$
$$-8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\omega'(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4). \qquad \ldots(174)$$

23. Bei der Ausrechnung beginnt man am besten mit der rechten Seite. Setzt man für δ seinen Wert ein, so ergibt sich nach einigen leichten Reduktionen

$$\begin{aligned}
&(A_1'-A_2\vartheta_2^2-A_3\vartheta_3^2-A_4\vartheta_4^2)\Omega'-\\
&-\dot{\alpha}_1'\alpha_2\Omega'\vartheta_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1'\Omega'\vartheta_2+\\
&-\dot{\alpha}_1'\alpha_3\Omega'\vartheta_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1'\Omega'\vartheta_3+\\
&-\dot{\alpha}_1'\alpha_4\Omega'\vartheta_4+\alpha_4\alpha_1'\Omega'\vartheta_4-\\
&-\dot{\alpha}_2\alpha_3\Omega'\vartheta_2\vartheta_3-\dot{\alpha}_3\alpha_2\Omega'\vartheta_3\vartheta_2-\\
&-\dot{\alpha}_2\alpha_4\Omega'\vartheta_2\vartheta_4-\dot{\alpha}_4\alpha_2\Omega'\vartheta_4\vartheta_2-\\
&-\dot{\alpha}_3\alpha_4\Omega'\vartheta_3\vartheta_4-\dot{\alpha}_4\alpha_3\Omega'\vartheta_4\vartheta_3-\\
&-8(\dot{\alpha}_1'\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\,\omega'(\vartheta_2\vartheta_3)-\\
&-8(\dot{\alpha}_1'\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\,\omega'(\vartheta_2\vartheta_4)-\\
&-8(\dot{\alpha}_1'\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\omega'(\vartheta_3\vartheta_4)-\\
&-8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\omega'(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4).
\end{aligned}\qquad\ldots(175)$$

Führt man nun für α_1', ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ω', Ω' ihre Werte aus (153) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
A_1' = B_1^2A_1 &+ \frac{1}{2}A_2B_1B_2+\frac{1}{2}A_3B_1B_3+\frac{1}{4}A_4B_1B_4+\\
&+\frac{1}{4}A_2(\beta_1\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_1)+\frac{1}{4}A_3(\beta_1\dot{\beta}_3\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1\beta_3\dot{\beta}_1)+\\
&+\frac{1}{4}A_4(\beta_1\dot{\beta}_4\beta_1\dot{\beta}_4+\beta_4\dot{\beta}_1\beta_4\dot{\beta}_1)+\\
&+\frac{1}{2}B_1(\dot{\alpha}_1\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1)(\beta_1\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_1)+\\
&+\frac{1}{2}B_1(\alpha_1\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1)(\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1)+\\
&+\frac{1}{2}B_1(\alpha_1\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_1)(\beta_1\dot{\beta}_4+\beta_4\dot{\beta}_1)+\\
&+\frac{1}{4}(\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2)(\beta_1\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_1)(\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1)+\\
&+\frac{1}{4}(\dot{\alpha}_2\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_2)(\beta_1\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_1)(\beta_1\dot{\beta}_4+\beta_4\dot{\beta}_1)+\\
&+\frac{1}{4}(\dot{\alpha}_3\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_3)(\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1)(\beta_1\dot{\beta}_4+\beta_4\dot{\beta}_1),
\end{aligned}\qquad\ldots(176)$$

$$\vartheta_2^2 = \frac{1}{2} B_1 B_2 - \frac{1}{4} (\beta_1 \mathring{\beta}_2 \beta_1 \mathring{\beta}_2 + \beta_2 \mathring{\beta}_1 \beta_2 \mathring{\beta}_1), \qquad \ldots (177)$$

$$\vartheta_3^2 = \frac{1}{2} B_1 B_3 - \frac{1}{4} (\beta_1 \mathring{\beta}_3 \beta_1 \mathring{\beta}_3 + \beta_3 \mathring{\beta}_1 \beta_3 \mathring{\beta}_1), \qquad \ldots (178)$$

$$\vartheta_4^2 = \frac{1}{2} B_1 B_4 - \frac{1}{4} (\beta_1 \mathring{\beta}_4 \beta_1 \mathring{\beta}_4 + \beta_4 \mathring{\beta}_1 \beta_4 \mathring{\beta}_1), \qquad \ldots (179)$$

$$\begin{aligned} A_1' - A_2 \vartheta_2^2 - A_3 \vartheta_3^2 - A_4 \vartheta_4^2 = {} & (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4) B_1 + \\ & + \frac{1}{2} B_1 (\mathring{\alpha}_1 \alpha_2 + \mathring{\alpha}_2 \alpha_1)(\beta_1 \mathring{\beta}_2 + \beta_2 \mathring{\beta}_1) + \\ & + \frac{1}{2} B_1 (\mathring{\alpha}_1 \alpha_3 + \mathring{\alpha}_3 \alpha_1)(\beta_1 \mathring{\beta}_3 + \beta_3 \mathring{\beta}_1) + \\ & + \frac{1}{2} B_1 (\mathring{\alpha}_1 \alpha_4 + \mathring{\alpha}_4 \alpha_1)(\beta_1 \mathring{\beta}_4 + \beta_4 \mathring{\beta}_1) + \qquad \ldots (180) \\ & + \frac{1}{4} (\mathring{\alpha}_2 \alpha_3 + \mathring{\alpha}_3 \alpha_2)(\beta_1 \mathring{\beta}_2 + \beta_2 \mathring{\beta}_1)(\beta_1 \mathring{\beta}_3 + \beta_3 \mathring{\beta}_1) + \\ & + \frac{1}{4} (\mathring{\alpha}_2 \alpha_4 + \mathring{\alpha}_4 \alpha_2)(\beta_1 \mathring{\beta}_2 + \beta_2 \mathring{\beta}_1)(\beta_1 \mathring{\beta}_4 + \beta_4 \mathring{\beta}_1) + \\ & + \frac{1}{4} (\mathring{\alpha}_3 \alpha_4 + \mathring{\alpha}_4 \alpha_3)(\beta_1 \mathring{\beta}_3 + \beta_3 \mathring{\beta}_1)(\beta_1 \mathring{\beta}_4 + \beta_4 \mathring{\beta}_1) + \end{aligned}$$

$$(\vartheta_2 \vartheta_3) = \beta_1 (\mathring{\beta}_1 \mathring{\beta}_2 \beta_3), \qquad \ldots (181)$$

$$(\vartheta_2 \vartheta_4) = \beta_1 (\mathring{\beta}_1 \mathring{\beta}_2 \beta_4), \qquad \ldots (182)$$

$$(\vartheta_3 \vartheta_4) = \beta_1 (\mathring{\beta}_1 \mathring{\beta}_3 \beta_4), \qquad \ldots (183)$$

$$(\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4) = -B_1 (\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4) \qquad \ldots (184)$$

und für die rechte Seite, wenn man von dem Faktor B_1 absieht,

$$\begin{aligned} & (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4) \Omega + \\ & + \mathring{\alpha}_1 \alpha_2 \Omega \beta_1 \mathring{\beta}_2 + \mathring{\alpha}_2 \alpha_1 \Omega \beta_2 \mathring{\beta}_1 + \\ & + \mathring{\alpha}_1 \alpha_3 \Omega \beta_1 \mathring{\beta}_3 + \mathring{\alpha}_3 \alpha_1 \Omega \beta_3 \mathring{\beta}_1 + \\ & + \mathring{\alpha}_1 \alpha_4 \Omega \beta_1 \mathring{\beta}_4 + \mathring{\alpha}_4 \alpha_1 \Omega \beta_4 \mathring{\beta}_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+\dot{\alpha}_2\alpha_3\Omega\beta_2\dot{\beta}_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2\Omega\beta_3\dot{\beta}_2+\\&+\dot{\alpha}_2\alpha_4\Omega\beta_2\dot{\beta}_4+\dot{\alpha}_4\alpha_2\Omega\beta_4\dot{\beta}_2+\\&+\dot{\alpha}_3\alpha_4\Omega\beta_3\dot{\beta}_4+\dot{\alpha}_4\alpha_3\Omega\beta_4\dot{\beta}_3+\\&-8(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\,\omega\,(\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3)-\\&-8(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\,\omega\,(\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_4)-\\&-8(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\omega\,(\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3\dot{\beta}_4)-\\&-8(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\omega\,(\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3\dot{\beta}_4).\end{aligned} \quad \ldots(185)$$

24. Die linke Seite läßt sich nun zwar ebenfalls ohne Schwierigkeit berechnen, man kann aber diese langwierige Rechnung durch folgende Erwägung umgehen. Setzt man in (150)

$$\xi = 1, \quad \ldots(186)$$

so wird

$$\omega = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4 \quad \ldots(187)$$

und man erhält daher den Koeffizienten von ξ aus der rechten Seite, indem man für ω den Ausdruck

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4 \quad \ldots(188)$$

einführt. Das Resultat enthält

$$\begin{aligned}&(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+A_4B_4)^2+\\&\quad+(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+A_4B_4)[(\dot{\alpha}_1\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1)(\beta_1\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_1)+\\&\qquad+(\dot{\alpha}_1\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1)(\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1)+(\dot{\alpha}_1\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_1)(\beta_1\dot{\beta}_4+\beta_4\dot{\beta}_1)+\\&\qquad+(\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2)(\beta_2\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_2)+(\dot{\alpha}_2\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_2)(\beta_2\dot{\beta}_4+\beta_4\dot{\beta}_2)+\\&\qquad+(\dot{\alpha}_3\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_3)(\beta_3\dot{\beta}_4+\beta_4\dot{\beta}_3)],\end{aligned} \quad \ldots(189)$$

ferner sechs Paar Glieder vom Typus

$$(\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_1\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_2\alpha_1)B_1B_2+A_1A_2(\beta_1\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_2+\beta_2\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_1), \quad \ldots(190)$$

zwölf Paar Glieder vom Typus

$$\begin{aligned}&A_1(\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2)(\beta_1\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_1)+\\&\qquad+(\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_1\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_2\alpha_1)B_1(\beta_2\dot{\beta}_3+\beta_3\dot{\beta}_2),\end{aligned} \quad \ldots(191)$$

dann

$$\begin{array}{llll}
\dot\alpha_1\alpha_2\dot\alpha_3\alpha_4\beta_4\dot\beta_3\beta_1\dot\beta_2 & +\dot\alpha_2\alpha_1\dot\alpha_3\alpha_4\beta_4\dot\beta_3\beta_2\dot\beta_1 & +\dot\alpha_3\alpha_1\dot\alpha_2\alpha_4\beta_4\dot\beta_2\beta_3\dot\beta_1 & +\dot\alpha_4\alpha_1\dot\alpha_2\alpha_3\beta_3\dot\beta_2\beta_4\dot\beta_1 \\
+\dot\alpha_1\alpha_2\dot\alpha_4\alpha_3\beta_3\dot\beta_4\beta_1\dot\beta_2 & +\dot\alpha_2\alpha_1\dot\alpha_4\alpha_3\beta_3\dot\beta_4\beta_2\dot\beta_1 & +\dot\alpha_3\alpha_1\dot\alpha_4\alpha_2\beta_2\dot\beta_4\beta_3\dot\beta_1 & +\dot\alpha_4\alpha_1\dot\alpha_3\alpha_2\beta_2\dot\beta_3\beta_4\dot\beta_1 \\
+\dot\alpha_1\alpha_3\dot\alpha_2\alpha_4\beta_4\dot\beta_2\beta_1\dot\beta_3 & +\dot\alpha_2\alpha_3\dot\alpha_1\alpha_4\beta_4\dot\beta_1\beta_2\dot\beta_3 & +\dot\alpha_3\alpha_2\dot\alpha_1\alpha_4\beta_4\dot\beta_1\beta_3\dot\beta_2 & +\dot\alpha_4\alpha_2\dot\alpha_1\alpha_3\beta_3\dot\beta_1\beta_4\dot\beta_2 \\
+\dot\alpha_1\alpha_3\dot\alpha_4\alpha_2\beta_2\dot\beta_4\beta_1\dot\beta_3 & +\dot\alpha_2\alpha_3\dot\alpha_4\alpha_1\beta_1\dot\beta_4\beta_2\dot\beta_3 & +\dot\alpha_3\alpha_2\dot\alpha_4\alpha_1\beta_1\dot\beta_4\beta_3\dot\beta_2 & +\dot\alpha_4\alpha_2\dot\alpha_3\alpha_1\beta_1\dot\beta_3\beta_4\dot\beta_2 \\
+\dot\alpha_1\alpha_4\dot\alpha_2\alpha_3\beta_3\dot\beta_2\beta_1\dot\beta_4 & +\dot\alpha_2\alpha_4\dot\alpha_1\alpha_3\beta_3\dot\beta_1\beta_2\dot\beta_4 & +\dot\alpha_3\alpha_4\dot\alpha_1\alpha_2\beta_2\dot\beta_1\beta_3\dot\beta_4 & +\dot\alpha_4\alpha_3\dot\alpha_1\alpha_2\beta_2\dot\beta_1\beta_4\dot\beta_3 \\
+\dot\alpha_1\alpha_4\dot\alpha_3\alpha_2\beta_2\dot\beta_3\beta_1\dot\beta_4 & +\dot\alpha_2\alpha_4\dot\alpha_3\alpha_1\beta_1\dot\beta_3\beta_2\dot\beta_4 & +\dot\alpha_3\alpha_4\dot\alpha_2\alpha_1\beta_1\dot\beta_2\beta_3\dot\beta_4 & +\dot\alpha_4\alpha_3\dot\alpha_2\alpha_1\beta_1\dot\beta_2\beta_4\dot\beta_3
\end{array} \quad \ldots (192)$$

und schließlich

$$\begin{array}{l}
-8(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)\alpha_4\beta_4(\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3)- \\
-8(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_4)\alpha_3\beta_3(\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3)- \\
-8(\dot\alpha_1\dot\alpha_3\dot\alpha_4)\alpha_2\beta_2(\dot\beta_1\dot\beta_3\dot\beta_4)- \\
-8(\dot\alpha_2\dot\alpha_3\dot\alpha_4)\alpha_1\beta_1(\dot\beta_2\dot\beta_3\dot\beta_4).
\end{array} \quad \ldots (193)$$

Dieser Koeffizient ist bereits reell, wie wir erkennen, wenn wir die beiden letzten Komplexe noch einer Umformung unterwerfen. Wir wenden auf den letzten die Identität

$$\varkappa_1\lambda_1+\varkappa_2\lambda_2+\varkappa_3\lambda_3+\varkappa_4\lambda_4=\frac{1}{4}(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+\varkappa_4)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+\frac{1}{4}(\varkappa_1+\varkappa_2-\varkappa_3-\varkappa_4)(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4)+$$

$$+\frac{1}{4}(\varkappa_1-\varkappa_2+\varkappa_3-\varkappa_4)(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)+\frac{1}{4}(\varkappa_1-\varkappa_2-\varkappa_3+\varkappa_4)(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4) \quad \ldots (194)$$

an, indem wir (den Faktor 8 einstweilen beiseite lassend)

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= (\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\,\alpha_4, & \lambda_1 &= \beta_4(\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3), \\ \varkappa_2 &= -(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\,\alpha_3, & \lambda_2 &= -\beta_3(\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_4), \\ \varkappa_3 &= (\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\alpha_2, & \lambda_3 &= \beta_2(\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3\dot{\beta}_4), \\ \varkappa_4 &= -(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\alpha_1, & \lambda_4 &= -\beta_1(\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3\dot{\beta}_4) \end{aligned} \qquad \ldots(195)$$

setzen; es ist dann

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+\varkappa_4 = -4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4), \qquad \ldots(196)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1+\varkappa_2-\varkappa_3-\varkappa_4 &= \dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_3\alpha_4-\dot{\alpha}_3\alpha_4\dot{\alpha}_1\alpha_2 = \dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_4\alpha_3-\dot{\alpha}_4\alpha_3\dot{\alpha}_2\alpha_1 = \\ &= \dot{\alpha}_4\alpha_3\dot{\alpha}_1\alpha_2-\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_4\alpha_3 = \dot{\alpha}_3\alpha_4\dot{\alpha}_2\alpha_1-\dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_3\alpha_4, \end{aligned} \qquad \ldots(197)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1-\varkappa_2+\varkappa_3-\varkappa_4 &= \dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_4\alpha_2-\dot{\alpha}_4\alpha_2\dot{\alpha}_1\alpha_3 = \dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_2\alpha_4-\dot{\alpha}_2\alpha_4\dot{\alpha}_3\alpha_1 = \\ &= \dot{\alpha}_2\alpha_4\dot{\alpha}_1\alpha_3-\dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_2\alpha_4 = \dot{\alpha}_4\alpha_2\dot{\alpha}_3\alpha_1-\dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_4\alpha_2, \end{aligned} \qquad \ldots(198)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1-\varkappa_2-\varkappa_3+\varkappa_4 &= \dot{\alpha}_1\alpha_4\dot{\alpha}_2\alpha_3-\dot{\alpha}_2\alpha_3\dot{\alpha}_1\alpha_4 = \dot{\alpha}_4\alpha_1\dot{\alpha}_3\alpha_2-\dot{\alpha}_3\alpha_2\dot{\alpha}_4\alpha_1 = \\ &= \dot{\alpha}_3\alpha_2\dot{\alpha}_1\alpha_4-\dot{\alpha}_1\alpha_4\dot{\alpha}_3\alpha_2 = \dot{\alpha}_2\alpha_3\dot{\alpha}_4\alpha_1-\dot{\alpha}_4\alpha_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3; \end{aligned} \qquad \ldots(199)$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = -4(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4), \qquad \ldots(200)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4 &= \beta_1\dot{\beta}_2\beta_4\dot{\beta}_3-\beta_4\dot{\beta}_3\beta_1\dot{\beta}_2 = \beta_2\dot{\beta}_1\beta_3\dot{\beta}_4-\beta_3\dot{\beta}_4\beta_2\dot{\beta}_1 = \\ &= \beta_3\dot{\beta}_4\beta_1\dot{\beta}_2-\beta_1\dot{\beta}_2\beta_3\dot{\beta}_4 = \beta_4\dot{\beta}_3\beta_2\dot{\beta}_1-\beta_2\dot{\beta}_1\beta_4\dot{\beta}_3, \end{aligned} \qquad \ldots(201)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 &= \beta_1\dot{\beta}_3\beta_2\dot{\beta}_4-\beta_2\dot{\beta}_4\beta_1\dot{\beta}_3 = \beta_3\dot{\beta}_1\beta_4\dot{\beta}_2-\beta_4\dot{\beta}_2\beta_3\dot{\beta}_1 = \\ &= \beta_4\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_3-\beta_1\dot{\beta}_3\beta_4\dot{\beta}_2 = \beta_2\dot{\beta}_4\beta_3\dot{\beta}_1-\beta_3\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_4, \end{aligned} \qquad \ldots(202)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4 &= \beta_1\dot{\beta}_4\beta_3\dot{\beta}_2-\beta_3\dot{\beta}_2\beta_1\dot{\beta}_4 = \beta_4\dot{\beta}_1\beta_2\dot{\beta}_3-\beta_2\dot{\beta}_3\beta_4\dot{\beta}_1 = \\ &= \beta_2\dot{\beta}_3\beta_1\dot{\beta}_4-\beta_1\dot{\beta}_4\beta_2\dot{\beta}_3 = \beta_3\dot{\beta}_2\beta_4\dot{\beta}_1-\beta_4\dot{\beta}_1\beta_3\dot{\beta}_2. \end{aligned} \qquad \ldots(303)$$

Die Formeln (196) und (200) folgen aus (18); von den übrigen möge etwa (197) verifiziert werden. Es ist

$$\begin{aligned} \varkappa_1+\varkappa_2-\varkappa_3-\varkappa_4 &= (\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\,\alpha_4-(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\,\alpha_3-(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\alpha_2+(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\alpha_1 = \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{\alpha}_3\alpha_1\dot{\alpha}_2\alpha_4+\frac{1}{2}\,\dot{\alpha}_4\alpha_2\dot{\alpha}_1\alpha_3+\frac{1}{2}\,\dot{\alpha}_4\alpha_3\dot{\alpha}_1\alpha_2+\frac{1}{2}\,\dot{\alpha}_3\alpha_4\dot{\alpha}_2\alpha_1- \\ &-\frac{1}{2}\,\dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_3\alpha_4-\frac{1}{2}\,\dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_4\alpha_3-\frac{1}{2}\,\dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_4\alpha_2-\frac{1}{2}\,\dot{\alpha}_2\alpha_4\dot{\alpha}_3\alpha_1 = \\ &= \frac{1}{2}\,(\dot{\alpha}_4\alpha_3\dot{\alpha}_2\alpha_1-\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_4\alpha_3)+\frac{1}{2}\,(\dot{\alpha}_3\alpha_4\dot{\alpha}_2\alpha_1-\dot{\alpha}_2\alpha_1\dot{\alpha}_3\alpha_4). \end{aligned} \qquad \ldots(204)$$

Hieraus ergeben sich die vier Formeln durch Anwendung der Formeln (38). Ähnlich wären die Gleichungen (198), (199), (200), (202), (203) zu bestätigen.

Führt man die Multiplikation zweckmäßig aus, so erhält man unter Berücksichtigung des Faktors 8 außer

$$-32\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4) \qquad \ldots(205)$$

24 Glieder, von denen 12 negativ und 12 Glieder aus dem Komplexe (222) entgegengesetzt gleich sind, während die andere Hälfte positiv ist und mit dem Reste dieses Komplexes

$$\begin{aligned}
&(\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_3\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_3\dot{\alpha}_2\alpha_1)(\beta_4\mathring{\beta}_3\beta_1\mathring{\beta}_2+\beta_2\mathring{\beta}_1\beta_3\mathring{\beta}_4)+\\
&+(\dot{\alpha}_1\alpha_2\dot{\alpha}_4\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_4\dot{\alpha}_2\alpha_1)(\beta_4\mathring{\beta}_3\beta_2\mathring{\beta}_1+\beta_1\mathring{\beta}_2\beta_3\mathring{\beta}_4)+\\
&+(\dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_2\alpha_4+\dot{\alpha}_4\alpha_3\dot{\alpha}_2\alpha_1)(\beta_2\mathring{\beta}_4\beta_3\mathring{\beta}_1+\beta_1\mathring{\beta}_3\beta_4\mathring{\beta}_2)+\\
&+(\dot{\alpha}_1\alpha_3\dot{\alpha}_4\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_4\dot{\alpha}_3\alpha_1)(\beta_4\mathring{\beta}_2\beta_3\mathring{\beta}_1+\beta_1\mathring{\beta}_3\beta_2\mathring{\beta}_4)+\\
&+(\dot{\alpha}_1\alpha_4\dot{\alpha}_2\alpha_3+\dot{\alpha}_3\alpha_2\dot{\alpha}_4\alpha_1)(\beta_2\mathring{\beta}_3\beta_4\mathring{\beta}_1+\beta_1\mathring{\beta}_4\beta_3\mathring{\beta}_2)+\\
&+(\dot{\alpha}_1\alpha_4\dot{\alpha}_3\alpha_2+\dot{\alpha}_2\alpha_3\dot{\alpha}_4\alpha_1)(\beta_3\mathring{\beta}_2\beta_4\mathring{\beta}_1+\beta_1\mathring{\beta}_4\beta_2\mathring{\beta}_3)
\end{aligned} \qquad \ldots(206)$$

ergibt.

Somit ist das Resultat folgendes: Die Lösung der Gleichung

$$\alpha_1\xi\beta_1+\alpha_2\xi\beta_2+\alpha_3\xi\beta_3+\alpha_4\xi\beta_4=\omega \qquad \ldots(207)$$

erscheint in der Form

$$\xi=\frac{\Xi}{N}, \qquad \ldots(208)$$

wo

$$\begin{aligned}
\Xi=\Sigma\dot{\alpha}_k\alpha_l\dot{\alpha}_m\,\omega\,\mathring{\beta}_m\beta_k\mathring{\beta}_l&-8\,(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3)\,\omega\,(\mathring{\beta}_1\mathring{\beta}_2\mathring{\beta}_3)-\\
&-8\,(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_4)\,\omega\,(\mathring{\beta}_1\mathring{\beta}_2\mathring{\beta}_4)-\\
&-8\,(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\omega\,(\mathring{\beta}_1\mathring{\beta}_3\mathring{\beta}_4)-\\
&-8\,(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4)\,\omega\,(\mathring{\beta}_2\mathring{\beta}_3\mathring{\beta}_4)
\end{aligned} \qquad \ldots(209)$$

und

$$\begin{aligned}
N=\;&(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+A_4B_4)^2+\\
&+(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+A_4B_4)\,\Sigma(\dot{\alpha}_k\alpha_l+\dot{\alpha}_l\alpha_k)(\beta_k\mathring{\beta}_l+\beta_k\mathring{\beta}_l)+\\
&+\Sigma A_kA_l(\beta_k\mathring{\beta}_l\beta_k\mathring{\beta}_l+\beta_l\mathring{\beta}_k\beta_l\mathring{\beta}_k)+\\
&\quad+\Sigma(\dot{\alpha}_k\alpha_l\dot{\alpha}_k\alpha_l+\dot{\alpha}_l\alpha_k\dot{\alpha}_l\alpha_k)B_kB_l+\\
&+\Sigma A_k(\alpha_l\alpha_m+\alpha_m\alpha_l)(\beta_k\mathring{\beta}_l\beta_k\mathring{\beta}_m+\beta_m\mathring{\beta}_k\beta_l\mathring{\beta}_k)+\\
&\quad+\Sigma(\dot{\alpha}_k\alpha_l\dot{\alpha}_k\alpha_m+\dot{\alpha}_m\alpha_k\dot{\alpha}_l\alpha_k)B_k(\beta_l\mathring{\beta}_m+\beta_m\mathring{\beta}_l)+\\
&+\Sigma(\dot{\alpha}_k\alpha_l\dot{\alpha}_m\alpha_n+\dot{\alpha}_n\alpha_m\dot{\alpha}_l\alpha_k)(\beta_n\mathring{\beta}_m\beta_k\mathring{\beta}_l+\beta_l\mathring{\beta}_k\beta_m\mathring{\beta}_n)-\\
&-32\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)
\end{aligned} \qquad \ldots(210)$$

ist. Hiebei haben k, l jedesmal die Variationen zweiter, k, l, m die Variationen dritter, k, l, m, n die Variationen vierter Klasse ohne Wiederholung zu durchlaufen, wobei jedoch von allen Anordnungen, welche durch zyklische Vertauschung ineinander übergehen können, nur je eine auszuwählen ist (so daß also im ersten Falle sechs, im zweiten zwölf, im dritten sechs Möglichkeiten bleiben).

25. Hat man eine numerisch gegebene Gleichung aufzulösen, so kann man sich ebenfalls des im Vorhergehenden dargelegten Weges bedienen. Es wird dabei je nach der Art der auftretenden Koeffizienten manchmal zweckmäßiger sein, die ganze Entwicklung an den speziellen Zahlen vorzunehmen, manchmal wieder, nach den Endformeln zu rechnen. In letzterem Falle braucht man das N nicht nach der Formel zu rechnen, man kann vielmehr

$$\xi = \frac{\Xi}{N} \qquad \ldots(211)$$

mit unbestimmtem N ansetzen, dies in die gegebene Gleichung einführen und daraus N bestimmen.

Es gibt jedoch noch andere Methoden der Auflösung, welche für die Berechnung der allgemeinen Formel wegen der immensen Rechnungen unbrauchbar sind, in speziellen Fällen aber oft mit Vorteil verwendet werden können.

26. Eine der nächstliegenden Methoden ist die, ξ in seiner Darstellung durch die vier Einheiten anzusetzen:

$$\xi = x_0 + x_1\iota_1 + x_2\iota_2 + x_3\iota_3. \qquad \ldots(212)$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung ein und vergleicht die Koeffizienten von $1, \iota_1, \iota_2, \iota_3$ links und rechts, so erhält man vier lineare Gleichungen für die vier Unbekannten x_0, x_1, x_2, x_3 (Tait, Treatise, p. 126, deutsche Ausgabe [Handbuch] p. 106).

27. Sind $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ vier linear unabhängige Quaternionen, so muß sich ξ auf jeden Fall linear durch sie darstellen lassen:

$$\xi = k\varkappa + l\lambda + m\mu + n\nu. \qquad \ldots(213)$$

Führt man dies in die Gleichung

$$f(\xi) = \omega \qquad \ldots(214)$$

ein, so erhält man, da k, l, m, n reelle Zahlen sind,

$$kf(\varkappa)+lf(\lambda)+mf(\mu)+nf(\nu)=\omega. \qquad \ldots(215)$$

Zerlegt man daher ω nach den vier Quaternionen $f(\varkappa), f(\lambda), f(\mu), f(\nu)$, so ergeben die vier Koeffizienten dieser Zerlegung sofort die Größen k, l, m, n und damit ξ. Für $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ wird man natürlich in den meisten Fällen $1, \iota_1, \iota_2, \iota_3$ oder andere einfache Quaternionen wählen.

28. Ist eine viergliedrige Gleichung

$$\alpha_1\xi\beta_1+\alpha_2\xi\beta_2+\alpha_3\xi\beta_3+\alpha_4\xi\beta_4=\omega \qquad \ldots(243)$$

gegeben, so multipliziere man auf einer Seite, etwa rechts, mit einer Quaternion δ:

$$\alpha_1\xi\beta_1\delta+\alpha_2\xi\beta_2\delta+\alpha_3\xi\beta_3\delta+\alpha_4\xi\beta_4\delta=\omega\delta. \qquad \ldots(244)$$

Die linke Seite dieser Gleichung bringe man durch die in Nr. 24 angewendete Umformung wieder auf die Gestalt, in der $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ rechte Koeffizienten sind:

$$\alpha'_1\xi\beta_1+\alpha'_2\xi\beta_2+\alpha'_3\xi\beta_3+\alpha'_4\xi\beta_4=\omega\delta. \qquad \ldots(245)$$

Nun kann man aus der ursprünglichen und dieser neuen Gleichung ein Glied eliminieren, d. h. eine Gleichung mit drei Gliedern herleiten, indem man jene links mit

$$N(\alpha'_4)\dot{\alpha}_4, \qquad \ldots(246)$$

diese links mit

$$N(\alpha_4)\dot{\alpha}'_4 \qquad \ldots(247)$$

multipliziert und subtrahiert. Die so entstehende dreigliedrige Gleichung

$$[N(\alpha'_4)\dot{\alpha}_4\alpha_1-N(\alpha_4)\dot{\alpha}'_4\alpha'_1]\xi\beta_1+[N(\alpha'_4)\dot{\alpha}_4\alpha_2-N(\alpha_4)\dot{\alpha}'_4\alpha'_2]\xi\beta_2+$$
$$+[N(\alpha'_4)\dot{\alpha}_4\alpha_3-N(\alpha_4)\dot{\alpha}'_4\alpha'_3]\xi\beta_3=$$
$$=N(\alpha'_4)\dot{\alpha}_4\omega-N(\alpha_4)\dot{\alpha}'_4\omega\delta \qquad \ldots(248)$$

kann man nun nach Nr. 27 und 28 auflösen. Man kann aber auch neben δ noch zwei weitere Quaternionen in gleicher Weise verwenden, aus den drei dreigliedrigen Gleichungen zwei zweigliedrige und aus diesen endlich eine Gleichung mit einem einzigen Gliede bilden, die sich dann sofort lösen läßt.

29. Bei allen diesen Methoden kann es geschehen, daß die Rechnung an irgend einer Stelle unterbrochen wird und nicht weiter fortgesetzt werden kann, ein Fall, der sich in der allgemeinen Lösungsformel dadurch zu erkennen gibt, daß

$$N = 0 \qquad \ldots (249)$$

ist; so z. B. kann offenbar die Lösung von

$$\frac{1}{4}(\xi - \iota_1 \xi \iota_1 - \iota_2 \xi \iota_2 - \iota_3 \xi \iota_3) = 1, \qquad \ldots (250)$$

welche, wie man sieht,

$$\xi = 1 + x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3 \qquad \ldots (251)$$

ist, wo x_1, x_2, x_3 willkürlich reelle Zahlen bedeuten, nicht in der allgemeinen Formel enthalten sein. Die Untersuchung dieser singulären Fälle und die vollständige Diskussion der Formeln für Ξ und N muß ich aber einer späteren Gelegenheit vorbehalten.

INHALT.

1. Ursprung des Problems. Ältere Lösungsmethoden 739
2. Bezeichnungen 739
3. Zusammenstellung bekannter Formeln 740
4. Darstellung der Koordinaten einer Quaternion durch diese selbst 741
5. Lineare Abhängigkeit von Quaternionen 742
6. Definition der Symbole $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ 742
7. Verhalten derselben bei Permutation der Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 744
8. Rechengesetze für diese Symbole 745
9. Relationen zwischen ihnen 746
10. Kriterium der linearen Abhängigkeit bei zwei, drei und vier Quaternionen. Beweis für den Fall zweier Quaternionen 747
11. Beweis für den Fall dreier Quaternionen 748
12. Beweis für den Fall von vier Quaternionen 750
13. Fünf Quaternionen sind stets linear abhängig. Relation. Darstellung durch vier linear unabhängige Quaternionen 751
14. Relation, wenn die fünf Quaternionen durch ihre Koordination gegeben sind 752
15. Zusammenhang dieser beiden Darstellungen 753
16. Linearhomogene Funktion einer Quaternion. Lineare Quaternionengleichung. Zurückführung auf die viergliedrige Form 755
17. Die eingliedrige Gleichung 756
18. Die zweigliedrige Gleichung 756
19. Die dreigliedrige Gleichung. Methode 757
20. Durchführung der Rechnung 759
21. Die viergliedrige Gleichung. Vereinfachung der Form 761
22. Methode 762
23. Durchführung der Rechnung. Rechte Seite 765
24. Linke Seite 768
25. Vorgang bei numerisch gegebenen Gleichungen 772
26. Andere Methoden für diesen Fall. Zerlegung in Koordinaten 772
27. Zerfällung der Unbekannten nach vier (linear unabhängigen) Quaternionen 772
28. Eliminationsmethode 773
29. Auftreten singulärer Fälle 774

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. VI. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Nr. VIII der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.

Ein Apparat zur Kopierung phonographischer Schrift von Edison-Walzen auf die Platten des Archivphonographen

von

Fritz Hauser.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1906.)

Die Aufgabe des Phonogramm-Archives ist, wie bekannt, unter anderem auch die Sprachen und Dialekte, die Vokal- und Instrumentalmusik fremder Völker zu sammeln. Da kommt es nun häufig vor, daß wertvolle Aufnahmen solcher Art auf dem in der ganzen Welt verbreiteten Edison-Phonographen gemacht und versendet werden, Aufnahmen, die wohl geeignet wären, dem Phonogramm-Archiv einverleibt zu werden. Dem steht als Hindernis im Wege, daß die Schrift auf den Walzen verzeichnet ist, während das Archiv bekanntlich wegen der galvanoplastischen Nachbildung mit Platten arbeitet. Es wäre deshalb vorteilhaft, wenn man von diesen Walzen die Schrift auf unsere Platten übertragen könnte. Es kommt dabei auch in Betracht, daß der Edison-Phonograph leichter transportierbar ist als der Archivphonograph und daß seine Bestandteile sowie die Walzen in jeder größeren Stadt der Erde zu haben sind.

Nachdem schon brauchbare Apparate zum Zweck der Kopierung von Walze auf Walze konstruiert worden sind, konnte ich dieselben bei dem Bau der Kopiermaschine als

Ausgangspunkt nehmen. Doch zeigte sich in der Folge, daß. um die Platte möglichst ausnützen zu können, so wesentliche Änderungen vorgenommen werden mußten, daß ein ganz neuer Apparat entstand, an welchem nur das Prinzip der Übertragung von den bestehenden Maschinen herübergenommen werden konnte.

Vor allem richtete ich mein Augenmerk darauf, daß, nachdem der Umfang des Wachszylinders im Durchschnitt 18 *cm*, der der Platte aber 35·6 *cm* hat, die rationellste Ausnützung

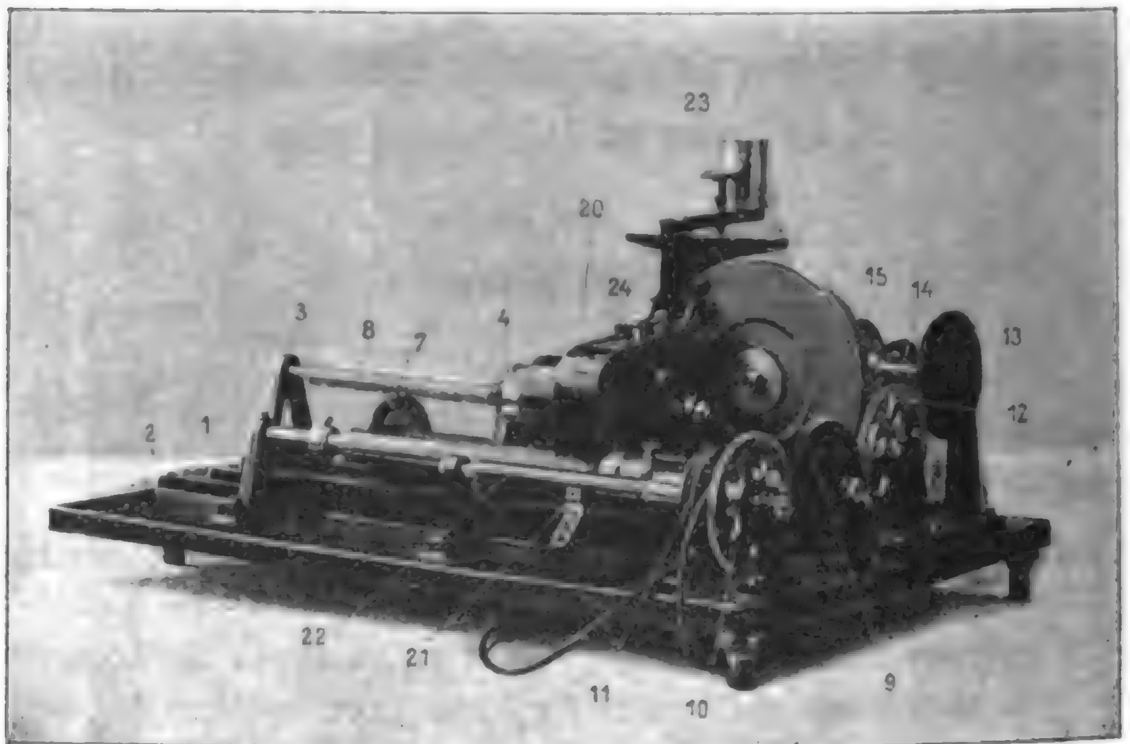


Fig. 1.

dann erfolgt, wenn zwei Umfänge des Zylinders auf einen Umfang der Platte übertragen werden.

Zu diesem Zwecke ist es erforderlich, den Zylinder doppelt so rasch sich drehen zu lassen als die Platte und auch den schreibenden Stift längs des Zylinders mit der doppelten Geschwindigkeit hinzuführen als über die Platte. Diesen Anforderungen wurde nun in folgender Weise genügt.

Auf einer gußeisernen Grundplatte sind zwei Schienen (Fig. 1, [1, 2]) angegossen, welche planparallel gehobelt sind. Auf diesen gleitet ein Schlitten (3), welcher die Hohlwalze (4) zum Aufstecken der Edison'schen Wachszylinder trägt. Dieser

Schlitten kann vermittels einer halben Schraubenmutter (Fig. 2, 5) mit der Spindel (6), deren Ganghöhe $^1/_2$ *mm* ist, verbunden werden, wodurch er bei Drehung letzterer auf den Schienen gleitet. Ein an dieser Spindel (6) befestigtes Zahnrad (7) greift in eine auf dem Schlitten montierte lange, gefraiste Walze (8), deren Zahnrad zu oben erwähntem Rade (7) sich wie 1 : 4 verhält, ein und versetzt dadurch sowohl diese Walze (8) wie auch die mit ihr in starrer Verbindung befindliche Hohlwalze (4)

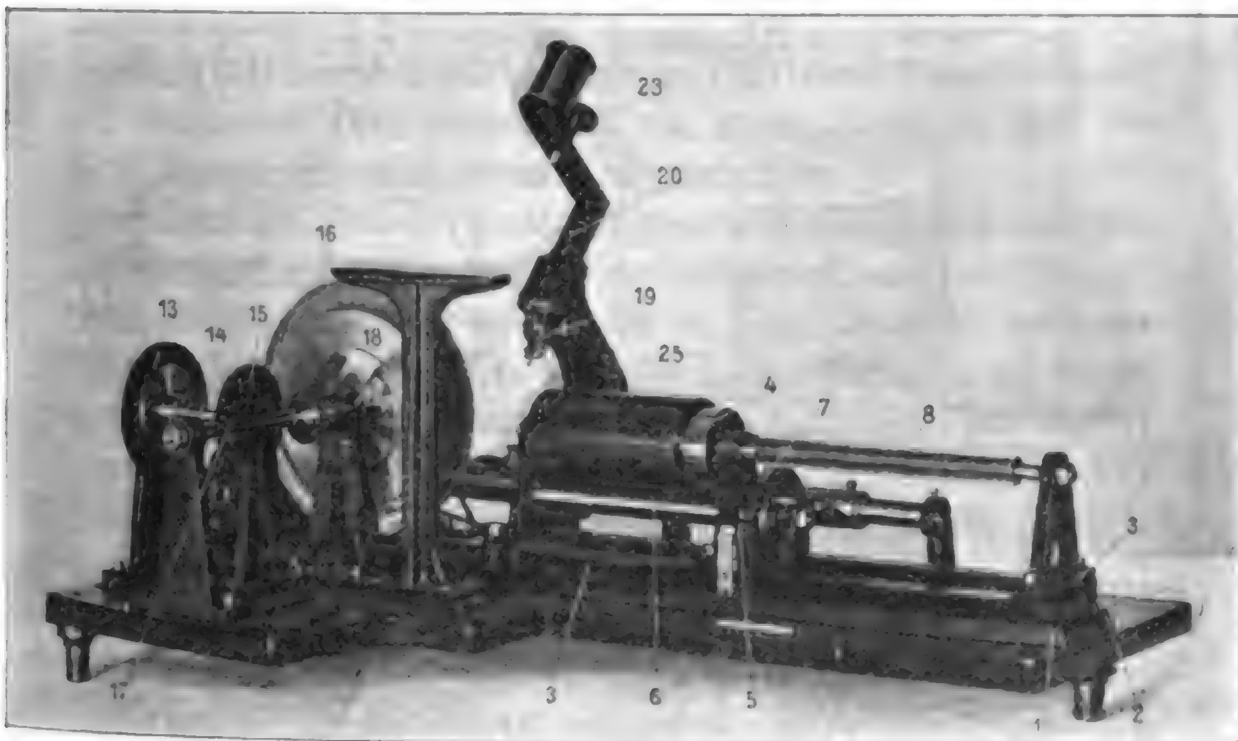


Fig. 2.

und somit den Wachszylinder in rotierende Bewegung. Am anderen Ende derselben Spindel (6) befindet sich ebenfalls ein Zahnrad (9), welches durch das Zahnrad (10) mit der Schnurscheibe (11) in Verbindung steht. Die Zahnräder 9, 10, 12 und 13 haben alle den gleichen Umfang und die gleiche Zahnzahl. Durch diese vier Räder wird nun die Bewegung der Schnurscheibe (11) auf die Achse (14) übertragen und gelangt von dieser vermittels der beiden Kegelräder (15, 16) zur Scheibenachse (17), respektive zu der die Wachsplatte tragenden Scheibe (18). Das Zahnverhältnis der beiden Kegelräder (15, 16) ist 2 : 1. Daraus erhellt nun, daß der Wachszylinder zwei Umdrehungen ausführt, während die auf der Scheibe (18)

befindliche Wachsplatte sich nur einmal um ihre Achse dreht.

Das Kopieren der Zylinderschrift auf die Platte wird mittels eines Übertragungssystems (19) vorgenommen, welches auf dem Arm (20) montiert ist. Da die Ganghöhe der Spiralschriftlinien auf der Edison-Walze $^1/_4$ *mm* beträgt und auf der Platte trotz ihrer langsameren Drehung ebensoviel betragen soll, ist die folgende Einrichtung getroffen. Der Arm (20) kann vermittels einer halben Schraubenmutter (21) mit der Spindel (22), deren Ganghöhe $^1/_2$ *mm* ist, in Verbindung gebracht werden. Da sich diese Spindel (22), an welcher das Zahnrad (10) befestigt ist, halb so rasch dreht als die Scheibe (18), respektive die Wachsplatte, so erscheint für letztere das gewünschte Verhältnis gegeben. Um nun auch für den Zylinder diese Bedingung zu erfüllen, ist dieser eben auf oben erwähntem Schlitten (3) montiert. Während also die Walze vier Umdrehungen ausführt, rückt der Arm (20) um $^1/_2$ *mm* weiter [bedingt durch das Verhältnis der Zahnräder (10, 9, 7), der Walze (8) und der Spindel (22)]. Zu gleicher Zeit wird aber der Schlitten durch die Spindel (6) in entgegengesetzter Richtung — weil sowohl Spindel 22 wie 6 rechtsgängige Spindeln sind, welche sich in entgegengesetzter Richtung drehen — um $^1/_2$ *mm* vorgeschoben, so daß sich auch für den Zylinder bei vier Umdrehungen eine Verschiebung des Armes, respektive des Übertragungsstiftes von 1 *mm* ergibt, was den gestellten Anforderungen entspricht.

Was nun das Übertragungssystem selbst anbelangt, wurde für dasselbe im wesentlichen die Konstruktion beibehalten, welche an einer Kopiermaschine von Walze auf Walze, die von den Berliner Elektromechanischen Werkstätten G. m. b. H, Berlin SW., Ritterstraße 70, freundlich überlassen wurde, angebracht war. Selbstverständlich mußte, um diese Übertragung unserem Apparate anzupassen, gar manches an derselben geändert werden.

An der Hand der beigedruckten Skizzen (Fig. 3, 4) ist das Prinzip der Kopierung leicht verständlich.

An die Wachswalze, welche eine Aufnahme trägt, wird ein Hebel *(A)*, in welchen ein Saphirstift, der die Form eines

gewöhnlichen Wiedergabsstiftes hat, eingekittet ist, angedrückt. Dieser Hebel *(A)* ist um die Achse *(B)* drehbar und bei *(C)* durch einen Draht *(I)* mit dem Aufnahmsstück *(D)* verbunden. Letzteres ist um die Achse *(E)* drehbar und trägt einen eingekitteten Aufnahmssaphirstift. Die Lager der Achse *(E)* sind in starrer Verbindung mit dem Stücke *(F)*, welches seinerseits wieder um die Achse *(G)* drehbar ist. Infolge seiner Form und der Art der Aufhängung hat nun dieses Stück *(F)* stets das Bestreben, nach vorn, d. i. in der Richtung gegen die Wachsplatte zu fallen, wodurch die Stücke *(D* und *A)* einerseits an die Wachsplatte, andrerseits an den Wachszylinder angedrückt werden. Da dieses Andrücken lediglich durch das Übergewicht des Stückes *(F)* erfolgt, kann die Stärke des Druckes durch kleine Gewichte, welche bei *(H)* eingeschraubt werden können, beliebig variiert werden. Wenn nun der Saphir an dem Hebel *(A)* in eine Vertiefung der Wachswalze sinkt, wodurch der Draht *(I)* entspannt wird, dreht sich das Stück *(F)* sofort so weit nach vorn, bis der Draht *(I)* wieder gespannt ist. Diese Drehung hat zur Folge, daß die Achse *(E)* der Wachsplatte genähert wird und der Saphir an dem Hebel *(D)* tiefer in dieselbe eindringt. An dieser Stelle möchte ich gleich erwähnen, daß das Kopieren verhältnismäßig rasch erfolgen muß (100 Touren pro Minute für den Zylinder), da die Trägheit der Massen und die Schleuderung dabei eine große Rolle spielen. Man erhält also bei dieser Anordnung eine getreue Kopie der Originalschrift. Wäre das Stück *(F)* nicht drehbar, so würde die übrige Anordnung dieses Hebelsystems auf der Wachsplatte ein Negativ der Zylinderschrift ergeben. Zur bequemeren Hand-

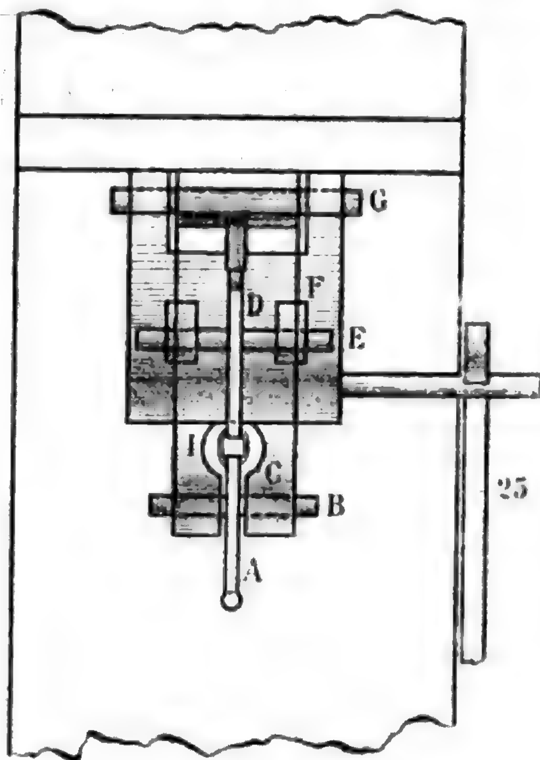


Fig. 3.

habung kann man dieses ganze Übertragungssystem behufs genauer Einstellung durch die an Fig. 1 ersichtlichen beiden Schrauben (23, 24) sowohl in horizontaler als vertikaler Richtung verstellen. Der Hebel (25 in Fig. 2 und 3) dient dazu, beide Saphire gleichzeitig von der Walze und Platte abzuheben.

Wesentlichen Einfluß auf die Güte der Übertragung hat, wie angedeutet, die Tourenzahl während des Kopierens. Am

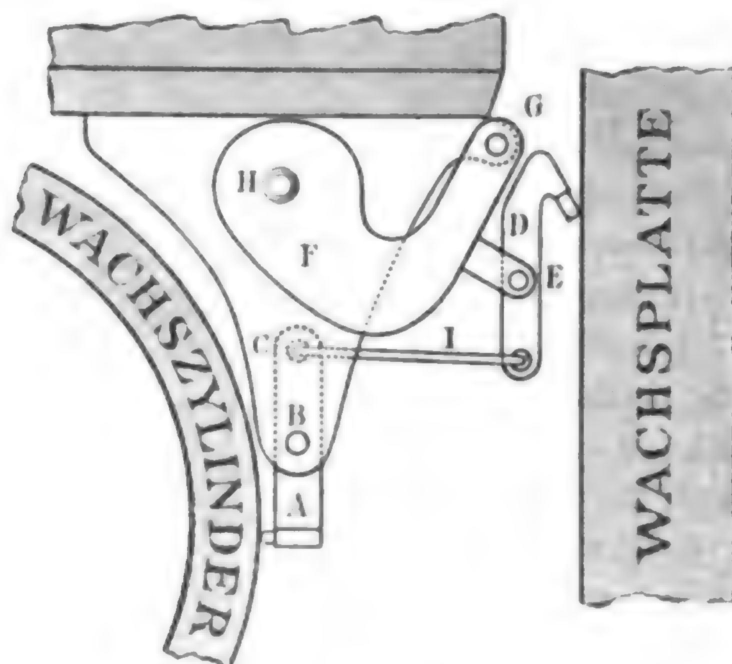


Fig. 4.

günstigsten erwies es sich, annähernd die Tourenzahl der Originalaufnahme für den Zylinder einzuhalten, also im Durchschnitt 100 Umdrehungen pro Minute, was 50 Umdrehungen der Platte und 25 der Schnurscheibe (11) entspricht.[1]

Die mit dieser Maschine gewonnenen Kopien entsprechen genügend den Anforderungen, nur sind leider die Nebengeräusche etwas stärker als gewöhnlich und verlieren die Aufnahmen ein wenig an Schallkraft, so daß es rätlich erscheint, nur wirklich gute Aufnahmen zu kopieren. Diese aber liefern dann vollkommen brauchbare Kopien, welche kaum von Originalaufnahmen zu unterscheiden sind.

---

[1] Dieser Apparat wurde von Herrn Ludwig Castagna, k. k. Universitätsmechaniker, angefertigt.

Bestimmung der Masse des Biela'schen Kometen

von

J. v. Hepperger,

k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1906.)

Es dürfte wohl kaum einem Zweifel unterliegen, daß die beiden in den Jahren 1846 und 1852 beobachteten und schon damals mit dem Namen Biela bezeichneten Kometen durch Teilung des in den früheren Erscheinungen einfach gesehenen Kometen desselben Namens entstanden sind. Hubbard hat nach der üblichen Methode der Bahnbestimmung aus einer gegebenen Anzahl von Normalörtern gefunden, daß die Identifizierung der Kerne sehr unsicher sei, da, wenn der in jeder Erscheinung früher gesehene, im allgemeinen beträchtlich hellere Komet mit A, der andere mit B bezeichnet wird, die Annahmen $A = A'$, $B = B'$ und $A = B'$, $B = A'$ zu fast gleichwertiger Darstellung der Beobachtungen führen und die erste Annahme den Helligkeitsverhältnissen besser entspricht, die zweite aber die Minimaldistanz der Kerne kleiner macht. Die Unsicherheit der Identifizierung verschwindet, wenn man der Bedingung Rechnung trägt, daß die Duplizität der Kerne eine Folge der Teilung sei, die Bahnen daher einen Schnittpunkt haben müssen, in welchem sich beide Kometen gleichzeitig befunden haben. In den Abhandlungen,[1] die hier *(a)*

---

[1] *(a)* = Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1845 und 1846. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIX, Abt. IIa, Mai 1900.

(b) = Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1846 und 1852. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXII, Abt. IIa, Dezember 1903.

und *(b)* heißen mögen, bin ich zu dem Resultate gelangt, daß, insofern die Masse der Kometen gleich Null gesetzt werden darf, nur die Annahme $A = B'$, $B = A'$ zulässig ist, welcher unter der Voraussetzung, die Teilung sei am 14. September 1844 eingetreten, die (durch Änderung dieser Zeit kaum verbesserungsfähige) Darstellung[1] der Beobachtungen entspricht:

$A = B' = B_{\mathrm{I}}$				$B = A' = B_{\mathrm{II}}$			
		$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$			$\Delta\alpha \cos\alpha$	$\Delta\delta$
1845	Dez. 25·5	+10"70	+8"10[2]	1846	Jänn. 23·5	−6"99	+0"94
1846	Jänn. 23·5	+ 7·34	−0·32		Febr. 6·5	−1·88	+0·77
	Febr. 14·5	+ 5·99	−1·11		Febr. 18·5	+1·91	+1·05
	März 2·5	+ 0·96	−2·32		März 2·5	+6·12	+0·46
	März 15·5	− 2·92	−1·09		März 21·5	+5·70	+4·79
	März 28·5	− 3·24	−0·26	1852	Aug. 28·0	+2·95	+0·08
1852	Sept. 22·0	− 1·24	−3·89		Sept. 22·0	−1·40	−1·89

Die Fehler der Rektaszensionsdarstellung lassen erkennen, daß die Annahme einer ungestörten Bewegung der Kometen nach der Teilung nicht aufrecht zu erhalten ist. Es könnten Störungen dadurch entstanden sein, daß einer oder jeder der Kometen Verlust an Substanz erlitten hat, welcher aber noch vor dem Jahre 1846 erfolgt sein müßte, da bei Außerachtlassung der Beobachtungen aus dem Jahre 1852 ein wesentlich besseres Resultat nicht zu erzielen ist. Daß binnen so kurzer Frist erhebliche Störungen dieser Art eingetreten seien, ist jedoch nicht sehr wahrscheinlich, weil eine Katastrophe wie die, welche die Teilung des Kometen veranlaßt hat, die günstigsten Bedingungen zum Zerfall der einzelnen Teile liefert und es dann wohl länger dauern dürfte, bis die neuerdings wachsenden Spannungen eine Wiederholung des Vorganges, wenn auch in kleinerem Maßstabe, bewirken. Auch die Symmetrie der Darstellung scheint gegen diese Annahme zu sprechen. Sollten aber sukzessive Teilungen vorgekommen sein, so würde es an einer sicheren Grundlage für die Bahnbestimmung überhaupt fehlen.

---

[1] *(b)*, p. 1372.

[2] Die Deklination dieses Normalortes scheint zu groß zu sein, da auch Hubbard's Darstellung einen ähnlichen Fehler, nämlich +6"1, aufweist.

Anders verhält sich die Sache, wenn die Störungen durch die stetige Wirkung der Massenattraktion veranlaßt sind, da dann (bei Vernachlässigung sehr kleiner Größen) nur eine neue Unbekannte in das Bahnbestimmungsproblem eintritt, nämlich die Summe der Massen beider Kometen. In *(a)* und *(b)* habe ich bereits den Versuch gemacht, die genäherten Werte der relativen Störungsbeträge zur Verbesserung der Darstellung der Normalörter zu benützen. Erfolg hatte der Versuch nicht und konnte ihn auch nicht haben, weil, wie sich später herausgestellt hat, die Identifizierung $A = B'$ unstatthaft ist; doch zweifle ich auch an der Verläßlichkeit des zur Berechnung der Störungen angewendeten Verfahrens, da bei längereh Zwischenzeiten der Einfluß der indirekten Störungsglieder immer mehr zur Geltung kommt.

Die Masse der Kometen läßt sich wegen ihrer Abhängigkeit von den Störungen nur auf indirektem Wege bestimmen. Man wird einen bereits sehr genäherten Wert für die Massensumme finden, wenn man beiden Kometen gleiche Massen zuschreibt und die Störungen während der Sichtbarkeitsdauer der Kometen im Jahre 1846 vernachlässigt. Es sind daher die ungestörten Bahnen den Normalörtern aus dem Jahre 1846 möglichst eng anzuschließen. Die Beobachtungen aus dem Jahre 1852 geben nur je einen für den gleichen Zeitpunkt geltenden Normalort. Die ungestörte Bahn hat aber nicht durch diesen Normalort zu gehen, sondern durch einen Ort, welcher um den Betrag der Störungen hievon absteht. Die Berechnung der Elemente der ungestörten Bahn setzt daher die Störungen schon als bekannt voraus. Durch Annahme einer beliebigen Störung nur einer Koordinate, z. B. der Rektaszension, erscheint die ungestörte Bahn hinreichend gut bestimmt, um als Grundlage zur Berechnung der Massensumme m und der Störung der Deklination zu dienen. Es ist daher zur Vermeidung einer Überbestimmung von m nur eine Koordinate des letzten ungestörten Ortes in Rechnung zu stellen.

Bei der geringen Verschiedenheit der Bahnelemente von A und B fällt die durch das arithmetische Mittel der Koordinaten korrespondierender Örter bestimmte mittlere Bahn (bei Annahme gleicher Massenwerte) sehr nahe mit der Bahn des

Schwerpunktes der Kometen zusammen und ist von deren Identifizierung unabhängig. Der Unterschied der Elemente der ungestörten Bahnen von A und B kann auf differenziellem Wege gefunden werden, indem man die Variationen der Elemente der mittleren Bahn so bestimmt, daß sie die Differenzen der Koordinaten aller korrespondierenden Normalörter aus dem Jahre 1846 und den angenommenen Unterschied zwischen je einer Koordinate der ungestörten Örter aus dem Jahre 1852 möglichst nahe darstellen. Hiedurch wird erreicht, daß an Stelle zweier veränderlicher Elementensysteme ein unveränderliches Elementensystem und ein veränderliches System von Variationen der Elemente treten.

Das Verfahren, dessen ich mich zur Bestimmung von m bedient habe, ist folgendes: Seien $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ Rektaszensions- und Deklinationsunterschied der Kometenörter für 1852 September 22·0 und $\delta\alpha$ der angenommene Betrag der Störung in Rektaszension für diese Zeit, so ist durch $\Delta\alpha-\delta\alpha$ die veränderliche, zur Ermittlung der Variationen dienende Größe gegeben. Die Variationen liefern in Verbindung mit dem unveränderlichen Elementensystem die zur Durchführung der Störungsrechnung nötigen Konstanten. Der Wert von m muß versuchsweise so gewählt werden, daß die Störung der Rektaszension für 1852 September 22·0 dem angenommenen Betrage $\delta\alpha$ gleichkommt. Dem $\delta\alpha$ wird in der Störungsrechnung ein $\delta\delta$ entsprechen; der Fehler der Deklinationsdarstellung ist der Unterschied zwischen $\Delta\delta-\delta\delta$ und der aus den Variationen berechneten Deklinationsdifferenz. Die Fortsetzung der Störungsrechnung nach rückwärts läßt erkennen, ob der dem $\delta\alpha$ entsprechende Massenwert ein Zusammentreffen der Kometen ermöglicht. Ist das nicht der Fall, so bedarf es einer Wiederholung der ganzen Rechnung mit einem andern $\delta\alpha$.

Normalörter.

Noch vor Inangriffnahme dieser Arbeit habe ich mich mit der Frage beschäftigt, ob durch Annahme einer einfachen Beziehung zwischen der Beschleunigung der mittleren Bewegung und den ihr entsprechenden Änderungen der Exzentrizität und Perihellänge ein Anschluß der Bahn des Kometen im Jahre 1805

und der Bahn des Schwerpunktes von B_I und B_{II} an die aus den Normalörtern für 1826 und 1832 berechnete Bahn zu erreichen sei. Für die Behandlung dieser Frage schien es zweckmäßig, alle in die Ausgleichsrechnung eingehenden Bestimmungsstücke der Bahn auf ein gemeinsames Äquinox zu reduzieren, und es wurde hiefür das von 1830·0 gewählt. Die Rechnungen haben zwar bisher kein befriedigendes Resultat ergeben, doch sind die Fehler der Darstellung nicht so bedeutend, um weitere Versuche, zu einer einheitlichen Darstellung aller Normalörter zu gelangen, als aussichtslos erscheinen zu lassen. Es wurde deshalb auch den in dieser Abhandlung enthaltenen Angaben das gleiche Äquinox zu Grunde gelegt; Elemente, rechtwinklige Koordinaten und Sonnenörter sind durchweg auf die mittlere Ekliptik für 1830·0, Polarkoordinaten (der Kometenörter) auf den mittleren Äquator für 1830·0 bezogen.

Die Normalörter aus dem Jahre 1846 sind in *(a)* 357 und 365,[1] die aus dem Jahre 1852 in *(b)* 1353, 1354 angegeben. Nach Hinzugabe der Präzession und Änderung der Identifizierung erhält man:

$$A = A' = B_I$$

M. Z. Paris	Präz. α	Präz. δ	α_I	δ_I
1845 Dez. 25·5	−12' 16"11	−5' 12"52	346° 49' 0"35	+ 0° 34' 19"61
1846 Jänn. 23·5	−12 16·09	−5 18·73	6 28 12·36	− 1 17 54·61
Febr. 14·5	−12 4·92	−4 42·00	28 23 4·22	− 4 30 45·21
März 2·5	−11 37·78	−3 22·73	50 42 49·88	− 8 58 2·20
März 15·5	−11 5·90	−1 21·10	75 15 57·16	−12 53 35·59
März 28·5	−10 55·79	+1 14·61	103 21 19·96	−14 33 34·54
1852 Aug. 28·0	−19 25·24	+3 9·26	115 14 36·09	+20 54 14·47
Sept. 22·0	−17 27·99	+6 10·22	146 54 43·68	+ 8 17 29·57

[1] Die fehlende zweite Dezimalstelle kann mit Hilfe der nebenstehenden Werte von Eph$(B_{II}-B_I)$ und der auf der vorhergehenden Seite in der ersten Tafel enthaltenen Werte von $B-R$ leicht ergänzt werden.

$B = B' = B_{II}$

M. Z. Paris	Präz. α	Präz. δ	α_{II}	δ_{II}
1846 Jänn. 23·5	—12' 16"11	—5' 18"75	6°26' 55"38	— 1°15' 51"41
Febr. 6·5	—12 11·48	—5 2·23	19 30 43·29	— 2 55 3·85
Febr. 18·5	—12 0·41	—4 27·99	33 15 16·21	— 5 22 34·29
März 2·5	—11 38·38	—3 23·07	50 38 13·12	— 8 50 33·36
März 21·5	—10 57·38	—0 10·51	88 1 53·32	—13 55 42·31
1852 Sept. 22·0	—17 29·42	+6 8·32	146 27 40·74	+ 8 31 30·01

Die diesen Zeiten entsprechenden Örter von B_I sind:

M. Z. Paris	Präz. α	Präz. δ	α_I	δ_I
1846 Jänn. 23·5	—12' 16"09	—5' 18"73	6°28' 12"36	— 1°17' 54"61
Febr. 6·5	—12 11·36	—5 2·17	19 32 25·36	— 2 58 35·92
Febr. 18·5	—12 0·11	—4 27·86	33 17 50·35	— 5 27 55·36
März 2·5	—11 37·78	—3 22·73	50 42 49·88	— 8 58 2·20
März 21·5	—10 56·50	—0 9·52	88 12 28·79	—14 4 29·70
1852 Sept. 22·0	—17 27·99	+6 10·22	146 54 43·68	+ 8 17 29·57

Die Reduktion der Sonnenörter [*(b)* 1372] auf das Äquinox 1830·0 gibt:

M. Z. Paris	Präz. L	Präz. B	L	B	log R
1845 Dez. 25·5	—13' 23"71	+7"53	273°54' 56"85	+7"43	9·992 7103
1846 Jänn. 23·5	»	+5·82	303 27 18·32	+5·91	9·993 2590
Febr. 6·5	»	+4·41	317 39 44·82	+3·80	9·994 1409
Febr. 14·5	»	+3·49	325 44 47·70	+2·96	9·994 8131
Febr. 18·5	»	+3·00	329 46 46·21	+2·94	9·995 1978
März 2·5	»	+1·46	341 50 20·48	+1·16	9·996 4538
März 15·5	»	—0·27	354 48 50·04	—0·67	9·997 9530
März 21·5	»	—1·07	0 46 18·12	—0·85	9·998 7042
März 28·5	»	—1·97	7 41 59·54	—2·22	9·999 5836
1852 Aug. 28·0	—18 25·12	—3·23	154 57 28·87	—3·65	0·004 0805
Sept. 22·0	»	+1·20	179 17 30·16	+1·17	0·001 2357

Mittlere Bahn.

Die Örter, denen sich die mittlere Bahn anschließen soll, werden durch das arithmetische Mittel aus den auf gleiche Zeitpunkte bezogenen Koordinaten von *A* und *B* bestimmt. Ihnen entsprechen folgende Elemente, welche noch um die seit 1832 November 25·0 durch die Planeten bewirkten Störungen zu verbessern sind.

$$\begin{aligned} &\text{1844 September 14·0} \quad M = 279^\circ\ 8'\ 24''341 \\ &\mu = 533·900704 \\ &\varphi = 48\ 42\ 14·794 \\ &\pi = 109\ 56\ 20·685 \\ &\Omega = 248\ 12\ 3·444 \\ &i = 13\ 13\ 20·220 \end{aligned} \qquad \text{I.}$$

Dann werden die mittleren Örter folgendermaßen dargestellt:

	$\frac{\alpha_{II}+\alpha_I}{2}$	$B-R$ $\Delta\alpha$	$\frac{\delta_{II}+\delta_I}{2}$	$B-R$ $\Delta\delta$
1846 Jänn. 23·5	6°27'33"87	−0"03	− 1°16'53"01	+0"47
Febr. 6·5	19 31 34·32	+0·89	− 2 56 49·88	+0·51
Febr. 18·5	33 16 33·28	+0·91	− 5 25 14·82	+0·71
März 2·5	50 40 31·50	−0·41	− 8 54 17·78	−0·95
März 21·5	88 7 11·05	+0·95	−14 0 6·00	+0·46
1852 Sept. 22·0	146 41 12·21	−0·97	+ 8 24 27·79	−1·87

Die für die Zeiten der Normalörter berechneten Störungen der Elemente werden später angeführt. Hier gebe ich eine Übersicht über die durch Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus veranlaßten Störungen, welche in Verbindung mit den Elementen I die mittlere Bahn während des Zeitraumes 1843—1852 bestimmen und zur Ableitung der rechtwinkligen Koordinaten des fingierten mittleren Kometen sowie anderer Hilfsgrößen gedient haben.

	ΔM	$\Delta\mu$	$\Delta\varphi$	$\Delta\pi$	$\Delta\Omega$	Δi
43 Okt. 30	3°15' 9"2	5"188	30'18"0	—58'52"6	—140' 3"6	—37'18"9
Dez. 9	20 2·2	5·095	29 52·8	—59 27·2	—141 34·4	32·5
44 Jänn. 18	24 43·3	5·008	32·8	58·8	—142 53·4	43·7
Febr. 27	29 10·1	4·927	15·9	—60 27·7	—144 3·5	52·6
April 7	33 26·4	847	0·0	55·5	—145 7·7	—38 0·4
Mai 17	37 37·6	763	28 44·2	—61 24·4	—146 5·2	6·9
Juni 26	41 46·5	673	30·6	53·9	52·9	12·1
Aug. 5	45 50·6	581	21·3	—62 21·5	—147 31·5	15·7
Sept. 14	49 45·4	495	15·4	46·2	—148 3·8	18·5
Okt. 24	53 27·4	420	11·8	—63 7·0	34·5	20·9
Dez. 3	56 59·8	346	7·2	28·0	—149 5·5	23·0
45 Jänn. 12	4 0 27·0	265	2·1	50·8	34·7	24·6
Febr. 21	3 50·7	174	27 57·5	—64 15·4	59·6	25·7
April 2	7 9·9	077	54·4	40·3	—150 20·3	26·3
Mai 12	10 19·9	3·980	52·7	—65 3·9	39·0	26·7
Juni 21	13 21·6	887	51·2	26·9	57·2	26·6
Juli 31	16 14·4	794	49·7	50·9	—151 14·2	26·3
Sept. 9	19 1·2	699	49·2	—66 15·3	27·8	25·6
Okt. 19	21 39·1	611	50·2	36·6	37·3	24·7
Nov. 28	24 8·0	559	51·3	50·0	43·8	23·6
46 Jänn. 7	26 30·5	555	50·8	53·2	46·5	22·6
Febr. 16	28 52·4	525	53·9	50·2	47·7	23·0
März 28	31 8·6	437	28 1·3	40·9	54·0	23·2
Mai 7	33 22·7	403	3·2	34·2	56·5	22·9
Juni 16	35 34·5	372	5·9	31·6	57·9	22·5
Juli 26	37 51·1	328	10·3	28·4	59·4	21·8
Sept. 4	39 41·4	274	15·4	24·6	59·5	21·5
Okt. 14	41 37·4	222	19·7	18·4	59·5	21·5
Nov. 23	43 31·6	178	23·1	12·7	—152 0·4	21·7
47 Jänn. 2	45 24·0	142	26·3	7·9	0·4	21·7
Febr. 11	47 12·8	107	30·1	3·4	0·5	21·7
März 23	48 56·4	068	33·5	—65 57·3	0·0	22·4
Mai 2	50 36·3	026	35·5	49·6	1·1	23·8
Juni 11	52 16·6	2·994	35·7	41·6	2·9	25·4

	ΔM	$\Delta\mu$	$\Delta\varphi$	$\Delta\pi$	$\Delta\Omega$	Δi
47 Juli 21	4°53'59"4	2"968	28'35"8	—65'35"7	—152' 4"9	—38'26"8
Aug. 30	55 41·8	950	37·6	31·6	6·2	27·8
Okt. 9	57 18·8	930	40·8	27·5	7·7	28·6
Nov. 18	58 48·3	904	43·4	20·9	10·9	30·4
Dez. 28	5 0 11·6	872	42·7	12·3	16·9	33·2
48 Febr. 6	1 39·6	843	39·1	2·2	24·6	36·6
März 17	3 8·4	818	34·6	—64 54·3	32·1	39·8
April 26	4 42·1	799	31·3	47·6	38·8	42·6
Juni 5	6 11·7	782	28·9	41·3	45·8	45·2
Juli 15	7 37·7	765	25·5	34·2	54·8	48·3
Aug. 24	9 3·6	746	20·0	27·2	—153 5·9	51·9
Okt. 3	10 32·3	727	13·7	20·8	17·0	55·4
Nov. 12	12 2·6	713	8·4	15·7	27·2	58·4
Dez. 22	13 30·1	700	4·0	10·4	37·4	—39 1·2
49 Jänn. 31	14 52·4	687	27 58·8	4·5	50·3	4·8
März 12	16 12·8	672	50·2	—63 58·1	—154 6·6	9·0
April 21	17 37·7	652	38·5	53·3	25·3	13·6
Mai 31	19 9·7	634	26·6	50·5	40·4	17·3
Juli 10	20 45·9	620	16·8	49·2	53·1	20·1
Aug. 19	22 19·8	612	9·7	47·6	—155 4·7	22·7
Sept. 28	23 48·5	604	26 2·9	45·4	18·8	25·6
Nov. 7	25 14·7	595	53·7	43·2	36·3	29·2
Dez. 17	26 43·7	581	42·3	42·7	54·9	32·6
50 Jänn. 26	28 16·8	567	30·5	43·6	—156 11·8	35·7
März 7	29 51·9	554	19·9	45·3	26·9	38·2
April 16	31 25·7	543	9·8	47·0	42·0	40·8
Mai 26	32 58·4	530	25 58·7	49·5	59·3	43·4
Juli 5	34 34·1	513	46·0	53·7	—157 17·2	46·3
Aug. 14	36 15·4	493	33·5	—64 0·4	32·6	48·5
Sept. 23	37 59·6	474	23·4	7·1	44·0	49·9
Nov. 2	39 41·1	460	15·8	12·5	54·0	51·1
Dez. 12	41 17·8	450	8·9	16·4	—158 5·7	52·4
51 Jänn. 21	42 51·4	441	0·2	21·7	21·1	54·0
März 2	44 27·8	424	24 49·3	29·9	37·2	55·5

	ΔM	$\Delta\mu$	$\Delta\varphi$	$\Delta\pi$	$\Delta\Omega$	Δi
51 April 11	5°46'10"0	2"398	24'38"6	—64'41"3	—158'49"8	—39'56"7
Mai 21	47 54·2	368	30·2	51·9	58·2	57·5
Juni 30	49 38·8	342	24·0	—65 2·9	—159 4·6	57·8
Aug. 9	51 18·5	319	18·8	11·6	11·7	58·3
Sept. 18	52 56·5	296	13·5	21·0	20·2	58·6
Okt. 28	54 35·4	268	8·6	32·1	27·2	58·9
Dez. 7	56 13·4	235	4·9	42·7	31·9	59·1
52 Jänn. 16	57 49·8	206	2·9	51·9	35·0	59·1
Febr. 25	59 21·9	183	1·2	58·9	38·6	59·0
April 5	6 0 50·7	171	23 59·2	—66 5·3	42·8	58·8
Mai 15	2 18·8	157	57·2	12·7	46·5	58·5
Juni 24	3 47·1	138	56·5	20·8	48·2	58·3
Aug. 3	5 13·9	111	57·3	27·2	48·4	58·4
Sept. 12	6 38·8	108	57·2	29·0	48·4	58·4
Okt. 2	6 7 21·1	2·117	23 56·0	—66 28·9	—159 48·3	—39 58·4

Die nächste Tafel gibt für dieselben Zeitpunkte die wahre Anomalie, das Fünffache des Logarithmus des Radiusvektors (in den Störungsgleichungen tritt r^5 auf) und den Logarithmus der rechtwinkligen Ekliptikalkoordinaten des mittleren Kometen. Außer den in der Tafel enthaltenen Positionen mußten noch viele andere berechnet werden, da die Geschwindigkeit der Bewegung des Kometen in der Nähe des Perihels sich sehr rasch ändert.

	v	$\log r^5$	$\log x$	$\log y$	$\log z$
43 Okt. 30	192° 9'30"	3·80506	0·45886	0ₙ68942	0·01445
Dez. 9	193 38 32	76901	47002	67513	01478
44 Jänn. 18	195 10 44	72813	47981	65918	01398
Febr. 27	196 46 39	68201	48821	64137	01197
April 7	198 26 58	63016	49520	62147	00867
Mai 17	200 12 30	57200	50073	59918	0·00396

	v	$\log r^5$	$\log x$	$\log y$	$\log z$
44 Juni 26	202° 4' 12"	3·50683	0·50473	0"57411	9·99769
Aug. 5	204 3 12	43377	50709	54577	98967
Sept. 14	206 10 57	35173	50765	51353	97967
Okt. 24	208 29 17	25937	50620	47653	96738
Dez. 3	211 0 41	15495	50244	43357	95237
45 Jänn. 12	213 48 29	3·03624	49597	38293	93406
Febr. 21	216 57 9	2·90030	48624	32204	91169
April 2	220 33 0	74312	47243	24676	88412
Mai 12	224 45 28	55916	45331	14988	84966
Juni 21	229 49 13	34040	42695	0"01695	80561
Juli 31	236 8 42	2·07484	39007	9"81169	74734
Sept. 9	244 27 54	1·74375	33657	9"37917	66601
Okt. 19	256 15 7	1·31723	25334	9·25106	54167
Nov. 28	274 53 15	0·75125	0·10495	9·76173	9·31357
46 Jänn. 7	308 50 49	0·04357	9·73441	9·93627	8·49043
Febr. 16	8 8 58	9·67297	9"57459	9·88079	9"16510
März 28	61 46 31	0·22274	0"02927	9·23126	9"36777
Mai 7	90 41 43	0·90710	14837	9"71463	9"37756
Juni 16	107 7 0	1·43413	18922	0"05910	9"32028
Juli 26	117 50 0	1·83356	19867	23037	9"21758
Sept. 4	125 33 0	2·14600	19120	34028	9"05895
Okt. 14	131 30 11	39858	17244	41917	8"78589
Nov. 23	136 19 1	60786	14483	47943	7"81341
47 Jänn. 2	140 20 51	78462	10923	52733	8·68285
Febr. 11	143 48 47	2·93619	06558	56647	9·01030
März 23	146 51 18	3·06763	0"01302	59907	19252
Mai 2	149 34 12	18266	9"94977	62662	31830
Juni 11	152 1 39	28404	87267	65013	41369
Juli 21	154 16 43	37384	77610	67033	49002
Aug. 30	156 21 39	45371	64911	68778	55324
Okt. 9	158 18 12	52490	46623	70286	60688
Nov. 18	160 7 41	58844	9"14082	71591	65320
Dez. 28	161 51 14	64519	8·21538	72718	69374
48 Febr. 6	163 29 46	69580	9·23327	73685	72959
März 17	165 4 4	74084	51234	74510	76155
April 26	166 34 48	78076	68007	75204	79022
Juni 5	168 2 27	81596	79993	75778	81607
Juli 15	169 27 27	84675	89291	76240	83946
Aug. 24	170 50 14	87340	9·96861	76597	86071
Okt. 3	172 11 11	89613	0·03221	76855	88003
Nov. 12	173 30 36	91511	08658	77017	89762

	v	$\log r^5$	$\log x$	$\log y$	$\log z$
Dez. 22	174°48'46"	3·93049	0·13455	0^n77087	9·91363
49 Jänn. 31	176 5 57	94239	17672	77066	92821
März 12	177 22 25	95091	21434	76957	94145
April 21	178 38 25	95610	24816	76759	95345
Mai 31	179 54 13	95799	27872	76473	96428
Juli 10	181 10 2	95660	30646	76098	97400
Aug. 19	182 26 3	95192	33171	75631	98265
Sept. 28	183 42 31	94391	35476	75071	99028
Nov. 7	184 59 41	93252	37580	74414	9·99690
Dez. 17	186 17 48	91766	39501	73656	0·00253
50 Jänn. 26	187 37 9	89923	41252	72791	00719
März 7	188 58 2	87709	42846	71812	01087
April 16	190 20 43	85106	44289	70712	01355
Mai 26	191 45 36	82052	45589	69479	01521
Juli 5	193 13 5	78641	46749	68102	01581
Aug. 14	194 43 37	74725	47772	66566	01532
Sept. 23	196 17 43	70302	48658	64853	01367
Nov. 2	197 55 56	65330	49404	62940	01076
Dez. 12	199 39 2	59752	50009	60802	00650
51 Jänn. 21	201 27 55	53505	50463	58401	0·00076
März 2	203 23 41	46510	50759	55695	9·99335
April 11	205 27 42	38666	50882	52625	98407
Mai 21	207 41 35	29849	50814	49115	97263
Juni 30	210 7 31	19902	50527	45059	95864
Aug. 9	212 48 24	3·08625	49989	40310	94162
Sept. 18	215 48 11	2·95757	49149	34648	92087
Okt. 28	219 12 23	80948	47938	27733	89542
Dez. 7	223 9 1	63712	46251	18988	86383
52 Jänn. 16	227 50 15	43362	43929	0^n07330	82388
Febr. 25	233 35 47	2·18891	40709	9^n90308	77187
April 5	240 59 56	1·88750	36122	9^n59985	70108
Mai 15	251 8 17	1·50484	29227	8·23328	59746
Juni 24	266 22 56	1·00258	0·17741	9·63200	42406
Aug. 3	292 32 58	0·34377	9·93882	89165	9·01797
Sept. 12	341 38 14	9·72217	6·94626	94260	8^n90650
Okt. 2	13 57 34	9·70183	9^n65908	9·86066	9^n20245

Die Koordinatendifferenzen der mit 1 bis 6 bezeichneten korrespondierenden Normalörter von A und B und die aus den

Elementen der mittleren Bahn gerechneten (Logarithmen der) Differentialquotienten der Koordinaten nach den Elementen sind:

		1.	2.	3.	4.	5.	6.
$(\alpha_{II}-\alpha_I)\cos\delta$		-76"96	-101"94	-153"45	-273"43	-616"60	-1605"49
$\delta_{II}-\delta_I$		123·20	212·07	321·07	448·84	527·39	840·44
t		496·5	510·5	522·5	534·5	553·5	2930·0
$\cos\delta\, d\alpha$	dM_0	0·27185	0·38821	0·55469	0·79722	1·13799	0·64465
	$d\mu$	2·80631	2·95561	3·16048	3·44827	3·84013	4·11463
	$d\varphi$	0n52813	0n57328	0n62141	0n63450	0n07880	9·95604
	$d\pi$	9·64558	9·47544	9·24980	9·16199	9·85158	9·59732
	$d\Omega$	8n93396	8n79872	8n54625	7n93991	8n52510	8·39722
	di	8·92716	9·26426	9·31264	8·91930	9n72070	9n13902
$d\delta$	dM_0	0n44413	0n67958	0n85765	1n00158	1n07090	0n36348
	$d\mu$	3n17416	3n40518	3n58454	3n73259	3n81327	3n83165
	$d\varphi$	9n78368	9n91419	0n14530	0n40246	0n67846	9n24901
	$d\pi$	9n26400	9n61715	9n84090	0n02717	0n19911	9n32008
	$d\Omega$	9·40056	9·37900	9·31118	9·13613	8n53520	8·96403
	di	9n44338	9n87872	0n09691	0n24781	0n36369	9n54197
$\left(\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\mu}\right)$		2n45984	2n53799	2n63047	2n73552	2n83568	1·96796
$\left(\frac{d\delta}{d\mu}\right)$		2n05220	2n00408	1n88672	1n57703	1·04576	1n30854

t ist von 1844 September 14·0 an gezählt.

$\delta M = \delta M_0 + t\delta\mu$.

$$\left(\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\mu}\right) = \frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\mu} - t\,\frac{\cos\delta\, d\alpha}{dM_0}.$$

$$\left(\frac{d\delta}{d\mu}\right) = \frac{d\delta}{d\mu} - t\,\frac{d\delta}{dM_0}.$$

Wäre die Masse der Kometen unendlich klein, so müßten die Variationen der Elemente so bestimmt werden, daß die in dieser Tafel oben angesetzten Differenzen möglichst genau

dargestellt werden; liegt aber der Massenwert oberhalb einer gewissen Grenze, so werden bereits merkliche Störungen auftreten, deren Größe im allgemeinen desto beträchtlicher ist, je länger die störende Kraft gewirkt hat. Legt man die Oskulationsepoche ungefähr in die Mitte der Zeit der Sichtbarkeit der Kometen im Jahre 1846, dann sind die Störungen der den Normalörtern aus diesem Jahre entsprechenden Ephemeridenörter sehr klein im Vergleiche zu den Störungen der Örter aus dem Jahre 1852. Ich habe als Oskulationsepoche 1846 Februar 11·0 (ungefähr Zeit des Perihels) angenommen und die Störungen für die Zeiten der Normalörter aus dem Jahre 1846 zunächst vernachlässigt. Da im vorhinein die Störungen nur einer Koordinate willkürlich angenommen werden können, so hängen die Variationen der Elemente nur von einer Variablen ab; hiefür wurde die Rektaszensionsdifferenz des sechsten Ortes $\Delta\alpha_6 \cos\delta$ gewählt. Es ist daher die durch die Variationen darzustellende Differenz $= -1605''49 - \Delta\alpha_6 \cos\delta$. Die Bestimmung der Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate führt zu den Werten:

$\Delta\alpha_6 \cos\delta$	δM_0	$\delta\mu$	$\delta\varphi$	$\delta\pi$	$\delta\Omega$	δi
0"	+ 22"585	—0"131597	10"689	—1"000	—7"000	5"478
— 300	+ 8·160	—0·103510	8·039	—0·375	—6·445	4·963
— 600	— 6·265	—0·075423	5·389	+0·250	—5·890	4·448
— 900	— 20·690	—0·047336	2·739	+0·875	—5·335	3·933
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
—3210·98	—131·826	+0·169032	—17·690	+5·739	—0·981	+0·033

Die Zahlen der letzten Horizontalreihe entsprechen der Identifizierung $A = B'$ für $m = 0$. Diese Variationen geben folgende Darstellung der Örter:

$\Delta\alpha_6 \cos\delta$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
0"	+0''50	+0''53	−0''52	+0''11	−0''04	− 0''00	Rektaszension
− 300	37	44	− 50	21	− 9	− 01	
− 600	22	38	− 46	34	− 15	− 06	
− 900	09	31	− 44	46	− 19	− 02	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
−3210·98	− 96	− 29	− 28	1·44	− 36	− 02	
0"	−0·93	−0·27	+0·75	+1·15	−0·97	+ 3·74	Deklination
− 300	− 86	− 30	70	1·11	− 91	+(160·48)	
− 600	− 82	− 33	64	1·06	− 84	+(317·21)	
− 900	− 77	− 33	58	1·00	− 79	+(473·94)	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
−3210·98	− 37	− 47	13	57	− 26	+ 0·45	

Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die Summe der Störung in Deklination und des Fehlers der Darstellung. Aus der Zusammenstellung ist zu ersehen, daß die Identifizierung $A = A'$ die Rektaszensionen besser, die Deklinationen schlechter darstellt als die Identifizierung $A = B'$; die Variationen der Elemente werden aber für $A = A'$ wesentlich kleiner und verbürgen auch eine größere Nähe der Kometen vor dem Jahre 1846.

Die angegebenen Variationen machen die Summe der Fehlerquadrate zu einem absoluten Minimum. Wird eine von ihnen um eine willkürliche Größe geändert, so kann man die Größen bestimmen, um welche die übrigen Variationen geändert werden müssen, damit die Summe der Fehlerquadrate ein relatives Minimum sei. Die Rechnung ergibt, daß eine Änderung von δi um di die Änderungen erheischt:

$$dM_0 = +0\overset{\text{s}}{.}064 \quad di$$
$$d\mu = +0\cdot000050\, di$$
$$d\varphi = -0\cdot059 \quad di$$
$$d\pi = -1\cdot945 \quad di$$
$$d\Omega = +1\cdot207 \quad di$$

wodurch die Darstellung der Örter um folgende Beträge geändert wird:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$d(\cos\delta\Delta\alpha) = di\times$	−0"53	−0"05	+0"37	+0"59	−0"65	0"00
$d(\Delta\delta) \quad = di\times$	+0·17	−0·04	−0·22	−0·29	−0·07	−0·30

Zusammenhang der Variationen der rechtwinkligen Ekliptikalkoordinaten mit den Variationen der Elemente.

Werden die rechtwinkligen Ekliptikalkoordinaten des mittleren Kometen unter Berücksichtigung der Störungen durch die Planeten wie früher mit x, y, z bezeichnet, so sind ihre Variationen $\delta x = \xi_0$, $\delta y = \eta_0$, $\delta z = \zeta_0$ durch das Formelsystem bestimmt:

$$\omega = \pi - \Omega; \quad e = \sin\varphi; \quad u = v + \omega; \quad p = a\cos^2\varphi$$

$$n\cos N = \sin u + e\sin\omega$$
$$n\sin N = (\cos u + e\cos\omega)\cos i$$

$$X = r(\sin u\cos\Omega + \cos u\sin\Omega\cos i)$$
$$Y = r(\sin u\sin\Omega - \cos u\cos\Omega\cos i)$$
$$Z = -r\cos u\sin i$$

$$G = \frac{p}{\cos\varphi}(\cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i)$$

$$H = \frac{p}{\cos\varphi}(\sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i)$$

$$K = \frac{p}{\cos\varphi}(\sin\omega\sin i); \quad \delta M = \delta M_0 + \delta\mu(t - 1844 \text{ Sept. } 14\cdot0)$$

$$\frac{\xi_0}{\sin 1''} = \frac{-an\cos(\Omega-N)\,\delta M}{\cos\varphi} - \frac{2x\delta\mu}{3\mu\sin 1''} -$$
$$-\left(X\frac{\sin v}{\cos\varphi}+G\right)\delta\varphi - X\delta\omega - y\delta\Omega + z\sin\Omega\,\delta i$$

$$\frac{\eta_0}{\sin 1''} = \frac{-an\sin(\Omega-N)\,\delta M}{\cos\varphi} - \frac{2y\delta\mu}{3\mu\sin 1''} -$$
$$-\left(Y\frac{\sin v}{\cos\varphi}+H\right)\delta\varphi - Y\delta\omega + x\delta\Omega - z\cos\Omega\,\delta i$$

$$\frac{\zeta_0}{\sin 1''} = \frac{+an\sin N\,\mathrm{tg}\,i\,\delta M}{\cos\varphi} - \frac{2z\delta\mu}{3\mu\sin 1''} -$$
$$-\left(Z\frac{\sin v}{\cos\varphi}+K\right)\delta\varphi - Z\delta\omega + z\,\mathrm{cotg}\,i\,\delta i.$$

Die Koeffizienten von δM, $\delta\mu$... hängen nur von der mittleren Bahn ab und können daher bei der Bestimmung der Bahnen und der Masse von A und B als konstante Größen betrachtet werden.

Die Variationen der Elemente können in ähnlicher Weise durch die Variationen der rechtwinkligen Koordinaten und ihre Differentialquotienten dargestellt werden. Die Bestimmung der Masse, welche dem angenommenen Werte von $\Delta\alpha_6\cos\delta$ entspricht, führt auf ein Problem dieser Art, wenn man bei den Versuchen die Fortführung der (bei Annäherung der Kometen an die Sonne immer langsamer fortschreitenden) Störungsrechnung bis 1852 September 22·0 vermeiden will. Die rasche Zunahme des Abstandes von A und B nach dem Aphel bedingt eine rasche Abnahme der störenden Kraft, die noch im Jahre 1851 so klein wird, daß ihr späteres Wirken vernachlässigt werden kann. Sei t_1 der Zeitpunkt, von welchem an die störende Kraft $=0$ angenommen wird. Die Quadratur gibt für t_1 sowohl die Störungen von ξ_0, η_0, ζ_0 als auch deren Differentialquotienten nach der Zeit. Die diesen Größen entsprechenden Änderungen der Variationen der Elemente gelten (unter Berücksichtigung des Zusammenhanges von mittlerer Anomalie und mittlerer Bewegung) auch für September 22·0, so daß hieraus mit Hilfe der Differentialquotienten für diesen Ort $\Delta\alpha_6\cos\delta$ und $\Delta\delta_6$ berechnet werden können.

Seien $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ die Störungen von ξ_0, η_0, ζ_0 und $w\frac{d\delta\xi}{dt} = \delta\xi'$; $w\frac{d\delta\eta}{dt} = \delta\eta'$; $w\frac{d\delta\zeta}{dt} = \delta\zeta'$, wo w das Intervall der Störungsrechnung oder das Doppelte hievon bedeutet, so werden die mit $\delta' M$, $\delta'\mu\ldots$ bezeichneten Störungen der Variationen δM, $\delta\mu\ldots$ durch die Formeln bestimmt:

$$\frac{r\cos u\sin i}{w\sin 1''.k\sqrt{p}} = g' \qquad \frac{n\cos N\sin i}{p\sin 1''} = g$$

$$n'\sin N' = \cos u + e\cos\omega$$

$$\frac{r\sin u}{w\sin 1''.k\sqrt{p}} = h' \qquad \frac{-n\sin N}{p\sin 1''.\cos i} = h$$

$$n'\cos N' = (\sin u + e\sin\omega)\cos i$$

$$n\cos(\Omega - N) = \alpha \qquad n'\sin(N' - \Omega) = \alpha'$$

$$\cos\Omega\sin\omega + \sin\Omega\cos\omega\cos i = G'$$

$$n\sin(\Omega - N) = \beta \qquad n'\cos(N' - \Omega) = \beta'$$

$$\sin\Omega\sin\omega - \cos\Omega\cos\omega\cos i = H'$$

$$-n\sin N\operatorname{tg} i = \gamma \qquad n'\cos N'\operatorname{tg} i = \gamma' \qquad -\cos\omega\sin i = K'$$

$$\frac{p+r}{r}\sin v = f; \quad \frac{\cos^2\varphi\cos v}{r} = f' \qquad \log k = 8\cdot 235581$$

$$\delta' M = \frac{r^2}{w\sin 1''.pek\sqrt{a}}\left\{\begin{array}{c}(f\alpha + f'x)\delta\xi' \\ +(f\beta + f'y)\delta\eta' \\ +(f\gamma + f'z)\delta\zeta'\end{array}\right\} - \frac{\cos\varphi}{pe\sin 1''}\left\{\begin{array}{l}\left(G'\cos^2\varphi + \frac{fx}{r}\right)\delta\xi \\ + \left(H'\cos^2\varphi + \frac{fy}{r}\right)\delta\eta \\ + \left(K'\cos^2\varphi + \frac{fz}{r}\right)\delta\zeta\end{array}\right\}$$

$$\delta'\mu = \frac{3a\mu}{wk\sqrt{p}}(\alpha\delta\xi' + \beta\delta\eta' + \gamma\delta\zeta') - \frac{3a\mu}{r^3}(x\delta\xi + y\delta\eta + z\delta\zeta)$$

$$\delta'\varphi = \frac{-\sqrt{a}}{w \sin 1''.k.r}\left\{\begin{array}{l}(X\cos E+rG')\delta\xi' \\ +(Y\cos E+rH')\delta\eta' \\ +(Z\cos E+rK')\delta\zeta'\end{array}\right\}+$$

$$+\frac{1}{r\cos\varphi\sin 1''}\left\{\begin{array}{l}\left(\alpha'\cos E - X\frac{\sin v}{r}\right)\delta\xi \\ +\left(\beta'\cos E - Y\frac{\sin v}{r}\right)\delta\eta \\ +\left(\gamma'\cos E - Z\frac{\sin v}{r}\right)\delta\zeta\end{array}\right\}$$

$$\delta'\omega+\cos i\delta'\Omega =$$

$$= -\frac{1}{w\sin 1''.ke\sqrt{p}}\left\{\begin{array}{l}\left(x\frac{p}{r}\cos E+X\sin v+\alpha r\sin v\right)\delta\xi' \\ +\left(y\frac{p}{r}\cos E+Y\sin v+\beta r\sin v\right)\delta\eta' \\ +\left(z\frac{p}{r}\cos E+Z\sin v+\gamma r\sin v\right)\delta\zeta'\end{array}\right\}+$$

$$+\frac{1}{er^2\sin 1''}\left\{\begin{array}{l}(x\sin v+X\cos E)\delta\xi \\ +(y\sin v+Y\cos E)\delta\eta \\ +(z\sin v+Z\cos E)\delta\zeta\end{array}\right\}$$

$$\delta'\Omega = h'[\sin\Omega\delta\xi'-\cos\Omega\delta\eta'+\operatorname{cotg} i\delta\zeta']+$$
$$+h[\sin\Omega\delta\xi-\cos\Omega\delta\eta+\operatorname{cotg} i\delta\zeta]$$

$$\delta' i = g'[\sin\Omega\delta\xi'-\cos\Omega\delta\eta'+\operatorname{cotg} i\delta\zeta']+$$
$$+g[\sin\Omega\delta\xi-\cos\Omega\delta\eta+\operatorname{cotg} i\delta\zeta].$$

E = exzentrische Anomalie in der mittleren Bahn. Die diesen und den vorhergehenden Formeln gemeinsamen Bezeichnungen drücken auch dieselben Größen aus.

Für die Zeit $t_1+\tau$ ist die Störung der mittleren Anomalie $=\delta'M+\tau\delta'\mu$. Ist $t_1+\tau$ = 1852 September 22·0, so wird

$$\cos\delta\Delta\alpha_6 = \frac{\cos\delta\, d\alpha}{dM_0}(\delta'M+\tau\delta'\mu)+\left(\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\mu}\right)\delta'\mu+$$
$$+\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\varphi}\delta'\varphi+\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\pi}(\delta'\omega+\delta'\Omega)$$
$$+\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\Omega}\delta'\Omega+\frac{\cos\delta\, d\alpha}{di}\delta' i.$$

$\Delta\delta_6$ wird in ähnlicher Weise und ebenfalls mittels $\left(\frac{d\delta}{d\mu}\right)$ gefunden. Die Differentialquotienten sind im vorigen Abschnitt angegeben.

Für $t_1 = 1851$ Oktober $28 \cdot 0$; $\tau = 330$; $w = 80$ erhält man:

$$\cos\delta\Delta\alpha_6 = 6''06412\,\delta\xi' + 5''70908\,\delta\eta' + 5''09504\,\delta\zeta' + \\ + 5''61422\,\delta\xi + 3''68660\,\delta\eta + 4''91785\,\delta\zeta$$

$$\Delta\delta_6 = 5 \cdot 70495\,\delta\xi' + 5 \cdot 29732\,\delta\eta' + 5 \cdot 38861\,\delta\zeta' + \\ + 5 \cdot 29250\,\delta\xi + 3''71113\,\delta\eta + 4 \cdot 60957\,\delta\zeta.$$

Störungsgleichungen.

Sind $x_1 y_1 z_1 m_1$ die rechtwinkligen Ekliptikalkoordinaten und die Masse (in Teilen der Sonnenmasse) von A und werden die B entsprechenden Größen durch dieselben Buchstaben mit dem Index 2 bezeichnet, so sind, da die Störung des Sonnenortes durch die Kometenmasse zu vernachlässigen ist, die Grundgleichungen zur Berechnung der Störungen der x-Koordinate

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} = -\frac{x_1}{r_1^3} + m_2 \frac{\xi}{\rho^3} \qquad d\tau = k\,dt$$

$$x_2 - x_1 = \xi$$

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} = -\frac{x_2}{r_2^3} - m_1 \frac{\xi}{\rho^3} \qquad y_2 - y_1 = \eta$$

$$z_2 - z_1 = \zeta$$

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Die Berechnung von m_1 und m_2 ist ohne die Kenntnis der Bahn des Schwerpunktes nicht durchführbar. Wenn auch m_1 wahrscheinlich größer ist als m_2, da A in beiden Erscheinungen früher gesehen worden ist und meist heller erschien als B, so führt doch die Annahme $m_1 = m_2 = \frac{1}{2} m$ (mittlere Bahn = Bahn des Schwerpunktes) zu Störungswerten, welche sich nur äußerst wenig von jenen unterscheiden, die unter der Annahme $m_1 = m$, $m_2 = 0$ erhalten werden. Es ist daher die Bestimmung der Summe der Massen nahezu unabhängig von dem Verhältnis der Massen.

Setzt man

$$x_1 = x - \frac{1}{2}\xi \qquad y_1 = y - \frac{1}{2}\eta \qquad z_1 = z - \frac{1}{2}\zeta$$

$$x_2 = x + \frac{1}{2}\xi \qquad y_2 = y + \frac{1}{2}\eta \qquad z_2 = z + \frac{1}{2}\zeta,$$

so gelangt man bei Vernachlässigung kleiner Größen der dritten Ordnung zur Gleichung

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{3x}{r^5}(x\xi + y\eta + z\zeta)\left(1 - \frac{5}{8}\frac{\rho^2}{r^2}\right) - \frac{\xi}{r^3}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{\rho^2}{r^2}\right) - \frac{m\xi}{\rho^3}.$$

Der Faktor $1 - \frac{5}{8}\frac{\rho^2}{r^2}$ ist bis 1852 Mai 15 von der Einheit so wenig verschieden, daß sein Logarithmus noch 0·00000 ist; von da bis September 22 fällt er nur auf 9·99990. Man kann daher diesen Faktor der Einheit gleichsetzen und erhält, da

$$\xi = \xi_0 + \delta\xi,$$

$$\frac{d^2\delta\xi}{d\tau^2} = \frac{3x}{r^5}(x\delta\xi + y\delta\eta + z\delta\zeta) - \frac{\delta\xi}{r^3} - \frac{m\xi}{\rho^3}.$$

$\frac{d^2\delta\eta}{d\tau^2}$ und $\frac{d^2\delta\zeta}{d\tau^2}$ werden durch analoge Gleichungen ausgedrückt, welche aus dieser durch zyklische Vertauschung der Koordinaten und ihrer Störungen hervorgehen.

Die Relationen

$$x_1 = x - \frac{1}{2}\xi$$

$$x_2 = x + \frac{1}{2}\xi,$$

welche aus der Annahme

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_2 - x_1 = \xi$$

folgen, entsprechen der Ableitung der mittleren Bahn aus dem Mittel der sphärischen Koordinaten von A und B. Hienach müßten, da $\xi = \xi_0 + \delta\xi$, die absoluten Werte der Störungen

von A und B gleich groß sein, was bei der Bewegung gleicher Massen in verschiedenen Bahnen nicht wahrscheinlich ist. Überdies würde ein Fehler der Koordinaten der mittleren Bahn fast unverändert in die Koordinaten der gestörten Bahn übergehen, weil die Differenzen der Koordinaten der ungestörten Bahnen und ihre Störungen von Änderungen der mittleren Bahn nur in sehr geringem Maße beeinflußt werden.

Es erscheint daher zweckmäßig, die Koordinaten der gestörten Bahn aus den Koordinaten (x_1), (x_2)... der ungestörten Bahn abzuleiten und $x, y, z, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ nur zur Berechnung der Störungen zu verwenden.

Ich nehme also an

$$x_1 = (x_1)+u_1 \qquad x_2-x_1 = \xi$$
$$x_2 = (x_2)+u_2 \qquad (x_2)-(x_1) = \xi_0$$
$$u_2-u_1 = \delta\xi$$

$\frac{x_1+x_2}{2}-x$ ist für beliebige Werte des Verhältnisses $\frac{m_1}{m_2}$ sehr nahe gleich Null, während $x-\frac{(x_1)+(x_2)}{2}$ ungefähr gleich groß ist wie $\frac{u_1+u_2}{2}$ und daher nur für verschwindend kleine Massen oder für $m_1 = m_2$ nahezu Null wird. Macht man aber die Annahme $m_1 = m_2$, so ist es vorteilhafter, von der Gleichung

$$\frac{(x_1)+(x_2)}{2} = x$$

auszugehen, da dann

$$(x_1) = x-\frac{1}{2}\xi_0$$

$$(x_2) = x+\frac{1}{2}\xi_0$$

wird und zur Berechnung von (x_1) und (x_2) die Elemente der mittleren Bahn und ihre Variationen direkt verwendet werden können, nämlich

$$M-\frac{1}{2}\delta M,\ \mu-\frac{1}{2}\delta\mu,\ldots$$

$$M+\frac{1}{2}\delta M,\ \mu+\frac{1}{2}\delta\mu,\ldots$$

Die Störungsgleichungen sind

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} = \frac{(x_1)}{(r_1)^3} - \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{m_2 \xi}{\rho^3}$$
$$\frac{d^2 u_2}{d\tau^2} = \frac{(x_2)}{(r_2)^3} - \frac{x_2}{r_2^3} - \frac{m_1 \xi}{\rho^3} \qquad 1)$$

Aus der Differenz dieser und der für die übrigen Koordinaten analog gebildeten Gleichungen folgt:

$$\frac{d^2 \delta\xi}{d\tau^2} = \frac{3x}{r^5} \cdot q - \frac{\delta\xi}{r^3} - \frac{m\xi}{\rho^3}$$
$$\frac{d^2 \delta\eta}{d\tau^2} = \frac{3y}{r^5} \cdot q - \frac{\delta\eta}{r^3} - \frac{m\eta}{\rho^3} \qquad 2)$$
$$\frac{d^2 \delta\zeta}{d\tau^2} = \frac{3z}{r^5} \cdot q - \frac{\delta\zeta}{r^3} - \frac{m\zeta}{\rho^3}$$

Hierin ist

$$q = x\delta\xi + y\delta\eta + z\delta\zeta.$$

Bildet man die Summe der Gleichungen 1) und nennt

$$u_1 + u_2 = U$$
$$y_1 - (y_1) + y_2 - (y_2) = v_1 + v_2 = V$$
$$z_1 - (z_1) + z_2 - (z_2) = w_1 + w_2 = W$$

so wird für $m_1 = m_2$

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} = \frac{3x}{r^5} Q - \frac{1}{r^3}(U + R\xi + S\delta\xi)$$
$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} = \frac{3y}{r^5} Q - \frac{1}{r^3}(V + R\eta + S\delta\eta) \qquad 3)$$
$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} = \frac{3z}{r^5} Q - \frac{1}{r^3}(W + R\zeta + S\delta\zeta)$$

Q, R, S bedeuten:

$$Q = Ux + Vy + Wz + P$$
$$P = \frac{1}{4}(\rho^2 - \rho_0^2) + \frac{5}{3} q \left(\frac{1}{2} R + S\right)$$

$$R = -\frac{3}{2}\frac{q}{r^2}$$

$$S = -\frac{3}{2r^2}(x\xi_0 + y\eta_0 + z\zeta_0)$$

$$\rho^2 = (\xi_0 + \delta\xi)^2 + (\eta_0 + \delta\eta)^2 + (\zeta_0 + \delta\zeta)^2$$
$$\rho_0^2 = (\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2$$
$$q = x\delta\xi + y\delta\eta + z\delta\zeta$$

Die in 2) vernachlässigten Glieder sind Funktionen zweiten oder höheren Grades von U, V, W und ξ_0, η_0, ζ_0. Für $m_1 = m_2$ sind U, V, W kleine Größen mindestens zweiten Grades mit Bezug auf $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$, welche von gleicher Größenklasse mit ξ_0, η_0, ζ_0 sind, so daß die größten der in 2) sowie auch in 3) unterdrückten Glieder mindestens den Grad 3 haben.

Die in den Gleichungen 2) und 3) angesetzten Glieder bleiben für $m_1 = m_2$ ungeändert, wenn an Stelle der Annahme $\frac{(x_1) + (x_2)}{2} = x$ die Annahme $\frac{x_1 + x_2}{2} = x$ tritt. Ist aber $m_1 \gtrless m_2$, so kann die Größenklasse von U, V, W die von $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ erreichen und der Wert der vernachlässigten Glieder hiedurch eine merkliche Erhöhung erfahren; auch müßte in den Gleichungen 3) noch je ein von der Massendifferenz abhängiges Glied angesetzt werden. Die Annahme $m_1 \gtrless m_2$ bedingt ferner $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ und daher

$$x_1 = x - \frac{1}{2}\xi_0 - \frac{1}{2}\delta\xi \qquad x_2 = x + \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{2}\delta\xi$$

$$(x_1) = x - \frac{1}{2}\xi_0 - \frac{1}{2}U \qquad (x_2) = x + \frac{1}{2}\xi_0 - \frac{1}{2}U$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen 1) läßt die Entwicklung zu:

$$\frac{d^2\delta\xi}{dz^2} = \frac{3x}{r^5}q - \frac{\delta\xi}{r^3} - \frac{m\xi}{\rho^3} +$$
$$+ \frac{3x}{r^5}\left[\frac{U\xi_0 + V\eta_0 + W\zeta_0}{2} + \frac{5}{3}S(Ux + Vy + Wz)\right]$$
$$- \frac{1}{r^3}\left[US - \frac{3}{2r^2}\xi_0(Ux + Vy + Wz)\right].$$

In dem durch $m_1 = m$, $m_2 = 0$ bestimmten Grenzfalle werden

$$x_1 = (x_1) \qquad U = \delta\xi$$
$$y_1 = (y_1) \qquad V = \delta\eta$$
$$z_1 = (z_1) \qquad W = \delta\zeta$$

Die Glieder zweiter Ordnung verwandeln sich hiedurch in:

$$\frac{3x}{r^5}\left[\frac{\xi_0\delta\xi+\eta_0\delta\eta+\zeta_0\delta\zeta}{2}+\frac{5}{3}Sq\right]-\frac{1}{r^3}[R\xi_0+S\delta\xi].$$

Bezeichnet man den Faktor von $\frac{3x}{r^5}$ mit Q', so wird der durch $\Delta\frac{d^2\delta\xi}{d\tau^2}$, $\Delta\frac{d^2\delta\eta}{d\tau^2}$, $\Delta\frac{d^2\delta\zeta}{d\tau^2}$ ausgedrückte Fehler der Gleichungen 2) in erster Annäherung folgendermaßen dargestellt:

$$\Delta\frac{d^2\delta\xi}{d\tau^2} = \frac{3x}{r^5}Q'-\frac{1}{r^3}(R\xi_0+S\delta\xi)$$
$$\Delta\frac{d^2\delta\eta}{d\tau^2} = \frac{3y}{r^5}Q'-\frac{1}{r^3}(R\eta_0+S\delta\eta) \qquad 4)$$
$$\Delta\frac{d^2\delta\zeta}{d\tau^2} = \frac{3z}{r^5}Q'-\frac{1}{r^3}(R\zeta_0+S\delta\zeta)$$

In dem andern Grenzfalle $m_1 = 0$, $m_2 = m$ würden diese Fehler entgegengesetztes Vorzeichen erhalten.

Berechnung der Störungen.

Zu Beginn der Rechnung habe ich unter Zugrundelegung der für $\Delta\alpha_6 \cos\delta = 0$ geltenden Variationen die Masse m gesucht, welche die größte Annäherung der Kometen vor dem Jahre 1846 ergibt. Der dieser Bedingung ungefähr entsprechende Wert 10^{-11} erwies sich jedoch nach Fortsetzung der Störungsrechnung bis 1852 als viel zu groß.[1]

[1] In der Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellsch., 39, Jahrg. III, habe ich einen kurzen Bericht hierüber veröffentlicht, in welchem die Variationen der Elemente von den in dieser Abhandlung gegebenen ein wenig abweichen. Der Unterschied rührt daher, daß dort die auf die Oskulationsepoche 1844 September 14 bezogenen Differentialstörungen der Kometen durch die Planeten in Rechnung gestellt worden sind. Bei Abfassung dieses Berichtes (während der Sommerferien) hatte ich meine früheren Rechnungen über die Bewegung der Kometen nicht zur Hand und unterschätzte die wechselseitigen Störungen während des letzten Umlaufes.

Die nächste Annahme war $\Delta\alpha_6 \cos\delta = -600''$; nach Ermittlung der zugehörigen Werte von ξ_0, η_0, ζ_0 wurden nach Formel 2) die störenden Kräfte berechnet und durch Quadratur (Oskulation 1846 Februar 11·0) für die Zeit t_1 die Störungen und ihre Differentialquotienten bestimmt, welche in Verbindung mit den für t_1 geltenden Konstanten die Störungen in Rektaszension und Deklination für 1852 September 22·0 ergaben.

Die erste Hypothese $\log m = 8 \cdot 10000 - 20$ hatte ($t_1 = 1851$ März 2·0) das Ergebnis $\Delta\alpha_6 \cos\delta = -684''43$, $\Delta\delta_6 = +350''48$. Wären die Störungen der Masse proportioniert, so würde die Reduktion von 684·43 auf 600 bedingen: $\log m = 8 \cdot 04282$; die Wiederholung der Rechnung mit diesem Werte gibt ($t_1 = 1851$ Oktober 28·0) $-606''13$, $+310''33$. Es wird daher $\log m = 8 \cdot 03843$ die angenommene Störung in Rektaszension gut darstellen und $\Delta\delta_6$ sehr nahe $= 307''21$ machen. Die Fehler der Deklinationsdarstellung durch die Variationen ist $+(317''21)$, so daß nach Subtraktion von $\Delta\delta_6$ ein Fehler von $+10''$ übrigbleibt.

Indem man die Störungen mit dem letzten Massenwerte nach rückwärts berechnet, erhält man in Einheiten der achten Dezimalstelle

1843	ξ_0	η_0	ζ_0	$\delta\xi$	$\delta\eta$	$\delta\zeta$
Mai 23	35655	−41059	23712	−30275	40568	−19949
Juni 12	34820	−40663	23516	−26703	36980	−17258
Juli 2	34004	−40324	23322	−24065	33788	−15262
22	33207	−40043	23130	−21895	30927	−13633
August 11	32432	−39819	22941	−20027	28335	−12247

woraus folgt

1843	ξ	η	ζ	
Mai 23	5380	− 491	3763	
Juni 12	8117	− 3683	6258	$\Delta\alpha_6 \cos\delta = -600''$
Juli 2	9939	− 6536	8060	$\log m = 8 \cdot 03843 - 20$
22	11312	− 9116	9497	
August 11	12405	−11484	10694	

Die Kometen kommen daher einander nicht genügend nahe, da im Sinne des Fortschreitens der Störungsrechnung zuerst η und beträchtlich später ζ und ξ das Zeichen wechseln.

Die dritte Annahme $\Delta\alpha_6 \cos\delta = -900''$ ergab für $\log m = 8\cdot1$ ($t_1 = 1851$ März $2\cdot0$) $\Delta\alpha_6 \cos\delta = -849''56$, $\Delta\delta_6 = +433''22$, woraus gefolgert werden kann: $\log m = 8\cdot12505$, $\Delta\delta_6 = 458''95$, Fehler in Deklination $= +15''$. Man erhält ferner

	ξ	η	ζ	
1843 Dez. 9	— 392	— 7029	5966	$\Delta\alpha_6 \cos\delta = -900''$
1844 Jänner 18	+1559	—14877	9001	$\log m = 8\cdot12505-20$
Febr. 27	3384	—20945	10916	
April 7	5146	—26075	12291	
Mai 17	6905	—30652	13359	

Die Kometen bleiben in größerer Entfernung als bei voriger Annahme. Bei dieser wechselt zuerst ξ, dann η und zuletzt ζ das Zeichen. Es existiert daher ein zwischen $-600''$ und $-900''$ gelegener Wert von $\Delta\alpha_6 \cos\delta$, welcher das gleichzeitige Verschwinden von ξ und η veranlaßt; ζ aber wird erst später der Null gleich. Man wird deshalb nicht umhin können, von der Bedingung, daß die Summe der Fehlerquadrate ein absolutes Minimum sei, abzugehen und die Grenzen der zulässigen Fehler etwas weiter zu stecken. Es ist aber sehr schwer, jene Kombination von Variationen zu finden, welche bei geringster Erhöhung der Fehlerquadratsumme die größte Annäherung der Kometen ermöglicht.

Die Deklinationsdifferenz der Kometen für 1852 September 22 wird um so besser dargestellt, je kleiner $\Delta\alpha_6 \cos\delta$ ist; diese Störung kann aber nicht viel weniger als $600''$ betragen, weil sonst ein Zusammentreffen der Kometen nur durch solche Änderungen der Variationen zu erzielen wäre, welche ein erhebliches Wachsen der Fehler in den ersten fünf Örtern zur Folge haben. Diese Fehler, deren Größe für eine Störung von etwa $600''$ wohl noch nicht besonders bedenklich

sein dürfte, bleiben nur dann sehr klein, wenn die Störung ungefähr 900" ausmacht, da in diesem Falle eine geringe Änderung von δi in Verbindung mit den einem relativen Minimum der Fehlerquadratsumme entsprechenden Änderungen der übrigen Variationen genügt, um ein Zusammentreffen der Kometenkerne herbeizuführen.

Es sei $di = -1"$, so wird für $\Delta\alpha_6 \cos\delta = -900"$ den früheren Angaben gemäß

$$\begin{aligned} \delta M_0 &= -20"754 \\ \delta\mu &= -0 \cdot 047386 \\ \delta\varphi &= +2 \cdot 798 \\ \delta\pi &= +2 \cdot 820 \\ \delta\Omega &= -6 \cdot 542 \\ \delta i &= +2 \cdot 933 \end{aligned} \qquad \text{II.}$$

Die provisorische Störungsrechnung (mit großen Intervallen) gibt für $\log m = 8 \cdot 1$ ($t_1 = 1851$ März 2) $-922"23$, $+469"85$; die Reduktion auf $-900"$ führt zu $\log m = 8 \cdot 08940$. Unter Zugrundelegung dieses Massenwertes gibt die genaue Berechnung der Störungen von 1843 November 19 bis 1852 Oktober 2 nach den Formeln 2) und 3) in Einheiten der siebenten Dezimalstelle:

	1852 Aug. 28	Sept. 22		Aug. 28	Sept. 22		Aug. 28	Sept. 22
$\delta\xi$	+78811	+82261	$\delta\eta$	+637	+32515	$\delta\zeta$	+15774	+13751
U	− 101	+ 83	V	−235	− 333	W	− 1	+ 45
u_1	−39456	−41089	v_1	−436	−16424	w_1	− 7887	− 6853
u_2	+39355	+41172	v_2	+201	+16091	w_2	+ 7886	+ 6898

Die Störungen während der ersten Sichtbarkeitsperiode der Kometen erreichen kaum eine halbe Einheit der siebenten Dezimalstelle und sind sonach tatsächlich zu vernachlässigen.

Der aus $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ für September 22·0 auf differentiellem Wege abgeleitete Wert von $\Delta\alpha_6 = \cos\delta$ ist gleich —904ʺ24 und der angenommene Massenwert daher noch etwas zu groß. Der dem letzten Orte zukommende Fehler in Deklination wird durch die Änderung der Neigung fast gar nicht beeinflußt.

Die Summierung der Störungen von 1846 Februar 11 nach rückwärts läßt erkennen, daß die Kometen einander sehr nahe kommen; die Komponenten der Entfernung und diese selbst werden nämlich in Einheiten der achten Dezimalstelle:

	ξ	η	ζ	ρ	
November 19·3125	—193	525	—185	589	
6250	—188	568	+155	618	log m = 8·08940
9375	—155	529	475	728	
20·2500	—107	440	753	879	

ξ und η haben bereits das Zeichen gewechselt; für ζ tritt daher der Zeichenwechsel noch immer etwas später ein. Aus der Einheit der Entfernung gesehen, würde der Abstand $\rho = 589$ als größten Gesichtswinkel 1ʺ21 haben. Die Störungen sind nur zur Prüfung des auf anderem Wege erhaltenen kleinsten Abstandes 1ʺ21 der Kometen in so engen Intervallen berechnet worden.

Die zuletzt gemachten Annahmen führen bereits zu einer sehr bedeutenden Annäherung der Mittelpunkte beider Kometen und stellen auch die beobachteten Koordinatenunterschiede mit Ausnahme der sechsten Deklinationsdifferenz gut dar. Es ist aber auch von Wichtigkeit, sich darüber Rechenschaft zu geben, wie die separate Darstellung der über ungleiche Zeitstrecken verteilten Normalörter von A und B sich zu diesen Annahmen verhält. Durch Subtraktion, beziehungsweise Addition der Hälfte des Betrages der Variationen II von, beziehungsweise zu den Elementen der mittleren Bahn erhält man die Elemente der ungestörten Bahn von A, beziehungsweise B. Aus diesen

Elementen können durch den Übergang auf rechtwinklige Ekliptikalkoordinaten, Addition der betreffenden Störungen und Übertragung der Koordinaten auf den Äquator Rektaszension und Deklination abgeleitet werden. Die Erdnähe der Kometen im Jahre 1846 bringt eine erhebliche Unsicherheit in die Resultate der Rechnung, indem bei Benützung siebenstelliger Tafeln die Rektaszension bis zu 0"2, vielleicht sogar etwas mehr, fehlerhaft sein kann; die Unsicherheit der Deklinationsbestimmung ist merklich kleiner.

Eine ausführlichere Angabe zusammengehöriger Daten wird später gegeben werden; hier beschränke ich mich auf die Angabe der Fehler der Darstellung, welche der Ausgleichsrechnung zur Grundlage dienten.

	B_I	
	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
1845 Dez. 25·5	+ 2"34	(+ 7"64)[1]
1846 Jänn. 23·5	+ 0·17	+ 0·88
Febr. 14·5	+ 0·87	+ 0·76
März 2·5	— 1·11	— 0·70
März 15·5	— 1·40	+ 0·49
März 28·5	— 0·01	+ 1·74
1852 Aug. 28·0	+32·64	—24·09
Sept. 22·0	— 2·08	— 9·05

	B_{II}	
	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
1846 Jänn. 23·5	—0"38	+0"23
Febr. 6·5	+0·95	+0·46
Febr. 18·5	+0·72	+1·13
März 2·5	0·00	0·00
März 21·5	—0·08	+0·39
1852 Sept. 22·0	+2·13	+3·98

Da die den zwei letzten Örtern von B_I eigenen großen Abweichungen durch die Ausgleichsrechnung nur mäßig vermindert werden können, so würden sich bei Annahme gleichen Gewichtes die Fehler der Darstellung der übrigen Örter zu sehr erhöhen. Ich habe dem vorletzten Orte das (mit Rücksicht auf die sehr geringe Genauigkeit der wenigen in ihm vereinten Beobachtungen wohl noch zu große) Gewicht $^1/_4$, dem letzten Orte das Gewicht $^1/_2$ gegeben; den Örtern von B_{II} wurde gleiches Gewicht beigemessen.

[1] Diese Abweichung ist bei der Verbesserung der Elemente nicht berücksichtigt worden; siehe Note 2 auf p. 786.

Differentialquotienten (Zählung der mittleren Anomalie von 1844 September 14·0 an).

$\cos\delta\, d\alpha$	$: dM_0$	$: d\mu$	$: d\varphi$	$: d\pi$	$: d\Omega$	$: di$
45 Dez. 25·5	0·1134	2·5549	0"4929	9·8467	9"0249	9"1973
46 Jänn. 23·5	0·2714	2·8054	0"5286	9·6451	8"9342	8·9293
Febr. 14·5	0·4898	3·0810	0"6067	9·3300	8"6528	9·3215
März 2·5	0·7982	3·4492	0"6352	9·1604	7"9373	8·9178
» 15·5	1·0590	3·7484	0"4415	9·6395	8"0779	9"4825
» 28·5	1·1847	3·8986	9·9677	0·0279	8"8438	9"8653
52 Aug. 28·0	0·7089	4·1755	9"3796	9·6374	8·5342	8"1126
Sept. 22·0	0·6436	4·1136	9·9595	9·5979	8·3897	9"1423
46 Jänn. 23·5	0·2723	2·8072	0"5277	9·6461	8"9338	8·9250
Febr. 6·5	0·3885	2·9563	0"5727	9·4766	8"7987	9·2631
» 18·5	0·5544	3·1604	0"6207	9·2522	8"5468	9·3118
März 2·5	0·7963	3·4473	0"6338	9·1636	7"9425	8·9208
» 21·5	1·1368	3·8389	0"0827	9·8497	8"5221	9"7188
52 Sept. 22·0	0·6457	4·1157	9·9526	9·5967	8·4047	9"1357
$d\delta$	$: dM_0$	$: d\mu$	$: d\varphi$	$: d\pi$	$: d\Omega$	$: di$
45 Dez. 25·5	9"7898	2"6037	9"9070	9·1125	9·3775	9·6310
46 Jänn. 23·5	0"4457	3"1757	9"7840	9"2663	9·4009	9"4455
Febr. 14·5	0"8029	3"5290	0"0628	9"7727	9·3417	0"0339
März 2·5	1"0033	3"7343	0"4045	0"0290	9·1358	0"2486
» 15·5	1"0813	3"8196	0"6255	0"1716	8·3938	0"3445
» 28·5	1"0208	3"7682	0"6997	0"1969	9"0108	0"3671
52 Aug. 28·0	0"3292	3"7937	9·6105	9"3360	9·1474	8"5944
Sept. 22·0	0"3618	3"8299	9"2623	9"3190	8·9590	9"5453
46 Jänn. 23·5	0"4425	3"1726	9"7834	9"2617	9·4002	9"4412
Febr. 6·5	0"6779	3"4035	9"9131	9"6153	9·3787	9"8775
» 18·5	0"8559	3"5828	0"1436	9"8391	9·3111	0"0959
März 2·5	0"9998	3"7309	0"4004	0"0254	9·1365	0"2470
» 21·5	1"0698	3"8121	0"6767	0"1976	8"5310	0"3633
52 Sept. 22·0	0"3652	3"8334	9"2357	9"3211	8·9691	9"5386

Die für B_{I} und B_{II} getrennt durchgeführte Bestimmung der Größen, welche, zu den angenommenen Elementen hinzu-

gefügt, die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum machen, ergab:

	$\delta\delta M$	$\delta\delta\mu$	$\delta\delta\varphi$	$\delta\delta\pi$	$\delta\delta\Omega$	$\delta\delta i$
für B_I	$-0''874$	$+0''001269$	$-0''325$	$+1''875$	$-6''077$	$-0''136$
» B_{II}	$+0·061$	$-0·000214$	$-0·040$	$+1·358$	$+3·343$	$-0·617$

Die angenommenen Variationen waren (in derselben Reihenfolge)

$$\pm 10·377 \pm 0·023693 \mp 1·399 \mp 1·410 \pm 3·271 \mp 1·466,$$

wo das obere Zeichen für B_I, das untere für B_{II} gilt. Es sind demnach die neuen Variationen

für B_I	$+9·503$	$+0·024962$	$-1·724$	$+0·465$	$-2·806$	$-1·602$	III
» B_{II}	$-10·316$	$-0·023907$	$+1·359$	$+2·768$	$+0·072$	$+0·849$	IV

Durch Subtraktion der Zahlen der ersten Reihe von denen der zweiten erhält man die bei Berechnung von ξ_0, η_0, ζ_0 an Stelle der Variationen II zu setzenden Größen

$$-19·819 - 0·048869 + 3·083 + 2·303 + 2·878 + 2·451. \qquad \text{V.}$$

Die erste dieser Variationen bezieht sich auf 1844 September 14·0. Nachdem ξ_0, η_0, ζ_0 aus den Variationen V in angemessenen Intervallen berechnet worden sind, wurde eine provisorische Berechnung der Störungen ausgeführt und auf Grund des hiebei erhaltenen Resultates der Massenwert $\log m =$ $= 8·09830$ angenommen. Bei der Berechnung der Störungen, welche diesem m entsprechen, sind die Intervalle stets so gewählt worden, daß die Differenzen der störenden Kräfte einen leicht zu übersehenden regelmäßigen Gang zeigen. Hiezu war es notwendig, das im allgemeinen auf 40 Tage festgesetzte Intervall mehrmals bedeutend zu kürzen, und zwar im Jahre 1846 bis auf 10 Tage, im Jahre 1852 (wegen der Größe und raschen Änderung der indirekten Glieder) bis auf 5 Tage und in der Nähe der Zeit der Teilung der Kometen bis auf $^5/_8$ Tage. Die folgende Tafel, deren Argumente den Tafeln der wichtigsten Bestimmungsstücke der mittleren Bahn entnommen sind, gewährt einen Überblick über die störenden Kräfte und die relativen, ungestörten Koordinaten der Kometen. Diese Größen sind in Einheiten der achten Dezimalstelle ausgedrückt; bei der Quadratur ist für den größten Teil der Zeitstrecke noch eine weitere Dezimalstelle berücksichtigt worden.

	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\xi}{dt^2}$	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\eta}{dt^2}$	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\zeta}{dt^2}$	ξ_0	η_0	ζ_0
43 Oktober 30				+ 18927	— 33509	+ 11668
Dezember 9	— 3884·7	+ 10658·7	— 5060·6	18503	— 34415	11727
44 Jänner 18	— 798·7	2151·1	— 782·6	18196	— 35495	11812
Februar 27	— 435·1	1132·7	— 372·1	18023	— 36755	11927
April 7	— 301·1	755·6	— 233·6	18006	— 38204	12077
Mai 17	— 231·5	559·2	— 166·1	18170	— 39852	12266
Juni 26	— 188·6	437·6	— 126·3	18549	— 41712	12502
August 5	— 159·1	353·7	— 100·0	19181	— 43794	12792
September 14	— 137·4	291·5	— 81·2	20123	— 46118	13146
Oktober 24	— 120·6	242·9	— 67·1	21434	— 48699	13577
Dezember 3	— 107·0	203·3	— 56·0	23209	— 51556	14101
45 Jänner 12	— 95·6	170·0	— 46·9	25560	— 54712	14743
Februar 21	— 85·9	141·4	— 39·4	28662	— 58189	15533
April 2	— 77·3	116·3	— 33·0	32743	— 62000	16516
Mai 12	— 69·4	93·9	— 27·5	38161	— 66141	17757
Juni 21	— 62·1	73·7	— 22·7	45468	— 70550	19351
Juli 31	— 55·1	55·2	— 18·4	55578	— 75001	21452
September 9	— 48·0	38·1	— 14·5	70083	— 78876	24306
Oktober 19	— 40·2	22·1	— 10·8	91960	— 80193	28303
November 28	— 30·2	+ 7·5	— 7·1	126667	— 72146	33874
46 Jänner 7	— 17·2	— 1·0	— 3·5	177323	— 29428	39260

	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\xi}{dt^2}$	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\eta}{dt^2}$	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\zeta}{dt^2}$	ξ_0	η_0	ζ_0
46 Februar 16	— 12·6	— 5·8	— 2·0	184529	+ 84493	29110
März 28	— 15·1	— 12·6	— 1·8	101776	146235	+ 5859
Mai 7	— 17·8	— 28·1	— 0·8	43866	140725	— 5680
Juni 16	— 14·8	— 44·0	+ 1·5	+ 13754	124733	— 10366
Juli 26	— 9·2	— 59·1	4·2	— 3459	109752	— 12404
September 4	— 1·6	— 73·8	7·3	— 14361	96930	— 13297
Oktober 14	+ 7·9	— 88·6	10·7	— 21841	85916	— 13619
November 23	19·7	— 103·4	14·6	— 27272	76291	— 13635
47 Jänner 2	34·4	— 118·2	18·9	— 31390	67715	— 13464
Februar 11	52·4	— 132·5	23·8	— 34615	59937	— 13176
März 23	74·3	— 145·9	29·2	— 37199	52777	— 12809
Mai 2	100·7	— 157·2	35·1	— 39309	46094	— 12386
Juni 11	131·9	— 164·9	41·4	— 41052	39784	— 11922
Juli 21	167·8	— 167·0	47·7	— 42503	33768	— 11427
August 30	207·0	— 160·7	53·6	— 43712	27984	— 10904
Oktober 9	246·7	— 143·6	58·1	— 44718	22385	— 10359
November 18	281·8	— 113·8	60·3	— 45546	16928	— 9796
Dezember 28	305·5	— 72·3	59·0	— 46222	11579	— 9214
48 Februar 6	311·2	— 24·0	53·8	— 46755	6308	— 8613
März 17	295·6	+ 22·7	45·1	— 47158	+ 1090	— 7994
April 26	261·0	58·8	34·5	— 47433	— 4094	— 7358

48 Juni 5	214·7	78·3	24·0	— 47588	— 9261	— 6703
Juli 15	165·4	80·5	15·1	— 47626	— 14429	— 6029
August 24	120·2	68·8	8·8	— 47547	— 19612	— 5336
Oktober 3	82·9	47·9	4·9	— 47348	— 24826	— 4621
November 12	54·2	+ 22·2	3·2	— 47029	— 30083	— 3883
Dezember 22	33·6	— 5·3	3·0	— 46585	— 35395	— 3121
49 Jänner 31	19·8	— 32·7	4·0	— 46011	— 40773	— 2332
März 12	11·3	— 59·3	5·9	— 45303	— 46230	— 1516
April 21	7·1	— 85·0	8·3	— 44455	— 51779	— 670
Mai 31	6·4	— 109·7	11·2	— 43455	— 57432	+ 209
Juli 10	8·5	— 134·0	14·5	— 42294	— 63200	1125
August 19	13·2	— 158·1	18·3	— 40956	— 69095	2080
September 28	20·3	— 182·5	22·5	— 39429	— 75128	3078
November 7	29·8	— 207·7	27·3	— 37700	— 81313	4123
Dezember 17	42·0	— 234·1	32·7	— 35750	— 87669	5219
50 Jänner 26	57·2	— 262·4	38·8	— 33558	— 94214	6373
März 7	75·9	— 292·9	45·9	— 31097	—100963	7591
April 16	98·9	— 326·4	54·1	— 28335	—107928	8879
Mai 26	127·1	— 363·6	63·7	— 25240	—115135	10245
Juli 5	161·9	— 405·2	75·1	— 21775	—122608	11700
August 14	205·0	— 452·2	88·8	— 17887	—130370	13256
September 23	258·7	— 505·7	105·2	— 13518	—138447	14924
November 2	326·4	— 567·2	125·3	— 8598	—146870	16722
Dezember 12	412·6	— 638·4	150·2	— 3044	—155673	18670

	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\xi}{dt^2}$	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\eta}{dt^2}$	$(40k)^2 \frac{d^2\delta\zeta}{dt^2}$	ξ_0	η_0	ζ_0
51 Jänner 21	523·4	— 721·1	181·2	+ 3248	—164896	20789
März 2	668·0	— 818·0	220·6	10410	—174589	23110
April 11	859·4	— 931·7	271·2	18609	—184804	25671
Mai 21	1118·2	— 1065·7	337·6	28061	—195592	28515
Juni 30	1474·5	— 1222·7	426·3	39051	—207006	31706
August 9	1978·0	— 1404·5	547·6	51953	—219112	35320
September 18	2709·8	— 1607·1	717·9	67284	—231965	39466
Oktober 28	3811·2	— 1812·1	964·4	85785	—245606	44292
Dezember 7	5538·6	— 1959·1	1334·0	108529	—260004	50006
52 Jänner 16	8388·3	— 1868·8	1911·9	137193	—274973	56924
Februar 25	13379·0	— 992·3	2855·6	174400	—289943	65510
April 5	22743·6	+ 2479·6	4454·4	224694	—303284	76518
Mai 15	41416·4	15303·2	7092·4	296276	—310302	91156
Juni 24	76195·2	66659·2	+ 9472·0	404503	—295932	111102
August 3	+ 58460·0	272755·0	— 13037·0	570584	—205487	135541
September 12	—578061·0	+225920·0	—137946·0	715361	+115186	134158
Oktober 2	—500493·0	—405510·0	— 64294·0	651286	+340233	+ 99912

Die Quadratur der störenden Kräfte ergab:

	ξ	η	ζ	$\frac{d\xi}{dt}$	$\frac{d\eta}{dt}$	$\frac{d\zeta}{dt}$
43 Nov. 29·0	+1007·0	—2715·9	+1683·7	+143·06	—403·23	+161·67
43 Dez. 4·0	+1633·2	—4490·0	+2350·4	+112·08	—318·82	+113·43

Die ξ, η, ζ sind noch für Dezember 4 so klein, daß die von der Sonne abhängigen Glieder der Störungsgleichungen vernachlässigt werden können. Es wird also

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{mk^2\xi}{\rho^3}.$$

Aus dieser Gleichung und den analog gebildeten Gleichungen für η und ζ ist die Bahn, welche B_{II} um B_I beschreibt, leicht abzuleiten.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ ist durch die Gleichung bestimmt

$$\mathfrak{V}^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2.$$

Setzt man ferner

$$\zeta\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\zeta}{dt} = \alpha \qquad mk^2 = a$$

$$\xi\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\xi}{dt} = \beta \qquad \frac{2a}{\rho} - \mathfrak{V}^2 = b$$

$$\eta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\eta}{dt} = \gamma \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = c,$$

so sind a, b, c konstante Größen.

Zur Berechnung von c dient auch die Gleichung

$$c = \rho^2\mathfrak{V}^2 - \rho^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

in welcher

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = \xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt}.$$

Nach Ersetzung von $\mathfrak{V}$ durch b wird

$$c = 2a\rho - b\rho^2 - \rho^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2.$$

Der kleinste Abstand ρ_1 der Kometen ist daher durch die Gleichung gegeben

$$2a\rho_1 - b\rho_1^2 = c.$$

Die Zeit t_1, für welche $\rho = \rho_1$, folgt aus

$$t - t_1 = \frac{a}{b^{\frac{3}{2}}} y - \sqrt{\frac{a^2 - bc}{b^3}} \sin y$$

$$\cos y = \frac{a - b\rho}{\sqrt{a^2 - bc}}.$$

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_1$ zur Zeit t_1 ist bestimmt durch

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{\sqrt{c}}{\rho_1}.$$

Die aus obigen Angaben abgeleiteten Werte dieser Größen unterscheiden sich nur um eine Einheit der letzten Dezimalstelle; ich habe als Mittel angenommen

$$\rho_1 = 86 \cdot 22 = 0'1778$$
$$t_1 = 1843 \text{ November } 23 \cdot 988$$
$$\mathfrak{V}_1 = 2931 \cdot 7 = 50 \cdot 73\, m \text{ in der Sekunde.}$$

Ein Abstand der Kometenzentra im Betrage von 0'18 bedingt jedenfalls eine partielle Vereinigung der Kerne. Von den Vorgängen, unter welchen die Teilung des Kometen sich vollzogen hat, wird man sich schwerlich ein richtiges Bild machen können. Es wird gewiß längerer Zeit bedurft haben, bis die getrennten Massen im Wege fortgesetzter Umlagerungen die Form erhielten, welche sie später zeigten. Veränderungen des Baues der Kometen könnten zur Folge haben, daß die Verdichtungszentra, insofern sie als materielle Punkte gelten, deren Massensumme gleich m ist, von Punkten auszugehen scheinen, welche um einen kleinen Bruchteil des Durchmessers des Kometenkernes voneinander abstehen.

Es liegen nur zwei Bestimmungen dieses Durchmessers d vor, und zwar beide aus dem Jahre 1805. Schröter (Lilienthal) hat als Resultat seiner Messungen (13f. Teleskop, Vergrößerung 136) angegeben: Dezember 8·25, $\frac{d}{\Delta} = 6''4$. Malavois (Isle de France) hat sechs Tage später den Kometen mit

einem Fernrohre von 1 Fuß Brennweite und 16facher Vergrößerung beobachtet und dessen Durchmesser[1] auf 1′ geschätzt. Die diesen scheinbaren Durchmessern entsprechenden, der Ephemeride entnommenen Entfernungen Δ des Kometen sind 0·038 und 0·054; es ist daher der auf die Einheit der Entfernung reduzierte Durchmesser d nach Schröter 0′24 und nach Malavois 3′2. Der zweite Wert ist nach den Angaben über das Aussehen des Kernes in den späteren Erscheinungen des Kometen offenbar zu groß, der erste hingegen zu klein. Die Erfahrung lehrt, daß die wahrgenommene Größe der Kometenkerne wegen der nach außen hin erfolgenden Lichtabnahme wesentlich von dem zur Beobachtung benützten Instrumente, speziell von der angewandten Vergrößerung, außerdem von der Helligkeit des Gesichtsfeldes und der Schärfe des Auges abhängt. Ein ähnliches Abhängigkeitsverhältnis bekunden aus demselben Grunde auch die beobachteten Dimensionen der Nebelhülle. Es ist daher sehr wahrscheinlich, daß, falls bedeutende Abweichungen von den Schätzungen anderer Beobachter zu Tage treten, Hülle und Kern zugleich entweder über- oder unterschätzt worden sind.

Über den Durchmesser D der Hülle des Biela'schen Kometen vor seiner Teilung sind folgende Angaben $\frac{D}{\Delta}$ gemacht worden:

	$\frac{D}{\Delta}$	Δ	D	
1805 Dez. 2	20′	0·070	1′4	Huth, kl. Dollond
8	$5^1/_2$	0·038	0·2	Schröter, 15f. Tel.
14	45	0·054	2·4	Malavois, 1f. Tel.
1826 März 10	2	1·13	2·	Schmidt
April 1	2	1·00	2·	Gambart
1832 Sept. 23	$2^1/_2$—3	0·75	2·	Herschel, 20f. Tel.
Nov. 3	4	0·57	2·3	»
Nov. 4	5	0·58	2·9	»

[1] Unter diesem Durchmesser kann im Gegensatze zu den an gleicher Stelle (Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellsch., Bd. 15) angegebenen Durchmessern der äußersten Hülle (45′) und des hellsten Teiles der Hülle (20′ bis 25′) wohl nur der des Kernes gemeint sein. Siehe Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen 1805, diese Sitzungsberichte, Bd. CIX, Abt. IIa, Juli 1900. Olbers schreibt d. d. 8. Dezember 1805: Komet erschien dem bloßen Auge am größten, im Achromat viel kleiner, wo nur ein Teil seines Durchmessers sichtbar blieb.

D dürfte in den drei Erscheinungen des Kometen ungefähr gleich groß gewesen sein und 2 bis 3 Minuten betragen haben. Daß Huth den Kometen etwas kleiner gesehen hat, ist durch die Nähe des Mondes, dessen Scheibe Dezember 6·1 voll belichtet war, leicht begreiflich; daß Schröter ihn aber so klein gesehen hat, ist auch mit Rücksicht auf die Beschaffenheit seines Fernrohres und die große Phase des Mondes sehr auffallend.

Seien D_0, d_0 die Durchmesser von Hülle und Kern zur Zeit der Teilung des Kometen; für D_0 kann wohl der mittlere Wert von D gesetzt werden. Angenommen, daß auch d sich von 1805 bis zur Zeit der Teilung nur wenig geändert hat, so wird Schröter, da er nur $^1/_{10}$ von D_0 gemessen hat, auch nur einen Bruchteil von d_0 gemessen haben, welcher jedoch, da das Helligkeitsgefälle im Kerne stärker ist als in der Hülle, bedeutend größer sein dürfte als $^1/_{10}$; nimmt man hiefür an $^2/_{10}$ oder $^3/_{10}$, so wird d_0 ungefähr gleich 1', welcher Betrag nach den Notizen Maury's[1] über das Aussehen der Kerne im Jahre 1846 kaum zu groß erscheint. Malavois' Schätzung von $\frac{d}{\Delta}$ kann durch das dunkle Band, welches den Kern durchzog, erhöht worden und, da auch der Positionsmessung eine volle Minute als Einheit diente, vielleicht durch Abrundung auf diese Einheit entstanden sein.

Die Bestimmung von ρ_1 hat ergeben 0'18; für $d = 1'$ würde ρ_1 ungefähr der sechste Teil des Kerndurchmessers sein und daher die Grenze, welche die aus den Bewegungen der durch Spaltung entstandenen Kerne abgeleitete kürzeste Entfernung derselben erreichen kann, nicht viel überschreiten.

Die relative Geschwindigkeit V nimmt mit der Entfernung der Kerne sehr rasch ab; man erhält hiefür in Sekundenmetern

[1] Washington Jänner 18: Nuclei decided not as definite points, but rather as though several nuclei were grouped together about each.
Februar 4: Decided stellar nucleus to each comet.
Februar 12: I caught glimpses of two nuclei in B_I.
Neapel (Peters) Februar 19: Kern von B_I scheint in mehrere Teile geteilt zu sein.

ρ	0'1778	0'5	1'0	2'0	10'0
$\mathfrak{V}$.......	50·73	30·2	21·3	15·0	6·5

Ist $d = 1'$, so wird bei der Teilung der Abstand der Mittelpunkte der neuen Kerne ungefähr 0'5 betragen. Für $m_1 = m_2$ würde dann die Bewegung bezüglich des Schwerpunktes mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 15 *m* in der Sekunde erfolgen.

Die Richtung der Kraft, welche den Komponenten des Kometen die neuen Bahnen angewiesen hat, ist durch die Achse des Kegelschnittes bestimmt, den B_{II} um B_I beschreibt. Die Winkel, welche diese Richtung mit dem Radiusvektor des Kometen für 1843 November 24·0, mit der in der Bewegungsrichtung hiezu senkrecht verlaufenden Geraden und mit der nach Norden gezogenen Normalen zur Bahnebene einschließt, sind 12°3, 101°8, 86°5; die weitaus größte Komponente der Kraft fällt daher in die Richtung Sonne—Komet.

Das Resultat der Integration der Störungsgleichungen 2) und 3) (Oskulation 1846 Februar 11·0) mittels Quadratur ist für die Zeiten der letzten Normalörter:

	1852 Aug. 28	Sept. 22		Aug. 28	Sept. 22		Aug. 28	Sept. 22
$\delta\xi$	+78667	+82097	$\delta\eta$	+514	+32313	$\delta\zeta$	+15856	+13674
U	− 102	+ 87	V	−238	− 332	W	+ 1	+ 48
u_1	−39385	−41005	v_1	−376	−16323	w_1	− 7928	− 6813
u_2	+39283	+41092	v_2	+138	+15990	w_2	+ 7929	+ 6861

Für die Zeiten der übrigen Normalörter sind die Störungen wieder zu vernachlässigen.

Der Zusammenhang zwischen den gestörten und ungestörten Koordinaten ist gegeben durch

$$x = (x)+u; \quad y = (y)+v; \quad z = (z)+w.$$

Die Elemente zur Berechnung der mit Klammern versehenen Größen werden erhalten durch Summierung der Elemente I, der Störungen dieser Elemente durch die Planeten

und der Variationen III oder IV. Zur exakten Berechnung der Kometenörter wäre es noch nötig, daß dem Unterschiede zwischen den durch die Planeten verursachten Störungen von B_I und B_{II} Rechnung getragen werde. Die Fehler, welche aus der Vernachlässigung dieses Unterschiedes erwachsen, sind aber für die Örter aus dem Jahre 1846 kaum merklich und auch für die aus dem Jahre 1852 noch klein und überdies von solcher Beschaffenheit, daß sie durch eine geringfügige

$A = A' = B_I$

	45 Dez. 25·5	46 Jänner 23·5	Februar 14·5	März 2·5
t	467·5	496·5	518·5	534·5
$M_0 + t\mu$	348°28′22″920	352°46′26″040	356° 2′11″856	358°24′34″267
$\Delta' M$	4 25 46·214	4 27 29·267	4 28 47·142	4 29 42·728
$\delta M_0 + t\delta\mu$	21·173	21·897	22·446	22·845
$\Delta'\mu$	3″55418	3″55169	3″52811	3″49709
$\Delta'\varphi$	27′51″050	27′51″379	27′53″690	27′56″509
$\Delta'\pi$	— 66 53·286	— 66 52·488	— 66 50·398	— 66 47·687
$\Delta'☊$	—151 46·188	—151 46·494	—151 47·546	—151 49·527
$\Delta' i$	— 38 22·819	— 38 22·624	— 38 22·970	— 38 23·198
M	352°54′30″307	357°14′17″204	0°31′21″444	2°54′39″840
μ	537″4799	537″4774	537″4538	537″4228
φ	49°10′ 4″12	49°10′ 4″45	49°10′ 6″76	49°10′ 9″58
π	108 49 27·86	108 49 28·66	108 49 30·75	108 49 33·46
☊	245 40 14·45	245 40 14·14	245 40 13·09	245 40 11·11
i	12 34 55·80	12 34 55·99	12 34 55·65	12 34 55·42
(x)	0·7971557	0·1701959	—0·3429575	—0·6755643
(y)	0·7988559	0·8891672	0·7740927	0·5819448
(z)	0·0886659	—0·0471489	—0·1409312	—0·1909063
α	346°49′ 0″38	6°28′13″70	28°23′ 3″95	50°42′50″67
δ	+0 34 10·99	—1 17 56·62	—4 30 46·66	—8 58 1·35
$\Delta\alpha \cos\delta$	—0·03	—1·34	+0·27	—0·78
$\Delta\delta$	+8·62	+2·01	+1·45	—0·85

Änderung von *m* fast vollständig ausgeglichen werden können. Die Darstellung der Normalörter ist aus folgenden Tafeln ersichtlich, in welchen die Störungen der mittleren Elemente mit Δ', die Variationen mit δ bezeichnet sind; von letzteren Größen sind nur jene angeführt, welche zur Berechnung von M dienen.

Die Schiefe der Ekliptik ist nach Leverrier angenommen worden: 23° 27′ 41″35.

März 15·5	März 28·5	52 August 28·0	52 Sept. 22·0
547·5	560·5	2905·0	2930·0
0°20'14″976	2°15'55″686	349°58' 5″886	353°40'33″404
4 30 26·852	4 31 10·279	6 6 7·306	6 6 59·979
23·170	23·494	1 22·018	1 22·642
3″46513	3″43671	2″10687	2″11053
27'59″240	28' 1″417	23'57″689	23'57″316
— 66 44·540	— 66 40·780	— 66 28·834	— 66 28·977
—151 51·781	—151 53·999	—159 48·452	—159 48·494
— 38 23·258	— 38 23·187	— 39 58·267	— 39 58·300
4°51' 4″998	6°47'29″459	356° 5'35″210	359°48'56″025
537″3908	537″3624	536″0325	536″0362
49°10'12″31	49°10'14″49	49° 6'10″76	49° 6'10″39
108 49 36·61	108 49 40·37	108 49 52·32	108 49 52·17
245 40 8·86	245 40 6·64	245 32 12·19	245 32 12·14
12 34 55·36	12 34 55·43	12 33 20·35	12 33 20·32
—0·8981603	—1·0763194	0·3456384	—0·2365221
0·3812401	0·1609202	0·8919301	0·8184430
—0·2177202	—0·2336924	—0·0121931	—0·1234312
75°15'57″22	103°21'18″58	115°14'15″98	146°54'57″42
—12 53 35·18	—14 33 34·90	+20 54 30·81	+ 8 17 32·30
—0·06	+1·34	+18·79	—13·60
—0·41	+0·36	—16·34	— 2·73

$B = B' = B_{II}$

	46 Jänner 23·5	Februar 6·5	Februar 18·5	März 2·5	März 21·5	52 Sept. 22·0
t	496·5	510·5	522·5	534·5	553·5	2930·0
$M_0+t\mu$	352°46'26"040	354°51' 0"650	356°37'47"459	358°24'34"267	1°13'38"381	353°40'33"404
$\Delta' M$	4 27 29·267	4 28 18·954	4 29 1·151	4 29 42·728	4 30 46·932	6 6 59·979
$\delta M_0+t\delta\mu$	— 22·186	— 22·520	— 22·807	— 23·094	— 23·549	— 1 20·364
$\Delta'\mu$	3"55169	3"53920	3"52144	3"49709	3"45068	2"11053
$\Delta'\varphi$	27'51"379	27'52"633	27'54"31[illegible]	27'56"509	28' 0"394	23'57"316
$\Delta'\pi$	— 66 52·488	— 66 51·350	— 66 49·82[illegible]	— 66 47·687	— 66 42·820	— 66 28·977
$\Delta'\Omega$	— 151 46·494	— 151 46·945	— 151 47·94[illegible]	— 151 49·527	— 151 52·874	— 159 48·494
$\Delta' i$	— 38 22·624	— 38 22·827	— 38 23·03[illegible]	— 38 23·198	— 38 23·238	— 39 58·300
M	357°13'33"121	359°18'57"084	1° 6'25"80[illegible]	2°53'53"901	5°44' 1"764	359°46'13"019
μ	537"4285	537"4160	537"3982	537"3739	537"3275	535"9873
φ	49°10' 7"53	49°10' 8"79	49°10'10"46	49°10'12"66	49°10'16"55	49° 6'13"47
π	108 49 30·96	108 49 32·10	108 49 33·63	108 49 35·77	108 49 40·63	108 49 54·48
Ω	245 40 17·02	245 40 16·57	245 40 15·57	245 40 13·99	245 40 10·64	245 32 15·02
i	12 34 58·44	12 34 58·24	12 34 58·03	12 34 57·87	12 34 57·83	12 33 22·77
(x)	0·1721333	—0·1573616	—0·4294678	—0·6739918	—0·9845065	—0·2295300
(y)	0·8892761	0·8380663	0·7344697	0·5831465	0·2824715	0·8207640
(z)	—0·0467647	—0·1090719	—0·1548889	—0·1907068	—0·2262111	—0·1222326
α	6°26'55"99	19°30'42"38	33°15'15"53	50°38'13"23	88° 1'54"08	146°27'38"27
δ	— 1 15 50·73	— 2 55 3·39	— 5 22 34·46	— 8 50 32·57	—13 55 42·63	+ 8 31 26·56
$\Delta\alpha \cos\delta$	— 0·61	+ 0·91	+ 0·68	— 0·11	— 0·74	+ 2·44
$\Delta\delta$	— 0·68	— 0·46	+ 0·17	— 0·79	+ 0·32	+ 3·45

Die Örter von B_{II} werden durch die Rechnung gut dargestellt, da die relativ großen Abweichungen des letzten Ortes nach Ausscheidung der weniger verläßlichen Berliner Beobachtungen[1] sich auf $\begin{cases} +1'67 \\ +1\cdot96 \end{cases}$ reduzieren.

Die Verbesserung der Darstellung durch die Ausgleichsrechnung, welche für B_{II} nur durch eine geringfügige Verkleinerung der Fehlerquadratsumme wahrnehmbar ist, kommt bezüglich B_{I} nur dem vorletzten Orte zu gute. Die ersten drei Deklinationen weisen hingegen in der neuen Darstellung merklich größere Abweichungen auf; es dürfte deshalb die Beteilung des vorletzten Ortes mit einem noch kleineren Gewichte vorteilhafter gewesen sein. Wenn man aber bedenkt, daß die erste Deklination einen bedeutenden Fehler (siehe p. 786) erwarten läßt und daß die mittleren Fehler der Örter aus den Jahren 1845/1846 ungefähr 1' oder etwas mehr betragen, so wird man die Darstellung dieser Örter durch die Rechnung noch als befriedigend ansehen können.

Die Örter aus dem Jahre 1852 zeigen große Abweichungen; der erste hievon (August 28), welcher sich ausschließlich auf Secchi's Beobachtungen gründet, ist allerdings sehr unsicher bestimmt. Die Vergleichung der Beobachtungen mit der Ephemeride hatte nämlich ergeben:

		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
August	25·6	+13'2	+ 6'7	[2]
»	25·6	— 3·4	—14·4	
»	27·6	+13·8	—32·0	[3]
»	28·6	— 1·1	+12·0	
»	32·6	+ 0·3	— 9·3	

[1] Siehe *(b)* 1338, 1353, wo ich diese Beobachtungen reduziert und bereits die Vermutung ausgedrückt habe, daß ihre Einbeziehung hätte unterbleiben sollen. Der aus den drei letzten Pulkowaer Beobachtungen abgeleitete Ort stimmt mit dem berechneten noch besser überein, nämlich bis auf $\begin{cases} +0'78 \\ +0\cdot97 \end{cases}$.

[2] August 25·6, erste Beobachtung: anscheinend zentrale Bedeckung des Vergleichssternes durch den Kometen.

[3] August 27·6; die Lage des Vergleichssternes war für die Deklinationsbestimmung nicht günstig; die Beobachtung ist nicht verwendet worden.

Von den Deklinationen sind mehrere offenbar mit großen Fehlern behaftet; daß die Fehler der Rektaszensionen sich viel weniger bemerkbar machen, ist, wenn die Beobachtungen (Kreismikrometer) gut reduziert worden sind, wahrscheinlich nur ein Zufall. Trotz der geringen Genauigkeit der Messungen wird man nicht annehmen dürfen, daß alle Rektaszensionen zu groß, alle Deklinationen zu klein gefunden worden sind, was zutreffen würde, wenn der berechnete Ort fehlerfrei wäre, indem die Koordinate, welche die geringste Abweichung zeigt, nämlich die Deklination der Beobachtung von August 28·6, noch um 2" bis 3" kleiner ist, als sie nach der Rechnung sein sollte. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die Bahn, welche B_1 im Jahre 1852 beschrieben hat, durch die über die Bewegung dieses Kometen gemachten Annahmen nicht mit ausreichender Genauigkeit dargestellt wird, da auch die Rektaszension des letzten Ortes eine bedeutende Abweichung aufweist, die zum Teile der Rechnung zur Last gelegt werden muß. Unter den fünf Rektaszensionen, welche zur Bildung dieses Ortes hätten herangezogen werden können, befindet sich nämlich nur eine in Cambridge beobachtete, aber wegen des Vermerks »zweifelhaft« ausgeschlossene Rektaszension, die etwas größer ist als die berechnete.

Die Größen, durch deren Änderung die Koordinaten des letzten Ortes am meisten beeinflußt werden, sind M, μ, m; setzt man $\cos\delta d\alpha = a dM + b d\mu + c dm$ und bezeichnet die in $d\delta$ auftretenden Koeffizienten mit a', b', c', so ist

$$\frac{a}{a'} = -1·91;\quad \frac{b}{b'} = -1·92;\quad \frac{c}{c'} = -1·96.$$

Es wird daher $\frac{\cos\delta\, d\alpha}{d\delta}$ von den Variablen fast unabhängig und ungefähr $= -2$; diesem Verhältnis entspricht auch der Hauptsache nach die Veränderung der Darstellung des letzten Ortes zufolge der Ausgleichsrechnung. Eine Verbesserung der Darstellung ist überhaupt nur in bescheidenem Ausmaße möglich und wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Rektaszensionsabweichungen nicht ohne Vergrößerung des Fehlers des vorletzten Ortes durchführbar.

Es ist bereits hervorgehoben worden, daß der Fehler der Deklinationsdifferenz der letzten Örter von B_I und B_{II} bei guter Darstellung der Rektaszensionsdifferenz von 10^s auf 15^s steigt, wenn die Störung $\Delta\alpha_6 \cos\delta$ von -600^s auf -900^s sich erhöht, und daß wahrscheinlich für eine Störung, die nicht viel größer ist als die erste Zahl, Variationen der Elemente angenommen werden können, welche ein Zusammentreffen der Kerne ergaben. Es würde dann auch eine Verbesserung der Darstellung der letzten Örter eintreten, welche aber bezüglich B_I keinesfalls so weit geht, um eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung herbeizuführen. Ohne Annahme einer neuen, wenn auch kleinen Störung der Bewegung von B_I läßt sich dieses Ziel kaum erreichen und es liegt wohl am nächsten, die Störung Kräften zuzuschreiben, deren Wirken die Absonderung kleiner Massenkomplexe zur Folge hatte. Beobachtungen Maury's[1] deuten an, daß sich bereits im Jahre 1846 Nebelchen von B_I losgelöst hatten, und machen es daher um so wahrscheinlicher, daß in dem Zeitraume 1846 bis 1852 ähnliche Vorgänge stattgefunden haben werden. Für die Annahme eines Verlustes an Masse, der ja nicht groß gewesen zu sein braucht, scheint auch der Umstand zu sprechen, daß im Laufe der Schwankungen, welche die Helligkeit beider Kometen in jeder Erscheinung aufwies, B_I im Jahre 1852 von B_{II} an Helligkeit kräftiger überholt wurde als im Jahre 1846.

Die Masse des Biela'schen Kometen ließe sich aus den von ihr verursachten Störungen bis auf ungefähr $1^0/_0$ genau bestimmen, wenn man annehmen könnte, daß außer diesen nur noch die planetarischen Störungen die elliptische Bewegung von B_I und B_{II} beeinflußt haben. Da diese Annahme jedoch nicht in aller Strenge aufrecht zu erhalten ist, wird auch die Genauigkeit der Massenbestimmung wesentlich geringer sein. Für $\Delta\alpha_6 \cos\delta = -600^s$ ist gefunden worden $\log m = 8\cdot038$, während für $\Delta\alpha_6 \cos\delta = -900^s$ aus der letzten Rechnung

[1] Washington, März 14: An appearance of cometary fragments about B_I; there seem to be three more distinctly marked, than on any previous night. März 17: No appearance of fragments about B_I.

sich ergeben hat $\log m = 8{\cdot}098$. Wenn nun auch durch einen zwischen diesen Grenzen liegenden Massenwert wahrscheinlich ein etwas günstigeres Resultat gewonnen werden könnte, so scheint doch mit Rücksicht auf das früher Gesagte der erhoffte Gewinn in keinem Verhältnisse zur Mühe zu stehen, welche die Ausführung der auf die Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes von m abzielenden Rechnungen verursachen würde.

Als Resultat der bisherigen Untersuchungen, an welchen die folgenden Zusätze nichts mehr zu ändern vermögen, dürfte gelten, daß

$$\log m = 8{\cdot}10\text{—}20$$

einen Näherungswert der Masse des Biela'schen Kometen darstellt, der eher zu groß als zu klein ist. Diesem Näherungswert entspricht

$$\frac{\text{Masse der Erde}}{\text{Masse des Kometen}} = 2400000.$$

Abhängigkeit der Störungen von dem Verhältnisse der Massen.

Die Störungen der Koordinaten, welche unter der Annahme $m_1 = m_2$ berechnet worden sind, erfahren eine Änderung, wenn bei konstanter Summe der Massen das Verhältnis $\frac{m_2}{m_1}$ von der Einheit verschieden ist. Diese Änderung ist aber selbst bei großer Verschiedenheit der Massen noch so gering, daß ihr Einfluß auf das Resultat der Bahnbestimmung vernachlässigt werden kann. Die in den Gleichungen 2) unterdrückten, von U, V, W und daher auch von $\frac{m_2}{m_1}$ abhängigen Glieder sind am größten, wenn eine der Massen verschwindet. Für $m_2 = 0$ drücken die Gleichungen 4) in erster Annäherung die Fehler der Gleichungen 2) aus. Durch Quadratur der Gleichungen 4) erhält man (in Einheiten der siebenten Dezimalstelle)

1852 September 22·0: $\Delta\delta\xi = +172$; $\Delta\delta\eta = -90$; $\Delta\delta\zeta = +44$

und daraus als Änderung der Rektaszension und Deklination: $-0\overset{s}{.}16$ und $+0\overset{''}{.}46$. Es ist daher die Darstellung der

Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz der Örter für September 22·0 von $\frac{m_2}{m_1}$ innerhalb der diesem Verhältnisse beizumessenden Grenzen so gut wie unabhängig. Aber auch die getrennte Darstellung der Örter von B_{I} und B_{II} wird hiedurch nur äußerst wenig beeinflußt, wie eine mit der Annahme $m_1 = 2m_2$ durchgeführte Rechnung nach den Gleichungen 1) zeigte.

Eine kleine Änderung könnte auch dadurch eintreten, daß die Sicherheit der Bestimmung von ξ_0, η_0, ζ_0 aus den Variationen der Elemente um so mehr vermindert wird, je größer der Unterschied der Massen ist, weil die mittlere Bahn von der Mittellinie mit Bezug auf die ungestörten Bahnen von B_{I} und B_{II} dann um so stärker abweicht. Doch dürfte dieser Umstand von keiner besonderen Bedeutung sein, da ξ_0, η_0, ζ_0 nur zur Berechnung der Störungen verwendet werden und der Einfluß einer Änderung dieser Größen auf die störenden Kräfte um so geringer ist, je kleiner die störenden Kräfte sind. Zur Zeit, wo diese groß sind, ist sowohl ξ_0 als auch η_0 und ζ_0 relativ klein und daher die Bestimmung dieser Größen nur mit geringer Unsicherheit behaftet.

Differenz der Störungen von B_{II} und B_{I} durch die Planeten.

Zu genäherten Werten für die durch mehrere Planeten bewirkten Störungen $\delta'\xi, \delta'\eta, \delta'\zeta$ der Koordinatendifferenzen ξ, η, ζ gelangt man durch Quadratur der Gleichungen:

$$\frac{d^2\delta'\xi}{d\tau^2} = \Sigma m'\left[\frac{3(x'-x)Q'}{\rho'^5} - \frac{\xi}{\rho'^3}\right] + \frac{3q'x}{r^5} - \frac{\delta'\xi}{r^3}$$

$$\frac{d^2\delta'\eta}{d\tau^2} = \Sigma m'\left[\frac{3(y'-y)Q'}{\rho'^5} - \frac{\eta}{\rho'^3}\right] + \frac{3q'y}{r^5} - \frac{\delta'\eta}{r^3}$$

$$\frac{d^2\delta'\zeta}{d\tau^2} = \Sigma m'\left[\frac{3(z'-z)Q'}{\rho'^5} - \frac{\zeta}{\rho'^3}\right] + \frac{3q'z}{r^5} - \frac{\delta'\zeta}{r^3},$$

in welchen m', x', y', z' die Masse und die heliozentrischen Ekliptikalkoordinaten eines einzelnen Planeten, x, y, z die Koordi-

naten des fingierten Kometen in der mittleren Bahn bedeuten und zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$d\tau = k\,dt$$
$$Q' = (x'-x)\xi+(y'-y)\eta+(z'-z)\zeta$$
$$\rho'^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$$
$$q' = x\delta'\xi+y\delta'\eta+z'\delta'\zeta$$
$$r^2 = x^2+y^2+z^2$$

Die von Venus, Erde, Mars ausgeübten Störungen sind für jeden dieser Planeten nur während kurzer Zeit von Belang gewesen und konnten außerhalb der Zeitstrecke 1845 September 9 bis 1846 Mai 7 unberücksichtigt bleiben; die Störungen durch Jupiter und Saturn sind von Oktober 1843 bis Oktober 1852 berechnet worden. Die gesamten, auf die Oskulationsepoche 1846 Februar 11 bezogenen Störungen sind im Jahre 1846 unmerklich und in den letzten Monaten des Jahres 1843 noch so klein, daß hiedurch die über die relative Lage und Bewegung des Kometen zur Zeit ihrer größten Nähe in dieser Abhandlung gemachten Angaben fast gar nicht beeinflußt werden. Im Jahre 1852 dagegen erreichen die Störungen bereits ansehnliche Beträge, nämlich

	$10^7.\delta'\xi$	$10^7.\delta'\eta$	$10^7.\delta'\zeta$	$\cos\delta.\delta'\alpha$	$\delta'\delta$
August 28	−350	+ 27	−73	+4'20	−1'76
September 22	−355	−110	−61	+3·57	−1·88

Diese Werte drücken den Unterschied der Störungen von $B_{\rm I}$ und $B_{\rm II}$ im Sinne $B_{\rm II}-B_{\rm I}$ aus. Die Störungen der polaren Koordinaten stehen unter sich nahezu in demselben Verhältnisse wie die von m abhängigen Störungen und können daher durch eine geringe Änderung von log m fast vollständig kompensiert werden. Für $d \log m = +0\cdot00172$ z. B. erhielte man

August 28	−3'90	+1'57
September 22	−3·57	+1·82

Die Normalörter der Kometen würden sonach durch eine neue Ausgleichsrechnung nicht besser dargestellt werden können.

Beziehung zwischen Masse und Helligkeit der Kometen.

Bedeckungen von Sternen durch Kometen sind schon häufig beobachtet worden, ohne daß es je gelungen wäre, eine Verminderung der Helligkeit der Sterne während des Vorüberganges eines Kometen direkt nachzuweisen.[1] Beobachtungen dieser Art sind auch an dem Biela'schen Kometen mehrmals gemacht worden. Am 3. April 1772 hielt Messier, wie eine spätere Beobachtung gezeigt hat, einen kleinen Fixstern für den Kern des Kometen. Am 24. März 1846 wurde in Wien (6″-Fernrohr) und am 15. August 1852 in Rom je eine zentrale Deckung eines Sternes 11^m, beziehungsweise 9^m durch den Kometen B_I beobachtet; eine geringe Schwächung des Lichtes hätte genügt, um den Stern 11^m unsichtbar zu machen.

Der fast ungehinderte Durchtritt des Lichtes durch Hülle und Kern der Kometen und die verwandtschaftlichen Beziehungen, welche zwischen Kometen und Meteorströmen im allgemeinen zu bestehen scheinen, berechtigen zur Annahme, daß die Kometen aus Körpern zusammengesetzt sind, die im Vergleiche zu ihren mittleren gegenseitigen Entfernungen selbst an Stellen größter Dichte außerordentlich kleine Dimensionen besitzen, so daß, wenn wir uns durch einen Kometen die Mantelfläche eines Zylinders gelegt denken, die vereinten Querschnitte aller von ihr umhüllten Körper nur einen sehr geringen Bruchteil des Querschnittes des Zylinders ausmachen würde. Das Licht der Sonne wird daher fast alle diskreten Teilchen der Kometen treffen und für irgend einen Standpunkt eine Bedeckung von Teilchen durch andere Teilchen relativ

[1] Bessel hat während der Bedeckung eines Sternes durch den Halley-schen Kometen im Jahre 1835 am Heliometer keine Änderung der Lage des bedeckten mit Bezug auf einen andern nicht bedeckten Stern erkennen können (Astr. Nachr. Nr. 301). W. Meyer hingegen hat aus seinen Messungen von Position und Distanz eines durch den Kometen 1881 III bedeckten Sternes eine Ablenkung des Lichtes durch den Kometen konstatiert (Astr. Nachr. Nr. 2471).

selten vorkommen. Infolgedessen ist auch die Helligkeit eines Kometen nahe gleich der Summe der Helligkeiten aller den Kometen bildenden und als sichtbar gedachten Teilchen. Durch Verdoppelung oder allgemeiner durch gleiche Vervielfältigung jedes dieser Teilchen würde demnach die Helligkeit des Kometen in nahezu demselben Verhältnisse gesteigert werden wie die Masse, so daß die Helligkeit der Kometen als Grundlage zur Bestimmung ihrer Massen dienen könnte, wenn die Kometen aus gleichen Körpern oder gleichen Systemen von Körpern aufgebaut wären und die Intensität ihres eigenen Lichtes zu der des reflektierten Lichtes in einem konstanten Verhältnisse stünde. Die mittlere Größe des Kernes dürfte, sofern die Beobachtungen der Sternschnuppenfälle zu allgemeinen Folgerungen berechtigen, von Komet zu Komet nicht allzusehr variieren; die in den Kometen enthaltenen Substanzen scheinen aber nicht immer dieselben zu sein oder doch verschiedene Mischungsverhältnisse aufzuweisen, da, wenn auch die Spektra der Kometen nur einen Typus offenbaren, die Schweife der Kometen verschiedene Typen erkennen lassen.

Das Eigenlicht der Kometen wird durch die Einwirkung der Sonne erregt; seine Intensität kann daher anfänglich der Intensität der Sonnenstrahlung und bei gleicher physischer Beschaffenheit der Kometen auch der Intensität des reflektierten Lichtes proportioniert angenommen werden. Bezeichnen r und Δ die Entfernungen eines Kometen von Sonne und Erde, h die Lichtmenge, welche der Beobachter von ihm erhält, H die in Größenklassen ausgedrückte Helligkeit h, so wären, insofern es sich nur um reflektiertes Licht handelte, bei Vernachlässigung des Einflusses des Phasenwinkels die auf die Einheit der Entfernung reduzierten Größen h_1 und H_1 konstant und durch die Gleichungen gegeben:

$$h_1 = h r^2 \Delta^2; \quad H_1 = H + 2 \cdot 5 \log \frac{h}{h_1} = H - 5 \log (r\Delta).$$

Bei Annäherung der Kometen an die Sonne nimmt das Eigenlicht in etwas stärkerem Verhältnisse zu als das reflektierte Licht, so daß die reduzierte Helligkeit nicht mehr als

konstante Größe gelten kann. Die Untersuchungen[1] des Herrn Holetschek über die Größe und Helligkeit der Kometen und ihrer Schweife stützen die Annahme, daß ein periodischer Komet in verschiedenen Erscheinungen bei demselben Radiusvektor vor, beziehungsweise nach dem Perihel wieder dieselbe Helligkeit erlangt, und bestätigen den Erfahrungssatz, daß die reduzierte Helligkeit h_1 vor dem Perihel zunimmt und nach dem Perihel wieder abnimmt. Die Änderung von H_1 tritt jedoch im allgemeinen nicht sehr stark hervor und macht sich unter all den zwischen 1264 und 1800 erschienenen Kometen, über deren Helligkeit Schätzungen vorliegen, nur bei jenen besonders bemerklich, die eine kleine Periheldistanz (q) besessen haben.

Komet	q	r von — bis	H_1 von — bis	
1577	0·18	0·3—2·1	(—1)—2	
1665	0·11	0·6—0·2	4—2½	
1680	0·01	0·5—1·6	5—3	Änderung angedeutet
1737 I	0·22	0·6—1·3	3½—5	Änderung nicht verbürgt
1744	0·22	1·8—0·2	1½—(—1)	Bis $r = 1$ ziemlich konstant 1½
1757	0·34	1·0—0·4	7—4½	
1769	0·12	1·6—0·7	5—3½	

Die ersten zwei Bemerkungen drücken aus, daß wegen der Unsicherheit der Größenschätzungen H_1 auch nahezu konstant gewesen sein könnte. Die von Messier angegebenen, von 2^m bis 6^m sinkenden Helligkeiten des oft genannten Kometen 1770 I werden durch $H_1 = 7^m 1$ sehr gut dargestellt; einige indirekte Angaben über die Helligkeit des Kometen in den ersten acht Tagen seiner Sichtbarkeit, wie »Komet noch nicht oder schon dem freien Auge sichtbar«, lassen aber vermuten,

[1] Denkschriften der mathem.-naturw. Klasse der kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien, Bd. LXIII, LXXVII. Die »Untersuchungen« umfassen alle bekannt gewordenen Kometen von den ältesten Zeiten angefangen bis zum Ende des Jahres 1799.

daß zu dieser Zeit $9 > H_1 > 8$ war. Eine bedeutende Änderung von H_1 weist auch der Encke'sche Komet auf (9^m bis $6^1/_2{}^m$) und eine ungewöhnlich große der Halley'sche Komet im Jahre 1835, nämlich von 9^m bis 4^m.

Änderungen von solcher Größe scheinen bei stetigem Verlaufe der Helligkeitskurve nur ausnahmsweise vorzukommen; im allgemeinen dürfte das Verhältnis der reduzierten Helligkeiten (h_1) der Kometen doch einen Näherungswert für das Verhältnis ihrer Massen geben, welcher Wert, von Fehlern der Helligkeitsschätzungen abgesehen, um so größeres Vertrauen verdient, je weiter von der Sonne weg sich die Kometen zur Zeit der Beobachtung ihrer Helligkeit befunden haben.

Dieser Näherungswert wird durch die Gleichung bestimmt

$$\log\frac{m'}{m} = \log\frac{h'_1}{h_1} = 0\cdot4(H_1 - H'_1).$$

Der Wert für die Masse des Biela'schen Kometen liegt bereits vor; wir bedürfen daher nur noch der Kenntnis seiner reduzierten Helligkeit, um die Massen anderer Kometen von bekannter Helligkeit in Teilen der Sonnen- oder Erdmasse ausdrücken zu können.

Nach Herrn Holetschek war die reduzierte Helligkeit des Biela'schen Kometen im Jahre 1772 höchstens die eines Sternes 7^m. J. Schmidt (Bonn) hat am 26. Februar 1846 [$\log r = 9\cdot950$; $\log\Delta = 9\cdot654$; $H_1 - H = +2^m0$] den Kometen B_I mit freiem Auge sehen können, ebenso an den folgenden Tagen, bis der Mond wieder erschien. Es wird daher H ungefähr 6^m gewesen sein. Die Reduktion $+2^m0$ bleibt für mehrere Tage ungeändert und macht $H_1 = 8^m$.

O. Struve (Pulkowa) gibt an, daß am 18. September 1852 [$\log r = 9\cdot937$; $\log\Delta = 0\cdot168$; $H_1 - H = -0\cdot52$] der Totaleindruck der Helligkeit von B_{II} nahe gleich der des Vergleichssternes 8^m bis 9^m gewesen sei. Der Stern hat in der B. D. und im Katalog der Astr. Ges. die Größe 9·0. Für B_{II} wäre also anzunehmen $H_1 = 8^m5$ und für die vereinten Massen von B_I und B_{II} der Wert $H_1 = 7^m5$, welcher von dem zuerst angeführten kaum verschieden ist.

Wählt man als Einheit der Masse die der Erde, so sind die einander entsprechenden Werte

$$H_1 = 7^m5;\ \log m = 3 \cdot 62 - 10.$$

Die Näherungsformel $\log \frac{m'}{m} = 0 \cdot 4(H_1 - H_1')$ gibt für die hellsten der von Herrn Holetschek untersuchten Kometen folgende Massenverhältnisse:

H_1	Masse der Erde / Masse des Kometen	Komet
0^m	2400	1729
1·5	9600	1744
2	15000	1577, 1747
3	38000	1677
$3^1/_2$	60000	1264, 1532, 1664, 1665, 1762, 1773
4	96000	4517 II, 1533, 1580, 1680, 1686, 1737 I, 1769

Laplace[1] hat aus seinen Untersuchungen über die Störung der Bewegung der Erde durch den Kometen 1770 I gefolgert, daß dessen Masse kleiner gewesen sein müsse als $^1/_{5000}$ der Erdmasse, weil sonst die Störung der Länge des Jahres sich bemerkbar gemacht haben würde. Den früher gemachten Angaben zufolge war die reduzierte Helligkeit dieses Kometen ungefähr gleich der des Biela'schen Kometen, die Masse daher mehrere hundertmal kleiner, als sie nach dem Laplace'schen Kriterium hätte sein können. Die Masse des in obiger Zusammenstellung an erster Stelle angeführten Kometen vom Jahre 1729 scheint mit Rücksicht auf die große Periheldistanz ($q = 4$) nicht zu hoch bewertet; dieser Komet hätte, wenn ihm die Gelegenheit zur Betätigung seiner Kraft in gleicher Weise günstig gewesen wäre wie dem Kometen 1770 I, eine Störung verursacht, welche den Astronomen nicht entgangen wäre.

[1] Mécanique Céleste, 1805, Tome IV, p. 230.

Unter etwas günstigeren Verhältnissen würden auch die in den Jahren 1577, 1744 und 1747 erschienenen Kometen ihre Massen zur Geltung gebracht haben. Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von Umständen, welche die Bestimmung der Masse eines Kometen aus den Störungen der Bewegung von Planeten oder Satelliten gestatten, ist aber so gering, daß vor dem Eintritt eines solchen Ereignisses noch Jahrhunderte vergehen können.

Zur Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten

von

Heinrich Tietze in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1906.)

1. Geschlossene einseitige Flächen in dreidimensionalen Räumen.

Als Betti'sche Zahl P_2 einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit bezeichnet Poincaré[1] die um 1 vermehrte größtmögliche Zahl von geschlossenen, in dieser Mannigfaltigkeit liegenden Flächen, welche, einfach oder mehrfach genommen, zusammen noch nicht die vollständige Berandung eines Teiles der Mannigfaltigkeit bilden. Hiebei werden aber nur zweiseitige Flächen in Betracht gezogen, wie aus dem Poincaré'schen Verfahren zur Bestimmung von P_2 hervorgeht. Sei nun Q_2 die ebenso wie P_2 definierte Zahl, wenn auch einseitige Flächen berücksichtigt werden. Es läßt sich dann Q_2 durch P_2 und die von Poincaré entdeckten Torsionszahlen (coefficients de torsion)[2] ausdrücken. Hiezu seien

$$a_i^2 \equiv \Sigma\, \varepsilon_{ij}^2 a_j^1 \qquad (1)$$

die Poincaré'schen symbolischen Relationen, die die Lagebeziehungen der Flächenstücke a_i^2 zu den Kanten a_j^1 der als

[1] Complément à l'analysis situs. Rend. del circ. mat. di Palermo 13; 2. Compl. à l'anal. sit. Proc. Lond. Math. Soc. 32.

[2] 2. Compl., § 2, 3.

»polyèdre généralisé« gedachten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ausdrücken. Ein Ausdruck $\Sigma\lambda_i a_i^2$ wird dann eine geschlossene zweiseitige Fläche darstellen, wenn $\Sigma\lambda_i \varepsilon_{ij}^2$ für jedes j gleich Null ist.[1] Damit aber ein solcher Ausdruck nur überhaupt eine geschlossene, eventuell einseitige Fläche darstelle, genügt es, daß $\Sigma\lambda_i \varepsilon_{ij}^2$ für jedes j durch 2 teilbar sei. Es bezeichne nun α_x die Anzahl der a_i^x, γ_2 den Rang und $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\gamma_2}$ die von Null verschiedenen Elementarteiler der aus den Zahlen ε_{ij}^2 gebildeten Matrix. Dann lassen sich die $a_i^2 (a_j^1)$ durch $\alpha_2 (\alpha_1)$ aus ihnen gebildete lineare Formen $b_i^2 (b_j^1)$ mit der Koeffizientendeterminante 1 so ersetzen, daß die Relationen (1) übergehen in

$$b_i^2 \equiv \omega_i b_i^1 \quad (i = 1, 2, \ldots \gamma_2); \qquad b_i^2 \equiv 0 \quad (i = \gamma_2 + 1, \ldots \alpha_2).$$

Die Bedingung, daß eine Fläche, die dann symbolisch durch einen Ausdruck $\Sigma\lambda_i b_i^2$ dargestellt wird, geschlossen, beziehungsweise geschlossen und zweiseitig sei, ist dann die, daß alle Zahlen $\lambda_i \omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots \gamma_2)$ durch 2 teilbar, beziehungsweise gleich Null sind. Es gibt somit $\alpha_2 - \gamma_2$ durch linear unabhängige Formen der a_i^2 dargestellte geschlossene zweiseitige Flächen und $\alpha_2 - \gamma_2 + \beta_2$ durch modulo 2 linear unabhängige Formen der a_i^2 darstellbare geschlossene, aber eventuell einseitige Flächen, unter β_2 die Anzahl der geraden Elementarteiler $\omega_1, \ldots \omega_{\gamma_2}$ verstanden. Ist dann h_2 die Anzahl der unabhängigen, zwischen den a_i^2 bestehenden Homologien, so ist

$$P_2 - 1 = \alpha_2 - \gamma_2 - h_2, \quad Q_2 - 1 = \alpha_2 - \gamma_2 + \beta_2 - h_2,$$
$$Q_2 = P_2 + \beta_2.$$

Da diejenigen Zahlen ω_i, die > 1 sind, die Torsionszahlen der Mannigfaltigkeit sind, so können wir β_2 als die Anzahl der geraden Torsionszahlen bezeichnen. Allgemein ist

$$Q_q - P_q = \beta_q.$$

---

[1] Vergl. Poincaré, 1. Compl. Allerdings entsteht hier (und ebenso bei der folgenden Bedingung für einseitige Flächen) die Frage, ob, im Falle diese Bedingung erfüllt ist, eine durch den angeschriebenen Ausdruck darstellbare Fläche in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ohne Selbstdurchdringung gelegt werden kann.

wenn P_q die q^{te} der nach Poincaré'scher Art definierten Bettischen Zahlen einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V ist, Q_q die um 1 vermehrte größtmögliche Anzahl in V gelegener geschlossener, eventuell einseitiger q-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, welche, einfach oder mehrfach genommen, zusammen noch nicht die vollständige Berandung einer in V gelegenen $(q+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit bilden, und β_q die Anzahl der geraden Torsionszahlen q^{ter} Ordnung von V (d. h. der geraden Elementarteiler > 0 der Matrix der ε_{ij}^q).

2. Isomorphien der Fundamentalgruppe in sich.

Die eineindeutigen stetigen Beziehungen der Punkte einer Mannigfaltigkeit V auf sich selbst, aufgefaßt als Transformationen der Mannigfaltigkeit in sich, bilden eine Gruppe T. Zu jeder Transformation t' von V in sich kann man eine andere t'' angeben, die von t' beliebig wenig verschieden ist, d. h. derart, daß die Punkte P' und P'', in welche derselbe Punkt P einmal durch t', das andere Mal durch t'' transformiert wird, um weniger voneinander entfernt sind als eine vorgegebene von der Wahl des Punktes P in V unabhängige Größe. Eine Transformation s von V in sich heiße eine Deformation, wenn sich eine mit der identischen Transformation beginnende und mit s endende Folge von Transformationen angeben läßt, so daß je zwei in der Folge benachbarte Transformationen beliebig wenig voneinander verschieden sind. Die Deformationen bilden eine Gruppe D, die in T als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist. Die (diskrete) komplementäre Gruppe T/D werde mit F bezeichnet.

Sei Γ die Fundamentalgruppe[1] von V und G die Gruppe der Isomorphien von Γ in sich. Beschränkt man sich nun auf

---

[1] Vergl. Poincaré, Analysis situs, § 12, 13. Journ. de l'école polytechn. 2. sér. 1 (1895). Durch die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit sind nicht nur die Betti'sche Zahl P_1 (a. a. O. § 13), sondern auch, wie in einer späteren Arbeit ausgeführt werden soll, die Torsionszahlen der Matrix der ε_{ij}^2 mitbestimmt, so daß bei geschlossenen zweiseitigen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten die Fundamentalgruppe alle bis jetzt bekannten topologischen Invarianten in sich schließt.

Transformationen von V in sich, welche einen Punkt M_0 von V, von dem aus die Fundamentalwege[1] gezogen werden, fest lassen, so gelten die Sätze: Jeder Transformation von V in sich entspricht eine isomorphe Transformation von Γ in sich, d. h. also eine Operation aus G, und zwar jeder Deformation die identische Operation in G; somit entspricht auch jeder Operation aus F eine aus G. F ist also mit einer Untergruppe H von G isomorph, und zwar im allgemeinen meriëdrisch, derart, daß mehreren Operationen von F eine Operation von H entspricht.

3. Verknotete Linien und Flächen.

Es werde die spezielle dreidimensionale Mannigfaltigkeit V betrachtet, die entsteht, wenn man im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum eine geschlossene Linie mit einem einfachen Knoten zieht und diese Linie als eine singuläre auffaßt, d. h. ihre Punkte nicht als Punkte der Mannigfaltigkeit ansieht. Alle übrigen Raumpunkte sollen der Mannigfaltigkeit angehören, die wir im Unendlichen durch einen Punkt geschlossen annehmen. Als Fundamentalgruppe von V erhält man eine Gruppe, die sich aus zwei erzeugenden Operationen s, t aufbaut, zwischen denen die Relation $sts = tst$ besteht. Hätten wir statt der verknoteten Linie eine unverknotete genommen, so wäre die Fundamentalgruppe der so entstandenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit V_1 jene Gruppe geworden, die aus sämtlichen Potenzen einer einzigen erzeugenden Operation besteht. Die Verschiedenheit der Fundamentalgruppen zeigt, daß V und V_1 nicht homöomorph (d. h. eineindeutig stetig aufeinander beziehbar) sein können. Jede der beiden betrachteten Mannigfaltigkeiten möge nun etwas abgeändert werden, indem man längs der in ihr liegenden singulären Linie eine kleine Kugel sich bewegen läßt und den ganzen von der Kugel überstrichenen Raum von der Mannigfaltigkeit ausschließt. Die Mannigfaltigkeiten besitzen jetzt je einen schlauchartigen Hohlraum. Jede derselben kann man nun durch eine Transformation mittels

---

[1] Von Poincaré (a. a. O., p. 64) »contours fermés fondamentaux« genannt.

reziproker Radien mit einem im Inneren des Hohlraumes gelegenen Zentrum in eine ganz im Endlichen gelegene, von einer Fläche vom Geschlecht 1 berandete Mannigfaltigkeit verwandeln. Die eine Fläche ist eine gewöhnliche Ringfläche, die andere ist verknotet. Die Fundamentalgruppen der Mannigfaltigkeiten haben sich bei den vorgenommenen Abänderungen nicht geändert. Somit können auch die beiden zuletzt betrachteten Mannigfaltigkeiten nicht homöomorph sein. Dieses Beispiel zeigt, daß bei den von einer Oberfläche berandeten, im ebenen $\mathfrak{R}_3$ gelegenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten aus der Homöomorphie der Oberflächen nicht auf die der Mannigfaltigkeiten geschlossen werden kann.[1]

Die Mannigfaltigkeiten V und V_1 gehören zur Kategorie jener Mannigfaltigkeiten, die man erhält, wenn man aus dem ebenen $\mathfrak{R}_3$ die Punkte einer Anzahl von Linienstücken ausscheidet, d. h. nicht als Punkte der Mannigfaltigkeit ansieht. Diese Linienstücke können sich zu geschlossenen oder ungeschlossenen Linien zusammenschließen. Auch soll der Fall zugelassen werden, daß in gewissen Punkten mehr als zwei Linienstücke zusammenstoßen. Die einzelnen zusammenhängenden Teile eines solchen »eindimensionalen Komplexes« dürfen im $\mathfrak{R}_3$ beliebig verknotet und untereinander verschlungen sein. Zwei derartige Komplexe sollen gleichartig verschlungen heißen, wenn sie durch eine Deformation in sich des ebenen $\mathfrak{R}_3$ ineinander überführbar sind. Es gilt nun offenbar der Satz:

Zwei dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, die aus dem ebenen $\mathfrak{R}_3$ durch Ausscheidung der Punkte eines eindimensionalen Komplexes entstehen, sind dann und nur dann homöomorph, wenn der eine der beiden Komplexe mit dem anderen oder mit dessen Spiegelbild gleichartig verschlungen ist.

Speziell folgt hieraus, daß ebene Räume, aus denen (auch bezüglich Spiegelungen) verschieden verknotete Linien ausgeschieden sind, nicht homöomorph sind. Man kann die Frage aufwerfen, ob ein analoger Satz für von verschieden verknoteten Flächen vom Geschlecht 1 berandete Teile des $\mathfrak{R}_3$ gilt. Eine im

[1] Durch ein Versehen gelangt Poincaré (5. Complément à l'analysis situs, Rend. del circ. mat. di Palermo, 18, p. 90) zur gegenteiligen Behauptung.

$\mathfrak{R}_3$ liegende geschlossene Fläche vom Geschlecht 1 teilt nämlich den $\mathfrak{R}_3$ in zwei Stücke, deren eines stets dem Innern einer unverknoteten Ringfläche homöomorph zu sein scheint. Läßt man nun diese Teile bei zwei verschieden verknoteten Ringflächen fort, so kann man fragen, ob die beiden restierenden Mannigfaltigkeiten homöomorph sein können.

Über eine Fehlerquelle bei thermoelektrischen Messungen

von

Franz Meißner,
stud. phil.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1906.)

Wenn man irgend ein Drahtsystem zum Zwecke thermoelektrischer Experimente erwärmt und die Temperatur irgend eines Punktes in der Metallkombination durch ein unmittelbar daneben befindliches Thermometer zu bestimmen sucht, so ergibt sich eine Fehlerquelle infolge des thermischen Leitvermögens der Drähte des Systems.

Auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Ernst Lecher, der auf diese Fehlerquelle an anderer Stelle[1] hinwies, stellte ich diesbezügliche Versuche an, welche zu einigen vielleicht nicht uninteressanten Resultaten führten.

Als thermoelektrisches System, von dem z. B. der Peltiereffekt oder die thermoelektromotorische Kraft u. dgl. zu untersuchen wären, wurden stets Drähte von 3 *mm* Durchmesser verwendet.

A. Zunächst wurde zum Erwärmen ein elektrischer Ofen konstruiert. Eine Porzellanröhre von 60 *cm* Länge und 2·4 *cm* lichter Weite war von außen mit einem Nickeldrahte von

[1] E. Lecher, diese Sitzungsber., 115. Bd., Abt. IIa, p. 177 (1906).

0·5 *mm* Durchmesser umwickelt und außerdem durch mehrere Lagen Asbestpapier gegen Ausstrahlung der Wärme geschützt. Auch die beiden Öffnungen der Porzellanröhre wurden mit Asbestwolle verstopft, um jede störende Wirkung infolge von Luftströmungen zu vermeiden. So konnte bei Verbrauch von nur zirka 3 Amp. Stromstärke im Bewicklungsdraht eine Temperatur von ungefähr 800° C. im Inneren des Ofens erreicht werden. Durch ein kleines Thermoelement (Konstantan und Eisen von 0·5 *mm* Durchmesser) wurde zunächst bei einer bestimmten, während des Versuches konstant gehaltenen Stärke des Heizstromes die Temperatur im Inneren des geheizten Porzellanrohres für mehrere Punkte der Achse bestimmt. Die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft dieses Thermoelements — wir wollen dasselbe mit »I« bezeichnen — von der Temperatur war vorher genau ermittelt worden. Hierauf wurde in demselben elektrischen Ofen bei gleicher Stärke des Heizstromes ein 3 *mm* dicker Kupferdraht längs der Achse bis zu einer gewissen variablen Tiefe eingeführt; an dem im Ofen befindlichen Ende dieses Kupferdrahtes war ein mit dem früher beschriebenen Elemente I identisches Thermoelement II hart angelötet. Indem man diesen Kupferdraht verschieden tief in das geheizte Porzellanrohr eintauchte, ergaben sich für die betreffenden Stellen im Ofen die mit II gemessenen Temperaturen, die von den früher an derselben Stelle mit I gemessenen Temperaturen infolge der Leitfähigkeit des Kupferdrahtes abwichen.

Nimmt man statt des Kupferdrahtes einen ebenso dicken Eisendraht, so wird infolge der geringeren Leitfähigkeit desselben die Erscheinung natürlich weniger auffallend.

In der folgenden Tabelle bedeutet das x in der ersten Vertikalreihe die Entfernung des Achsenpunktes des erwärmten hohlen Porzellanzylinders von der Öffnung. Da die ganze Länge des Ofens 60 *cm* betrug, so bezieht sich die erste Horizontalreihe $x = 30$ auf die Mitte, die letzte Horizontalreihe $x = 5$ auf eine Stelle knapp am Ende des Ofens.

Die zweite Vertikalreihe — Normaltemperatur — gibt die wirkliche Temperatur an den betreffenden Stellen im Inneren des elektrischen Ofens, gemessen mit dem Thermoelemente I,

an. Diese Temperatur dürfte richtig sein, weil die zu ihrer Bestimmung verwendeten Thermoelementchen infolge des kleinen Durchmessers der Drähte und der geringen Leitfähigkeit wohl kaum die Temperatur in nennenswerter Weise erniedrigen können.

Die dritte und vierte Vertikalreihe bedeuten die am Ende des Kupferdrahtes, respektive Eisendrahtes mit dem Elemente II gemessenen Temperaturen.

Die fünfte und sechste Vertikalreihe ergibt für Kupfer und Eisen die Differenzen zwischen Ofen- und Drahttemperatur.

Versuch 1.

Die Mitte des Ofens ist auf 300° C. erhitzt.

x	Normaltemperatur	Temperatur am Drahtende		Temperaturdifferenz	
		Cu	Fe	Cu	Fe
30	300°	274°	296°	26°	4°
25	298	248	284	50	14
20	282	208	261	74	21
15	256	160	225	96	31
10	207	109	161	98	46
5	136	59	95	77	41

In der Fig. 1 geben die untersten drei (ausgezogenen) Linien die Resultate dieser Versuchsreihe. Die Ordinaten von N stellen die Normaltemperatur, die von Fe die Temperatur am Ende eines Eisendrahtes, die von Cu jene am Ende eines Kupferdrahtes dar, wenn die Drähte bis zu einer durch die Abszissen gegebenen Tiefe in den Ofen eintauchen.

Man ersieht, daß die am Kupferende bestimmte Temperatur tief unter der Ofentemperatur liegt und daß diese Differenz um so kleiner wird, je mehr man sich der Mitte des Ofens nähert. Sie müßte natürlich bei einem unendlich langen Rohre verschwinden. Bei Eisen ist die Erscheinung weniger auffällig.

Versuch 2.

Die Mitte des Ofens ist auf 600° C. erhitzt.

x	Normal-temperatur	Temperatur am Drahtende		Temperaturdifferenz	
		Cu	Fe	Cu	Fe
30	600°	576°	600°	24°	0°
25	600	551	599	49	1
20	579	495	574	84	5
15	542	417	529	125	13
10	467	298	445	169	22
5	319	138	243	181	76

Die mittleren drei punktierten Kurven der Fig. 1 ergeben hier die Versuchsresultate in analoger Weise wie früher.

Versuch 3.

Die Mitte des Ofens ist auf 750° C. erhitzt.

x	Normal-temperatur	Temperatur am Drahtende		Temperaturdifferenz	
		Cu	Fe	Cu	Fe
30	750°	729°	747°	21°	3°
25	750	700	743	50	7
20	721	636	714	85	7
15	681	555	664	126	17
10	599	391	569	208	30
5	406	180	329	226	77

Die drei gestrichelten obersten Kurven der Fig. 1 geben diese Resultate wieder.

Zur Diskussion der Fig. 1 sei erwähnt, daß die Differenz zwischen der Temperatur des Ofens und jener am Kupferende

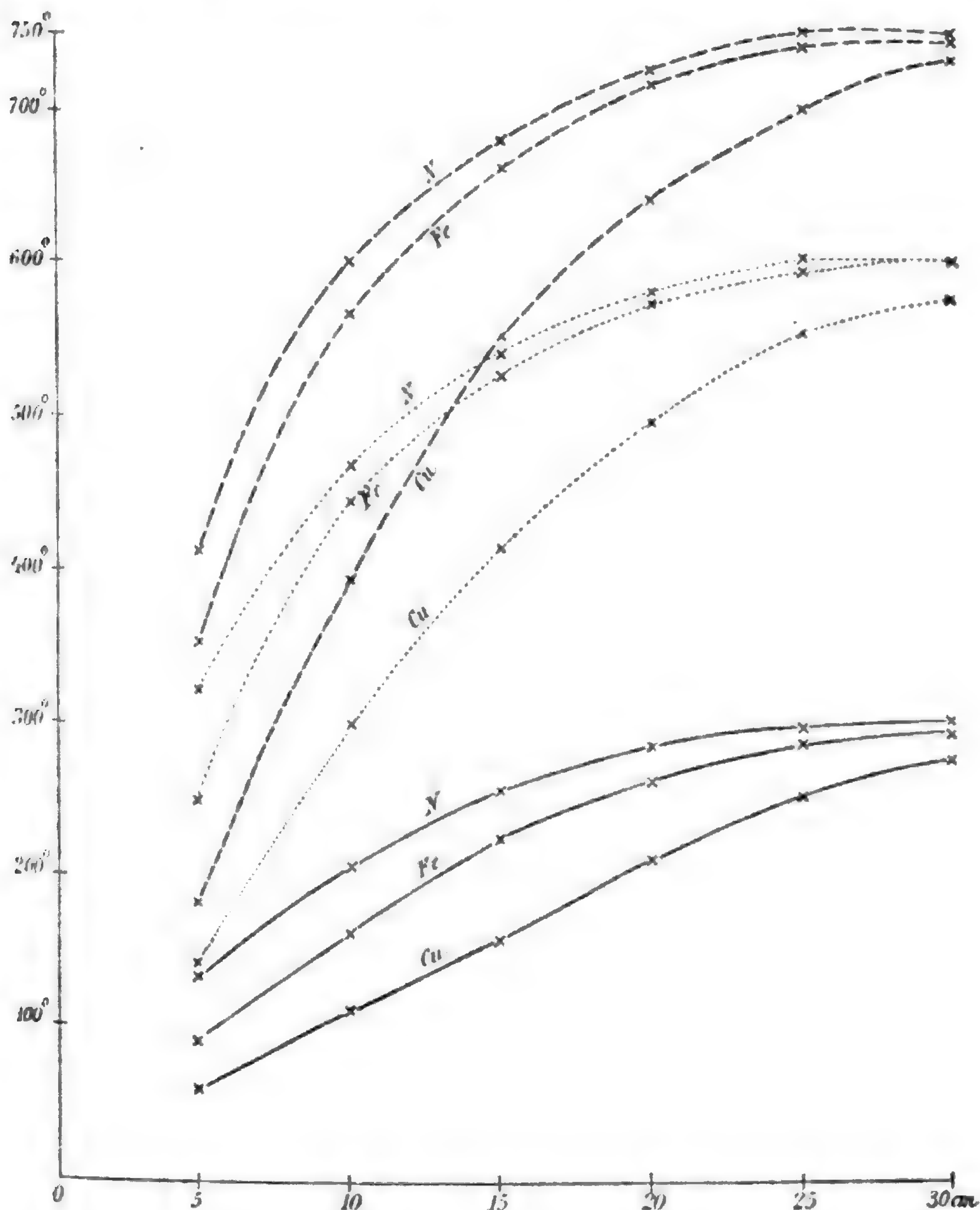


Fig. 1.

nach den obersten drei gestrichelten Kurven bis zu 100° C. betragen kann in der Tiefe von 18 *cm*, ja sogar 200° C. in der Tiefe von 10 *cm*. Wenn man also hier die Temperatur eines kleinen, im Ofen neben dem Kupferdrahte befind-

lichen Thermoelementes als Temperatur des 3 *mm* dicken Kupferdrahtes annähme, würde der Fehler 200° C. betragen! Bei Eisen sind die Differenzen natürlich geringer. Daß bei höheren Temperaturen die Eisenkurve sich mehr der Temperaturkurve des Ofens anschmiegt, hat seinen Grund teils in der Änderung der Leitfähigkeit, die bei höheren Temperaturen geringer wird, besonders aber in der Veränderung der Oberflächen durch Oxydation, da die Erwärmung in erster Reihe durch Strahlung erfolgt.

B. Bei einer zweiten Versuchsreihe wurde ein elektrischer Ofen von W. C. Heraeus verwendet, den auch E. Bausenwein bei seinen Arbeiten über »Änderung des Peltiereffektes mit der Temperatur«[1] benützte (Länge des Porzellanrohres = 60 *cm*, geheizte Länge = 30 *cm*, lichte Weite = zirka 6 *cm*).

Zu den folgenden Tabellen ist zu bemerken, daß die Abszissen x von 0 bis 15 sich auf das aus dem Ofen herausragende ungeheizte Rohrende beziehen. Erst von 15 *cm* an beginnt die eigentliche Heizstrecke des Ofens; x = 30 *cm* stellt wieder die Mitte des Ofens dar.

Versuch 1.

Die Mitte des Ofens besitzt die Temperatur von 300° C.

x	Normal-temperatur	Temperatur am Drahtende		Temperaturdifferenz	
		Cu	Fe	Cu	Fe
30	300°	226°	290°	74°	10°
27·5	292	204	277	88	15
25	272	184	253	88	19
22·5	246	152	212	94	34
20	206	111	162	95	44
17·5	174	76	113	98	61
15	128	55	80	73	48

[1] E. G. Bausenwein, diese Sitzungsber., 113. Bd., Abt. IIa, p. 667 (1904).

Die Beobachtungsresultate sind in Fig. 2 (ausgezogene Kurven) zusammengestellt, wobei die früheren Bezeichnungen gelten.

Versuch 2.

Die Mitte des Ofens besitzt die Temperatur von 600° C.

x	Normal-temperatur	Temperatur am Drahtende		Temperaturdifferenz	
		Cu	Fe	Cu	Fe
30	600°	554°	600°	46°	0°
27·5	592	517	587	75	5
25	577	472	567	105	10
22·5	549	407	520	142	29
20	484	326	441	158	43
17·5	390	228	321	162	69

Die Beobachtungsergebnisse dieses Versuches werden durch die gestrichelten Kurven von Fig. 2 dargestellt.

Bei den Kurven in Fig. 2 zeigt sich das überraschende Resultat, daß selbst in der Mitte eines derartigen Ofens bei 300° C. am Ende des 3 *mm* dicken Kupferdrahtes eine Temperatur herrscht, welche um etwa 70° C. tiefer ist als die durch das daneben befindliche Thermoelement I gemessene Ofentemperatur.

Diese Differenz verkleinert sich, wenn das Kupfer vorher mehrere Male auf 600° C. erwärmt wurde, da infolge der Oxydierung die Wärmeaufnahme durch Strahlung jetzt eine größere ist. Dies drückt sich auch in den gestrichelten oberen Kurven derselben Figur aus, denn hier ist die Differenz nur mehr 50° C., zu welchem Resultate auch die jetzt verminderte Leitfähigkeit des Kupfers beiträgt.

Für Eisen liegt der Fall ähnlich, wenn auch minder scharf ausgeprägt.

C. Um ein Luftbad bei etwa 100° C. untersuchen zu können, wurde eine Glasröhre von 18 *cm* Länge und 2·5 *cm* lichter Weite verwendet, welche von außen mit Wasserdampf geheizt werden konnte.

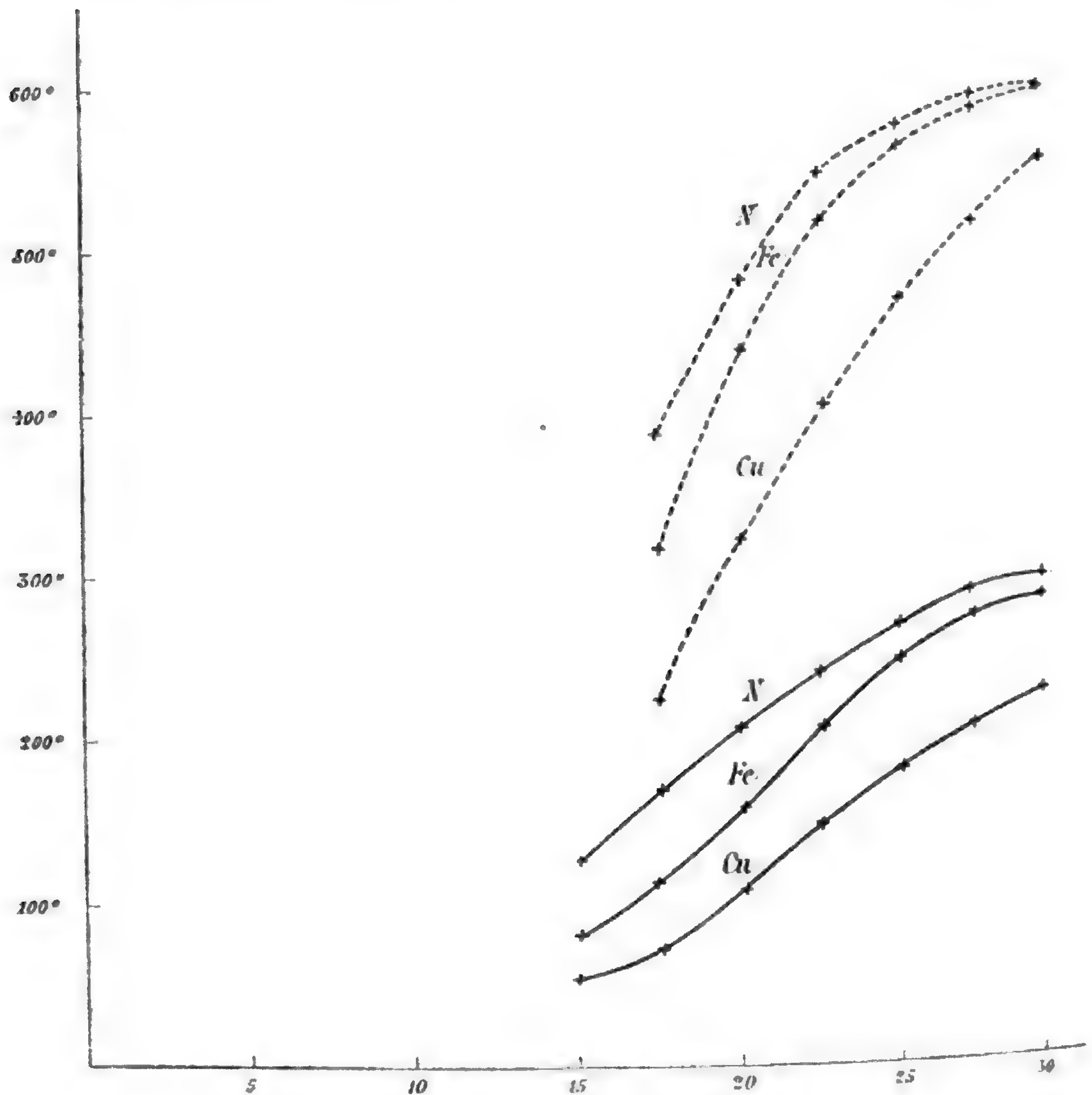


Fig. 2.

Für diesen Versuch ergaben sich bei Kupfer und Eisen von 3 *mm* Durchmesser die in folgender Tabelle verzeichneten Resultate.

Ein Bild vom Verlaufe der Temperaturkurve in den verschiedenen Tiefen gibt Fig. 3. Auch hier ergibt sich in einer Tiefe von 16 *cm* für Kupfer eine Fehlerquelle von 23° C.

x	Normal-temperatur	Temperatur am Drahtende		Temperaturdifferenz	
		Cu	Fe	Cu	Fe
16	100°	77°	98°	23°	2°
14	100		97		3
12	100		96		4
10	100		93		7
8	100	62	90	38	10
6	100		87		13
4	97	50	80	47	17
2	89	44	70	45	19
0	65	32	51	33	14

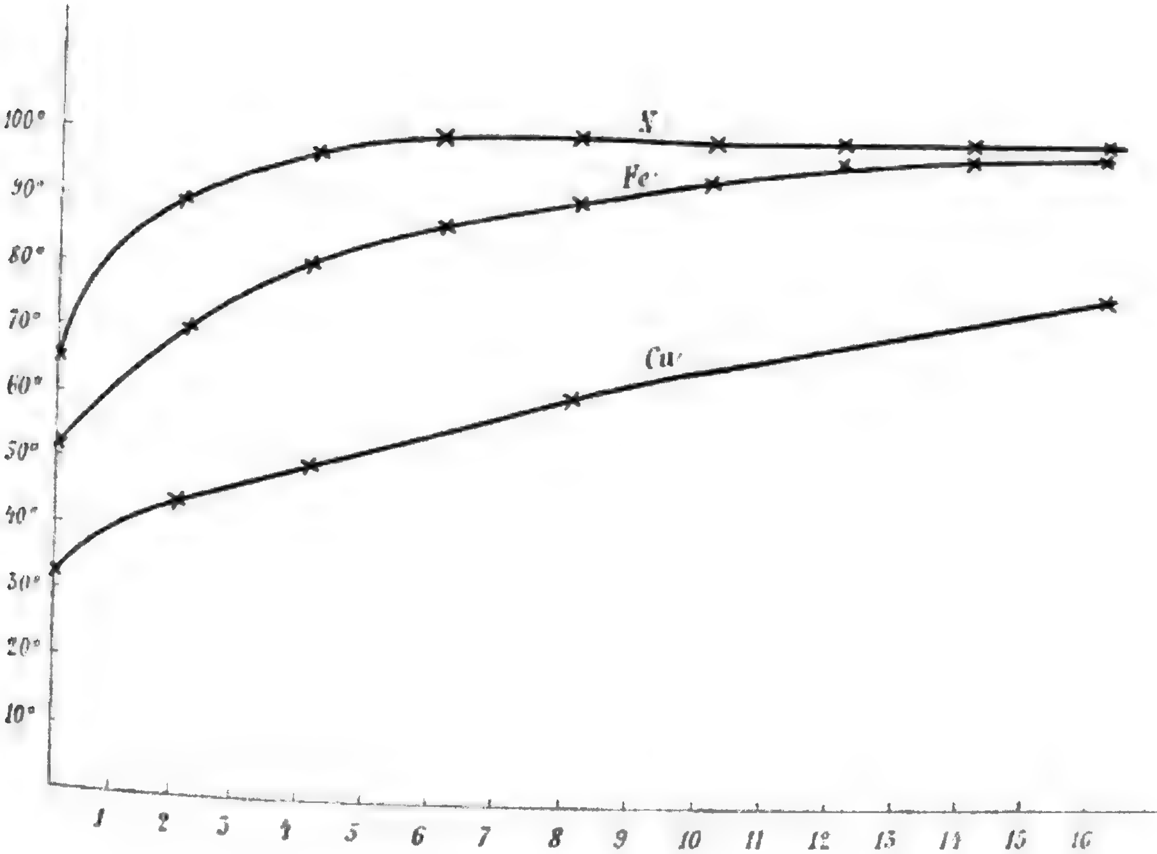


Fig. 3.

D. Während die bisherigen Versuche sämtlich in Luftbädern stattgefunden hatten, wurde nun auch eine Versuchsreihe in einem Flüssigkeitsbade vorgenommen. Ein Glasgefäß von 6 *cm* lichter Weite war bis zur Höhe von 10 *cm* mit Terpentinöl gefüllt und hing in einem zweiten Glasgefäße mit siedendem Wasser, so daß das Terpentinbad eine Temperatur von 100° C. hatte; durch fleißiges Rühren wurde dafür Sorge getragen, daß an allen Stellen gleichmäßige Temperatur herrschte. Ein gewöhnliches Quecksilberthermometer bestätigte auch die Konstanz der Temperatur. Wenn man hier den 3 *mm* dicken Kupferdraht mit dem am Ende angelöteten Thermoelement II senkrecht einführte, ergaben sich für die Temperatur t des Kupferendes in einer Tiefe x unter der Oberfläche des Terpentinöles die Werte:

$x =$	2	3	4	6	8	10 *cm*
$t =$	89·2°	93·7°	95°	96·5°	97·7°	98·7°

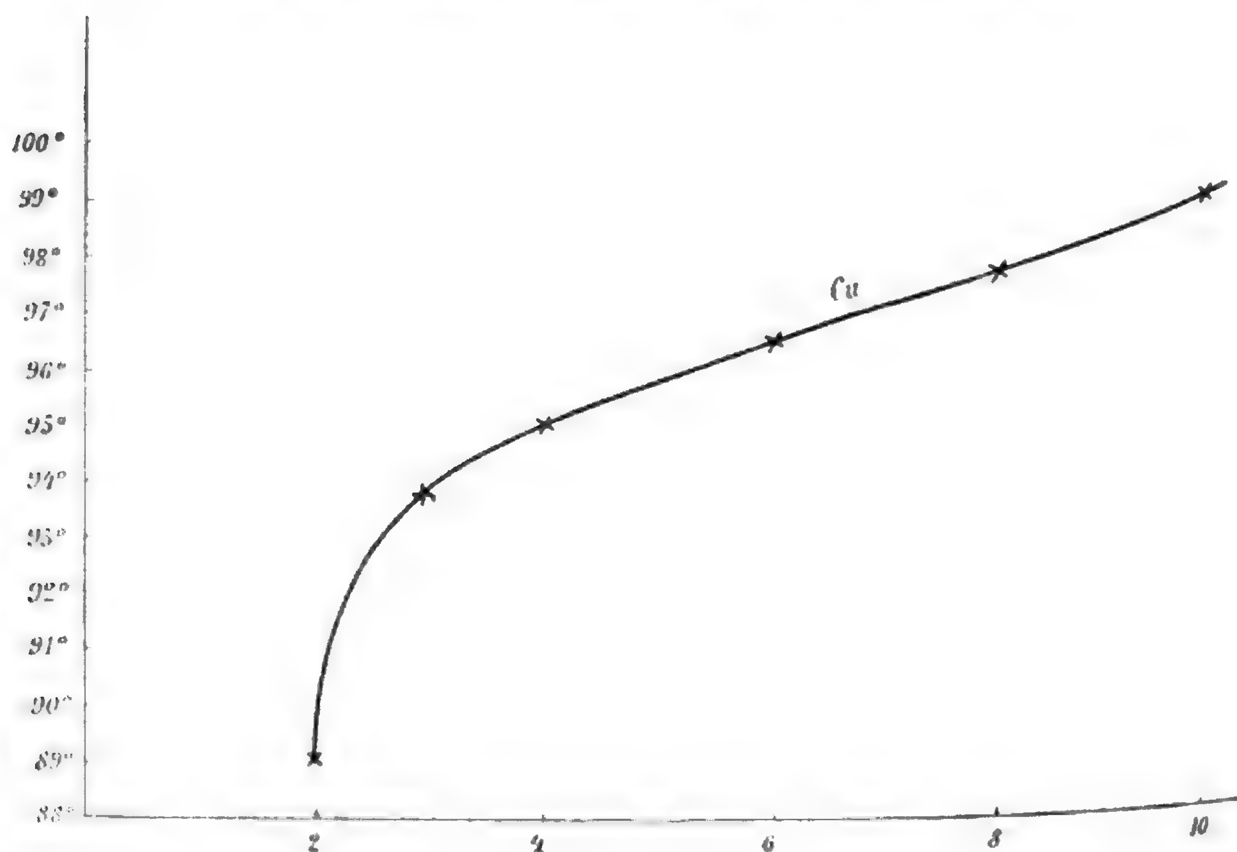


Fig. 4.

Fig. 4 gibt ein Bild vom Verlaufe der Temperatur mit der Tiefe.

Dieses Resultat erscheint gleichfalls auffallend, da selbst am Boden des Gefäßes in einer Tiefe von 10 *cm* die Temperatur von 100° C. noch nicht erreicht ist.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß die in vorliegender Untersuchung gegebenen Differenzen bei vielen thermoelektrischen Arbeiten eine nicht zu unterschätzende Fehlerquelle bilden. Es scheint somit für alle genauen Messungen auf diesem Gebiete unbedingt geboten, besonders bei Verwendung von dickeren Drähten aus gut leitenden Metallen, die ja in vielen Fällen notwendig sind, die Temperatur der Drähte nicht mit der eines daneben befindlichen Thermometers zu identifizieren, es muß vielmehr das die Temperatur messende Thermoelementchen aus möglichst dünnen Drähten in unmittelbar metallischem Kontakte mit dem Hauptdrahte stehen.

Über einige Folgerungen, die sich aus den Fresnel'schen Reflexionsformeln ergeben

von

Dr. **Lise Meitner.**

Aus dem II. physikalischen Institute der Universität Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1906.)

Im dritten Bande der »Scientific Papers«, p. 15, beschreibt Lord Rayleigh ein Experiment, das sich auf die Reflexion an der Grenzfläche zweier Medien, deren relativer Brechungsexponent für gelbe Strahlen gleich eins ist, bezieht. Lord Rayleigh war zu diesem Versuch durch eine Mitteilung Christiansen's (Annalen der Physik und Chemie, Bd. XXIII, 1884) veranlaßt worden, in welcher dieser zeigte, daß Mischungen von sehr feinen Pulvern und Flüssigkeiten mehrere Farben hindurchlassen, wenn die Brechungsverhältnisse des Pulvers und der Flüssigkeit beinahe gleich sind. Christiansen sieht hierin einen Beweis dafür, daß Mischungen von feinen Pulvern und Flüssigkeiten sich unter Umständen wie Mischungen von Wasser und Alkohol verhalten, daß somit das Brechungsverhältnis der Mischung von dem der Bestandteile verschieden ist. Mit Rücksicht auf diese Ergebnisse wollte nun Lord Rayleigh untersuchen, ob die Reflexion von Lichtstrahlen, deren relativer Brechungsexponent gleich eins ist, tatsächlich verschwindet.

Die Versuche wurden an einer Glasplatte, die in eine Lösung von Schwefelkohlenstoff und Benzol getaucht war, angestellt. Da Schwefelkohlenstoff stärker lichtbrechend, Benzol schwächer lichtbrechend ist als Glas, so kann durch ein passend gewähltes Mischungsverhältnis erreicht werden, daß

für eine bestimmte Farbe die Mischung denselben Brechungsindex hat wie die eingetauchte Glasplatte.

Die Anordnungen waren so getroffen, daß Gleichheit der Indizes im gelben Teile des Spektrums herrschte. Es wird sich im folgenden zeigen, daß die beobachteten Erscheinungen wesentlich davon abhängen, daß gerade für gelbe Strahlen der relative Brechungsexponent den Wert eins hatte.

Lord Rayleigh fand nun bei ziemlich schräger Inzidenz (leider fehlt jede Zahlenangabe) Totalreflexion im Blau und Violett, sehr geringe, doch immerhin merkliche Reflexion im Gelb, stärkere im Rot. Wächst der Einfallswinkel mehr und mehr, derart, daß das Licht nahezu streifend einfällt, so rückt das Gebiet der Totalreflexion vom blauen Teile des Spektrums gegen den gelben. Im Gelb zeigt sich ein sehr scharf abgegrenzter Streifen, während im Orange und Rot stärkere Reflexion, aber nicht Totalreflexion vorhanden ist. Lord Rayleigh schreibt die Dunkelheit im Gelb einer Kontrastwirkung zu; die Rechnung ergibt indes, daß in dem Gebiet, in welchem der Brechungsexponent eins ist, keine Reflexion stattfindet.

Bei mäßigen Einfallswinkeln zeigte sich eine deutliche, anscheinend farblose Reflexion; diese verschwand auch bei sorgfältigster Reinigung der Glasplatte nicht, so daß Lord Rayleigh selbst es als zweifelhaft hinstellt, daß die Erscheinung durch die Annahme einer Oberflächenschichte genügend erklärt wäre. Trotzdem bemerkt er, daß zufolge der Fresnel'schen Formeln wegen der Gleichheit der Brechungsexponenten für gelbe Strahlen zumindest im ganzen sichtbaren Spektrum keine merkliche Reflexion stattfinden dürfte, daß die beobachtete Reflexion nicht der Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den beiden Medien zugeschrieben werden könnte und eine Erklärung der Erscheinung nur durch Versuche an frischen Bruchflächen zu erhoffen wäre.

Ich glaube nun, im folgenden zeigen zu können, daß sich aus den Fresnel'schen Formeln Resultate ableiten lassen, die mit den oben erwähnten Erscheinungen in auffallender Übereinstimmung stehen.

Da nämlich die Intensität des reflektierten Lichtes durch den Quotienten zweier trigonometrischer Funktionen gegeben

ist, so kann man untersuchen, ob nicht unter gewissen angebbaren Bedingungen dieser Ausdruck trotz des Verschwindens des Zählers von Null verschieden bleibt. Physikalisch drückt sich das dahin aus, daß bei einer bestimmten Versuchsanordnung die Differenz der Brechungsexponenten, so gering sie auch sein mag, so vorteilhaft ausgenützt würde, daß starke Reflexion auftritt.

I. Zufolge der Fresnel'schen Formeln ist die Amplitude T des reflektierten Lichtes für die Komponente, die in der Einfallsebene polarisiert ist, wenn die Amplitude des einfallenden Lichtes eins ist, durch den Ausdruck gegeben

$$T=\frac{\sin(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\varphi+\varphi_1)},$$

wobei φ der Einfalls- und φ_1 der Brechungswinkel ist, oder bei Anwendung der Produktentwicklung für den Sinus

$$T=\frac{(\varphi-\varphi_1)\prod\limits_1^\infty 1-\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{m\pi}\right)^2}{(\varphi+\varphi_1)\prod\limits_1^\infty 1-\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{m\pi}\right)^2}.$$

Da aus physikalischen Gründen die linke Seite dieser Gleichung immer endlich bleiben muß, so gilt dasselbe von der rechten Seite und es ist ohneweiters gestattet, an Stelle der Quotienten der Produkte das Produkt der Quotienten zu setzen.

$$T=\frac{\varphi-\varphi_1}{\varphi+\varphi_1}\prod_1^\infty\frac{1-\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{m\pi}\right)^2}{1-\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{m\pi}\right)^2}=$$

$$=\frac{\varphi-\varphi_1}{\varphi+\varphi_1}\cdot\frac{1-\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}\right)^2}{\left(1-\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}\right)\left(1+\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}\right)}\prod_2^\infty\frac{1-\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{m\pi}\right)^2}{1-\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{m\pi}\right)^2}.$$

Für $\varphi = \varphi_1$ verschwindet das Produkt rechter Hand, weil der Faktor $\varphi - \varphi_1$ Null wird. Gelingt es nun, φ so zu bestimmen, daß sich $\varphi - \varphi_1$ gegen einen der Faktoren im Nenner weghebt, wie groß immer φ_1, d. h. wie groß immer der relative Brechungsexponent sein mag, so wird der obige Ausdruck auch für $\varphi = \varphi_1$ von Null verschieden sein.

φ soll nun so bestimmt werden, daß

$$\varphi - \varphi_1 = 1 - \frac{\varphi + \varphi_1}{\pi}.$$

Setzt man $\varphi - \varphi_1 = \delta$, so ist

$$\delta = 1 - \frac{2\varphi - \delta}{\pi}$$

$$\varphi = \frac{\pi - (\pi - 1)\delta}{2}. \qquad \ldots 1)$$

Sobald φ dieser Gleichung genügt, kürzt sich der Faktor $\varphi - \varphi_1$ gegen den ersten Faktor im Nenner weg. Wenn man anstatt dieses ersten einen anderen Faktor des Nenners wählt, so ergibt sich für φ ein physikalisch nicht brauchbarer Wert.

Ist nun $n = 1$, also $\varphi = \varphi_1$, so wird $\delta = 0$ und

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Für denjenigen Strahl, für welchen n exakt gleich eins ist, kann Reflexion nur beim Einfallswinkel $\frac{\pi}{2}$ stattfinden.

Für die weitere Untersuchung sind zwei Fälle zu unterscheiden. Bezeichnet n_r den relativen Brechungsexponenten für rotes Licht, n_v die gleiche Größe für blaues, so muß, weil der relative Brechungsindex im Gelb gleich eins ist, entweder

$$n_r > 1; \quad n_v < 1$$

oder

$$n_r < 1; \quad n_v > 1.$$

Wenigstens wird dies im allgemeinen zutreffen; denkbar wäre allerdings auch der Fall, daß die Dispersionsverhältnisse der gemischten Flüssigkeiten derartige sind, daß die Differenzen $1-n_r$ und $1-n_v$ das gleiche Vorzeichen haben. Dadurch würde übrigens an dem Nachstehenden nichts Wesentliches geändert werden.

Hier sei zunächst der erste Fall vorausgesetzt, also

$$n_r > 1; \quad n_v < 1.$$

Für rotes Licht ist demnach δ eine positive Größe und

$$\varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Nun ist ja für rote Strahlen φ nicht mehr gleich φ_1; aber die Differenz $\varphi-\varphi_1$ ist immerhin sehr klein, so daß im allgemeinen T einen sehr geringen Wert haben wird. Ist aber der Einfallswinkel so gewählt, daß er der obigen Gleichung genügt, so wird im roten Teile des Spektrums starke Reflexion eintreten. Die Menge des reflektierten Lichtes sowie der Winkel, für welchen dieses Maximum der Reflexion eintritt, lassen sich angenähert berechnen. Diese Berechnung soll weiter unten ausgeführt werden.

Für blaues Licht ist wegen $n_v < 1$ δ eine negative Größe und der Einfallswinkel, für welchen der Faktor $\varphi-\varphi_1$ wegfiele, müßte größer als $\frac{\pi}{2}$ sein, eine physikalisch unbrauchbare Lösung. Dagegen tritt für

$$\sin\varphi = n_v$$

Totalreflexion im blauen Teile des Spektrums ein und, je mehr φ wächst, um so näher rückt das Gebiet der Totalreflexion an den Bereich der gelben Strahlen heran.

II. Die Intensität des reflektierten Lichtes, das normal zur Einfallsebene polarisiert ist, wird unter gleichen Voraussetzungen wie oben durch den Ausdruck bestimmt

$$S = \frac{\operatorname{tg}(\varphi-\varphi_1)}{\operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1)} = \frac{\pi \operatorname{cotg}(\varphi+\varphi_1)}{\pi \operatorname{cotg}(\varphi-\varphi_1)}$$

oder nach der Reihenformel für die Kotangente

$$S=\frac{\frac{\pi}{\varphi+\varphi_1}+\sum_1^\infty{}_m\frac{2\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}}{\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}\right)^2-m^2}}{\frac{\pi}{\varphi-\varphi_1}+\sum_1^\infty{}_m\frac{2\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}}{\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}\right)^2-m^2}}=$$

$$=\frac{\frac{2\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}}{\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}\right)^2-1}}{\frac{\pi}{\varphi-\varphi_1}+\sum_1^\infty{}_m\frac{2\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}}{\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}\right)^2-m^2}}+$$

$$+\frac{\frac{\pi}{\varphi+\varphi_1}+\sum_2^\infty{}_m\frac{2\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}}{\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}\right)^2-m^2}}{\frac{\pi}{\varphi-\varphi_1}+\sum_1^\infty{}_m\frac{2\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}}{\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}\right)^2-m^2}}.$$

Für $\varphi=\varphi_1$ wird $\frac{\pi}{\varphi-\varphi_1}=\infty$, der Ausdruck

$$\sum_1^\infty{}_m\frac{2\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}}{\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{\pi}\right)^2-m^2}$$

verschwindet dagegen. Bestimmt man daher φ so, daß

$$\frac{\pi}{\varphi-\varphi_1}=\frac{2\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}}{\left(\frac{\varphi+\varphi_1}{\pi}\right)^2-1},$$

so wird S immer nahezu gleich 1, weil neben $\frac{\pi}{\varphi-\varphi_1}$ der restliche Betrag des Nenners in allen hier in Betracht kommenden Fällen zu vernachlässigen ist.

Setzt man wieder $\varphi-\varphi_1=\delta$, so erhält man für φ den Wert

$$\varphi=\frac{\sqrt{\pi^2+\delta^2}}{2}+\delta. \qquad \ldots 2)$$

Für $n=1$ ist $\delta=0$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Für Strahlen, deren relatives Brechungsverhältnis eins ist, tritt wieder nur bei streifender Inzidenz Reflexion auf. Für rotes Licht ist δ positiv und der zugehörige Wert von φ größer als $\frac{\pi}{2}$, d. h. im roten Licht gibt es keine merkliche Reflexion für die senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Komponente.

Für blaues Licht ist δ negativ und sei gleich $-\varepsilon$. Der zugehörige Wert des Einfallswinkels φ_v ist kleiner als $\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi_v=\frac{\sqrt{\pi^2+\varepsilon^2}}{2}-\varepsilon.$$

Dieser Winkel ist aber immer größer als derjenige, für welchen Totalreflexion im Blau eintritt. Bezeichnet man diesen letzteren mit φ_v', so ist

$$\varphi_v'=\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

demnach

$$\varphi_v>\varphi_v'.$$

Der Unterschied zwischen φ_v und φ_v' ist indes jedenfalls gering. Andrerseits läßt sich zeigen, daß der Winkel φ_r, für welchen die Komponente T im roten Lichte ein Maximum wird, größer ist als der Winkel der Totalreflexion für blaues Licht. Es war

$$\varphi_r=\frac{\pi-(\pi-1)\,\delta}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi_v=n_v.$$

In erster Annäherung kann man $\frac{\pi - 1}{2}$ gleich der Einheit setzen und

$$\varphi_r = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Nun ist

$$\frac{\sin \varphi_r}{\sin \varphi_r'} = n_r \quad \text{und} \quad \varphi_r' = \varphi_r - \delta.$$

Bestimmt man δ aus der Gleichung für φ_r, so wird

$$\frac{\sin \varphi_r}{\sin \varphi_r'} = \frac{\sin \varphi_r}{2 \sin^2 \varphi_r - 1} = n_r.$$

Hieraus läßt sich φ_r bestimmen.

Ferner ist bei allen Körpern der Unterschied zwischen den Brechungsexponenten für blaues und gelbes Licht (etwa für die F- und D-Linie) mindestens doppelt so groß als die entsprechende Differenz für gelbes und rotes Licht (D und C-Linie). Im betrachteten Falle ist demnach

$$2(n_r - 1) \leqq 1 - n_v$$

oder

$$2(n_r - 1) \leqq 1 - \sin \varphi_v.$$

Aus $\frac{\sin \varphi_r}{2 \sin^2 \varphi_r - 1} = n_r$ folgt

$$\frac{1}{2 \sin \varphi_r - \frac{1}{\sin \varphi_r}} = n_r$$

und wegen $\varphi_r < \frac{\pi}{2}$

$$2 \cdot \frac{2 - 2 \sin \varphi_r}{2 \sin \varphi_r - 1} < 2(n_r - 1)$$

$$4 - 4 \sin \varphi_r < 1 - \sin \varphi_v$$

$$4 \sin \varphi_r - \sin \varphi_v > 3,$$

eine Relation, die nur bestehen kann, wenn φ_v kleiner ist als φ_r.

Schließlich läßt sich noch die Intensität des reflektierten roten Lichtes angenähert berechnen.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird

$$T = \frac{1}{2\pi} \prod_{2}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{m^2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{36}{35} \cdots$$

Nach der Wallis'schen Formel ist

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{36}{35} \cdots$$

Setzt man in dem Ausdruck $\prod_{2}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{m^2}} = 2\pi T$ an Stelle des zweiten, vierten, sechsten ..... Faktors das jedem dieser Faktoren vorangehende Glied, so geht dieses Produkt in den Wert für $\frac{\pi^2}{4}$ über; da aber in diesem Produkt jedes folgende Glied kleiner ist als das vorhergehende, so hat man hiebei vergrößert. Folglich gilt

$$\frac{\pi}{2} < 2\pi T < \frac{\pi^2}{4}$$

$$\frac{1}{4} < T < \frac{\pi}{8}.$$

Der Wert von T liegt also zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{5}$.

Es ergeben sich hienach folgende Resultate:

Ist der Brechungsexponent für gelbes Licht gerade gleich eins, für rotes größer, für blaues Licht kleiner als eins, so tritt bei ziemlich schiefer Inzidenz zunächst Totalreflexion im Blau und Violett auf. Wird die Inzidenz mehr und mehr streifend, so rückt die Totalreflexion immer näher an den gelben Teil des Spektrums; gleichzeitig nimmt die Reflexion im Orange und Rot zu und erreicht für den durch Gleichung 1) bestimmten

Winkel ein Maximum. Außerdem muß das reflektierte rote Licht in der Einfallsebene polarisiert sein.

Diese Ergebnisse stimmen in auffälliger Weise mit den Beobachtungen Lord Rayleigh's überein; nur fehlt dort jede Bemerkung über den Polarisationszustand des reflektierten Lichtes. Aus der Versuchsanordnung ergibt sich aber, daß tatsächlich n_r größer, n_v kleiner als eins war.

Ist umgekehrt $n_v > 1$ und $n_r < 1$, so kehrt sich die Erscheinung um; es wird das rote Licht total reflektiert, während das blaue Licht bei dem durch Gleichung 1) bestimmten Einfallswinkel am stärksten reflektiert wird und in der Einfallsebene polarisiert ist.

Haben schließlich die Differenzen $1-n_r$ und $1-n_v$ das gleiche Vorzeichen, so wird, wenn dieses Vorzeichen positiv ist, sowohl im blauen als im roten Teile des Spektrums bei den entsprechenden Winkeln Totalreflexion eintreten; wenn dagegen das Vorzeichen negativ ist, so wird bei den durch Gleichung 1) bestimmten Winkeln im Blau, respektive Rot Reflexion stattfinden und das ganze reflektierte Licht wird in der Einfallsebene polarisiert sein.

Da dieser letzte Umstand eine genaue Prüfung zuläßt, so ist die Möglichkeit einer experimentellen Bestätigung der vorstehenden Überlegungen gegeben. Um das reflektierte Licht auf seinen Polarisationszustand zu prüfen, wurde folgender Versuch, bei dessen Ausführung mir Herr Dr. Haschek freundlichst behilflich war, angestellt.

Auf dem Tischchen eines Spektroskops, an dessen Fernrohr ein Nicol angesetzt werden konnte, befand sich ein rechteckiger Glastrog, welcher mit der Mischung aus Schwefelkohlenstoff und Benzol gefüllt war. In diese wurde ein Kronglasprisma gestellt und das durchgehende Licht beobachtet. Die Anordnung war demnach so getroffen, daß $n_v < 1$, $n_r > 1$ sein mußte. Das Prisma war mittels eines Metallstiftes an einer Glasplatte befestigt, um bei feststehendem Troge gedreht werden zu können. Der Spalt wurde zunächst mit einer Natriumflamme beleuchtet und durch Zusetzen der einen oder anderen Flüssigkeit Gleichheit der Brechungsindizes von Prisma und Flüssigkeitsmischung für gelbes Licht hergestellt. War dieser

Zustand erreicht, so durfte beim Herausheben des Prismas keine Verschiebung des Spaltbildes im Fernrohr eintreten. Dieser Umstand gestattet eine genaue Kontrolle, ob wirklich Gleichheit der Brechungsquotienten vorhanden ist.

Als Lichtquelle wurde eine 50 Kerzen starke Glühlampe verwendet und in den Gang der Strahlen ein Kondensator gestellt, durch welchen zugleich das seitliche Licht abgeblendet wurde.

Fiel das Licht streifend ein, so war der größte Teil des durchgehenden roten Lichtes parallel zur Einfallsebene polarisiert, in voller Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Rechnung.

Der eingangs beschriebene Versuch Lord Rayleigh's führt demnach nicht nur zu keinerlei Widerspruch mit den Fresnel'schen Formeln, sondern kann geradezu als neue Bestätigung für deren Gültigkeit betrachtet werden.

Über einen Reibungsversuch

von

Anton Lampa.

Aus dem I. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1906.)

Gustav Herrmann beschreibt in seiner Schrift: »Der Reibungswinkel«[1] folgenden von ihm als »bekannt« bezeichneten Versuch: Legt man einen Stab auf zwei Unterlagen und bewegt diese gegeneinander, so gelangen die Unterlagen schließlich unter den Schwerpunkt des Stabes. Herrmann gibt für diesen leicht anzustellenden Versuch eine Erklärung, deren Inhalt sich wie folgt wiedergeben läßt. Die Normaldrücke auf die Unterlagen seien N_1 und N_2. Das Gleiten des Stabes beginnt auf jener Unterlage, welche den kleineren Normaldruck erfährt, also jener, welche vom Schwerpunkt des Stabes weiter absteht. Gelangt aber diese Unterlage in einen Abstand vom Schwerpunkte, welcher dem Abstande der anderen Unterlage vom Schwerpunkte gleich ist, so tritt nicht gleichzeitiges Gleiten über beide Unterlagen ein, wie man zunächst erwarten würde, sondern der Stab gleitet noch etwas weiter, bis die Reibung an dieser Unterlage, die durch den kleineren Reibungskoeffizienten

[1] Gustav Herrmann, Der Reibungswinkel. Eine Festgabe zur dritten Säkularfeier der Universität Würzburg am 1. August 1882. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn, 1882. Vergl. auch F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels. Heft III, p. 438 und 439 (Leipzig, B. G. Teubner, 1903).

der Bewegung und den Normaldruck bestimmt ist, gleich wird der Reibung an der anderen Unterlage, die durch den größeren Reibungskoeffizienten der Ruhe und den Normaldruck bestimmt ist. Bezeichnet man die Reibungskoeffizienten der Ruhe und Bewegung mit μ_0 und μ, wobei $\mu_0 > \mu$, so tritt Wechsel der Bewegung des Stabes ein, sobald der Schwerpunktsabstand der Unterlage, über welche das Gleiten gerade stattfindet, dem $\frac{\mu}{\mu_0}$ ten Teile des Schwerpunktsabstandes der anderen Unterlage gleich geworden ist. Der Versuch beweist, daß der Reibungskoeffizient der Ruhe größer ist als der der Bewegung;[1] durch

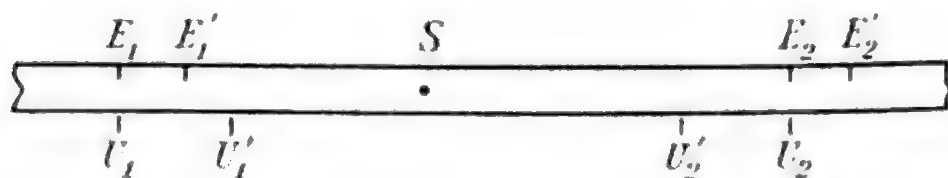


Fig. 1.

Markierung der Umkehrpunkte und Messung ihrer Abstände vom Schwerpunkt erhält man die Möglichkeit, das Verhältnis $\frac{\mu}{\mu_0}$ zu bestimmen.

Die einsetzende Stabbewegung genügt, wie sich leicht zeigen läßt, einer Minimumbedingung. Wir wollen von dieser Bemerkung später Gebrauch machen. Zur Erkenntnis dieser Minimumbedingung gelangt man auf folgendem Wege. Die beiden Unterlagen mögen den Stab in den Punkten U_1 und U_2 berühren; über diesen beiden Punkten markieren wir die Stabpunkte E_1 und E_2 (Fig. 1). Der Schwerpunkt des Stabes sei in S, sein Gewicht sei $= Q$. Setzen wir

$$SU_1 = a_1, \quad SU_2 = a_2,$$

[1] Daß der Reibungskoeffizient von der Geschwindigkeit abhängen muß, läßt sich, wie jüngstens Viktor Fischer gezeigt hat (Phys. Zeitschr., 7. Jahrg., Nr. 12 vom 15. Juni 1906, p. 425), aus dem Prinzip von der Erhaltung der Energie herleiten.

so sind die Normaldrücke

$$N_1 \text{ (auf } U_1) = Q\frac{a_2}{a_1+a_2}, \quad N_2 \text{ (auf } U_2) = Q\frac{a_1}{a_1+a_2}.$$

Wir denken uns nun die beiden Unterlagen um eine sehr kleine Strecke 2λ genähert, sei es, daß jede der beiden Unterlagen um λ oder die eine um $\frac{2\lambda}{k}$, die andere um $\left(1-\frac{1}{k}\right)2\lambda$ verschoben wird. Der Stab wird dann im allgemeinen Falle gleiten, was eine Änderung der Normaldrücke zur Folge hat. Wir denken uns aber 2λ so klein, daß die Änderung der Normaldrücke vernachlässigt werden kann, und nehmen zunächst an, daß jede der beiden Unterlagen um λ verschoben worden sei. Es kommt U_1 nach U_1', U_2 nach U_2', wobei

$$U_1U_1' = U_2U_2' = \lambda.$$

Dadurch habe sich der Stab etwa so verschoben, daß E_1 nach E_1', E_2 nach E_2' gelangt. Dann hat über die Unterlage U_1 ein Gleiten um die Strecke $E_1'U_1'$, über die Unterlage U_2 ein Gleiten um die Strecke $U_2'E_2'$ stattgefunden. Berechnen wir die hiebei gegen die Reibungswiderstände geleisteten Arbeiten. Wir dürfen hiezu den Reibungskoeffizienten der Ruhe verwenden, da λ sehr klein und im Beginne der Bewegung der Reibungskoeffizient jenem der Ruhe gleich ist. Diese Arbeit ist

$$\mathfrak{A} = \mu_0(N_1 \,.\, E_1'U_1' + N_2 \,.\, U_2'E_2'),$$

was wir auch, wenn wir $E_1'U_1' = \frac{\lambda}{n}$ setzen, schreiben können:

$$\mathfrak{A} = \mu_0\left[N_1 \,.\, \frac{\lambda}{n} + N_2\left(2-\frac{1}{n}\right)\lambda\right]$$
$$= \frac{\mu_0 Q\lambda}{a_1+a_2}\left[a_2 \,.\, \frac{1}{n} + a_1\left(2-\frac{1}{n}\right)\right].$$

Welchen Wert müssen wir n, welches nach den Bedingungen der Aufgabe alle Werte zwischen $\frac{1}{2}$ und ∞ haben

kann, erteilen, damit diese Arbeit den kleinstmöglichen Wert erhält? Da, wie in der Figur angenommen, $a_1 < a_2$, erhält $\mathfrak{A}$ seinen kleinsten Wert für $n = \infty$, wie man sofort sieht, wenn man den Klammerausdruck in der Form

$$2a_1 + \frac{1}{n}(a_2 - a_1)$$

schreibt. Dieser kleinste Wert von $\mathfrak{A}$ ist $\frac{\mu_0 Q \lambda}{a_1 + a_2} \cdot 2a_1$. Er tritt auf, wenn ein Gleiten von E_1 gegen U_1, d. h. ein Gleiten des Stabes über die Unterlage, auf welche der größere Normaldruck ausgeübt wird, nicht stattfindet; denn dann ist

$$E_1'U_1' = \frac{\lambda}{\infty} = 0.$$

Die wirklich eintretende Bewegung des Stabes entspricht also diesem Falle. Wir können also sagen: Die Bewegung des Stabes setzt derart ein, daß die bei dem ersten sehr kleinen, vom Stabe zurückgelegten Wegstücke gegen die Reibungskräfte zu leistende Arbeit ein Minimum wird.

Wollte man die weitere Stabbewegung ebenfalls auf diese Minimumeigenschaft untersuchen, so müßte man dem Umstand Rechnung tragen, daß die Relativgeschwindigkeit des Stabes gegen die beiden Unterstützungspunkte im supponierten allgemeinen Falle, der bei der Bildung des Arbeitswertes vorauszusetzen ist, ungleich ist, daher die Reibungskoeffizienten der Bewegung über die beiden Unterstützungspunkte ungleich sind. Man müßte also die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Geschwindigkeit kennen. Wir können uns für unsere Zwecke mit der Kenntnis dieser Minimumbedingung für das Einsetzen der Bewegung begnügen.

Weiters läßt sich leicht zeigen, daß es gleichgültig ist, ob die beiden Unterlagen je um λ oder die eine um $\frac{2\lambda}{k}$, die andere um $\left(1 - \frac{1}{k}\right) 2\lambda$ verschoben werden, daß es ferner auch gleichgültig ist, ob diese Verschiebungen gleichzeitig oder

nacheinander vorgenommen werden, wobei auch die Reihenfolge der Verschiebungen gleichgültig ist.

Der Herrmann'sche Versuch gestattet eine Erweiterung. Unterstützt man eine Platte in beliebigen drei Punkten, wobei natürlich der Schwerpunkt der Platte innerhalb des durch die drei Punkte bestimmten Dreieckes liegt, und bewegt nun die Unterstützungspunkte gegen einen beliebigen Punkt, den wir als Konvergenzpunkt bezeichnen wollen, so bewegt sich die Platte derart, daß endlich, wenn die Unterstützungspunkte in dem Konvergenzpunkte zusammenkommen, der Schwerpunkt der Platte über dem Konvergenzpunkte liegt. Man kann den Versuch in primitiver Weise mit einem Teller ausführen, den man mit drei Fingern unterstützt. Zur näheren Untersuchung traf ich folgende Anordnung. Eine größere kreisförmige Metallplatte, welche in der Mitte ein Loch hat, wird auf drei Füßen horizontal gelagert; sie wird mit Papier überzogen, um Punkte auf ihr markieren zu können. Auf die Metallplatte legt man drei gleich große Halbkugeln aus Messing von etwa 8 *mm* Durchmesser mit ihren Äquatorebenen auf. Nahe am Äquator jeder Halbkugel ist eine Schnur befestigt, die durch das Loch in der Metallplatte durchgezogen wird. Durch Ziehen an den Schnüren können die Halbkugeln gegen das Loch, welches also den Konvergenzpunkt darstellt, bewegt werden. Will man erreichen, daß sich die Halbkugeln geradlinig gegen den Konvergenzpunkt bewegen, so kann man auf die Platte schmale Führungsleisten aus Holz derart aufkleben, daß die Halbkugeln zwischen ihnen leicht gleiten. Eine kreisförmige Platte aus starkem Spiegelglas, deren Schwerpunkt man markiert, vervollständigt den Apparat. Sie wird auf die Halbkugeln aufgelegt, deren Pole somit die Unterstützungspunkte bilden.

Man findet, daß das angegebene Resultat, schließliche Koinzidenz des Schwerpunktes mit dem Konvergenzpunkte, immer eintritt, ob nun die Führungsschienen für die Halbkugeln vorhanden sind oder nicht, ferner unabhängig davon, ob die Unterstützungspunkte gleichzeitig oder hintereinander verschoben werden. Man übersieht auch sofort, daß dieses Resultat notwendig ist, indem der Schwerpunkt der Platte niemals das von den Unterstützungspunkten gebildete Dreieck verlassen

kann. Gelangt er nämlich etwa in eine Seite dieses Dreieckes, so erfahren nur mehr die beiden dieser Seite angehörenden Unterstützungspunkte einen Druck von der Platte; der dritte Unterstützungspunkt gleitet nunmehr frei ohne Reibungswiderstand unter der Platte und übt keine Rückwirkung mehr auf sie aus. Gelangt andrerseits der Schwerpunkt über einen Unterstützungspunkt, so erfahren die beiden anderen Unterstützungspunkte keinen Druck mehr und gleiten frei unter der Platte weg.

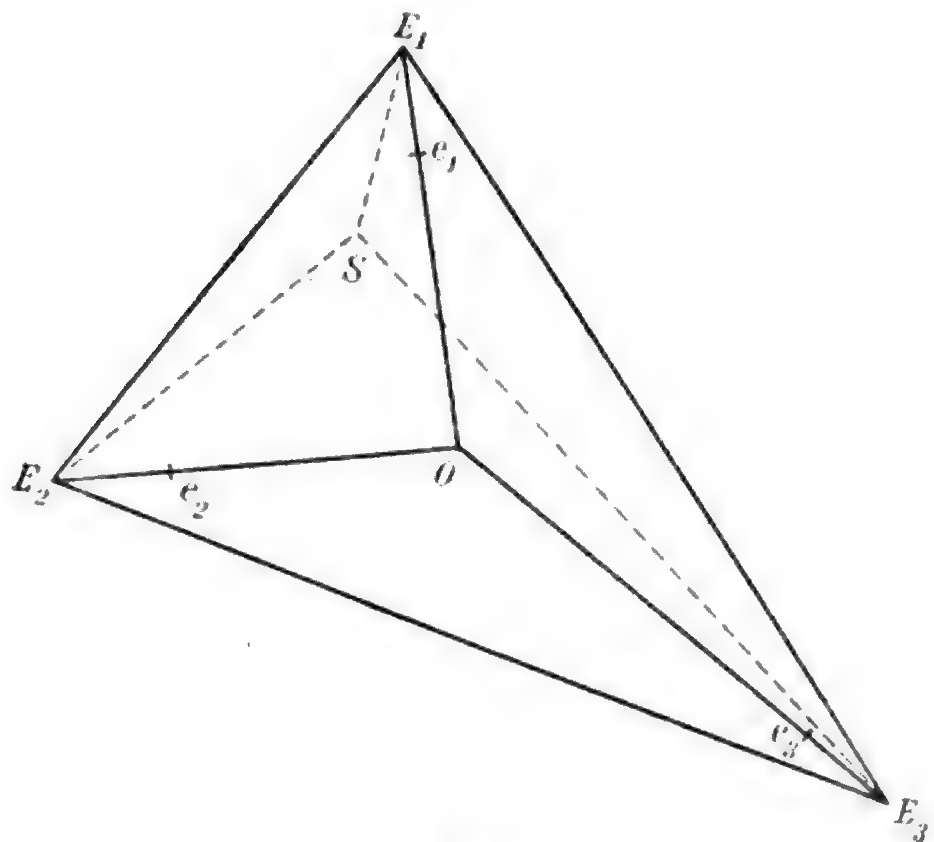


Fig. 2.

Einen näheren Einblick in den Vorgang, welcher zu dem Endresultate, Koinzidenz des Schwerpunktes mit dem Konvergenzpunkte, führt, erhält man mit der geschilderten Versuchsanordnung. Es genügt, sich auf den einfacheren Fall zu beschränken, daß die Unterstützungspunkte genötigt sind, sich zu dem Konvergenzpunkt in gerader Linie hinzubewegen, daß also die Führungsleisten angebracht sind. S sei der Schwerpunkt der Platte (Fig. 2), deren Gewicht wir mit Q bezeichnen wollen. Die Unterstützungspunkte U_1, U_2, U_3 mögen anfänglich

unter den Plattenpunkten E_1, E_2, E_3 liegen. Die Normaldrücke N_1, N_2, N_3, welche U_1, U_2, U_3 erfahren, sind dann bekanntlich

$$N_1 = \frac{\Delta S E_2 E_3}{\Delta E_1 E_2 E_3} Q, \quad N_2 = \frac{\Delta S E_3 E_1}{\Delta E_1 E_2 E_3} Q, \quad N_3 = \frac{\Delta S E_1 E_2}{\Delta E_1 E_2 E_3} Q.$$

Der Konvergenzpunkt sei O. Wir verschieben nun die Unterstützungspunkte gleichzeitig um die sehr kleine Strecke λ gegen O hin, so daß U_1 nach e_1, U_2 nach e_2, U_3 nach e_3 gelangt; es ist also

$$E_1 e_1 = E_2 e_2 = E_3 e_3 = \lambda.$$

λ denken wir uns so klein, daß die Änderungen der Normaldrücke auf die Unterstützungspunkte bei diesen Verschiebungen vernachlässigt werden können. Die Platte kommt durch diese Verschiebung der Unterstützungspunkte in eine andere Stellung (in der Figur nicht gezeichnet); E_1 komme nach E_1', E_2 nach E_2', E_3 nach E_3'. E_1' und e_1 geben dann die Endpunkte der Linie, längs welcher der Unterstützungspunkt U_1 an der Platte geglitten ist. Da wir λ sehr klein genommen haben, so dürfen wir diese Linie als Gerade ansehen und es gibt $E_1' e_1 = \lambda_1$ den Weg, längs welchem U_1 an der Platte geglitten ist. Analog verschieben sich U_2 längs der Strecke $E_2' e_2 = \lambda_2$, U_3 längs der Strecke $E_3' e_3 = \lambda_3$. Da wir für den Beginn der Bewegung die Reibungskoeffizienten für alle Unterstützungspunkte gleich dem Reibungskoeffizienten der Ruhe μ_0 setzen dürfen, wird die bei dieser Verschiebung der Platte gegen die Reibung zu leistende Arbeit

$$\mathfrak{A} = \mu_0 (N_1 \lambda_1 + N_2 \lambda_2 + N_3 \lambda_3).$$

Wenden wir auf die Bewegung der Platte den Satz an, welchen wir bei der Bewegung des Stabes im Herrmann'schen Versuch erkannt haben, so wird die einsetzende Bewegung der Platte dadurch bestimmt erscheinen, daß $\mathfrak{A}$ ein Minimum wird.

Die Bewegung der Platte ist im allgemeinen recht kompliziert und in gleicher Weise gewährt auch die Behandlung des obigen Ausdruckes kein klares Bild. Einfacher übersehbar werden die Verhältnisse, wenn man das Ergebnis des Versuches zu Hilfe nimmt, die gleichzeitigen Verschiebungen durch auf-

einanderfolgende zu ersetzen. Es zeigt sich da, daß man dieselbe Endstellung der Platte erhält, ob man die Verschiebungen gleichzeitig oder in beliebiger Reihenfolge nacheinander vornimmt. Man kann also das Resultat, welches bei der angegebenen gleichzeitigen Verschiebung der drei Unterstützungspunkte durch eine im allgemeinen komplizierte und unübersichtliche Bewegung der Platte erreicht wird, ableiten, indem man diese Verschiebungen nacheinander vornimmt und ihre Wirkungen untersucht. Wir denken uns also zunächst den Unterstützungspunkt U_1 nach e_1 verschoben. Dieser Verschiebung wirkt ein Reibungswiderstand $\mu_0 N_1$ entgegen. Ebenso groß ist die Kraft, welche durch die Bewegung von U_1 auf die Platte in der Richtung $E_1 e_1$ ausgeübt wird. Diese Kraft können wir durch zwei zu ihr parallele Kräfte $\mu_0 N_{1,2}$, die in E_2 angreift, und $\mu_0 N_{1,3}$, die in E_3 angreift, ersetzen. Die erste dieser Kräfte sucht E_2 über U_2, die zweite E_3 über U_3 zu verschieben. Diesen Verschiebungen wirken Reibungswiderstände an U_2 und U_3 entgegen, welche durch $\mu_0 N_2$ und $\mu_0 N_3$ gegeben sind. Es sind nun verschiedene Fälle möglich, die, wie das Experiment ergibt, zu verschiedenen Resultaten führen.

Erster Fall. Es sei $N_{1,2} > N_2$, $N_{1,3} > N_3$. Hier ist also auch $N_1 > N_2 + N_3$. Es findet kein Gleiten der Platte über U_1, wohl aber über U_2 und U_3 statt. Der Punkt E_1 geht also, ständig über U_1 bleibend, mit diesem mit. Doch gleitet die Platte über U_2 und U_3 unter einer gleichzeitigen Drehung nach der Seite des größeren der beiden Drucke N_2 und N_3 hin. Bezeichnen wir die Verschiebung von E_2, das nach E_2' gelangt, mit δ_2 ($E_2 E_2' = \delta_2$), jene von E_3, das nach E_3' gelangt, mit δ_3 ($E_3 E_3' = \delta_3$), so geben, da U_2 und U_3 ruhen, δ_2 und δ_3 die Strecken, längs welchen die Platte über U_2 und U_3 geglitten ist, und $\mu_0(N_2\delta_2 + N_3\delta_3)$ die Arbeit gegen die Reibung an U_2 und U_3. Zu dieser Arbeit kommt noch die Arbeit, welche gegen die bohrende Reibung an U_1 geleistet werden muß. Sehen wir von dieser ab, so wäre die Drehung der Platte durch die Forderung zu bestimmen, daß der Ausdruck $\mu_0(N_2\delta_2 + N_3\delta_3)$ ein Minimum wird. Nehmen wir, unserer Figur entsprechend, an, daß $N_2 > N_3$, so sieht man sofort, daß $\delta_2 < \delta_3$ sein muß. Verschwinden kann δ_2 allerdings

nicht. δ_2 und δ_3 lassen sich durch die Parallelverschiebung λ und den Drehungswinkel der Platte ausdrücken.

Zweiter Fall. Es sei $N_{1,2} < N_2$, $N_{1,3} > N_3$. Hier kann sein: $N_1 \gtreqless N_2 + N_3$. Jetzt kann ein Gleiten über U_2 nicht stattfinden. U_2 bleibt unter E_2, es findet nur eine Drehung um U_2 statt, und zwar im Sinne der Bewegung von U_1. E_1 bleibt hinter U_1 zurück; wenn U_1 nach e_1 gekommen ist, sei E_1 nach E_1', E_3 nach E_3' gekommen. Die Linie, längs welcher U_1 unter der Platte geglitten ist, hat E_1' und e_1 als Endpunkte. Da wir λ als sehr klein voraussetzen, darf diese Linie als Gerade angesehen werden. Setzen wir $E_1'e_1 = \delta_1$, $E_3E_3' = \delta_3$, so wird jetzt die gegen die Reibung geleistete Arbeit mit Vernachlässigung der gegen die bohrende Reibung an U_2 zu leistenden Arbeit dargestellt sein durch $\mu_0(N_1\delta_1 + N_3\delta_3)$ und die Drehung der Platte wird durch die Forderung zu bestimmen sein, daß dieser Ausdruck ein Minimum wird. δ_1 und δ_3 sind abermals durch λ und den Drehungswinkel der Platte bestimmt.

Dritter Fall. Es sei $N_{1,2} > N_2$, $N_{1,3} < N_3$. Dieser Fall ist vollkommen analog dem vorhergehenden.

Vierter Fall. Es sei $N_{1,2} < N_2$, $N_{1,3} < N_3$. Hier ist also auch $N_1 < N_2 + N_3$. Die Platte kann weder über U_2 noch über U_3 gleiten. Dagegen gleitet U_1 unter der Platte fort und die gegen die Reibung geleistete Arbeit ist hier einfach $\mu_0 N_1 \lambda$.

In analoger Weise wie die Wirkung der Verschiebung des Unterstützungspunktes U_1 sind die Wirkungen der Verschiebungen von U_2 und U_3 zu untersuchen. Durch Superposition der Wirkungen, welche die einzelnen Verschiebungen von U_1, U_2, U_3 ergeben, erhalten wir die gesuchte Bewegung der Platte, wie bereits hervorgehoben wurde. Zu bemerken wäre nur noch, daß die Arbeit bei der gleichzeitigen Verschiebung aller drei Unterstützungspunkte nicht gleich ist der Summe der Arbeiten bei aufeinanderfolgender Verschiebung derselben.

Wie aus der vorstehenden Diskussion ersichtlich, stehen die Fälle 1 und 4 in Analogie mit den Verhältnissen bei einem in zwei Punkten unterstützten Stabe, wobei nur im allgemeinen zu der Progressivbewegung noch eine Drehung hinzukommt. Ohne Analogie sind die Fälle der reinen Drehung (2 und 3).

Während beim Stabe nur Progressivbewegung über den einen oder anderen Unterstützungspunkt möglich ist, treten bei der Platte Progressiv- und Drehbewegungen auf. Denken wir uns nur U_1 bewegt, U_2 und U_3 festgehalten und bewegen U_1 bis zum Konvergenzpunkte, so können im allgemeinen alle vier Fälle nacheinander eintreten. Auch hier wird durch die Ungleichheit der Reibungskoeffizienten der Ruhe und Bewegung eine Überschreitung der Übergangspunkte, wie sie durch die Druckverteilung allein bestimmt wären, stattfinden. Ähnliches tritt bei gleichzeitiger Verschiebung aller Unterstützungspunkte ein.

Die halbtägigen Schwankungen der Temperatur und des Luftdruckes

von

R. Börnstein (Berlin).

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1906.)

In einer vor zwei Jahren veröffentlichten Studie über den täglichen Gang des Luftdruckes in Berlin[1] versuchte ich zu zeigen, daß die hiesigen Beobachtungen recht wohl mit der Auffassung vereinbar seien, welche die täglichen Druckschwankungen auf die Temperaturverhältnisse der unteren Luftschichten zurückführen will. Es wurde dabei in bekannter Weise der Tageslauf des Luftdruckes durch die Sinusreihe:

$$y = a_1 \sin(A_1 + x) + a_2 \sin(A_2 + 2x) + a_3 \sin(A_3 + 3x) + \\ + a_4 \sin(A_4 + 4x)$$

ausgedrückt; dabei bedeutet y die Abweichung des Luftdruckes vom Tagesmittel für denjenigen Augenblick, in welchem der von Mitternacht ab gezählte Stundenwinkel gleich x ist. Der tägliche Gang des Druckes erscheint dann als Übereinanderlagerung je einer Schwankung von vierundzwanzig-, zwölf-, acht- und sechsstündiger Dauer, deren Größe durch die Amplituden a, deren Eintrittswinkel durch die Phasenwinkel A gegeben sind. Hiebei darf aber nicht übersehen werden, daß die Sinusreihe nur eine rechnungsmäßige Darstellung der aus der Beobachtung gewonnenen Zahlenreihe bedeutet und daß

[1] R. Börnstein, diese Sitzungsberichte, *113* (IIa), 721 bis 738 (1904), Auszug; Meteorolog. Zeitschrift, *22*, 299 bis 305 (1905).

man keineswegs die einzelnen Glieder der Reihe als Ausdruck verschiedener physikalischer Vorgänge ansehen kann. Es wurden nun auch für den täglichen Gang der Temperatur in Berlin die Amplituden und Phasenwinkel einer entsprechenden Reihe herangezogen, um eine Vergleichung beider Reihen zu ermöglichen. Wenn es gelang, zwischen den gleichnamigen Schwankungen der Temperatur und des Druckes einfache Beziehungen aufzufinden, so konnte man hoffen, auch allgemein die Schwankungen der Temperatur als Ursache, diejenigen des Druckes als Wirkung zu erkennen und die letzteren gleich allem sonstigen Tageslauf der meteorologischen Elemente auf diejenigen Vorgänge zurückzuführen, welche von der täglichen Erddrehung in der Nähe der Bodenoberfläche erzeugt werden.

Eine Schwierigkeit zeigte sich dabei von vornherein in Betreff der halbtägigen Druckschwankung. Denn während die ganztägige Schwankung des Druckes ganz leicht mit den örtlichen Verschiedenheiten des Temperaturganges in Beziehung gebracht werden konnte, erwies sich die halbtägige Druckschwankung wesentlich unabhängig von örtlichen Zuständen und zeigt, wie namentlich Hann in einer Reihe ausgezeichneter Arbeiten nachgewiesen hat, sehr gleichmäßige Verteilung über alle untersuchten Gegenden. Die halbtägige Amplitude a_2 des Druckes ist mit ganz wenigen Ausnahmen erheblich größer als die ganztägige Amplitude a_1 und nimmt vom Äquator nach beiden Seiten hin regelmäßig ab, während der halbtägige Phasenwinkel A_2 zwischen engen, im zweiten Quadranten liegenden Grenzen schwankt.

Eine Äußerung von Sir William Thomson (Lord Kelvin)[1] und deren ausführliche Bearbeitung durch Margules[2] zeigten einen Weg, der diese Schwierigkeit zu überwinden geeignet schien, denn es ergab sich aus jenen Studien, daß unter den freien Schwingungen, die die Atmosphäre als Ganzes aus-

[1] Sir William Thomson, Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, *11*, 396 (1882), Sitzung vom 16. Jänner 1882; vergl. auch Hann, Meteorolog. Zeitschrift, *15*, 364 (1898).

[2] M. Margules, diese Sitzungsberichte, *99* (IIa), 204 (1890); *101* (IIa), 597 (1892); *102* (IIa), 11, 1369 (1893). Bericht von Trabert über diese Arbeiten, Meteorolog. Zeitschrift, *20*, 481, 544 (1903).

zuführen fähig ist, eine von sehr nahe zwölfstündiger Dauer existiert. Demnach wären die ganztägigen Druckschwankungen (ebenso wie die drittel- und vierteltägigen) als erzwungene Schwingungen anzusehen, die halbtägigen dagegen als freie und, daß diese größer ausfallen, erscheint ebenso begreiflich wie ihre bemerkenswerte Unabhängigkeit von örtlichen Besonderheiten. Es müßte also, wie schon Hann[1] ausgesprochen hat, eine geringe halbtägige Temperaturwelle genügen, um eine große Druckwelle derselben Periode zu erzeugen, und es galt nun, diese halbtägige Temperaturwelle und ihre Beziehungen zur gleichzeitigen Druckwelle aufzusuchen. Dazu wäre vorzugsweise geeignet eine Reihe von Daten, in welchen nur die halbtägige Temperaturschwankung verschieden, alle anderen Voraussetzungen aber gleichartig wären, damit man die etwaige Abhängigkeit der Druckschwankung von der Temperaturschwankung recht rein hervortreten sähe. Ist eine solche Bedingung auch unerfüllbar, so wird doch besser als auf andere Weise eine Annäherung möglich, wenn man örtliche Verschiedenheiten ganz vermeidet, indem man die halbtägigen Schwankungen eines einzelnen Ortes zu verschiedenen Jahreszeiten vergleicht und festzustellen sucht, wie der jährliche Gang der Temperaturwelle sich in demjenigen der Druckwelle bemerkbar macht. Dieses Verfahren wurde in meiner eingangs erwähnten Arbeit auf Berlin angewandt und ergab, daß die halbtägigen Amplituden a_2 für Temperatur und für Druck sehr nahe übereinstimmende Änderungen im Jahreslauf aufweisen, nämlich zwei Maxima zur Zeit der Nachtgleichen und dazwischen zwei Minima. Ob hierin wirklich ein ursächlicher Zusammenhang gegeben ist, könnte erst durch die entsprechende Untersuchung genügend zahlreicher anderer Orte ergründet werden, namentlich auch darum, weil die Luftdruckverhältnisse eines einzelnen Ortes jedenfalls nicht bloß von den daselbst stattfindenden Temperaturvorgängen abhängen, sondern gleichzeitig auch von denjenigen der Umgebung. Vielleicht findet sich die gesuchte Beziehung noch deutlicher als bisher, wenn man über ausreichendes Tatsachenmaterial verfügt, um

---

[1] Hann, Meteorolog. Zeitschrift. *15*, 368 (1898).

die Mittelwerte der halbtägigen Temperaturschwankung für ganze Breitengrade herzuleiten und mit den entsprechenden Werten für Luftdruck zu vergleichen.

Vorerst habe ich nur für einige Orte diesen Vergleich durchführen können und berichte darüber im folgenden. Zunächst stelle ich Quellen und Übersicht meiner Berechnung der harmonischen Konstanten zusammen, wobei zur Vervollständigung auch einige schon anderwärts veröffentlichte Ergebnisse hinzugefügt sind.

A. Temperatur.

1. Königsberg i. Pr. 54° 43′ nördl. Breite, 20° 30′ östl. Länge. 14 Jahre, 1890 bis 1903. Stündliche Mittel bei H. Kienast, Das Klima von Königsberg i. Pr., Teil II, Königsberg, Hartung'sche Buchdruckerei, 1904. Vergrößerte Englische Hütte. Richard'scher Thermograph (Metallrohr mit Amylalkohol), korrigiert nach einem in gleicher Höhe (2 *m* über dem Rasen) befindlichen Quecksilberthermometer. Die Werte von a_2 und A_2 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

2. Bremen. 53° 5′ nördl. Breite, 8° 48′ östl. Länge. 10 Jahre, 1891 bis 1900. Stündliche Mittel bei P. Bergholz im Deutschen meteorologischen Jahrbuch für 1900 (Bremen), p. 98 und 99, nach Angaben eines in Englischer Hütte, 2 *m* über dem Boden, angebrachten Thermographen von Richard. Die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

3. Berlin. 52° 30′ nördl. Breite, 13° 23′ östl. Länge. 8 Jahre, 1890 bis 1897. Stündliche Mittel bei R. Börnstein und E. Leß, Meteorolog. Zeitschrift, *15*, 327 (1898), nach Angaben eines Fueß'schen Thermographen, der in Englischer Hütte, 2·3 *m* hoch über dem Dache, 25·5 *m* über dem Straßenpflaster stand. Die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

4. Aachen. 50° 47′ nördl. Breite, 6° 5′ östl. Länge, 177 *m* Seehöhe. 5 Jahre, 1896 bis 1900. Die von A. Vorhagen berechneten Werte von a_1, a_2, A_1, A_2 für die 12 Monate werden von P. Polis mitgeteilt im Deutschen meteorologischen Jahrbuch für Aachen, 1903, Ergebnisse der Luftdruckregistrierungen, p. 14.

5. München. 48° 8′ 45·5″ nördl. Breite, 11° 36′ 31″ östl. Länge. 15 Jahre, 1841 bis 1845 und 1847 bis 1856. Registrierendes Metallthermometer. Bei Lamont, Ann. der Münch. Sternw., III. Suppl. p. XL (1859), finden sich die Werte von a_1 bis a_3 und A_1 bis A_3 für die 12 Monate; die Zahlen für a sind hier von Réaumur- auf Celsiusgrade umgerechnet.

6. Bukarest. 44° 25′ nördl. Breite, 26° 6′ östl. Länge, etwa 84 *m* über dem Schwarzen Meere, Thermometer in der Wild'schen Hütte 3·3 *m* über dem Boden. 16 Jahre, 1885 bis 1900. Thermographen von Richard und von Hipp. Stündliche Mittel in Analele Instit. Meteorol. al României, *16*, *C*, 1900 (Bukarest, 1903). Die Werte von a_1, a_2, A_1, A_2 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

7. Bombay. 18° 53′ 45″ nördl. Breite, 72° 48′ 12″ östl. Länge, 11·3 *m* Seehöhe. 5 Jahre, 1866 bis 1870. Quecksilberthermometer des Colába Observatory in Jalousiehütte, etwa 1·3 *m* über dem Boden, stündlich abgelesen mit Ausnahme der Sonntage und einiger Feiertage. Bei Charles Chambers, The Meteorology of the Bombay Presidency, London, 1878, sind die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für die Monate sowie für Sommer, Winter und Jahr angegeben.

8. Pará. 1° 27′ südl. Breite, 48° 29′ westl. Länge, 10 *m* Seehöhe. 30 Monate, 1900 bis 1903. Nach Registrierungen des Dr. Emil Goeldi am naturhistorischen und ethnographischen Museum sind die zweistündlichen Mittel sowie die Werte von a_1, a_2, A_1, A_2 für die Monate und das Jahr von Hann, diese Sitzungsberichte, *114* (II a), 31, 32 (1905), mitgeteilt.

9. Kwai (West-Usambara). 4° 45′ südl. Breite, 38° 18′ östl. Länge. 1610 *m* Seehöhe. 35 Monate, Januar 1897 bis November 1899; in den Jahreswerten ist der Dezember 1898 mit doppeltem Gewicht enthalten, in den Monatswerten für Dezember nur die beiden Monate von 1897 und 1898 mit gleichem Gewicht. »Der Thermograph stand in einer vorschriftsmäßigen Wetterhütte.« Stündliche Werte und Stundenmittel für die einzelnen Monate bei H. Maurer, Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen; gesammelt und herausgegeben von der Deutschen Seewarte, H. X, T. I, p. 103 bis 121. Nach Berichtigung einiger Druck- und Rechenfehler sind die

Werte von a_2 und A_2 für die Monate und das Jahr von mir berechnet.

10. Batavia. 6° 11′ 10″ südl. Breite, 106° 49′ 45″ östl. Länge, 8 *m* Seehöhe. 10 Jahre, 1866 bis 1875. Stündliche Beobachtungen, reduziert auf das Normalthermometer Kew Nr. 323. Stundenmittel in: Observations made at the magnetic and meteorological Observatory at Batavia, published by order of the government of Netherlands India. Die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

11. Dar es-Salam. 6° 49′ südl. Breite, 39° 19′ östl. Länge, 13·5 *m* Seehöhe. 3 Jahre, 1897 bis 1899. Stündliche Angaben des in einer Wetterhütte mit doppeltem Dach untergebrachten Thermographen von Bohne samt Monatsmitteln bei H. Maurer, Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen, gesammelt und herausgegeben von der Deutschen Seewarte, H. X, T. I, p. 67 bis 91. Die Werte von a_2 und A_2 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

12. Córdoba, Argentinien. 31° 25′ 15·5″ südl. Breite, 64° 11′ westl. Länge, 438 *m* Seehöhe. Stundenmittel bei W. G. Davis, Clima de la República Argentina, compilado de las observaciones efectuadas hasta el año 1900, p. 7. Buenos Aires, 1902. Die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für das Jahr sind von mir berechnet.

13. Kenilworth bei Kimberley, Südafrika. 28° 42′ südl. Breite, 24° 27′ östl. Länge, etwa 1200 *m* Seehöhe. 3 Jahre, 1898 bis 1900. Hauptsächlich nach den Angaben von Umkehrthermometern finden sich die Stundenwerte in: Cape of Goodhope. Colonial Secretary's ministerial division. Report of the Meteorological Committee for the year ... Cape Town .... Die Werte von a_2 und A_2 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

14. Fisherton, Santa Fé. 32° 6′ südl. Breite, 60° 38′ westl. Länge. 28 *m* Seehöhe, 1·40 *m* über dem Boden. 7 Jahre, 1891 bis 1897. Stündliche Werte in: Anales de la Oficina Meteorol. Argentina por su director Gualt. G. Davis, Tomo XII, 2, Buenos Aires, 1898, abgedruckt in Metereolog. Zeitschrift, *19*, 368 (1902). Die Werte von a_2 und A_2 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

15. Melbourne. 37° 48′ 45″ südl. Breite, 144° 58′ 15″ östl. Länge, 36·8 *m* Seehöhe. 6 Jahre, 1858 bis 1863. Bei George Neumayer, Discussion of the Meteorological and Magnetical Observations made at the Flagstaff Observatory, Melbourne, during the years 1858 bis 1863; Mannheim, 1867, finden sich die Werte von a_1 bis a_3 und A_1 bis A_3 für die Monate und das Jahr. Sie sind hier umgerechnet auf Celsiusgrade und $x = 0$ für Mitternacht.

B. Luftdruck.

16. Bremen (siehe 2, p. 94 und 95). Barograph nach Sprung-Fueß. Seehöhe 1891 bis 1895: 7·6 *m*, 1896 bis 1900: 15·8 *m*. Die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

17. Berlin. 52° 30′ nördl. Breite, 13° 23′ östl. Länge, Seehöhe 1884 bis 1. Juni 1901: 51·31 *m*, von da bis 1903: 59·85 *m*. 20 Jahre, 1884 bis 1903. Stundenwerte in meiner eingangs erwähnten Arbeit, ebenda die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für die Monate und das Jahr.

18. Aachen (siehe 4). 8 Jahre, 1896 bis 1903. Barograph von Richard, Nr. 16074, reduziert auf das Quecksilberbarometer Wild-Fueß, Nr. 278. a_1, a_2, A_1, A_2.

19. München (siehe 5). 529 *m* Seehöhe, 11 *m* über dem Pflaster der Frauenkirche. 15 Jahre, 1841 bis 1845 und 1847 bis 1856. Aus den in Pariser Linien ausgedrückten Zahlen Lamont's in Millimeter umgerechnet von Hann, Denkschr. d. math.-naturw. Kl. d. Akad. Wien, *55*, 103 (1899), wo sich die Werte von a_1 bis a_3 und A_1 bis A_3 für die Monate und das Jahr finden.

20. Bukarest. 44° 26′ nördl. Breite, 26° 6′ östl. Länge, 93 *m* Seehöhe. 3 Jahre, 1885 bis 1887. Hann, Denkschr. d. math.-naturw. Kl. d. Akad. Wien, *55*, 102 (1889) gibt die Werte von a_1, a_2, A_1, A_2 für die Monate und das Jahr an.

21. Bombay (siehe 7). Für die Monate Jänner bis Mai liegen Beobachtungen von 24 Jahren vor, 1844 und 1848 bis 1870, für die Monate Juni bis Dezember von 25 Jahren, 1844 und 1847 bis 1870. Stündliche Ablesungen des Standard Barometer Newman No 58 mit Ausnahme der Sonntage und einiger

Feiertage. Bei Chambers (s. o.) sind die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für die Monate sowie für Sommer, Winter und Jahr angegeben.

22. Pará (siehe 8). Barometer in 12·7 *m* Seehöhe. 3 Jahre (1901 bis 1903?). Hann a. a. O. teilt zweistündliche Mittel und Werte von a_1, a_2, A_1, A_2 für die Monate und das Jahr mit. Die Jahreswerte sind nicht aus den Jahresmitteln des Luftdruckes, sondern aus den Mittelwerten der Größen p und q berechnet ($a^2 = p^2 + q^2$; tg $A = p/q$). Die eingeklammerten Werte von a_2 sind auf Meeresniveau reduziert.

23. Kwai (siehe 9). 2 Jahre, Dezember 1897 bis November 1899. Barograph von Richard. Hann, diese Sitzungsberichte, *114* (IIa), 16 bis 19 (1905), hat die Zahlen von Maurer einer teilweisen Neuberechnung unterzogen und gibt zweistündliche Mittel sowie die Werte von a_1, a_2, A_1, A_2 für die Monate und das Jahr an.

24. Batavia (siehe 10). Für die 10 Beobachtungsjahre 1866 bis 1875 teilt Hann in Denkschr. d. math.-naturw. Kl. d. Akad. Wien, *55*, 99 (1889), die Werte von a_1 bis a_3 und A_1 bis A_3 für die Monate und das Jahr mit.

25. Dar es-Salam (siehe 11). 3 Jahre, 1896, 1897 und April 1898 bis März 1899. Im Jahre 1896 Barograph von Richard, seit Anfang Jänner 1897 Barograph von Bohne. Bei Maurer, a. a. O., p. 30 und 31, finden sich die Werte von a_1, a_2, A_1, A_2 für die Monate und das Jahr.

26. Córdoba (siehe 12). Die Werte von a_1 bis a_4 und A_1 bis A_4 für das Jahr sind von mir berechnet.

27. Fisherton (siehe 14). 7 Jahre, 1891 bis 1897. Barometer 27·8 *m* über Niedrigwasser des La Plata-Stromes bei Buenos Aires. Die Werte von a_2 und A_2 für die Monate und das Jahr sind von mir berechnet.

28. Melbourne (siehe 15). 6 Jahre, 1858 bis 1863. Die Werte von a_1 bis a_3 und A_1 bis A_3 für die Monate und das Jahr finden sich bei Hann, Denkschr. d. math.-naturw. Kl. d. Akad. Wien, *55*, 97 (1889).

Die Zahlenwerte, deren Ursprung vorstehend angegeben wurde, finden sich in den nachfolgenden Tabellen zusammengestellt, wobei die Beobachtungen der einzelnen Orte mit den

gleichen Nummern bezeichnet sind wie bei der vorstehenden Quellenangabe. Von der Reihenfolge der Nummern wurde behufs zweckmäßiger Anordnung der Tabellen einige Male abgewichen. Die Amplituden a sind in Celsiusgraden, respektive Millimetern ausgedrückt.

A. Temperatur.

	1. Königsberg, 54° 43′ nördl. Breite, 14 Jahre		2. Bremen, 53° 5′ nördl. Breite, 10 Jahre							
	a_2	A_2	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1	A_2	A_3	A_4
Jänner	0·308	40° 6′	0·801	0·255	0·136	0·117	213°20′	38°27′	177°16′	43°33′
Februar	480	44 2	1·442	451	098	059	217 1	30 38	198 52	110 1
März	555	46 28	2·425	552	089	103	221 14	43 30	348 54	195 26
April	569	61 41	3·767	500	313	080	226 44	74 28	27 35	228 16
Mai	446	85 48	4·284	390	386	117	233 12	120 17	41 43	312 49
Juni	298	106 12	4·136	309	363	092	232 28	134 34	39 6	345 45
Juli	313	94 51	3·647	299	251	082	232 12	129 37	56 53	337 34
August	518	68 9	3·765	429	330	072	231 45	76 38	26 23	256 6
September	842	59 9	3·278	659	218	155	229 42	59 16	4 39	223 48
Oktober	756	56 41	2·169	735	098	242	226 46	51 8	264 27	252 17
November	432	50 38	1·389	548	168	028	222 53	40 10	224 37	53 2
Dezember	234	38 53	0·763	350	126	037	224 13	31 27	220 38	354 11
Jahr	0·539	48°24′	2·656	0·383	0·110	0·030	228°39′	61°21′	25°11′	243°23′

Jahreswerte: $a_1 = 2 \cdot 433$, $A_1 = 234° \, 12'$

	3. Berlin, 52° 30' nördl. Breite, 8 Jahre								4. Aachen, 50' 47' nördl. Breite, 5 Jahre			
	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1	A_2	A_3	A_4	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	1·025	0·288	0·110	0·030	209°11'	33°30'	200°21'	27°15'	0·764	0·349	213°29'	29° 4'
Februar	1·586	461	134	001	210 41	31 57	212 57	6 42	1·424	523	217 42	30 7
März	2·433	694	128	149	209 13	54 53	78 28	118 58	1·200	816	223 10	21 57
April	3·518	522	243	069	217 19	66 39	4 10	210 34	2·898	698	225 39	59 42
Mai........	3·963	331	321	032	223 11	104 52	21 49	336 38	3·484	221	227 26	123 53
Juni	3·777	345	302	077	224 27	124 23	29 48	24 34	3·748	361	231 24	139 27
Juli........	3·536	305	263	065	223 58	100 10	20 46	4 25	3·524	388	234 16	120 31
August	3·483	454	283	082	221 9	65 3	17 15	113 56	3·410	690	233 21	121 22
September ..	3·243	717	182	142	222 44	56 21	344 34	206 30	2·785	814	234 40	41 49
Oktober	2·137	638	145	080	219 26	41 4	308 2	236 8	2·061	801	231 12	34 42
November ..	1·256	520	088	036	217 23	49 28	193 46	3 58	1·219	612	227 21	35 27
Dezember ..	0·767	276	098	049	214 44	36 28	206 50	5 25	0·884	367	222 57	39 59
Jahr	2·560	0·399	0·098	0·163	219°53'	57°28'	1°48'	354°26'	—	—	—	—

	5. München, 48° 9' nördl. Breite, 15 Jahre						6. Bukarest, 44° 25' nördl. Breite, 16 Jahre			
	a_1	a_2	a_3	A_1	A_2	A_3	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	1·209	0·540	0·203	52° 2'	246°11'	73°50'	2·008	0·822	219° 5'	38°49'
Februar	2·296	839	278	49 52	252 19	81 26	2·560	0·893	218 53	37 59
März	3·026	704	118	50 23	255 31	185 7	3·733	0·895	218 57	41 8
April	4·424	576	400	52 36	266 57	209 37	4·857	0·682	225 34	60 47
Mai	4·291	382	408	60 2	300 0	237 56	5·436	0·568	231 21	94 44
Juni	4·411	260	426	62 10	332 52	245 50	5·260	0·435	232 56	104 53
Juli	4·025	254	389	61 40	307 51	238 32	5·906	0·428	231 42	103 18
August	4·185	462	474	57 34	276 8	221 2	6·333	0·790	228 42	74 32
September	4·031	901	318	55 20	263 27	202 14	6·006	1·200	229 2	58 29
Oktober	2·828	962	109	57 9	252 26	129 40	4·846	1·441	227 22	48 34
November	1·815	780	236	57 0	251 16	69 40	2·912	1·132	225 48	47 46
Dezember	1·126	655	232	52 7	283 39	58 22	1·813	0·788	221 43	41 31
Jahr	—	—	—	—	—	—	4·293	0·788	227°24'	56°19'

Jahreswerte: $a_3 = 0·248$, $a_4 = 0·109$
$A_3 = 37°9'$, $A_4 = 235°41'$

	7. Bombay, 18° 54' nördl. Breite, 5 Jahre								8. Pará, 1° 27' südl. Breite, 30 Monate			
	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1	A_2	A_3	A_4	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	3·01	0·98	0·11	0·22	223°21'	46° 7'	232°36'	243°16'	2·75	1·00	247° 6'	95° 6'
Februar	3·08	95	06	22	224 18	50 20	294 33	215 59	2·72	0·97	245 42	78 42
März	2·57	81	13	23	229 28	59 54	7 46	238 3	2·62	1·14	249 0	86 30
April	2·45	68	20	19	234 33	62 45	66 4	250 22	2·72	1·14	253 36	92 30
Mai	2·26	57	20	13	238 36	55 56	79 10	251 44	3·21	1·24	251 24	79 18
Juni	1·44	45	11	08	237 53	52 32	70 45	244 21	3·79	1·23	240 48	61 24
Juli	0·92	35	02	04	240 51	62 2	130 30	278 2	3·96	1·25	241 36	68 48
August	1·06	41	04	06	237 4	57 39	101 27	252 41	3·83	1·27	242 0	72 6
September	1·51	49	09	11	234 38	51 10	103 56	225 20	3·83	1·29	242 18	82 54
Oktober	2·29	72	06	14	230 46	44 49	114 33	259 26	3·82	1·21	240 6	88 6
November	2·89	93	11	20	228 21	47 33	200 42	275 19	4·14	1·18	237 6	92 54
Dezember	2·87	95	14	21	224 3	39 38	199 0	267 6	3·66	1·18	240 48	85 12
April bis September	1·61	0·49	0·11	0·10	236°57'	57°15'	79°29'	247°37'	—	—	—	—
Oktober bis März	2·78	89	04	19	226 30	47 50	220 30	248 45	—	—	—	—
Jahr	2·18	68	04	14	230 19	51 15	93 38	248 21	3·42	1·18	244°18'	82° 0'

	9. Kwai, 4°45' südl. Breite, 35 Monate		10. Batavia, 6° 11' südl. Breite, 10 Jahre								11. Dar es-Salam, 6° 49' südl. Breite, 3 Jahre	
	a_2	A_2	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1	A_2	A_3	A_4	a_2	A_2
Jänner	1·280	88°42'	1·905	0·583	0·147	0·109	234°25'	61°46'	336°40'	203°52'	0·871	83°17'
Februar	1·346	103 41	1·994	0·559	134	111	228 59	61 10	337 18	196 50	0·931	86 33
März	1·276	98 25	2·547	0·792	195	160	231 52	64 54	326 59	203 18	1·006	94 42
April	1·008	91 31	2·727	0·843	146	137	232 59	65 34	318 46	206 7	0·869	86 56
Mai	0·542	52 53	2·952	0·895	231	182	230 35	62 48	324 13	199 41	0·998	83 35
Juni	0·734	54 48	2·939	0·911	211	194	228 31	58 38	320 11	208 36	1·176	73 54
Juli	0·690	63 50	3·105	0·945	253	198	228 6	58 5	318 45	189 48	1·082	78 11
August	0·750	68 21	3·327	1·015	294	194	228 22	65 41	317 47	192 50	1·086	79 10
September	1·114	85 38	3·187	0·973	308	200	232 17	75 29	329 51	214 44	1·059	96 46
Oktober	1·527	107 2	3·189	0·959	306	153	239 12	79 45	344 56	184 31	1·041	108 21
November	1.550	108 15	2·883	0·987	279	159	239 55	84 57	340 52	242 1	1·011	105 13
Dezember	1·449	108 55	2·528	0·696	149	104	235 2	73 47	327 8	215 34	0·878	92 20
Jahr	1·063	91°50'	2·758	0·822	0·230	0·165	232°15'	68°12'	330°47'	202° 2'	0·984	88°53'
Jahreswerte: $a_1 = 3·573$, $A_1 = 246° 7'$			12. Córdoba, 31° 25' südl. Breite, Jahreswerte.								Jahreswerte: $a_1 = 3·099$, $A_1 = 240°37'$	
			5·680	1·222	0·398	0·209	232°50'	60°52'	17° 9'	139° 7'		

	13. Kenilworth, 28° 42' südl. Breite, 3 Jahre		14. Fisherton, 32° 6' südl. Breite, 7 Jahre		15. Melbourne, 37° 49' südl. Breite, 6 Jahre					
	a_2	A_2	a_2	A_2	a_1	a_2	a_3	A_1	A_2	A_3
Jänner	1·195	74°56'	0·699	85°40'	4·780	0·880	0·421	239°38'	86°23'	42° 1'
Februar	1·370	57 5	0·990	68 58	4·512	0·896	341	237 28	70 59	28 56
März	1·500	59 7	1·119	67 23	4·469	1·154	025	233 42	65 21	25 22
April	1·756	61 24	1·427	71 37	3·737	1·133	187	232 31	63 38	314 54
Mai	2·161	55 23	1·407	59 34	2·690	1·028	220	236 4	64 3	268 55
Juni	2·575	58 42	1·594	57 48	2·689	0·996	289	230 23	54 57	247 47
Juli	2·190	53 13	1·453	53 9	2·508	1·008	272	229 28	58 34	245 8
August	2·203	55 0	1·455	61 8	3·092	1·096	189	233 31	62 9	273 26
September	2·061	62 41	1·454	73 44	3·814	1·032	182	235 57	78 8	6 0
Oktober	1·437	77 7	1·016	70 50	4·229	0·842	266	241 58	89 22	38 51
November	1·289	82 7	0·811	83 29	4·745	0·768	365	243 58	94 26	57 0
Dezember	1·197	81 46	0·687	82 48	5·020	0·675	448	242 32	92 38	61 8
Jahr	1·722	62°32'	1·150	67°52'	3·840	0·924	132	237°11'	71°30'	10°55'

Kenilworth — Jahreswerte:

$a_1 = 6·753$, $A_1 = 231°\ 2'$
$a_3 = 0·388$, $A_3 = 23\ 25$
$a_4 = 0·430$, $A_4 = 223\ 20$

Fisherton — Jahreswerte:

$a_1 = 5·258$
$A_1 = 235°32'$

B. Luftdruck.

	16. Bremen, 53° 5' nördl. Breite, 10 Jahre								18. Aachen, 50° 47' nördl. Breite, 8 Jahre			
	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1	A_2	A_3	A_4	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	0·084	0·179	0·071	0·057	184° 5'	149°16'	358°28'	207° 5'	0·014	0·175	172° 5'	154°18'
Februar	060	183	070	017	158 27	140 42	353 38	127 9	062	197	55 59	143 23
März	111	230	044	025	68 34	146 30	339 34	4 43	077	238	25 22	146 34
April...........	162	260	007	029	29 59	152 11	144 45	329 18	074	259	30 51	147 22
Mai............	153	231	041	015	22 40	149 25	143 46	278 25	172	238	19 39	149 5
Juni	167	212	060	007	17 57	143 24	144 21	264 21	121	240	32 6	141 4
Juli............	099	184	059	008	45 13	142 9	131 18	279 49	084	235	40 39	141 5
August	024	215	100	026	2 38	139 47	103 55	298 3	078	226	350 24	143 42
September	081	250	020	029	176 24	145 58	13 21	321 33	005	250	291 55	149 35
Oktober	061	257	060	002	164 18	157 38	351 21	30 3	022	354	254 23	153 44
November	025	174	109	018	17 20	158 4	35 40	246 37	094	168	19 47	156 54
Dezember.......	021	158	103	049	299 33	147 6	355 39	224 22	036	181	173 35	152 50
Jahr	0·042	0·209	0·027	0·013	50°44'	147°37'	11° 1'	226°52'	—	—	—	—

	17. Berlin, 52° 30' nördl. Breite, 20 Jahre								20. Bukarest, 44° 26' nördl. Breite, 3 Jahre			
	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1	A_2	A_3	A_4	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	0·023	0·183	0·127	0·053	247°14'	144° 3'	345°50'	207°52'	0·095	0·266	12°48'	147°34'
Februar	012	231	080	020	194 1	139 17	334 26	115 50	086	291	53 2	142 9
März	103	246	059	026	331 19	141 45	330 32	4 26	259	328	359 48	143 12
April	193	276	010	023	349 46	144 34	221 39	315 8	439	355	355 57	130 50
Mai	283	260	045	010	357 45	142 58	159 32	241 47	527	368	336 48	140 9
Juni	295	228	044	009	357 51	136 23	149 40	214 35	479	330	347 20	135 24
Juli	254	208	036	012	357 38	133 33	128 51	203 37	427	271	349 7	136 15
August	187	234	019	013	356 21	137 12	135 53	259 12	382	327	355 38	138 9
September	136	271	039	026	1 38	140 47	341 22	310 6	444	330	344 38	137 55
Oktober	053	256	064	008	213 54	152 45	351 3	207 24	293	312	356 43	138 9
November	041	192	114	024	297 29	147 16	351 45	223 47	229	279	0 23	147 28
Dezember	063	204	098	070	176 30	146 51	352 19	197 8	168	283	27 22	150 33
Jahr	0·112	0·232	0·037	0·014	351° 0'	142°19'	349°40'	224°33'	0·309	0·310	353°30'	140°20'

	19. München, 48° 9' nördl. Breite, 15 Jahre						22. Pará, 1° 27' südl. Breite, 3 Jahre			
	a_1	a_2	a_3	A_1	A_2	A_3	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	0·086	0·169	0·122	347°21'	160°55'	357°20'	0·552	0·868	2°24'	152°48'
Februar	027	226	086	161 57	144 12	337 17	531	883	3 24	149 36
März	061	273	036	8 6	147 29	205 14	626	966	11 42	156 0
April	205	293	011	359 8	148 19	205 24	666	958	19 30	151 6
Mai	250	284	050	13 15	149 51	161 22	658	958	25 12	148 54
Juni	273	253	043	18 34	144 4	153 12	770	877	18 30	144 42
Juli	235	250	047	18 43	140 43	140 28	747	857	17 18	142 30
August	156	268	029	7 11	142 52	173 36	734	877	6 12	141 12
September	151	250	027	356 57	147 33	341 34	703	957	358 30	142 42
Oktober	084	275	065	39 50	157 10	353 41	707	948	352 24	149 6
November	023	205	090	11 21	160 13	359 50	783	897	350 6	151 24
Dezember	029	214	086	215 35	157 27	0 42	760	877	355 42	148 54
Jahr	0·117	0·241	0·027	11° 9'	149°46'	4° 2'	0·673	0·907	6°36'	148°18'

	21. Bombay, 18° 54' nördl. Breite, 24 (25) Jahre								23. Kwai, 4° 45' südl. Breite, 2 Jahre			
	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1	A_2	A_3	A_4	a_1	a_2 (red.)	A_1	A_2
Jänner	0·518	1·090	0·168	0·086	332°26'	158°37'	357°28'	250° 1'	0·414	0·649 (814)	341°36'	148°12'
Februar	584	1·118	127	058	333 6	154 41	359 43	213 25	458	681 (854)	341 36	146 48
März	660	1·069	061	033	334 12	153 31	18 27	210 40	432	740 (918)	338 42	148 0
April	711	0·985	020	010	335 6	152 56	98 2	295 41	423	715 (887)	348 48	147 42
Mai	615	0·892	043	010	329 51	153 14	167 17	55 26	264	670 (832)	335 12	148 30
Juni	297	0·813	094	015	319 34	149 2	166 18	37 0	263	634 (787)	322 18	151 0
Juli	206	0·736	071	015	288 53	147 8	163 31	342 32	263	635 (790)	315 36	153 48
August	241	0·828	033	018	301 51	151 33	174 0	180 8	264	687 (853)	316 24	152 30
September	343	0·957	018	020	326 53	157 17	327 26	232 15	366	794 (985)	318 12	155 0
Oktober	510	1·031	081	043	341 49	167 31	357 35	248 46	441	723 (897)	327 48	154 54
November	541	1·084	124	056	337 57	168 20	10 35	246 3	448	702 (871)	332 42	156 0
Dezember	510	1·090	155	076	336 25	161 58	4 23	246 35	440	651 (808)	335 18	151 6
April bis September	0·391	0·866	0·038	0·002	323°35'	152° 8'	162°41'	262° 0'	—	—	—	—
Oktober bis März	554	1·074	119	056	335 54	16 39	3 52	237 46	—	—	—	—
Jahr	467	0·968	043	030	330 53	156 51	11 21	242 1	0·373	0·693 (858)	331°18'	151° 3'

	24. Batavia, 6° 11' südl. Breite, 10 Jahre						25. Dar es-Salam, 6° 49' südl. Breite, 3 Jahre			
	a_1	a_2	a_3	A_1	A_2	A_3	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	0·52	0·94	0·02	16° 3'	155°21'	211°18'	0·789	0·818	345°48'	157°30'
Februar	56	0·95	02	15 56	153 14	302 45	843	846	349 6	152 54
März	63	0·98	05	23 6	156 35	342 27	672	872	349 24	157 48
April	61	0·97	07	28 27	159 14	3 0	550	920	349 18	159 30
Mai	60	0·93	06	30 44	160 39	6 35	450	866	341 48	161 48
Juni	60	0·87	07	30 47	158 49	31 1	500	851	343 36	162 6
Juli	66	0·88	07	28 11	156 50	25 37	438	817	338 30	155 48
August	74	0·93	06	27 28	158 37	29 58	509	877	343 18	159 6
September	76	0·98	05	23 1	163 25	33 58	573	933	339 36	164 12
Oktober	66	0·99	04	26 7	166 53	17 45	779	892	335 54	167 54
November	59	1·00	02	26 55	167 24	3 0	715	813	343 12	169 30
Dezember	52	0·95	01	23 44	161 38	273 0	754	817	345 24	159 36
Jahr	0·62	0·95	0·04	25°17'	159°56'	13°43'	0·634	0·858	343°54'	161° 0'

	27. Fisherton, 32° 6' südl. Breite, 7 Jahre		28. Melbourne, 37° 49' südl. Breite, 6 Jahre						26. Córdoba, 31° 25' südl. Breite,
	a_2	A_2	a_1	a_2	a_3	A_1	A_2	A_3	
Jänner	0·555	160°23'	0·338	0·577	0·124	12°18'	161°22'	175° 5'	Jahreswerte:
Februar	579	156 18	312	579	063	6 36	161 42	199 39	$a_1 = 0·685$
März	602	163 15	290	640	023	97 4	167 46	95 12	$a_2 = 0·716$
April	566	159 20	290	546	071	8 26	161 55	342 39	$a_3 = 0·014$
Mai	547	164 34	206	500	137	32 23	170 59	1 46	$a_4 = 0·008$
Juni	535	166 15	203	503	147	14 28	166 22	355 2	$A_1 =$ 17°53'
Juli	566	159 21	104	533	135	357 40	168 47	0 54	$A_2 =$ 152 35
August	623	159 26	287	538	132	8 29	166 8	2 46	$A_3 =$ 125 19
September	600	164 15	396	546	076	19 24	168 10	38 40	$A_4 =$ 329 53
Oktober	621	165 28	343	597	005	7 47	171 38	225 0	
November	455	161 35	272	612	076	24 22	174 14	175 14	
Dezember	537	160 9	348	574	099	19 32	165 15	192 16	
Jahr	0·568	162°12'	0·254	0·561	0·028	15° 1'	167°21'	6°46'	

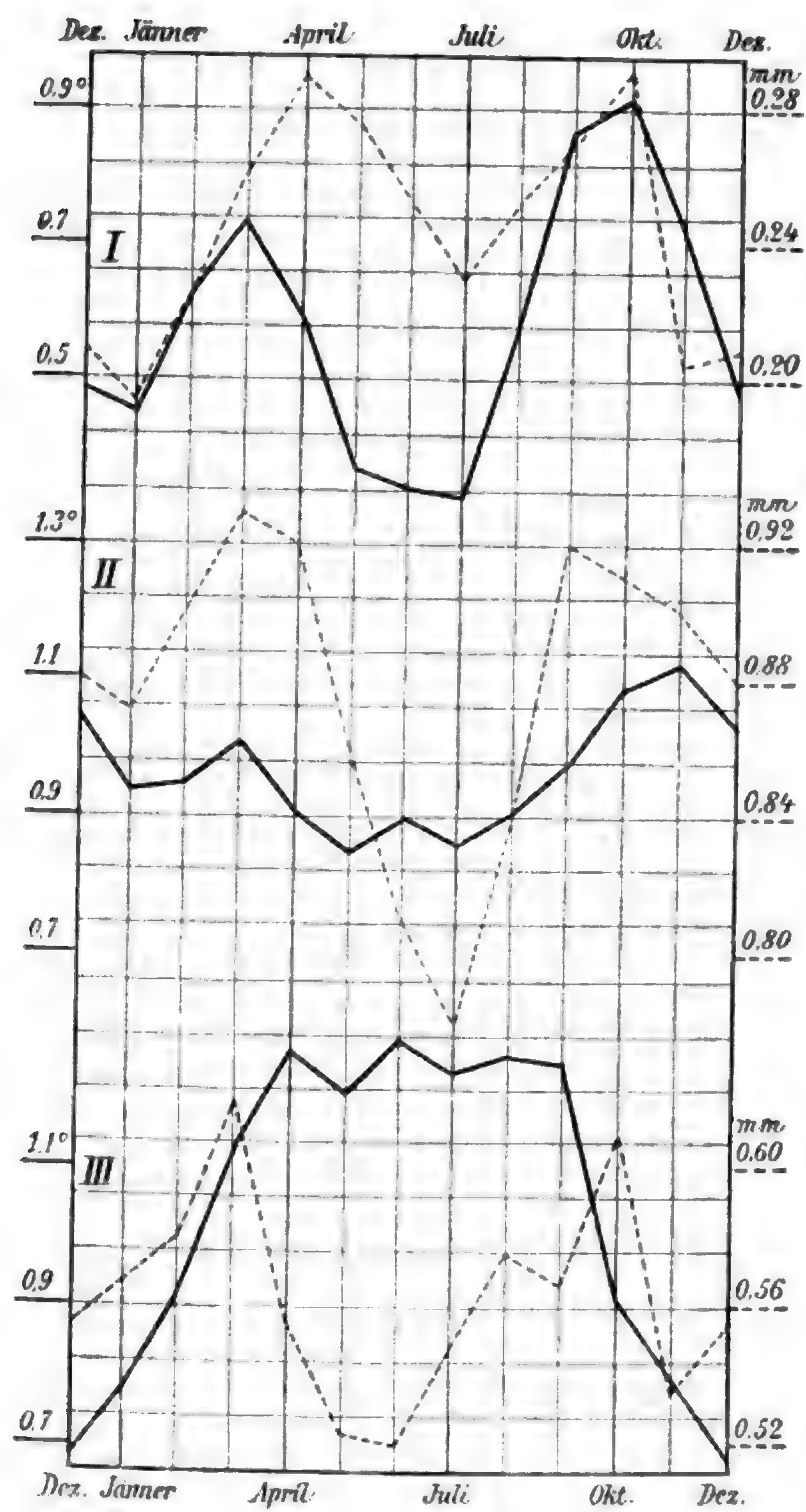
Jahreswerte (Fisherton):
$a_1 = 0·663$, $A_1 = 359°55'$

Mittelwerte.

	Nördliche gemäßigte Zone (49° 47' nördl. Breite)				Tropen (0° 36' südl. Breite)				Südliche gemäßigte Zone (34° 57' südl. Breite)			
	Temperatur		Druck		Temperatur		Druck		Temperatur		Druck	
	a_2	A_2	a_2	A_2	a_2	A_2	a_2	A_2	a_2	A_2	a_2	A_2
Jänner	0·451	77°12'	0·194	151°13'	0·94	75° 0'	0·87	154°30'	0·789	86° 2'	0·566	160°53
Februar	633	76 36	226	141 57	0·95	76 5	0·90	151 27	0·943	69 58	0·579	159 0
März	732	83 24	263	145 6	1·01	80 53	0·93	154 23	1·136	66 22	0·621	165 31
April	596	105 43	289	144 39	0·91	79 51	0·92	154 6	1·280	67 37	0·556	160 37
Mai	378	148 45	276	146 18	0·85	66 54	0·86	154 37	1·217	61 49	0·523	167 46
Juni	342	167 14	253	140 4	0·90	60 15	0·81	153 8	1·295	56 22	0·519	166 19
Juli	335	152 17	230	138 45	0·86	66 11	0·78	151 13	1·230	55 51	0·550	164 4
August	565	122 45	254	140 21	0·91	68 36	0·84	152 36	1·276	61 39	0·580	162 47
September	858	95 52	270	144 22	0·98	78 23	0·92	156 31	1·243	75 57	0·573	166 13
Oktober	916	85 23	291	151 53	1·09	85 45	0·91	161 15	0·929	80 6	0·609	168 33
November	718	84 49	204	153 59	1·13	87 46	0·90	162 32	0·790	88 57	0·534	167 55
Dezember	487	86 37	208	150 58	1·04	79 58	0·88	156 38	0·681	87 43	0·556	162 42
Mittel	0·5843	108°13'	0·2464	145°48'	0·964	75°28'	0·877	155°25'	1·0675	71°32'	0·5638	164°22'

Für alle vorstehend mitgeteilten Reihen der a_2 und der A_2 wurden die Jahreskurven gezeichnet. Die halbtägigen Amplituden a_2 des Druckes zeigten die schon bekannten zwei Maxima zur Zeit der Nachtgleichen, und zwar in voller Deutlichkeit an allen untersuchten Orten der nördlichen gemäßigten Zone, minder regelmäßig, aber doch auch zweifellos erkennbar an den anderen Stationen. Die halbtägigen Amplituden a_2 der Temperatur haben in der nördlichen gemäßigten Zone sehr nahe die nämliche Form der Jahreskurve wie beim Drucke; an den Tropenstationen finden wir die beiden Nachtgleichenmaxima ebenfalls erkennbar, außerdem aber an einzelnen Orten noch ein drittes Maximum in der Jahresmitte; und in der südlichen gemäßigten Zone tritt dieses dritte Maximum zwischen den beiden anderen noch etwas deutlicher hervor. Mit Rücksicht auf die vorerst nur kleine Zahl der Stationen, von welchen die halbtägige Temperaturschwankung bekannt ist, schien mir ein Zusammenfassen der in gleicher Zone liegenden Stationen um so eher geboten, als ja die Luftdruckänderungen des einzelnen Ortes nicht bloß von den örtlichen Temperaturverhältnissen bedingt werden, sondern zugleich auch von denjenigen der Umgebung, vielleicht sogar vorzugsweise von den Vorgängen des ganzen Breitenkreises. Demnach habe ich für die letzte Tabelle die Zahlenangaben nach Zonen gesondert und dann zu Mittelwerten vereinigt. Dabei wurden nur solche Orte berücksichtigt, von denen die Amplituden a_2 sowohl für Temperatur wie für Druck vorliegen, wenn auch teilweise aus verschieden langen Beobachtungszeiten, und es sind also die Beobachtungsreihen von Königsberg und von Kenilworth zu dieser Mittelbildung nicht mitverwendet worden. Die erhaltenen Zahlenreihen sind in der Zeichnung p. 903 wiedergegeben.

Die Kurven I enthalten Mittelwerte von Bremen, Berlin, Aachen, München und Bukarest. Daß durch Hinzutreten der Königsberger Beobachtungen die Kurve der halbtägigen Temperaturschwankung a_2 nicht erheblich geändert wird, ist leicht festzustellen. Die Kurven II geben die Mittelwerte von Bombay, Pará, Kwai, Batavia und Dar es-Salam wieder. Die Kurven III sind aus den Ergebnissen von Fisherton und Melbourne berechnet. Auch hier würde durch Hinzutreten von Kenilworth



Amplituden a_2 der halbtägigen Schwankung.

I Stationen der nördlichen gemäßigten Zone, II Tropenstationen, III Stationen der südlichen gemäßigten Zone.

—— Temperatur, ----- Druck.

keine erhebliche Änderung der Temperaturkurve entstehen, namentlich tritt auch bei dieser Station das vorher erwähnte dritte Maximum in der Jahresmitte auf.

Die Jahreskurven der Phasenwinkel A_2 sind nicht mitabgedruckt. Sie zeigen für Druck die schon bekannte große Gleichmäßigkeit, für Temperatur Ansteigen (Verfrühung) zu den Zeiten hohen Sonnenstandes. Sonstige Einzelheiten können daraus noch nicht mit genügender Sicherheit entnommen werden.

Die Meinung, daß wie die ganztägige so auch die halbtägige Druckschwankung auf die Temperaturverhältnisse der unteren Luftschichten zurückzuführen sei, dürfte nach dem Vorstehenden als zulässige Arbeitshypothese anzusehen sein und eine weitere Untersuchung rechtfertigen.

Über kubische Aufgaben und die konstruktive Behandlung des Achsenkomplexes

von

Theodor Schmid in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1906.)

Durch die mit dem Steiner-Preise gekrönten Arbeiten[1] von Kortum und Smith wurde das erreichbare Ziel für die konstruktive Lösung von Aufgaben dritten und vierten Grades festgelegt und der Weg zur Erreichung dieses Zieles umfassend klar gemacht. Kortum betrachtet als eigentliche Grundaufgabe die Aufsuchung der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte; Smith dagegen behandelt zuerst die Konstruktion des gemeinsamen Poldreieckes zweier Kegelschnitte, und zwar mit Hilfe der Verwandtschaft der doppelt konjugierten Punkte von Poncelet.

Im nachfolgenden soll als eigentliche Grundaufgabe die Aufsuchung des Doppelpunktdreieckes zweier kollinearer Felder betrachtet werden, auf welche die Aufsuchung des gemeinsamen Poldreieckes zurückgeführt werden kann. Die Anwendung auf die Achsenbestimmung der Flächen zweiten Grades führt dann zur konstruktiven Behandlung des Achsenkomplexes dieser Flächen.

---

[1] Kortum, Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1868.

Smith, Sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. 1868. Collected mathematical papers, volume II, 1894.

1. Es soll das Doppelpunktdreieck für zwei kollineare Felder φ_1 und φ_2, welche auf derselben Ebene liegen, konstruiert werden.

Entsprechende Strahlenbüschel P_1 und P_2 der kollinearen Felder erzeugen einen Kegelschnitt, welcher durch die Ecken des Doppelpunktdreieckes geht. Zwei Strahlenbüschel P_1 und Q_1 ergeben daher mit ihren entsprechenden Büscheln zwei Kegelschnitte, welche außer dem Schnittpunkte von P_1Q_1 und P_2Q_2 noch die drei Doppelpunkte X, Y, Z gemein haben. Ebenso kann man die drei Doppelgeraden x, y, z als gemeinsame Tangenten zweier Kegelschnitte erhalten, welche sich aus zwei Paaren von entsprechenden Punktreihen ergeben.

Soll nun die vorgelegte kubische Konstruktionsaufgabe so gelöst werden, daß nur der Kreis und ein bereits gezeichneter Kegelschnitt benützt wird, so braucht man bloß das oben erwähnte Kegelschnittsnetz $[X, Y, Z]$ hinsichtlich der Arten der Kegelschnitte zu untersuchen. Je nachdem die uneigentliche Gerade der Ebene zu φ_1 oder φ_2 gehörig betrachtet wird, entspricht ihr die Fluchtgerade u_2, beziehungsweise die Verschwindungsgerade v_1. Den Geraden, welche zu v_1 normal sind, also durch einen uneigentlichen Punkt M_{u_1} gehen, entsprechen die Geraden, welche durch den Normalenfluchtpunkt M_{u_2} gehen; den Geraden, welche zu u_2 normal sind, also durch einen Punkt M_{v_2} gehen, entsprechen die Geraden, welche durch den Normalenverschwindungspunkt M_{v_1} gehen. Die Gerade w_1, welche in M_{v_1} normal zu v_1 ist, entspricht der Geraden w_2, welche in M_{u_2} normal zu u_2 ist. Die uneigentlichen Punkte von v_1 und u_2 entsprechen sich als $W_{1\infty}$ und $W_{2\infty}$. Der absoluten Involution entspricht einerseits eine Fluchtpunktinvolution auf u_2, welche M_{u_2} als Zentralpunkt hat und andrerseits eine Verschwindungspunktinvolution auf v_1, welche M_{v_1} als Zentralpunkt besitzt. Die Involution u_2 kann durch zwei orthogonale Strahleninvolutionen L_2, N_2 mit der absoluten Involution der Ebene verbunden werden; ebenso kann v_1 durch zwei orthogonale Strahleninvolutionen L_1, N_1 mit der absoluten Involution verbunden werden. Dabei sind L_1, L_2 die beiden gleichlaufend kongruenten und N_1, N_2 die beiden ungleichlaufend kongruenten

Strahlenbüschel der Felder φ_1 und φ_2. Die Punkte L, N kann man die Brennpunkte[1] und $c = \frac{1}{2}\overline{LN}$ die Exzentrizität des Feldes nennen. Die beiden Felder φ_1 und φ_2 können durch bloße Drehung auf zweifache Art (Winkel ρ oder $\pi - \rho$) in perspektive Lage gebracht werden, indem man L_1 mit L_2 und w_1 mit w_2 zur Deckung bringt (Fig. 1 auf Seite 913).

Die beiden Büschel L_1 und L_2 erzeugen einen Kreis, für welchen der Schnittpunkt Q von w_1 und w_2 sowie der Schnittpunkt R der Parallelen durch L_1 zu v_1 und durch L_2 zu u_2 die Endpunkte eines Durchmessers sind; die Büschel N_1 und N_2 erzeugen eine gleichseitige Hyperbel, für welche $N_1 N_2$ ein Durchmesser ist und welche auch durch Q geht. Der Kreis und die gleichseitige Hyperbel haben außer Q noch die drei Doppelpunkte X, Y, Z gemeinsam. Durch den Durchmesser QR ist also der einzige Kreis des Netzes $[X, Y, Z]$ bestimmt. Um die anderen Formen der Kegelschnitte zu finden, ist folgendes zu beachten.

In jedem Punkte der Ebene schneiden sich zwei entsprechende Geraden von φ_1 und φ_2, nämlich seine Verbindungsgeraden mit den ihm entsprechenden Punkten, wenn man ihn einerseits zu φ_1 und andrerseits zu φ_2 gehörig betrachtet. Verbindet man einen unendlich fernen Punkt mit seinen entsprechenden Punkten auf u_2, beziehungsweise v_1, so erhält man zwei parallele entsprechende Geraden. Die projektiven Punktreihen v_1, v_2 erzeugen eine Parabel l_1, welche die unendlich ferne Gerade v_2 in $W_{2\infty}$ berührt; die Punktreihen u_1, u_2 erzeugen eine Parabel l_2, welche die unendlich ferne Gerade u_1 in $W_{1\infty}$ berührt.

Die parallelen entsprechenden Geraden für zwei kollineare Felder φ_1 und φ_2 umhüllen je eine Parabel l_1 und l_2; die Achse der Parabel l_1 ist zu u_2 und jene von l_2 zu v_1 parallel.

---

[1] Henry Smith, On the focal properties of homographic figures. Proceedings of the London mathematical society, 1869, C. M. P. I, 1894; Theodor Reye, Über die fokalen Eigenschaften kollinearer Gebilde. Mathematische Annalen, 46. Bd., 1895.

Die drei gemeinsamen Tangenten der Parabeln l_1 und l_2 sind die Seiten x, y, z des Doppelpunktdreieckes.

Verschiebt man ein Strahlenbüschel P_2 von φ_2 parallel nach dem entsprechenden Punkte P_1, so sind die Doppelstrahlen der vereinigten Büschel ebenfalls solche Geraden von φ_1, welche zu ihren entsprechenden parallel sind, also die Tangenten der Parabel l_1 aus dem Punkte P_1. Andrerseits sind diese Geraden aber die Asymptotenrichtungen für den Kegelschnitt, welcher von den Büscheln P_1 und P_2 erzeugt wird.

Entsprechende Strahlenbüschel P_1 und P_2 zweier kollinearen Felder φ_1 und φ_2 erzeugen einen Kegelschnitt, dessen Durchmesserinvolution parallel ist zur Involution P_1 (beziehungsweise P_2) von konjugierten Geraden in Bezug auf die Parabel l_1 (beziehungsweise l_2).

Da nun die Büschel L_1, L_2 den Kreis und N_1, N_2 eine gleichseitige Hyperbel des Netzes $[X, Y, Z]$ erzeugen, so folgt:

Die Brennpunkte L_1 und L_2 der kollinearen Felder sind auch die Brennpunkte der Parabeln l_1 und l_2; die Normalen von N_1 zu u_2 und von N_2 zu v_1 sind die Leitgeraden,[1] $2c_1 \sin\rho$ und $2c_2 \sin\rho$ sind die Parameter der Parabeln l_1 und l_2.

Ist nun eine gezeichnete Hyperbel gegeben und zieht man zu den Asymptoten derselben die parallelen Tangenten an die Parabel l_1, so ist der Schnittpunkt P_1 dieser Tangenten der Scheitel jenes Strahlenbüschels, welches mit seinem entsprechenden Büschel P_2 die zur gegebenen perspektiv ähnliche Hyperbel des Netzes $[X, Y, Z]$ erzeugt. Ist die gezeichnete Linie eine Parabel, so zieht man zur Achse derselben die parallele Tangente an l_1. Ihr Berührungspunkt ist schon der Scheitel P_1 des Strahlenbüschels, welches mit P_2 die zur gegebenen perspektiv ähnliche Parabel erzeugt. Dabei entsprechen sich die von den Parabelscheiteln ausgehenden

[1] Die Punkte der Leitgeraden liefern das dem Netze angehörige Büschel von gleichseitigen Hyperbeln. Für jede andere Form des Kegelschnittes liegen die Scheitel P_1 selbst auf einem Kegelschnitt, welcher auch L_1 als Brennpunkt und dieselbe Leitgerade wie l_1 besitzt (Steiner-Schröter, Theorie der Kegelschnitte, III. Auflage, p. 530).

parallelen Sehnen. Ist eine gezeichnete Ellipse gegeben und zieht man zu den Strahlenpaaren der Durchmesserinvolution derselben parallele Tangenten an l_1, so bilden sie eine Tangenteninvolution und die Berührungspunkte eine Punktinvolution. Das Involutionszentrum P_1 der letzteren ist als Schnittpunkt der Doppelelemente der Tangenteninvolution der Scheitel des Büschels, welches mit dem entsprechenden Büschel P_2 die perspektiv ähnliche Ellipse erzeugt. Für die Konstruktion ist natürlich das Zeichnen der Parabeln l_1 und l_2 nicht notwendig. Durch die Ähnlichkeit wird die Aufsuchung der Schnittpunkte X, Y, Z des Kreises $[QR]$ mit dem Kegelschnitt $[P_1P_2]$ auf den gezeichneten Kegelschnitt zurückgeführt.

2. Es soll das gemeinsame Poldreieck für zwei Kegelschnitte *i* und *k* konstruiert werden.

Die beiden Felder φ_1 und φ_2, welche demselben Felde φ in Bezug auf die Kegelschnitte i und k polar sind, sind zueinander kollinear. Das Doppelpunktdreieck von φ_1 und φ_2 ist dann das gemeinsame Poldreieck der Kegelschnitte und kann nach dem vorangehenden konstruiert werden. Die Mittelpunkte O_1 und O_2 von i und k sind entsprechende Punkte. Die Polare von O_1 in Bezug auf k ist die Fluchtgerade u_2 und die Polare von O_2 für i ist v_1.

Wenn die Achsen a_1, b_1 von i zu den Achsen a_2, b_2 von k parallel sind,[1] so sind dieselben die Normalstrahlen der entsprechenden Büschel O_1 und O_2 in paralleler Lage, also Tangenten der Parabel l_1, beziehungsweise l_2. Die Pole A_{I2}, B_{I2} von a_1, b_1 in Bezug auf k bestimmen u_2 und bilden ein Punktepaar der Fluchtpunktinvolution; die Strecke $A_{I2}B_{I2}$ ist daher der Durchmesser eines Kreises, welcher die Brennpunkte L_2, N_2 enthält. Die Pole A_{II1}, B_{II1} von a_2, b_2 in Bezug auf i bestimmen v_1 und bilden ein Punktepaar der Verschwindungspunktinvolution; die Strecke $A_{II1}B_{II1}$ ist der Durchmesser eines Kreises, welcher die Brennpunkte L_1, N_1 enthält. Die Normale von O_1 auf u_2 ist die Leitgerade der Parabel l_1 und schneidet den Kreis

[1] Das Büschel $[i, k]$ enthält dann einen Kreis und die drei Paare von Seiten des Viereckes der gemeinsamen Punkte bilden mit den Achsen gleiche Winkel.

über $A_{II1}B_{II1}$ außer O_1 im Brennpunkte N_1. Die Normale von N_1 zu v_1 ist die Symmetriegerade w_1 und schneidet diesen Kreis im Brennpunkte L_1 und v_1 im Normalenverschwindungspunkt M_{v_1}. Die Normale von O_2 auf v_1 ist die Leitgerade der Parabel l_2 und schneidet den Kreis über $A_{12}B_{12}$ außer O_2 im Brennpunkte N_2. Die Normale von N_2 auf u_2 ist die Symmetriegerade w_2 und schneidet diesen Kreis noch im Brennpunkte L_2 und die Gerade u_2 im Normalenfluchtpunkte M_{u_2}. Die Normalstrahlen a_2, b_2 des Büschels O_2 halbieren den Winkel $L_2O_2N_2$ der Leitstrahlen des Punktes O_2 und die Normalstrahlen a_1, b_1 des Büschels O_1 halbieren den Winkel $L_1O_1N_1$ der Leitstrahlen des Punktes O_1.

Wenn i ein Kreis ist, so muß die Polare v_1 zur Verbindungsgeraden O_1O_2 normal sein, daher ergibt sich hier N_2 unmittelbar als Schnittpunkt von O_1O_2 mit dem Kreise über $A_{12}B_{12}$. Die beiden Durchmesserbüschel O_1, O_2 erzeugen nun die Apollonische Hyperbel, welche den Kegelschnitt k in den Fußpunkten der Normalen aus O_1 schneidet. Da O_1, O_2 die Pole von v_2, v_1 in Bezug auf i sowie die Pole von u_2, u_1 in Bezug auf k sind, so ist die Apollonische Hyperbel die Polarlinie der Parabel l_1 in Bezug auf i sowie der Parabel l_2 in Bezug auf k.[1] Die Parabel l_2 (beziehungsweise l_1) entspricht auch dem Strahlenbüschel O_1 (beziehungsweise O_2) in der Verwandtschaft der doppelt konjugierten Geraden in Bezug auf i und k. Die Eckpunkte X, Y, Z des gemeinsamen Poldreieckes ergeben sich hier auch als Schnittpunkte der Apollonischen Hyperbel $[O_1, O_2]$ mit dem Kreise $[L_1, L_2]$. Für diesen Kreis erhält man außer dem Durchmesser QR auch einen Durchmesser ST, wobei S der Schnittpunkt der Strahlen L_1O_1 und L_2O_2 ist, durch welchen auch die Apollonische Hyperbel gehen muß, während T der Schnittpunkt der dazu normalen Strahlen h_1, h_2 der Büschel L_1 und L_2 ist. Die Strahlen h_1, h_2 sind die Polaren von O_1, be-

---

[1] Die Parabel l_2 ist die sogenannte Steiner'sche Parabel des Büschels O_1 in Bezug auf k (Werke, II. p. 629); sie kommt aber schon bei Chasles vor [Journal de mathém. T. III (1838)].

Die beiden Parabeln l_1 und l_2 kommen in anderer Bedeutung vor in J. Sobotka, Beitrag zur Perspektive des Kreises und Konstruktion der Achsen für Flächen II. Grades. Diese Sitzungsberichte, Bd. 109, Abt. IIa, 1900.

ziehungsweise O_2 in Bezug auf l_1, beziehungsweise l_2; daher ergibt h_1 die Berührungspunkte C_1, D_1 von a_1, b_1 mit der Parabel l_1 und h_2 die Berührungspunkte C_2, D_2 von a_2, b_2 mit l_2. Die Polaren dieser Berührungspunkte für i, beziehungsweise k sind die Asymptoten der Apollonischen Hyperbel, daher sind h_1 und h_2 auch die Polaren des Mittelpunktes H der Apollonischen Hyperbel in Bezug auf i und k. Die gleichseitige Hyperbel, welche aus den Büscheln N_1 und N_2 entsteht, geht hier auch durch den Punkt O_1 und, weil $N_1O_1N_2Q$ ein eingeschriebenes Parallelogramm ist, so ist auch O_1Q ein Durchmesser der Hyperbel.

Wenn der Kegelschnitt k als gezeichnet vorausgesetzt wird, so hat man die Büschel P_1, P_2 zu suchen, welche den zu k perspektiv ähnlichen Kegelschnitt liefern. Da die Achsen a_2, b_2 selbst die Tangenten aus O_2 an l_2 sind, so muß P_2 auf h_2 liegen. Ferner sind die aus M_{u_2} an l_2 gezogenen Tangenten, nämlich u_2 und die Scheiteltangente, auch zu zwei konjugierten Durchmessern von k parallel, daher liegt P_2 auch auf der Polaren von M_{u_2} oder P_2 ist der Pol von $M_{u_2}O_2$. Weil die Involution O_2 konjugierter Geraden für l_2 symmetrisch ist, ergibt sich P_2 als Schnittpunkt von h_2 mit dem symmetrisch zu $O_2M_{u_2}$ in Bezug auf a_2 liegenden Strahle. Dieser Strahl ist die zu h_2 konjugierte Gerade des Büschels P_2 für l_2 und daher auch der zur Richtung von h_2 konjugierte Durchmesser von k, weshalb er durch den Pol H von h_2 für k gehen muß. Der Punkt P_1 ist der Pol von $O_1M_{u_1} = O_1O_2$ für l_1. Dem Strahle O_2P_2 entspricht in O_1 der zu h_2 normale Strahl, welcher h_1 in P_1 schneidet. Der Schnittpunkt G von O_1P_1 und O_2P_2 ist einerseits ein Punkt der Apollonischen Hyperbel, für welche GO_1O_2S ein eingeschriebenes Parallelogramm ist, andrerseits ein Punkt des zu k perspektiv ähnlichen Kegelschnittes, der auch durch P_1, P_2, T geht. Da nun die Strahlen P_1G und P_1T sowie P_2G und P_2T zu konjugierten Durchmessern von k parallel sind, so ist GT ein Durchmesser des verlangten Kegelschnittes, woraus das Ähnlichkeitszentrum gefunden werden kann. Es ergibt sich hienach die Konstruktion: Man zeichnet die Kreise über $A_{111}B_{111}$ und $A_{12}B_{12}$. Der Strahl, welcher zur Normalen aus O_1 auf u_2 in Bezug auf a_1 symmetrisch ist, schneidet den ersten Kreis in L_1. Der Strahl, welcher zu O_2O_1

in Bezug auf a_2 symmetrisch ist, schneidet den zweiten Kreis in L_2. Der Schnittpunkt dieser Strahlen ist S, jener der dazu normalen Strahlen h_1, h_2 ist T. Ergänzt man das Parallelogramm O_1O_2SG, so sind ST und GT Durchmesser des Kreises, beziehungsweise des zu k perspektiv ähnlichen Kegelschnittes des Netzes $[X, Y, Z]$, dessen Grundpunkte sich durch die Ähnlichkeit ergeben.

Anstatt k als gezeichnet vorauszusetzen,[1] dürfte es einfacher sein, eine Parabelschablone mit Achse und Scheitel als gegeben zu betrachten[2] und etwa die Parabel zu benützen, welche von den Büscheln D_1, D_2 erzeugt wird. Die Achse dieser Parabel ist zu b_2 parallel. Der zu D_1 symmetrisch liegende Punkt ergibt sich sofort als Schnittpunkt der Strahlen D_1B_{11} und D_2B_{12}, ebenso erhält man den zu D_2 symmetrischen Punkt als Schnittpunkt von D_1B_{II1} und D_2B_{II2}. Dieses symmetrische eingeschriebene Viereck der Parabel liefert zwei konjugierte Punkte ihrer Achse und auch den Scheitel als Halbierungspunkt der von jenen Punkten begrenzten Strecke. Zeichnet man nun mit der Schablone eine Parabel, welche denselben Scheitel und dieselbe Achse besitzt, so wird sie vom Scheitelstrahl des Punktes D_2 in dem entsprechenden Punkte D_2' geschnitten. Nun braucht nur die Ähnlichkeit mit dem Scheitel als Zentrum und dem Verhältnis der Scheitelstrahlen als Charakteristik benützt zu werden, um die Schnittpunkte des Kreises und der Parabel zu finden. (In der Figur ist die Parabel selbst gezeichnet.)

Wenn k eine Parabel (Brennpunkt F, Leitgerade f) ist, während i wieder ein Kreis ist, so ergeben sich einige besondere Beziehungen. Die Verbindungsgerade O_1O_2 fällt mit a_1 und die Verschwindungsgerade v_1 mit b_1 zusammen, ferner B_{II1} mit O_1. Der Pol B_{12} von b_1 liegt symmetrisch in Bezug auf den Scheitel der Parabel. Verbindet man den Schnittpunkt von a_1 und f mit F und zieht durch B_{12} eine Normale dazu, so erhält man u_2. Der Kreis über $A_{12}B_{12}$ ist hier ersetzt durch die

[1] Das ist ohnehin nicht passend, wenn k ein imaginärer Kegelschnitt ist.

[2] Das entspricht der Cardanischen Voraussetzung eines Zirkels mit unveränderlicher Öffnung für die Aufgaben zweiten Grades.

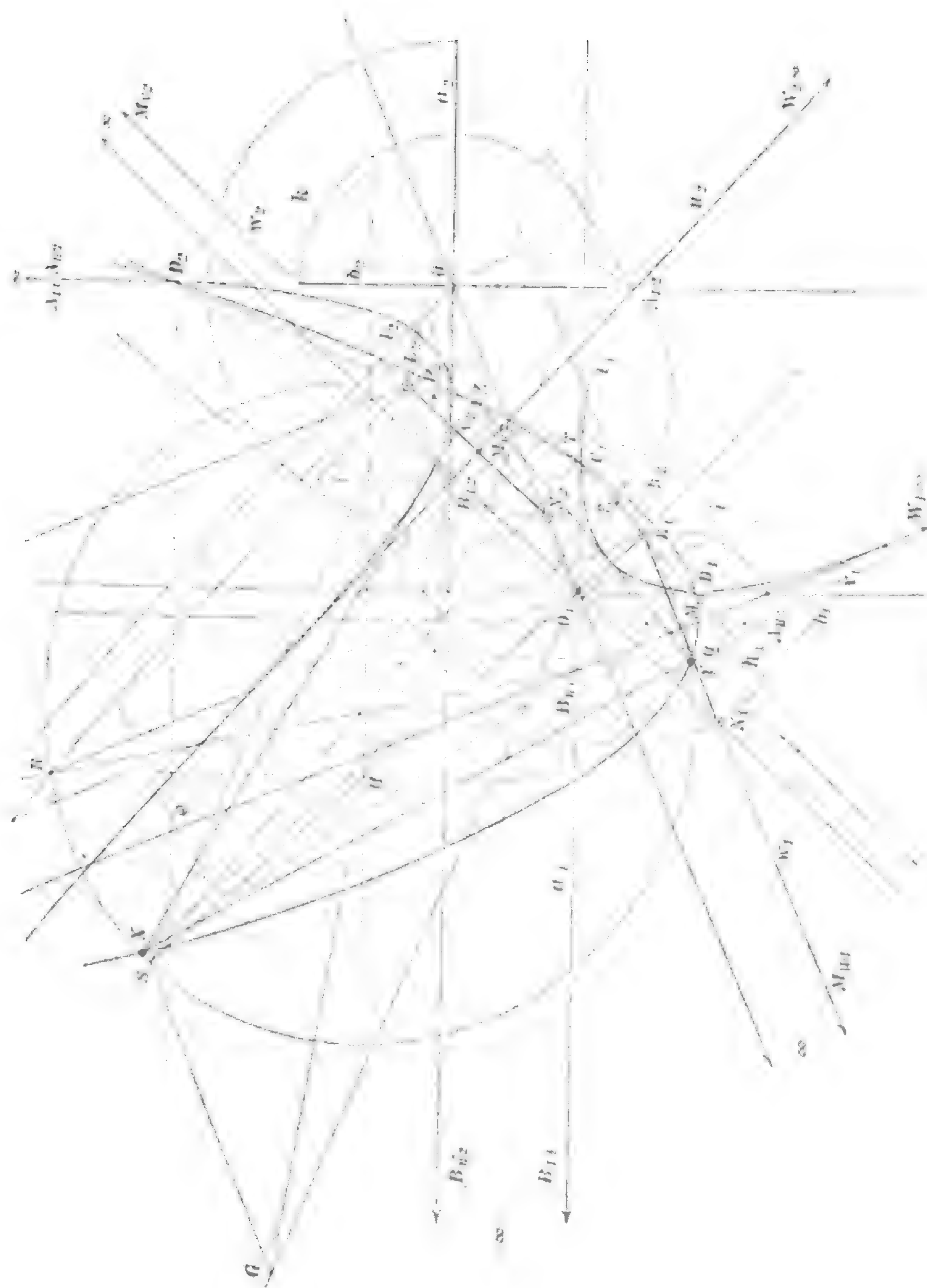


Fig. 1.

Normale in B_{12} zu n_2; sie schneidet a_1 in N_2 und ist zugleich w_2, so daß der Punkt M_{n_2} mit B_{12} zusammenfällt. Die Punkte L_2, M_{n_2}, N_2, Q liegen symmetrisch zu S, H, O_1, L_1 in Bezug auf die Leitgerade f der Parabel. Die Gerade h_2 ist normal zur Achse a_2 und schneidet sie in $C_2 = P_2$, während der Schnittpunkt von h_1 und a_1 der Punkt $C_1 = P_1$ ist. Der Punkt A_{III} ist zugleich D_1; D_2 liegt unendlich fern auf h_2. Der Kreis $[L_1, L_2]$ mit dem Durchmesser ST hat seinen Mittelpunkt auf f und die Parabel $[D_1, D_2]$ hat die Scheiteltangente der gegebenen Parabel als Achse.

3. Es sollen die Achsen und Hauptebenen einer Fläche zweiter Ordnung konstruiert werden.

Sei zunächst ein Kegel zweiter Ordnung durch den Basiskegelschnitt k, die Spitze O und die Höhe $OO_1 = d$ gegeben. Denkt man sich den imaginären Kreis i, welcher O_1 als Mittelpunkt und $d.i$ als Radius hat, so ist das gemeinsame Poldreieck X, Y, Z für i und k das Spurendreieck des Dreikantes der Achsen und Hauptebenen des Kegels.[1]

Verbindet man X mit Paaren von doppelt konjugierten Punkten in Bezug auf i und k, so erhält man eine Involution, für welche y, z selbst ein Strahlenpaar bilden. Die Verbindungsgeraden von X mit den uneigentlichen Punkten der Achsen a_2, b_2 sind die Normalstrahlen. Diese schneiden den Umkreis von X, Y, Z in zwei Punkten, welche wechselseitig mit Y, Z verbunden eine Involutionsachse ergeben. Die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte dieser Achse und des Kreises mit X sind als Doppelstrahlen der Involution die Spuren der zyklischen Ebenen, welche durch die Achse OX gehen. Schneidet man y mit Paaren von doppelt konjugierten Geraden in Bezug auf i und k, so erhält man eine Punktinvolution, welche X, Z

[1] In der Figur (auf der vorigen Seite) ist i als imaginärer Kreis und k als Ellipse vorausgesetzt. Die hier sich ergebende Konstruktion wird im wesentlichen übereinstimmend mit der nach Smith's Vorgang abgeleiteten Konstruktion von Josef Šolin [»Über die Konstruktion der Achsen einer Kegelfläche II. Grades«. Sitzungsberichte der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1885.] Eine nach Kortum's Vorgang abgeleitete Konstruktion wurde im 92. Bande (1885), dieser Sitzungsberichte, von Karl Pelz mitgeteilt.

als Punktepaar und den Schnittpunkt mit $O_1 O_2$ als Zentralpunkt besitzt. Zieht man aus diesem die Tangenten an den Umkreis von XYZ und überträgt die Tangentenstrecke auf y, so erhält man die Doppelpunkte der Involution. Als solche sind sie die Spuren der Fokalgeraden, welche auf der Ebene Oy liegen.

Eine Fläche zweiter Ordnung sei nun durch ihren Mittelpunkt O und drei konjugierte Halbmesser OE, OF, OO_2 gegeben, wobei E, F, O_2 die Potenzpunkte der Involutionen konjugierter Punkte auf den drei Durchmessern sind. Man kann voraussetzen, daß OEF die Ebene einer reellen oder imaginären Ellipse ist, für welche man die Achsen sofort konstruieren kann. Betrachtet man die Parallelebene durch O_2 als Zeichenebene und zieht durch O_2 parallele und gleiche Strecken zu den Achsen jener Ellipse, so ergibt sich als Spur des Asymptotenkegels ein Kegelschnitt k, welcher als reelle Ellipse aufzufassen ist, wenn OE, OF reell und OO_2 imaginär oder wenn OE, OF imaginär und OO_2 reell sind; dagegen ist k als imaginäre Ellipse aufzufassen, wenn alle drei Durchmesser gleichzeitig reell oder gleichzeitig imaginär sind. Die Achsen des Asymptotenkegels (wie oben konstruiert) gelten auch für die Fläche zweiten Grades.

4. Die Beziehung zu Reye's Achsenkomplex.

Einer Fläche zweiter Ordnung φ^2 mit dem Mittelpunkt O werde aus einem Punkte P ein Kegel umschrieben. Der zugehörige Berührungskegelschnitt k liegt auf der Polarebene π und hat den Schnittpunkt O_2 von OP mit π als Mittelpunkt. Der Fußpunkt O_1 der Normalen p von P auf π ist der Mittelpunkt eines imaginären Kreises i, dessen Radius $\overline{PO_1} \times i$ ist.

Die Strahlen p bilden Reye's Achsenkomplex für die Fläche φ^2; zwischen P, p, π findet eine eindeutige Beziehung statt.

Sucht man zu jeder Ebene π_2 des Bündels P die Schnittgerade mit π, sodann den Pol P_1 dieser Schnittgeraden in Bezug auf den Kreis i und den Pol P_2 in Bezug auf den Kegelschnitt k, so ist die Gerade p_2, welche durch P_2 parallel zu PP_1 geht, der Komplexstrahl, welcher der Ebene π_2 und dem

Punkte P_2 entspricht. Auf der Ebene π entstehen wie im vorangehenden die zwei kollinearen Felder φ_1 und φ_2, von welchen das erstere als Projektion des unendlich fernen Feldes ω_∞ aus P auf π betrachtet werden kann.

Die Fluchtgerade u_2 ist die normale Polargerade zu p.

Den Ebenen des Büschels p entsprechen die Strahlen, welche aus den projektiven Punktreihen u_2 und u_1 hervorgehen oder die doppelt konjugierten Geraden zu den Strahlen des Büschels O_1 in Bezug auf i und k als Komplexstrahlen, welche auf π liegen.

Die Parabel l_2, die Steiner'sche Parabel des Büschels O_1 in Bezug auf k, ist der Komplexkegelschnitt auf der Ebene π. Sie berührt u_2, die Achsen von k, die Normalen[1] von k für die Schnittpunkte mit u_2, die Halbierungsgeraden des Winkels der Tangenten aus O_1 an k, das Spurendreiseit der Hauptebenen des Berührungskegels sowie jenes der Hauptebenen der Fläche selbst.

Sucht man zu den Tangenten von l_2 die normalen Polargeraden in Bezug auf die Fläche φ^2, so erhält man die Komplexstrahlen, welche durch den Punkt P gehen. Sie müssen andrerseits durch die Pole der Tangenten von l_2 in Bezug auf k gehen, welche auf der Hyperbel $[O_1, O_2]$ liegen. Daraus folgt:

Der Komplexkegel für den Punkt P ist der gleichseitige Kegel zweiter Ordnung, welcher P als Spitze und die Apollonische Hyperbel $[O_1, O_2]$ als Basis besitzt. Der Kegel enthält insbesondere die Gerade p und die Parallelen zu den Achsen von k, die Achsen des Berührungskegels sowie die Normalen von P auf die Hauptebenen der Fläche φ^2 als Tripel von rektangulären Erzeugenden; überdies ist auch der Durchmesser OP eine Erzeugende.

Den Ebenen eines Bündels P entspricht die Achsenkongruenz einer kubischen Parabel, welche von den kollinearen Feldern π und ω_∞ erzeugt wird. Den Komplexstrahlen von P entsprechen die Schmiegungsebenen dieser kubischen Parabel; den Ebenen, welche einen solchen Komplexstrahl als Achse

[1] Das sind die beiden Flächennormalen, welche auf π liegen.

haben, entsprechen die Tangenten der Komplexparabel auf der entsprechenden Schmiegungsebene. Die Schmiegungsebenen sind zu den entsprechenden Erzeugenden des Komplexkegels normal. Legt man daher durch P Normalebenen zu den Erzeugenden des Komplexkegels, so erhält man den Richtungskegel der kubischen Parabel. Seine Basis auf π ist die Pollinie von $[O_1, O_2]$ in Bezug auf i. Der Kegel besitzt eine kubische Involution von orthogonalen Berührungsebenen. Die kubische Parabel hat insbesondere die Ebene π und die zu π normalen Ebenen durch die Achsen von k, die Hauptebenen des Berührungskegels sowie die Hauptebenen der Fläche φ^2 selbst als Tripel von rektangulären Schmiegungsebenen, also die Gerade OP als Direktrix. Die Tangente von π ist u_2 und jene von ω_∞ ist die Stellung der Normalebene zu OP.

Den Ebenen eines Bündels P entspricht die Achsenkongruenz einer kubischen Böklen'schen Parabel mit der Direktrix OP und mit einem Richtungskegel, welcher P als Spitze und die Parabel l_1 auf π als Basis besitzt.

Die Polargeraden der Achsen und die Pole der Schmiegungsebenen dieser kubischen Parabel sind das Erzeugnis der kollinearen Bündel O und P, wobei jeder Ebene von P jene Diametralebene entspricht, welche zur Richtung der Normalen der Ebene konjugiert ist, also die Sehnenkongruenz einer kubischen gleichseitigen Hyperbel, welche auf dem Komplexkegel liegt.

Die Pollinie der kubischen Parabel in Bezug auf φ^2 ist eine kubische gleichseitige Hyperbel, welche durch P und die Eckpunkte des Hauptpoltetraeders geht.

Die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangentialebenen der kubischen Parabel mit der Fläche φ^2 oder die Schnittpunkte der kubischen gleichseitigen Hyperbel mit φ^2 sind die Fußpunkte der sechs Normalen, welche man aus P auf die Fläche φ^2 fällen kann.

Projiziert man P, p aus dem Mittelpunkte O und aus den anderen Eckpunkten des Hauptpoltetraeders auf die gegenüberliegenden Seitenflächen desselben, so erhält man P^0, P', P'', P'''

und p^0, p', p'', p'''. Sucht man ferner die Spuren von p, π auf diesen Seitenflächen, so erhält man P_0, P_1, P_2, P_3 und p_0, p_1, p_2, p_3. Die Verwandtschaft P', p_1 ist dann die Polarität des betreffenden Hauptschnittes und die Verwandtschaft P_1, p_1 ist die Polarität des betreffenden Fokalkegelschnittes.

Die Verwandtschaft P, p bleibt dieselbe, wenn man dem Punkte P eine zu π parallele Ebene als Polarebene zuweist, also für alle mit φ^2 homothetischen Flächen zweiter Ordnung. Die Normalen, welche man von einem Punkte T auf diese Flächen fällen kann, ergeben sich aus derselben kubischen gleichseitigen Hyperbel.[1]

Die Verwandtschaft p, π bleibt dieselbe, wenn man der Ebene π irgend einen auf p liegenden Punkt als Pol zuweist, also für alle mit φ^2 konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Die Normalen, welche man von einem Punkte T auf diese Flächen fällen kann, ergeben sich aus derselben kubischen Parabel.[2]

Die Zuordnung p', p_1 ergibt die Verwandtschaft der normalen konjugierten Geraden in Bezug auf die Hauptschnitte aller mit φ^2 konfokalen Flächen. Die Verwandtschaft P', p' bildet ein Ameseder'sches Nullsystem zweiten Grades,[3] welches dasselbe bleibt für alle mit φ^2 homothetischen Flächen. Die Charakteristik desselben ist das Teilverhältnis $(P'_2 P' : P'_3 P')$ des Punktes P' in Bezug auf die Schnittpunkte von p' mit den beiden Achsen oder das Doppelverhältnis des Strahles p' und des Durchmessers OP' in Bezug auf die Parallelen zu den beiden Achsen. Einem Büschel T' von Strahlen p' entspricht die Apollonische Hyperbel in Bezug auf den Hauptschnitt, welche die Projektion der oben genannten kubischen gleichseitigen Hyperbel ist, so daß die Fußpunkte der Normalen von T auf φ^2 leicht konstruiert werden können, indem man

---

1 Steiner, Über algebraische Kurven und Flächen. Journal für Mathematik, 49. Bd. (1854). Chasles, Journal de mathém. T. III (1838).

2 Chasles, Aperçu historique, Note XXVI, No 55 (1837).

3 Ameseder, Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades. Journal für Mathematik, 97. Bd. (1884), p. 83.

eine zweite Projektion der Schnittlinie des projizierenden Zylinders mit φ^2 sucht.[1]

Die Verwandtschaft p', P_1 ist ebenfalls ein solches Nullsystem zweiten Grades, welches aus den Verwandtschaften p', p_1 und p_1, P_1 hervorgeht. Die Charakteristik ist hier jener des Achsenkomplexes $(P_2 P_1 : P_3 P_1)$ gleich. Dreht sich die Ebene π um die Spur p_1, so beschreibt p ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel P_1 auf der projizierenden Ebene mit der Spur p'.

Einem Büschel T' von Strahlen p' entspricht hier die Apollonische Hyperbel $[T', O]$ in Bezug auf den Fokalkegelschnitt k_1 als Spur aller Komplexkegel, deren Spitzen auf dem Sehstrahle TT' liegen.

Einer Reihe r_1 von Punkten P_1 entspricht eine Steinersche Parabel, welche die Verbindungsgerade des Poles R_1 von r_1 für k_1 mit O als Leitgerade hat. Sie ist die Projektion aller Komplexparabeln, welche auf den Ebenen mit der Spur r_1 liegen.

Sucht man zur Spur einer jeden Ebene des Bündels T den Pol P_0' für den imaginären Kreis i_1, welcher T' als Mittelpunkt und $\overline{TT'} \times i$ als Radius besitzt, ferner den Pol P_1 für den Fokalkegelschnitt k_1, so erhält man wieder zwei kollineare Felder auf der Hauptebene α, von denen das erstere die Projektion des Feldes ω_∞ aus T ist und wobei α und ω_∞ wieder die kubische Parabel erzeugen, welche dem Bündel T entspricht. Die früher mit l_1 und l_2 bezeichneten Parabeln sind nun wieder die Spur des Richtungskegels, beziehungsweise die Schmiegungsparabel von α für jene kubische Parabel. Die Achsen des Kegels Tk_1 sind dann die Normalen l, m, n (Fig. 2) der drei mit φ^2 konfokalen Flächen (Ell., e. Hy., zw. Hy.), welche durch T gehen; ihre Spuren L_1, M_1, N_1 bilden das gemeinsame Poldreieck von i_1 und k_1. Die Hauptschnitte dieser drei Flächen er-

[1] Adler, Über das Normalenproblem der Flächen zweiten Grades. Diese Sitzungsberichte, 111. Bd. (1902). Zur Konstruktion der Schnittlinie des hyperbolischen Zylinders mit der Fläche können die ähnlichen Ellipsen durch Affinität in konzentrische Kreise übergeführt werden, während die Apollonische Hyperbel wieder in eine gleichseitige Hyperbel übergeht.

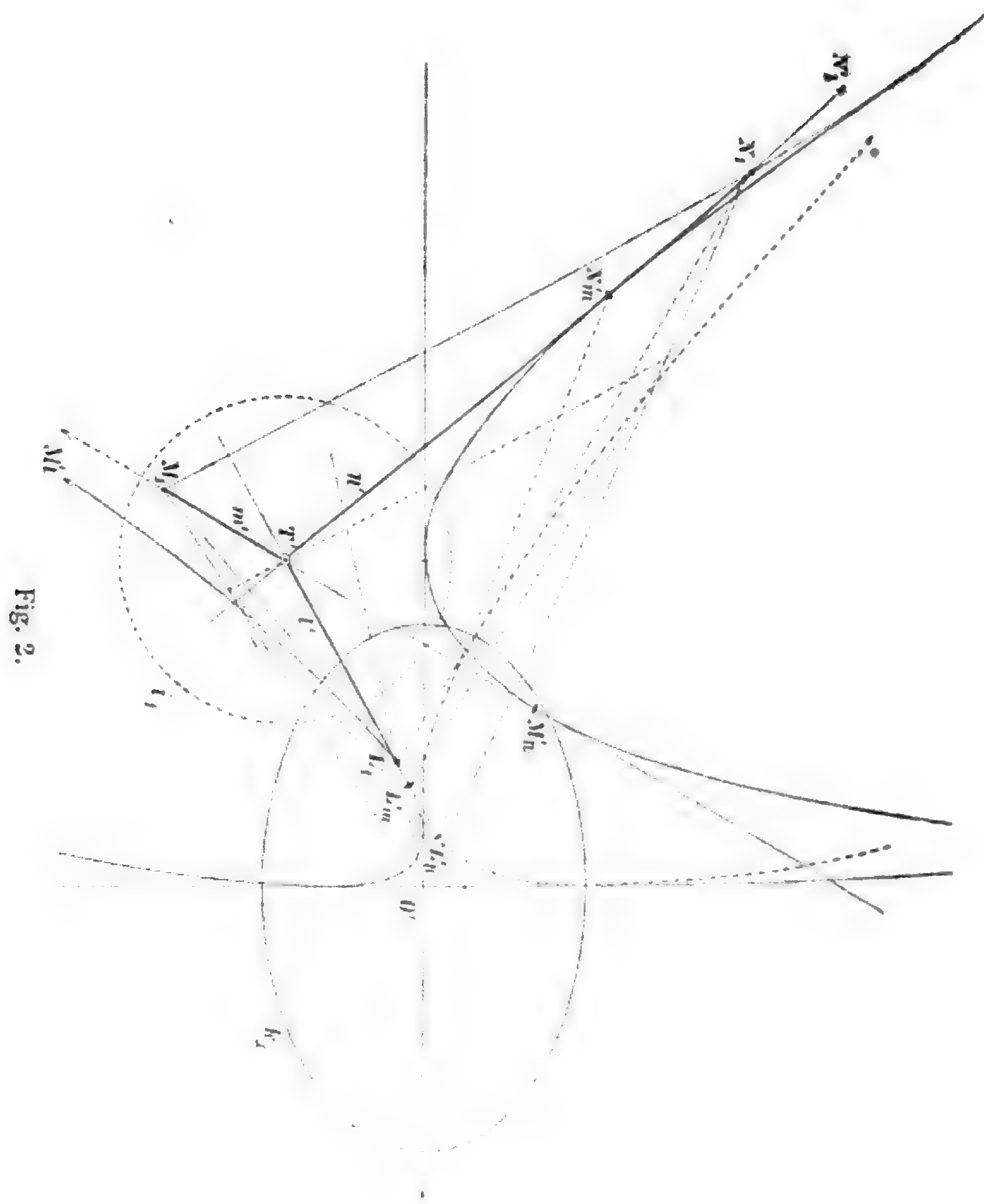


Fig. 2.

geben sich aus den drei Polaritäten, in welchen dem Punkte T' die Seiten des Dreieckes $L_1 M_1 N_1$ entsprechen.

Die mit φ^2 konfokalen Flächen schneiden die Ebene π in Kegelschnitten, deren Mittelpunkte auf der Geraden $O_1 O_2$ (Fig. 1) liegen und deren Achsen die Parabel l_2 berühren. Die Normalen für die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der jeweiligen Geraden u_2 sind auch Tangenten von l_2. Dem Strahlenbüschel O_1 entspricht also in der Verwandtschaft der normalen konjugierten Geraden in Bezug auf die Schnitte aller mit φ^2 konfokalen Flächen dieselbe Parabel l_2, nämlich die Komplexparabel. Nimmt man jetzt wieder die Ebene ln als π und den Punkt T als O_1, so gehen durch T selbst die Schnitte mit einem Ellipsoid und mit einem zweischaligen Hyperboloid. Die zwei erwähnten Normalen werden benachbart; daher sind die Berührungspunkte L_n, N_l von l, n mit der Komplexparabel die Krümmungsmittelpunkte für jene Schnitte, also Hauptkrümmungsmittelpunkte.[1] Andrerseits sind N_l, L_n die Pole von l, n in Bezug auf jene Schnitte, also auch die Pole der Ebene lm in Bezug auf das Ellipsoid, beziehungsweise der Ebene nm in Bezug auf das zweischalige Hyperboloid. Ebenso sind L_m und N_m die Pole der Ebenen nm und lm in Bezug auf das einschalige Hyperboloid. Die Gerade $L_m N_m$ ist die normale Polargerade zu m in Bezug auf das einschalige Hyperboloid, also selbst Tangente der Parabel (ln) sowie der kubischen Parabel und ihr Berührungspunkt ist der Schmiegungspunkt der Ebene ln.

Die Komplexparabel der Ebene ln berührt die Normalen l, n in den Hauptkrümmungsmittelpunkten L_n, N_l, ferner die Verbindungsgerade der Hauptkrümmungsmittelpunkte L_m, N_m im Schmiegungspunkte der kubischen Parabel, welche dem Bündel T entspricht.

Die Projektion der Komplexparabel, welche auf der Ebene ln mit der Spur $L_1 N_1$ liegt (Fig. 2), ist die Steiner'sche Parabel

[1] A. Mannheim (Journal de mathématiques, 3e série, tome VIII [1882], und 5e série, tome II [1896]) kommt auf andere Weise zu den Parabeln und leitet daraus räumliche Konstruktionen für die Hauptkrümmungsmittelpunkte ab, darunter eine, welche Laguerre schon vorher analytisch gezeigt hatte.

des Strahlenbüschels M_1 in Bezug auf den Fokalkegelschnitt k_1. Sie hat OM_1 als Leitgerade und berührt außer den Achsen a, b von k_1 und der Spur L_1N_1 noch l' in L_n' und n' in N_l'. Der Punkt L_n' liegt in Bezug auf L_1, L_2', L_3' ähnlich wie T' in Bezug auf N_1, N_2', N_3'. Die Projektionen der sechs Hauptkrümmungsmittelpunkte für T lassen sich hienach einfach konstruieren, z. B.: »Man zieht durch T' eine Parallele zu M_1N_1, sucht ihre Schnittpunkte mit OM_1 und ON_1, fällt von diesen Schnittpunkten die Normalen zu n', beziehungsweise m'; dann schneiden diese Normalen auf l' die Projektionen L_n' und L_m' der Hauptkrümmungsmittelpunkte aus, welche auf l liegen.«

Über die Gestalt eines schwerelosen flüssigen Leiters der Elektrizität im homogenen elektrostatischen Felde

von

G. Jäger.

(Mit 8 Textfiguren.)

Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1906.

Die schönen, allgemein bekannten Versuche von Plateau über die Gestalt der Flüssigkeiten, welche dem Einfluß der Schwere entzogen sind, werden immer so gemacht, daß man Öl in eine gleich schwere Mischung von Wasser und Alkohol gibt. Natürlich lassen sich diese Versuche genau so durchführen, wenn man das Wasser-Alkoholgemisch in das Öl gibt. Bringt man Öl in die Plateau'sche Mischung und stellt nun das Gefäß zwischen die Platten eines Kondensators, so werden sich die Erscheinungen in gleicher Weise abspielen, ob man den Kondensator geladen hat oder nicht. Das erklärt sich dadurch, daß die Flüssigkeitsmischung ein Leiter der Elektrizität ist. Im Inneren derselben ist somit konstantes Potential. Es wirken also keine elektrischen Kräfte auf den Ölkörper ein. Füllen wir jedoch das isolierende Glasgefäß mit Öl und bringen in dieses erst die Wasser-Alkoholmischung, so werden auf den Wasser-Alkoholkörper elektrische Kräfte ausgeübt, sobald wir das Gefäß in ein elektrisches Feld bringen. Die Körper werden dadurch deformiert, durch größere Kräfte gänzlich zerstört.

Im folgenden sollen die Resultate einer Reihe von Beobachtungen beschrieben werden, welche lediglich mit freischwebenden Flüssigkeitskugeln im homogenen elektrostatischen Felde angestellt wurden. Ohne daß die Maße dabei eine

wesentliche Rolle spielen, sei erwähnt, daß zur Aufnahme des Öls ein prismatisches Glasgefäß von 11 *cm* Länge, 9 *cm* Breite und 12 *cm* Höhe benützt wurde. Vom Rande 4 *cm* abwärts wurden außen und innen die Wände gefirnißt. Die zwei größeren Seitenflächen des Gefäßes wurden von außen mit gleich großen Kupferplatten belegt, die durch zwei Kautschukbänder am Glase festgehalten wurden. Diese Platten, welche als Kondensatorplatten dienten, waren ebenfalls gefirnißt, um ein Gleiten der Elektrizität längs der Glaswände zu verhüten. Das ganze Gefäß stand auf einer Ebonitplatte vor einem Projektionsapparat, so daß die Vorgänge im Gefäß nicht nur direkt, sondern auch stark vergrößert, auf eine Wand projiziert, beobachtet werden konnten. Geladen wurden die Kondensatorplatten durch eine Wimshurstmaschine. Parallel zum Kondensator geschaltet befand sich zwischen den Zuleitungsdrähten eine verstellbare Funkenstrecke, welche eine zu hohe Potentialdifferenz der Kondensatorplatten verhinderte, sowie ein Stromschlüssel, durch dessen Schluß der Kondensator entladen und die Influenzmaschine kurz geschlossen wurde.

Das Gefäß wurde so weit mit reinem Olivenöl gefüllt, daß die Oberfläche desselben noch nicht den gefirnißten Rand des Gefäßes erreichte. Eine gewisse Schwierigkeit bot die Einfüllung der Plateau'schen Mischung in das Öl. Während es infolge der großen Zähigkeit des Öls ein leichtes ist, größere Ölkugeln in der Wasser-Alkoholmischung zu erzeugen, muß man im umgekehrten Falle bei der Erzeugung einer Kugel aus der Mischung im Öl sehr vorsichtig vorgehen, um ein vorzeitiges Abreißen der Flüssigkeit von der Pipette oder ein Zerreißen in mehrere Kugeln zu verhüten. Ich benützte daher, um den hydrostatischen Druck möglichst klein zu machen, eine Pipette mit sehr kurzem unteren Rohransatz und versah das obere Rohrende mit einem längeren Kautschukschlauch mit Quetschhahn. War die Pipette mit der Plateau'schen Flüssigkeit gefüllt und der Quetschhahn abgesperrt, so wurde sie mit Hilfe eines Stativs so oberhalb des Gefäßes befestigt, daß das untere Ende sich etwa 1 *cm* unter der Öloberfläche befand. Um nun eine Kugel zu erzeugen, wurde der Kautschukschlauch sehr vorsichtig immer mehr und mehr zusammengepreßt und dadurch

die Flüssigkeit allmählich in das Öl gebracht. Auf diese Weise gelang es, Kugeln bis zu etwa $1^1/_2$ *cm* Durchmesser mit Sicherheit zu erzeugen. Bei zu raschem Entleeren der Pipette schießt aus der Öffnung ein langer Strahl hervor, der sich gewöhnlich in mehrere Kugeln auflöst. Es gelingt nach einiger Übung bald, eine Kugel von gewünschter Größe herzustellen und dieselbe durch etwas stärkeres Quetschen des Schlauches sodann zum Abreißen zu bringen.

Da es kaum gelingt, das Wasser-Alkoholgemisch und das Öl vollkommen gleich schwer zu machen, so wurde die Mischung

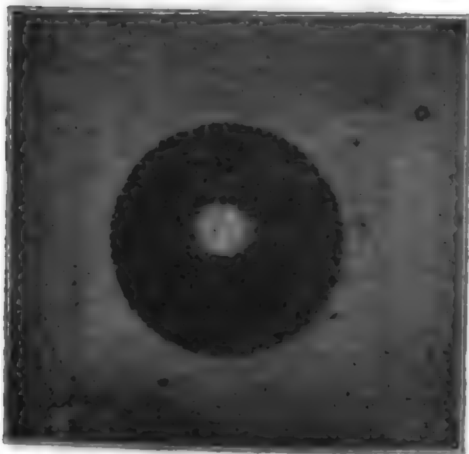


Fig. 1.

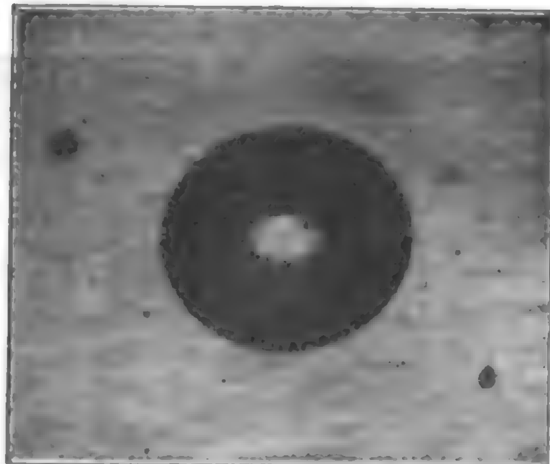


Fig. 2.

so gewählt, daß die daraus erzeugten Kugeln langsam im Öl untersanken. Durch Beleuchtung von rückwärts mit einer Projektionslampe waren die Kugeln hell genug, um von ihnen photographische Momentaufnahmen machen zu können. Fig. 1 zeigt ein solches Bild. Infolge der Strahlenbrechung erscheint die Kugel dunkel mit einem hellen Fleck in der Mitte.

In dem Moment, wo wir die Kondensatorplatten mit Hilfe der Influenzmaschine laden, wird aus der Kugel ein Rotationsellipsoid, dessen Längsachse, die gleichzeitig die Rotationsachse ist, mit der Richtung der Kraftlinien des homogenen elektrischen Feldes zusammenfällt. Bei schwachem Felde weicht die Gestalt des Ellipsoids nur wenig von der einer Kugel ab (Fig. 2).

Wächst die Feldstärke, so wird das Verhältnis der großen zur kleinen Achse des Ellipsoids immer größer (Fig. 3).

In Fig. 4 sehen wir mehrere Tropfen in einem starken Felde. Es zeigt sich, daß größere Tropfen auch größere Exzentrizitäten erlangen, was daher kommt, daß die elektrischen Kräfte, welche den Tropfen auseinanderzuziehen streben, gegenüber den zusammenhaltenden Kapillarkräften unter sonst gleichen Umständen um so mehr ins Gewicht fallen, je größer der Tropfen ist. Die kleinen Tropfen, welche man in Fig. 4 innerhalb des großen sieht, sind in Wirklichkeit hinter demselben.

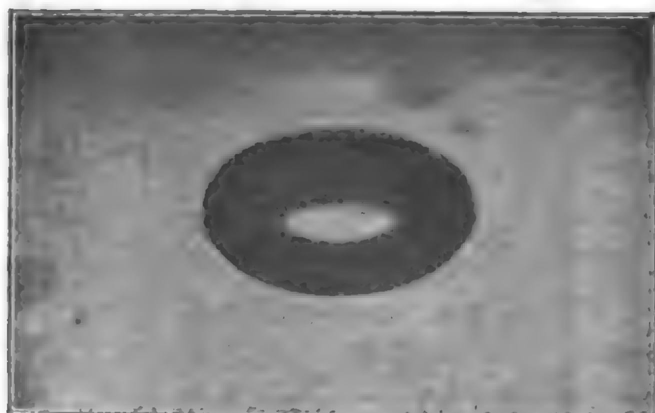


Fig. 3.



Fig. 4.

Um den Vorgang rein zu gestalten, hat man darauf zu achten, nicht zu viel Tropfen gleichzeitig im Öl zu haben, da sich dieselben im elektrischen Felde ja gegenseitig beeinflussen. Ferner dürfen sich die bereits zu Boden gefallenen Tropfen nicht ausbreiten, weil sie dadurch denselben mit einer leitenden Schicht überziehen. Es geschieht auch leicht, daß beim Einbringen der Mischung sich eine dünne Haut derselben an der Oberfläche des Öls ausbreitet und auch diese leitend macht. Unter solchen Umständen kann es geschehen, daß sich im Inneren des Öls überhaupt kein elektrisches Feld ausbildet. Man tut daher am besten, zu jedem Versuch, der sicher gehen soll, ganz reines Öl zu nehmen; doch genügt es für eine Reihe von Experimenten, die bereits zu Boden gesunkene Flüssigkeits-

mischung mit Hilfe einer Pipette aus dem Öl zu entfernen. Erst wenn die Mischung in vielen kleinen Tropfen oder in dünnen Häuten in und auf dem Öl vorhanden ist, ist es notwendig, das Öl in anderer Weise zu reinigen. Es hat sich da eine Erhitzung des Öls über den Siedepunkt des Wassers vorzüglich bewährt.



Fig. 5.

Wie wir später bei der Berechnung der geschilderten Erscheinung sehen werden, ist die Form der Wasser-Alkohol-

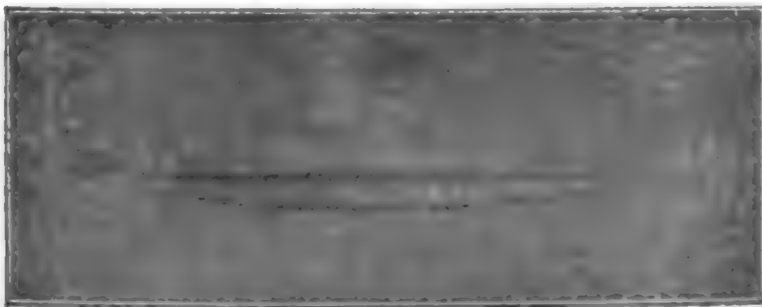


Fig. 6.

tropfen im elektrischen Felde nur bei kleinen Kräften ein Rotationsellipsoid. Steigern wir die Feldstärke, so zeigt sich, daß die Tropfen eine längliche, an beiden Enden zugespitzte Gestalt annehmen (Fig. 5, 6 und 7). Der Körper ist dann nicht mehr stabil, sondern er wird zerrissen. Unsere Figuren 5, 6 und 7 sind also nicht als ruhende Erscheinungen

aufzufassen, sondern es sind Momentaufnahmen eines Körpers, der sich unter dem Einfluß der elektrischen Kräfte von einer elliptischen zu einer Gestalt mit spitzen Enden auszieht, die

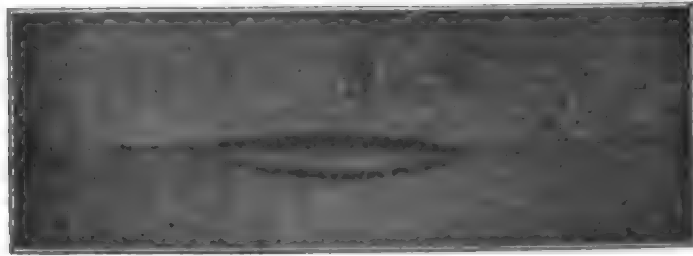


Fig. 7.

sich in kleine Tropfen auflösen. Dieses Zerstieben der Enden erfolgt oft sehr heftig und hat den Anschein, als würden die

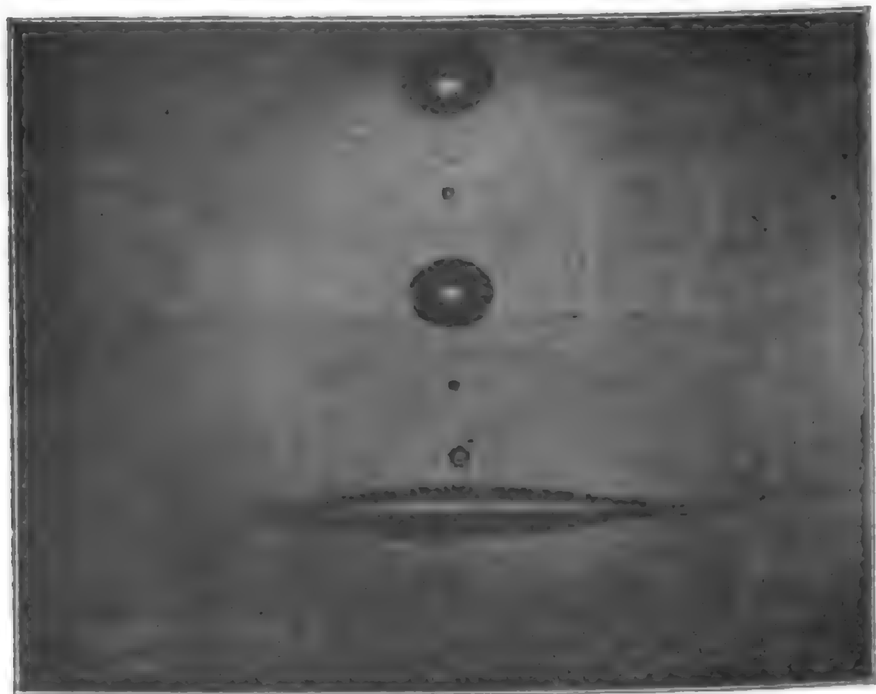


Fig. 8.

kleinen Tropfen aus einer Brause kommen. In Fig. 8 haben wir einen derartigen zersprühenden Körper. Gleichzeitig sind andere Tropfen vorhanden, welche wegen ihrer Kleinheit ein noch stabiles Ellipsoid bilden.

Wir wollen nun daran gehen, die geschilderten Erscheinungen mathematisch zu formulieren. Die Oberfläche, die die Plateau'sche Mischung unter dem Einfluß der Kapillar- und elektrischen Kräfte annimmt, muß eine Niveaufläche sein, d. h. alle wirksamen Kräfte müssen auf ihr senkrecht stehen. Ferner muß der durch sämtliche Kräfte hervorgebrachte Druck in allen Punkten der Niveaufläche konstant sein.

Bezeichnen wir mit α die Kapillaritätskonstante zwischen Öl und Plateau'scher Flüssigkeit, d. h. die Arbeit, welche wir leisten müssen, um die gemeinschaftliche Trennungsfläche um die Flächeneinheit zu vergrößern, mit p den kapillaren Druck, so ist für jeden Punkt der Oberfläche

$$p = \alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

r ist dann der größte, r' der kleinste Krümmungsradius der Oberfläche an dem betreffenden Punkt. Dieser Druck ist nach der konkaven Seite des Körpers gerichtet.

Ist ferner σ die Dichte der Elektrizität an irgend einem Punkte der Oberfläche der leitenden Flüssigkeit, K die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Öls, so ist die Kraft F, welche infolge der elektrischen Spannung auftritt,

$$F = 2\pi K\sigma^2.$$

Diese Kraft ist nach auswärts gerichtet. Wir können daher für unseren Körper die Gleichung aufstellen

$$\alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - 2\pi K\sigma^2 = C,$$

wobei C eine Konstante bedeutet.

Der jeweilige Wert von $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ ist einzig durch die Gestalt des flüssigen Körpers bedingt. Die Dichte σ der Elektrizität hängt sowohl von der Gestalt des Körpers als auch von der Elektrizitätsverteilung in der Umgebung ab. Wir haben es also im allgemeinen hier mit sehr komplizierten Erscheinungen

zu tun, da ja die Gestalt der Flüssigkeit ebenfalls von vornherein nicht gegeben ist, sondern erst durch die auftretenden Kräfte bedingt wird. Wir wollen uns daher bei unserer Untersuchung auf einen möglichst einfachen Fall beschränken.

Es sei unser flüssiger Körper in einem ursprünglich homogenen elektrischen Felde, dessen Intensität nicht groß ist. Verschwindet das elektrische Feld, so nimmt die Flüssigkeit die Form einer Kugel an, welche unter dem kapillaren Druck $\frac{2\alpha}{r}$ stehen muß, wenn r der Radius dieser Kugel ist. Treten die elektrischen Kräfte auf, so wird unsere Kugel ein Rotationskörper, dessen Rotationsachse mit der Richtung der Kraftlinien zusammenfällt. Haben wir ein schwaches Feld, so bietet der entstehende Körper den Anblick eines gedehnten Rotationsellipsoids. Es liegt daher nahe zu untersuchen, ob bei schwachem Felde ein Rotationsellipsoid den oben gestellten Bedingungen genügt.

Für das Rotationsellipsoid in einem homogenen elektrischen Felde ist die Verteilung der Elektrizität bekannt. Es bieten sich also der Rechnung keine Schwierigkeiten dar. Die Gleichung der erzeugenden Kurve sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Für jeden Rotationskörper, dessen Achse mit der x-Achse des Koordinatensystems zusammenfällt, ist der eine Krümmungsradius, wir wollen ihn r' nennen, gleich der Länge N der entsprechenden Normalen. Es ist somit

$$r' = N = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Der andere Krümmungsradius ist nach der bekannten Formel

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Für unser Ellipsoid wird

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$y'' = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

und schließlich

$$r = \frac{a^2}{b}\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}.$$

Wir haben hier r positiv genommen, weil wir den Krümmungsradius für die Berechnung der Kapillarkräfte immer positiv einführen. Wir wollen die Formel für r noch dahin abändern, daß wir die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a}$, wobei $e^2 = a^2 - b^2$, benützen. Es wird also

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right).$$

Wir setzen also voraus, daß ε so klein sei, daß höhere Potenzen als ε^2 vernachlässigt werden können. Wir erhalten dann weiter

$$\frac{a^2}{b} = a\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right),$$

ferner

$$\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2} = \left(1 - \varepsilon^2 \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2} = 1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{a^2}\varepsilon^2.$$

Danach wird der Krümmungsradius

$$r = a\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{a^2}\varepsilon^2\right) = a\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{a^2} - 1\right)\varepsilon^2\right].$$

Gleicherweise erhält man für den zweiten Krümmungsradius

$$r' = \frac{b\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\varepsilon^2\right)^{3/2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\varepsilon^2\right)^{-1} =$$

$$= a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{a^2}\varepsilon^2\right)\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\varepsilon^2\right) =$$

$$= a\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)\varepsilon^2\right].$$

Bilden wir jetzt $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, so ergibt dies

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{a}\left\{\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{a^2} - 1\right)\varepsilon^2\right]^{-1} + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)\varepsilon^2\right]^{-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{a^2} - 1\right)\varepsilon^2 + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)\varepsilon^2\right] =$$

$$= \frac{2}{a}\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\varepsilon^2\right).$$

Für den kapillaren Druck p erhalten wir dann

$$p = \alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = \frac{2\alpha}{a}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}x^2\right).$$

Um nun den elektrischen Druck $F = 2\pi K\sigma^2$ zu finden, müssen wir die Verteilung der Elektrizität auf einem gedehnten Rotationsellipsoid kennen, dessen Rotationsachse mit der Richtung der Kraftlinien eines ursprünglich homogenen Feldes zusammenfällt. Diese Aufgabe ist längst gelöst worden. Unter

anderen gibt A. Lampa[1] folgende Formeln an, die für unser spezielles Beispiel entsprechend abgeändert sind. Es ist die Dichte der Elektrizität an einem beliebigen Punkte der Oberfläche des Ellipsoids

$$\sigma = \sigma_a \cos\varphi,$$

wobei σ_a die Dichte der Elektrizität am Ende der positiven großen Halbachse des Ellipsoids bedeutet, während φ der Winkel ist, den der aus dem Mittelpunkt an den entsprechenden Oberflächenpunkt gezogene Strahl mit der großen Halbachse einschließt.

Es ist ferner

$$\sigma_a = \frac{1}{4\pi J} \cdot \frac{a^2}{b^2} \Phi,$$

wobei wir unter Φ die Intensität des homogenen elektrischen Feldes verstehen, während

$$J = \int_0^1 \frac{u^2 du}{1-\varepsilon^2 u^2} = \int_0^1 u^2(1+\varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^4 u^4 + \ldots) du =$$

$$= \left[\frac{u^3}{3} + \varepsilon^2 \frac{u^5}{5} + \varepsilon^4 \frac{u^7}{7} + \ldots\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon^2}{5} + \frac{\varepsilon^4}{7} + \ldots$$

ist. Für unseren Zweck können wir die Reihe bei $\frac{\varepsilon^2}{5}$ abbrechen und erhalten so

$$\sigma_a = \frac{1}{4\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon^2}{5}\right)} \cdot \frac{a^2}{b^2} \Phi = \frac{3}{4\pi}\left(1 - \frac{3}{5}\varepsilon^2\right)\frac{a^2}{b^2}\Phi =$$

$$= \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1 - \frac{3}{5}\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \Phi = \frac{3}{4\pi}\left(1 - \frac{3}{5}\varepsilon^2\right)(1+\varepsilon^2)\Phi =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2\right)\Phi,$$

indem wir $\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}$ setzen können.

---

[1] Zur Theorie der Dielektrika. Diese Sitzungsberichte, CIV. Bd., Abt. II, p. 681 ff. (1895).

Nach dem Obigen ist nun

$$\sigma^2 = \sigma_a^2 \cos^2 \varphi,$$

wobei

$$\cos^2 \varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Setzen wir hier für y^2 seinen Wert aus der Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ein, so läßt sich leicht die Formel gewinnen

$$\cos^2 \varphi = \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{a^2 - x^2}{a^2}\varepsilon^2\right)} = \frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - x^2}{a^2}\varepsilon^2\right).$$

Danach wird

$$\sigma^2 = \sigma_a^2 \frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - x^2}{a^2}\varepsilon^2\right) =$$

$$= \frac{9\Phi^2}{16\pi^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{4}{5}\varepsilon^2\right)\left(1 + \frac{a^2 - x^2}{a^2}\varepsilon^2\right) =$$

$$= \frac{9\Phi^2}{16\pi^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}\left[1 + \left(\frac{4}{5} + \frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2\right].$$

Für die Größe der elektrischen Kraft an irgend einem Punkte der Oberfläche erhalten wir also schließlich

$$F = 2\pi K \sigma^2 = \frac{9\Phi^2 K}{8\pi} \cdot \frac{x^2}{a^2}\left[1 + \left(\frac{4}{5} + \frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2\right]. \qquad (1)$$

Kehren wir nun zur Gleichgewichtsbedingung unserer Flüssigkeit zurück, so haben wir zu überlegen, daß

$$p - F = \text{Const.}$$

sein muß. Somit erhalten wir

$$\frac{2\alpha}{a}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}x^2\right) - \frac{9\Phi^2 K}{8\pi} \cdot \frac{x^2}{a^2}\left[1 + \left(\frac{4}{5} + \frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2\right] = \text{Const.}$$

Diese Gleichung muß natürlich für jeden Punkt der Oberfläche, also auch für $x = 0$ gelten. Dafür erhalten wir aber

$$\frac{2\alpha}{a} = \text{Const.}$$

Folglich muß

$$\frac{2\alpha x^2}{a^3}\varepsilon^2 - \frac{9\Phi^2 K}{8\pi} \cdot \frac{x^2}{a^2}\left[1 + \left(\frac{4}{5} - \frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2\right] = 0$$

sein. Daraus ergibt sich weiter

$$\frac{2\alpha\varepsilon^2}{a} = \frac{9\Phi^2 K}{8\pi}\left[1 + \left(\frac{4}{5} + \frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2\right].$$

Es hat somit $\frac{9\Phi^2 K}{8\pi}$ die Größenordnung von ε^2. Wenn wir es demnach noch mit $\left(\frac{4}{5} + \frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2$ multiplizieren, so erhalten wir ein Glied von der Größenordnung ε^4. Glieder von dieser Kleinheit haben wir aber in unserer ganzen Rechnung vernachlässigt. Wir finden somit

$$\frac{2\alpha\varepsilon^2}{a} = \frac{9\Phi^2 K}{8\pi},$$

oder die Exzentrizität des Rotationsellipsoids, welches sich in unserem elektrischen Felde ausbildet, ist für schwache Feldintensitäten gegeben durch

$$\varepsilon = \frac{3\Phi}{4}\sqrt{\frac{aK}{\pi\alpha}}.$$

Es ist also die Exzentrizität unseres Ellipsoids der Feldstärke direkt proportional. Sie wächst ferner mit zunehmender Größe des Ellipsoids, was ebenfalls ohneweiters einzusehen ist, da ja mit wachsenden Krümmungsradien der Kapillardruck, welcher die Kugelgestalt anstrebt,

abnimmt. Aus demselben Grunde wird die Exzentrizität um so kleiner sein, je größer die Kapillaritätskonstante α ist.

Daß in unserem Falle der Druck infolge der elektrischen Kräfte von der Größenordnung ε^2 ist, hätte uns von vornherein erlaubt, die Verteilung der Elektrizität auf unserem Ellipsoid so zu rechnen, als hätten wir es nur mit einer Kugel zu tun, da die Abweichung, welche von der ellipsoidischen Gestalt herrührt, erst von der Größenordnung ε^4 wird. Das ist nun außerordentlich wichtig für die Berechnung der Gestalt unserer Flüssigkeit, wenn wir in der Annäherung der Rechnung um ein Glied weitergehen. Wir können dabei etwa folgendermaßen verfahren.

Wir haben es natürlich wieder mit einem Rotationskörper zu tun, dessen Achse mit der Richtung der Kraftlinien des homogenen elektrischen Feldes zusammenfällt. Als wir bei der ersten Annäherung davon ausgingen zu untersuchen, ob ein Ellipsoid den gestellten Gleichgewichtsbedingungen entspreche, schrieben wir die Gleichung der erzeugenden Ellipse in der Form

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}.$$

Dabei war $\frac{b^2}{a^2}$ eine Zahl, welche sich um die Größenordnung ε^2 von Eins unterschied. Es liegt nun nahe, einen Schritt weiter zu gehen und einen Rotationskörper zu untersuchen, dessen Erzeugende die Gleichung

$$y^2 = b^2 - \beta^2 x^2 - \gamma^4 x^4 \tag{2}$$

ist. Auch hier soll β^2 wenig von Eins verschieden sein, und wir wollen den Unterschied wiederum von der Größenordnung ε^2 annehmen, während γ^4 von der Ordnung ε^4 sein soll.

Bei der Untersuchung dieses Körpers haben wir nun zu beachten, daß es für die Berechnung der elektrischen Verteilung genügt, wenn wir die Verteilung auf einem Ellipsoid von der nunferischen Elektrizität ε kennen. Entwickeln wir nämlich

alle auftretenden Kräfte in Reihen nach steigenden Potenzen von ε^2 und brechen bei den Gliedern von der Ordnung ε^4 ab, so muß sich hier, analog wie früher beim Übergange von der Kugel zum Ellipsoid, jetzt beim Übergange vom Ellipsoid zu dem neuen Körper ergeben, daß die elektrischen Kräfte dabei sich um Größen von der Ordnung ε^6 ändern. Diese Größen sind aber bereits zu vernachlässigen, weshalb es genügt, die Verteilung der Elektrizität auf einem Ellipsoid in einem homogenen Felde zu kennen, um den von uns betrachteten Fall zu berechnen.

Aus Gleichung (2) erhalten wir

$$y = \pm\sqrt{b^2 - \beta^2 x^2 - \gamma^4 x^4}.$$

Daraus läßt sich jetzt leicht y' und y'' und sodann $\frac{1}{r}$ bilden. $\frac{1}{r'}$ ist wieder gegeben durch

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}.$$

Führen wir dies alles durch, immer bei den Gliedern von der Größenordnung ε^4 abbrechend, und setzen

$$\beta^2 = 1 - \delta^2,$$

also δ von der Größenordnung ε, so erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2}{b}\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + 3\gamma^4 x^2 + \frac{\delta^2 x^2}{b^2} - \frac{7\delta^4 x^2}{4b^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{9\delta^4 x^4}{8b^4} - \frac{9\gamma^4 x^4}{2b^2}\right).$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck noch mit der Kapillaritätskonstante, so erhalten wir den kapillaren Druck p. Dieser

muß vermindert um den elektrischen Druck F [Gleichung (1)] gleich einer Konstanten sein. Es resultiert somit

$$\frac{2\alpha}{b}\left(1-\frac{\delta^2}{2}+3\gamma^4x^2+\frac{\delta^2x^2}{b^2}-\frac{7\delta^4x^2}{4b^2}+\frac{9\delta^4x^4}{8b^4}-\frac{9\gamma^4x^4}{2b^2}\right)-$$

$$-\frac{9\Phi^2K}{8\pi}\cdot\frac{x^2}{a^2}\left[1+\left(\frac{4}{5}+\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2\right]=C.$$

Es muß also die Konstante

$$C=\frac{2\alpha}{b}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)$$

sein. Ferner müssen die Glieder mit x^2 und ebenso jene mit x^4 zusammen Null ergeben, weil nur unter dieser Bedingung die Gleichung für jeden beliebigen Wert von x erfüllt ist. Wir erhalten also folgende Gleichungen

$$\frac{9Kx^2\Phi^2}{8a^2\pi}\left(1+\frac{9}{5}\varepsilon^2\right)=\frac{2\alpha}{b}\left(3\gamma^4x^2+\frac{\delta^2x^2}{b^2}-\frac{7\delta^4x^2}{4b^2}\right)$$

und

$$\frac{9K\Phi^2\varepsilon^2x^4}{8\pi a^4}=\frac{2\alpha}{b}\left(\frac{9\gamma^4x^4}{2b^2}-\frac{9\delta^4x^4}{8b^4}\right).$$

Diese Gleichungen verwandeln sich leicht in

$$\frac{9Kb\Phi^2}{16\pi\alpha a^2}=\frac{\delta^2}{b^2}+3\gamma^4-\frac{7\delta^4}{4b^2}-\frac{9\delta^2\varepsilon^2}{5b^2} \tag{3}$$

und

$$\frac{9Kb\Phi^2}{16\pi\alpha a^2}=\frac{9a^2\gamma^4}{2b^2\varepsilon^2}-\frac{9a^2\delta^4}{8b^4\varepsilon^2}, \tag{4}$$

indem wir wieder alle Glieder von höherer Ordnung als ε^4 vernachlässigen. Da die linken Seiten dieser Gleichung einander gleich sind, so müssen es auch die rechten sein und wir erhalten eine Beziehung zwischen δ und γ. Wir können also eine dieser Größen willkürlich wählen. Wir wollen deshalb $\delta=\varepsilon$ setzen und verstehen darunter folgendes. Unser Körper, der

nahezu ein Rotationsellipsoid ist, hat eine Längsachse von der Größe $2a$. Der durch die (yz)-Ebene gebildete Querschnitt hat den Radius b und es sei ε gerade so wie bei einem Ellipsoid definiert durch die Beziehung

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2. \tag{5}$$

Die Gleichungen (3) und (4) ergeben sodann

$$\frac{\varepsilon^2}{b^2}+3\gamma^4-\frac{7\varepsilon^4}{4b^2}-\frac{9\varepsilon^4}{5b^2}=\frac{9a^2\gamma^4}{2b^2\varepsilon^2}-\frac{9a^2\varepsilon^2}{8b^4}.$$

Drücken wir hier jedes vorkommende b nach Gleichung (5) durch a und ε aus und vernachlässigen wir wiederum alle Glieder von höherer Ordnung als ε^4, so ergibt sich schließlich

$$\gamma^4=\frac{17}{36}\cdot\frac{\varepsilon^4}{a^2}.$$

Setzen wir die Werte δ und γ in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir die Gleichung der Erzeugenden jenes Rotationskörpers, dessen Gestalt eine schwerelose leitende Flüssigkeit in einem homogenen elektrischen Feld annimmt, wenn die Feldstärke so groß wird, daß ein Rotationsellipsoid die gestellten Bedingungen nicht mehr erfüllt, aber nur so groß, daß die Glieder von höherer Ordnung als ε^4 vernachlässigt werden können. Die Gleichung der gesuchten Kurve ist

$$y^2=b^2-(1-\varepsilon^2)x^2-\frac{17}{36}\cdot\frac{\varepsilon^4}{a^2}x^2. \tag{6}$$

Bringen wir die Gleichung der Cassini'schen Kurven in die Form, daß wir den halben größten und kleinsten Durchmesser mit a bezüglich b bezeichnen, wiederum $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2$ setzen und Glieder von höherer Ordnung als ε^4 vernächlässigen, so ergibt dies

$$y^2=b^2-(1-\varepsilon^2)x^2+\frac{\varepsilon^4}{2}x^2-\frac{\varepsilon^4}{2a^2}x^4.$$

Diese Gleichung stimmt mit Gleichung (6) nahe überein, so daß wir sagen können: Bringen wir eine schwerelose leitende flüssige Kugel in ein homogenes elektrisches Feld, so wird mit vom Wert Null ansteigender Feldstärke aus der Kugel zuerst ein Rotationsellipsoid, dann ein Rotationskörper, dessen Erzeugende fast identisch mit einer Cassini'schen Kurve ist. Weiterhin läßt sich die Gestalt jedoch geometrisch nicht bestimmen. Sie zieht sich immer mehr in die Länge und wird schließlich instabil, was ein Zerreißen des Körpers zur Folge hat.

Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinneren

(II. Mitteilung)

von

Dr. H. Benndorf.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Graz.

(Mit 9 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1906.)

Bereits in der ersten Mitteilung habe ich als Ziel der vorliegenden Untersuchungen die ungefähre Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Erdbebenwellen in verschiedenen Tiefen des Erdkörpers bezeichnet und habe zu diesem Zwecke versucht, eine möglichst richtige Laufzeitkurve (Hodograph[1]) der ersten Vorläufer eines Bebens zu gewinnen.

Als ein zweites Bestimmungsstück, das zur Ermittlung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dienlich wäre, erschien mir zur Zeit, als ich die erste Mitteilung abschloß, die Emergenzwinkelkurve, d. h. eine Beziehung zwischen dem Emergenzwinkel e eines Strahles und der Epizentraldistanz Δ; erst als der größere Teil der Resultate der vorliegenden Arbeit gewonnen war, gelangte ich durch Auffinden einer Beziehung zwischen Laufzeitkurve und Emergenzwinkel, die ich weiter unten entwickeln werde, zu der Einsicht, daß, theoretisch wenigstens, eine Bestimmung der Emergenzwinkel nichts Neues bringen kann, da sie sich bei beliebiger Verteilung der Geschwindigkeit im Erdinneren stets aus der Laufzeitkurve berechnen lassen.

[1] Ich vermeide absichtlich den Ausdruck »Hodograph«, weil er in der Physik bereits in anderem Sinne verwendet wird.

Von um so größerer praktischer Bedeutung erscheint aber die experimentelle Bestimmung dieser Winkel, weil sie einmal eine erwünschte Kontrolle der Laufzeitkurve geben, eine Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in der äußersten Erdkruste ermöglichen und zugleich ein Mittel an die Hand geben, geologische Abnormalitäten in der Nähe der Erdoberfläche ausfindig zu machen.

Die folgenden Überlegungen möchte ich mit einer Diskussion des einzigen mir bekannten Beobachtungsmateriales über die Emergenzwinkel beginnen.

1. Experimentelle Bestimmung des Emergenzwinkels.

W. Schlüter hat in seiner bereits genannten Arbeit über Schwingungsart und Weg der Erdbebenwellen[1] mit Hilfe seines als Vertikalseismographen adaptierten Klinographen die ersten einwandfreien Bestimmungen des Emergenzwinkels der Vorläufer einer Reihe von Beben ausgeführt.

Es ist in hohem Grade zu bedauern, daß es Schlüter nicht vergönnt war, seine Untersuchungen fortzusetzen; jedenfalls wäre es aber von sehr großem Interesse, wenn an möglichst vielen Stationen, wo brauchbare Vertikalseismographen aufgestellt sind, Bestimmungen von Horizontal- und Vertikalkomponenten des ersten Einsatzes von Beben ausgeführt würden. Seit Wiechert die eingehende Theorie der Seismographen gegeben hat, liegt kein Hindernis vor, sie mit beliebigen Apparaten auszuführen, wenn sie nur so konstruiert sind, daß sie eine genügend genaue Ermittlung der Konstanten zulassen und die Störungen durch Reibung auf die Größe von Korrektionsgliedern herabgemindert sind.

Die folgende Tabelle I enthält zunächst die Schlüter'schen Zahlen, wobei Δ die Entfernung in Megametern $= 10^6\ m$, e_0 den Emergenzwinkel, $\alpha = \cos e_0$, β den Sehnenwinkel, d. i. den Winkel, den die Sehne zwischen Beobachtungsort und Epizentrum mit dem Horizont im Beobachtungsorte bildet, bezeichnet.

---

[1] Beiträge zur Geophysik, Bd. V, p. 401 (1903).

In Fig. 1 sind die Δ als Abszissen und e_0 als Ordinaten aufgetragen; die eingezeichnete Kurve bezieht sich auf ausgeglichene Werte, die weiter unten besprochen werden.

Tabelle I.

Nr.	Datum des Bebens	Δ	e_0	$\alpha = \cos e_0$	β
1	1900, VII. 13.	2·0	29°	0·87	20°
2	VIII. 24.	2·1	39	0·78	29
3	VIII. 28.	2·4	56	0·56	45
4	VIII. 27.	2·8	59	0·52	46
5	VIII. 29.	7·5	64	0·44	30
6	VIII. 29.	8·0	69	0·36	33
7	IX. 1.	8·5	73	0·29	35
8	VIII. 5.	9·0	75	0·26	35
9	VIII. 20.	9·5	78	0·21	35
10	VII. 29.	11·4	78	0·21	27
11	VIII. 27.	14·0	80	0·17	17

Betrachtet man diese Einzelwerte, so kann man sich eines gewissen Zweifels an ihrer Richtigkeit oder, besser gesagt, Allgemeingültigkeit nicht entschlagen.

Was zunächst die Entfernungen anlangt, so sind sie nach einem Verfahren gewonnen worden, das sich der Autor selbst zurechtgelegt hat, aber nicht mitteilt; da indes die Werte von e_0 sehr regelmäßig liegen, ist nicht anzunehmen, daß hier größere Fehler unterlaufen sind. Die experimentell gefundenen Werte von e_0 können, wie aus den sorgfältigen Konstantenbestimmungen der Apparate hervorgeht, nach meiner Ansicht höchstens um Prozente falsch sein.

Es erübrigt also, zu untersuchen, wie weit wohl diese Zahlen durch Göttinger Untergrundverhältnisse oder besondere Bebenbeschaffenheit, beeinflußt von Mittelwerten an der Erdoberfläche, abweichen.

Das ist ja zunächst klar, daß eine von der mittleren abweichende geologische Beschaffenheit der äußersten Erdrinde sehr wohl die Absolutbeträge der Emergenzwinkel fälschen

kann, indem sie entweder alle zu groß oder alle zu klein ausfallen.[1]

Nimmt man als Störungsursache eine horizontale Schicht von größerem oder kleinerem Brechungsvermögen, als sie im Mittel der äußeren Erdkruste zukommt, so müssen die Cosinusse des beobachteten Emergenzwinkels mit einem Faktor multipliziert werden, der kleiner, respektive größer als 1 ist; große Emergenzwinkel nahe 90° werden also wenig, kleine am meisten gestört.

Möglicherweise sind die Göttinger Werte um 20% zu klein; ich unterlasse es aber, so hypothetische Korrekturen anzubringen, so lange die Basis dazu noch so unsicher ist.

Wie dem aber immer sein mag, so könnte eine derartige Annahme das Auffallendste der Emergenzwinkelkurve nicht erklären, nämlich das eigentümlich sekundäre Maximum der Winkel zwischen $\Delta = 3$ und 7, auf das schon Schlüter ausdrücklich hinweist. Die Beantwortung der Frage, ob die Abflachung der Kurve zufälliger Natur, hervorgerufen durch die geringe Anzahl der Beobachtungen, oder ob sie der Ausdruck eigentümlicher Strukturverhältnisse des Erdinneren ist, erheischt eine besondere Untersuchung. Ich glaube im folgenden mit ziemlicher Sicherheit den Nachweis bringen zu können, daß dieser Einsenkung der Emergenzwinkelkurve eine reelle Bedeutung zukommt.

Zu diesem Zweck aber und auch für die weiteren Schlüsse ist es nötig, eine allgemeine Diskussion über den Strahlengang im Erdinneren zu führen.

2. Über gewisse Eigenschaften des Strahlenganges im Erdinneren.

Zunächst wollen wir, wie es ja allgemein geschieht, annehmen, daß für die Fortpflanzung der Erdbebenstöße im Erdinneren dieselben Gesetze gelten wie für die Wellenbewegung in einem Medium mit variablem Brechungsindex, daß also das

[1] Ganz besonders unregelmäßige Schichtung könnte eventuell auch bewirken, daß der Emergenzwinkel verschieden ausfällt, je nach dem Azimut, aus dem das Beben kommt.

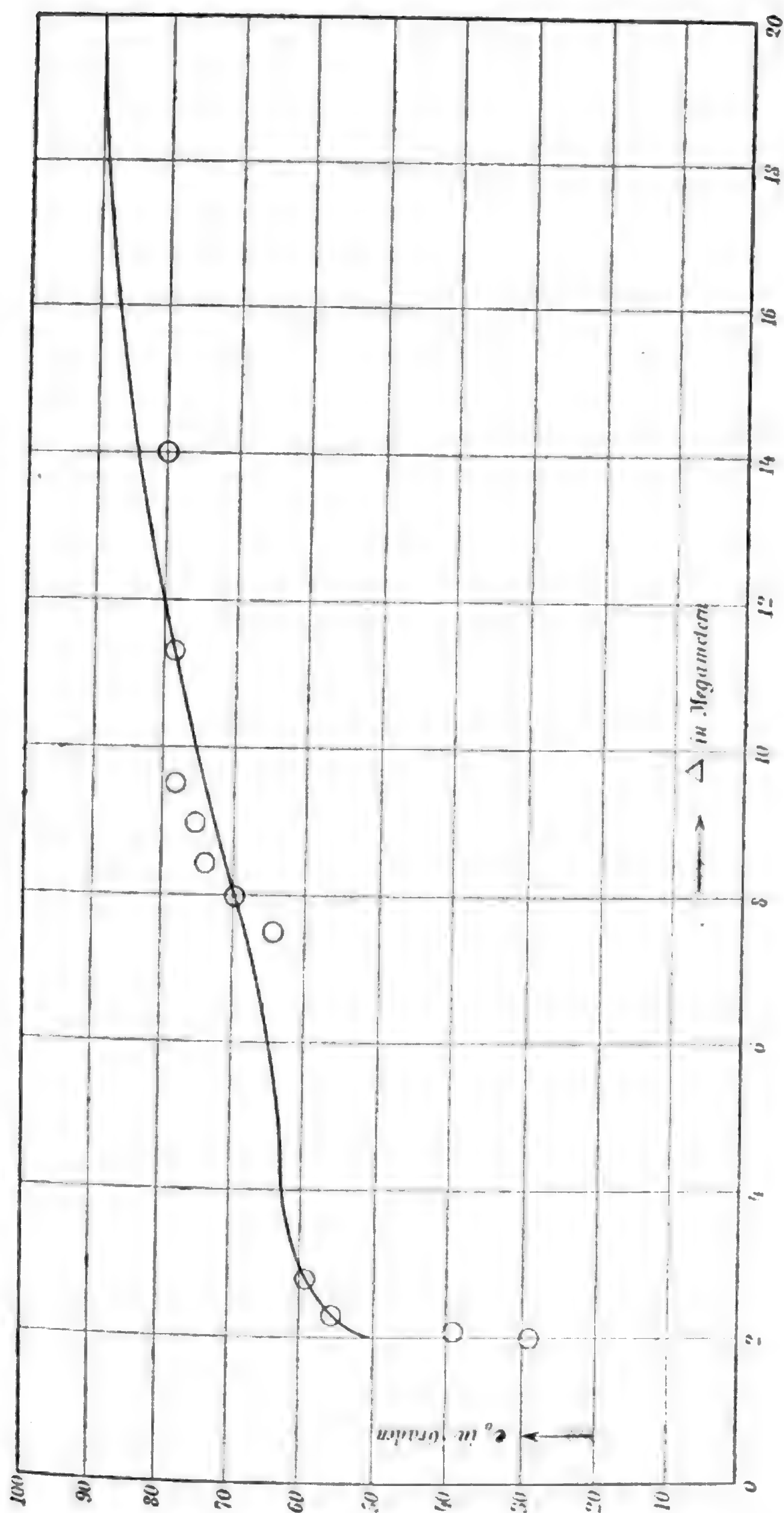

Δ in Megametern
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0

Fig. 1.

Fermat'sche Prinzip gilt, nach dem die Variation der Laufzeit $\delta T = 0$ ist; ferner soll die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Bebenstrahlen in konzentrischen Kugelflächen konstant sein und infolgedessen nur als Funktion der Entfernung r vom Erdmittelpunkt $c = f(r)$ betrachtet werden. Von dieser Funktion können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß das im ganzen in Betracht kommende Intervall von $r = 0$ bis $r = r_0$ immer stetig ist und nirgends Null oder unendlich wird; das letztere folgt aus der physikalischen Beschaffenheit der Materialien, das erstere daraus, daß sich diskontinuierliche Übergänge, falls sie im Erdinneren vorkommen sollten, immer mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit durch sehr rasch verlaufende stetige ersetzen lassen.

Als Ursprung des Polarkoordinatensystems eines Punktes (r, ϑ) wählen wir den Erdmittelpunkt, als Achse, von der aus die Winkel ϑ gezählt werden, die Gerade, die durch den Bebenherd geht.

Bezeichnen wir mit e den spitzen Winkel, den eine beliebige Tangente in einem Punkte der Bahn des Stoßstrahles mit der durch ihn gehenden Kugelfläche einschließt, mit $n = \frac{1}{c}$ den Brechungsexponenten an dieser Stelle, so findet sich[1] die Gleichung der Bahnkurve aus der Beziehung

$$n r \cos e = n_0 r_0 \cos e_0, \tag{1}$$

wobei sich die Größen mit dem Index 0 hier wie weiterhin immer auf die Erdoberfläche beziehen sollen.

Da nun

$$\cos e = \frac{r\,d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}}$$

ist, so ist die Differentialgleichung der Bahnkurve

[1] Vergl. z. B. Straubel, Dioptrik in Medien mit kontinuierlich variablem Brechungsindex; Winkelmann's Handbuch, II. Aufl., Bd. VI. — Rudzki, Beiträge zur Geophysik, III., 1898, p. 495. — v. Kövesligethy, Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XIII, 1897, p. 418, auch Bd. XXIII, 1905, p. 42. — Láska, Mitteilungen der Erdbeben-Kommission, Nr. XXIII, 1904.

$$d\vartheta = \pm \frac{n_0 r_0 \cos e_0 \, dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \cos^2 e_0}}; \tag{2}$$

zur Vereinfachung führen wir ein:

$$\cos e_0 = \alpha, \quad \frac{n}{n_0} = \nu = \frac{c_0}{c} \quad \text{und} \quad \frac{r}{r_0} = \rho,$$

es bedeutet also ν und ρ den Brechungsexponenten und Radiusvektor, wenn der Brechungsexponent an der Erdoberfläche n_0, bezüglich der Erdradius r_0 gleich 1 gesetzt werden. Gleichung 1 und 2 nimmt dann die Form an:

$$\nu \rho . \cos e = \alpha, \tag{3}$$

$$d\vartheta = \pm \frac{\alpha \, d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \tag{4}$$

wobei

$$\nu = F(\rho) = \frac{1}{f(r_0 \rho)}$$

als Funktion von ρ aufzufassen ist.

Setzen wir bis auf weiteres voraus, daß der Bebenherd punktförmig ist und in der Erdoberfläche liegt, so ist bei gegebenem $\nu = F(\rho)$ jedem Wert von α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ als Parameter eine ganz bestimmte Bahnkurve zugeordnet, es können somit alle Größen, die wir betrachten werden, wie Laufzeit, Epizentralentfernung, als Funktionen von α angesehen und untersucht werden.

Bei gegebenem α hängt die Form der Bahn nur ab von dem Produkte $\nu . \rho = \rho . F(\rho) = \varphi(\rho)$, die ich die kritische Funktion nennen will.

Verfolgen wir den Weg eines Strahles, so wird der Winkel e vom Oberflächenwert e_0 an entweder abnehmen oder zunehmen oder abwechselnd beides tun, bis entweder $e = 0$ oder $e = \frac{\pi}{2}$ geworden ist. Ist an irgend einer Stelle, deren Koordinaten ρ_m und $\frac{\theta}{2}$ heißen mögen, $e = 0$ geworden, so ist der weitere Verlauf des Strahles ein Spiegelbid des bisherigen; ist aber irgendwo $e = \frac{\pi}{2}$, so setzt der Strahl seinen Weg

geradlinig bis zum Mittelpunkte fort, um von dort aus symmetrisch zu verlaufen, doch kann dieser Fall nur eintreten, wie aus Gleichung 3 hervorgeht, wenn $\nu\rho$ unendlich wird, kommt also für uns nicht in Betracht, ausgenommen den einzigen Fall, daß $\cos e_0 = 0$ wird; in diesem Grenzfall ist aber die Bahn des Strahles immer ein Durchmesser der Erde.

Der Winkel e wird gleich Null, wenn $\nu\rho = \alpha$ wird.[1] Die größte reelle Wurzel ρ_m der Gleichung

$$\nu\rho - \alpha = \varphi(\rho) - \alpha = 0 \tag{5}$$

im Intervalle $0 \leqq \rho \leqq 1$ gibt also die Tiefe an, bis zu der ein bestimmter (dem entsprechenden α zugeordneter) Bebenstrahl ins Innere der Erde dringt.

Wir wollen nun dazu übergehen, zu untersuchen, welchen Bedingungen die kritische Funktion $\varphi(\rho)$ genügen muß, um Anwendungen auf das Erdinnere zu gestatten.

Zunächst muß φ im ganzen Intervall $0 \leqq \rho \leqq 1$ stetig und an den Grenzen $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(0) = 0$ sein, da wir angenommen haben, daß ν nicht unendlich wird.

Ferner wissen wir aus der Messung der Emergenzwinkel, die sich durchwegs größer[2] als die betreffenden Sehnenwinkel erwiesen haben, daß c von der Oberfläche nach dem Erdinneren im allgemeinen zunehmen, d. h. ν abnehmen muß; infolgedessen wird auch $\varphi(\rho)$ in der Nähe von $\varphi = 1$ abnehmen müssen. Um die allgemeine Diskussion nicht zu weitschweifig werden zu lassen, wollen wir annehmen, daß die Geschwindigkeitsverteilung im Erdinneren eine derartige ist, daß die sphärische

---

[1] Den Fall, daß e nie Null oder $\frac{\pi}{2}$ wird, brauchen wir nicht zu betrachten, da in diesem Falle spiralförmig unendlich lange Bahnen resultieren, die für unsere Anwendung nicht in Frage kommen.

[2] Aus dieser experimentell zweifellos sichergestellten Tatsache folgt auch, daß die Grundannahme, die v. Kövesligethy in seiner »Neuen geometrischen Theorie seismischer Erscheinungen« (Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. XIII, 1897, p. 418) und in »Die Berechnung seismischer Elemente« (ibid. XXIII., 1905, p. 42) macht, daß die Geschwindigkeit der Bebenwellen nach dem Erdinneren zu abnimmt, nicht mehr gerechtfertigt ist, wodurch seine interessanten Ausführungen nur mehr theoretische Bedeutung haben.

Distanz zwischen dem Ausgangspunkt eines Strahles (der Bebenherd wird hier immer als an der Oberfläche befindlich angenommen) und dem Auftreffpunkte sowie die Laufzeit T dieses Strahles mit wachsendem Winkel e_0 immer größer oder

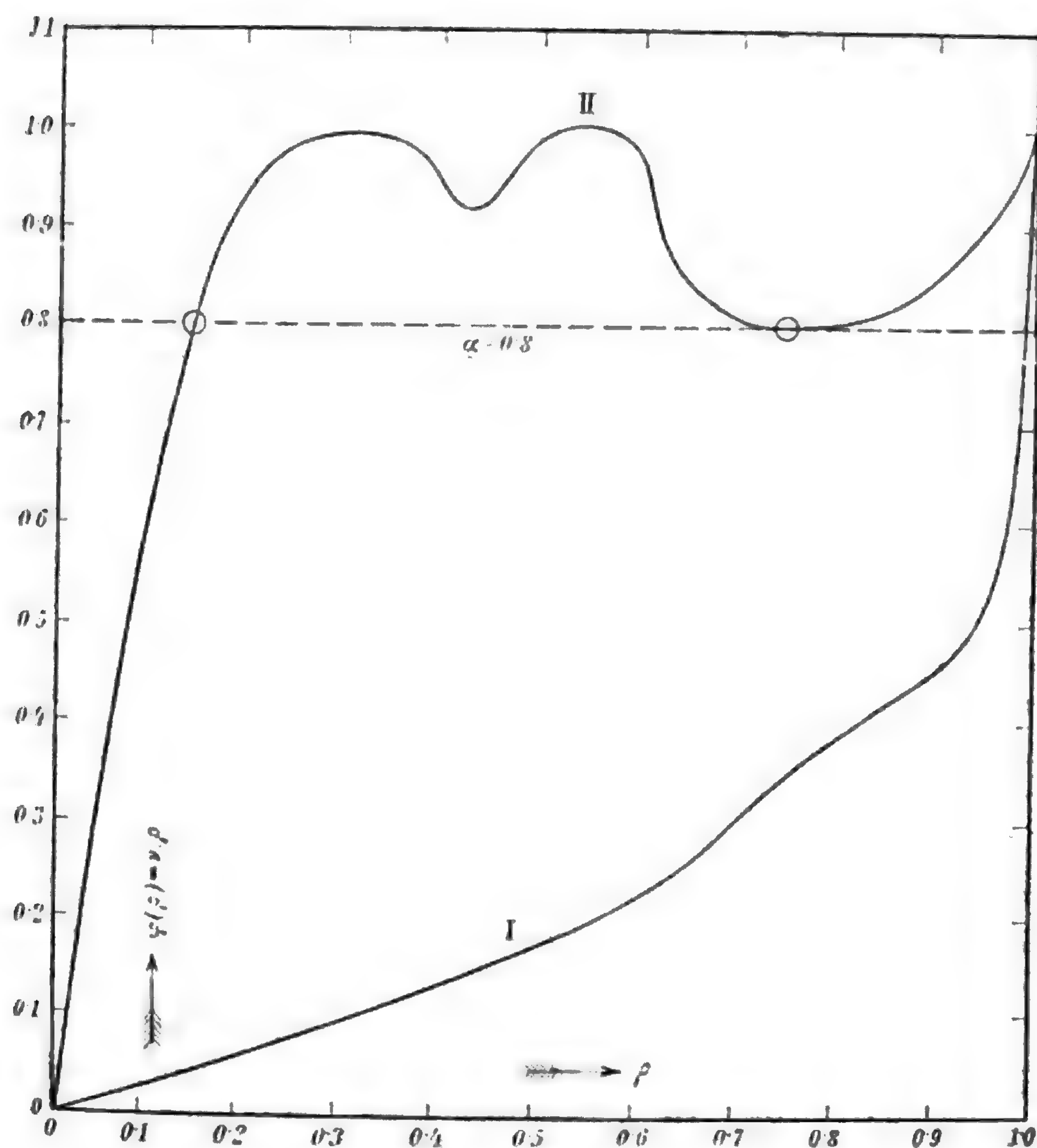


Fig. 2.

wenigstens nicht kleiner wird. Soweit die Beobachtungen reichen, ist diese Voraussetzung in der Wirklichkeit erfüllt.

Bei der weiteren Untersuchung wollen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Gleichung 5 für beliebige Werte von $0 \leqq \alpha \leqq 1$ nur eine reelle Wurzel im Intervalle $0 \leqq \rho \leqq 1$ besitzt oder mehrere. Fall 1 ist durch Kurve I, Fall 2 durch Kurve II in Fig. 2 veranschaulicht.

Betrachten wir zunächst den Fall 2. Die Schnittpunkte einer mit der Abszissenachse parallelen Linie in der Höhe α mit Kurve II stellen die Wurzeln der Gleichung $\varphi(\rho)-\alpha=0$ dar. Fassen wir die jeweilig größte dieser Wurzeln, ρ_m, als Funktion von α auf, so sieht man, daß in dem durch Kurve II dargestellten Fall ρ_m mit α stetig abnimmt, wenn wir von $\alpha=1$ abwärts gehen. Beim Werte $\alpha_1=0\cdot8$ findet jedoch ein plötzlicher Sprung der Werte von $\rho_m=0\cdot75$ auf $\rho_m=0\cdot15$ statt; ρ_m ist also keine stetige Funktion von α mehr. Physikalisch gesprochen würde das heißen: Verfolgt man den Gang der einzelnen Strahlen, indem man bei niedrigen Emergenzwinkeln beginnt und zu größeren fortschreitet, so dringt jeder folgende Strahl immer tiefer ins Erdinnere ein, bei einem bestimmten Emergenzwinkel aber tritt ein plötzlicher Sprung auf, so daß einer unendlich kleinen Änderung von α oder e_0 eine endliche Änderung von ρ_m entspricht; das würde unter Beibehaltung unserer einschränkenden Voraussetzungen über die Beschaffenheit von $\varphi(\rho)$ bedeuten, daß die sphärische Entfernung Δ_{α_1} des Strahlenendpunktes vom Bebenherd, die zum Wert α_1 gehört, um ein endliches Stück kleiner wäre als die Entfernung $\Delta_{\alpha_1-d\alpha_1}$, die zum Wert $\alpha_1-d\alpha_1$ gehört, wenn $d\alpha_1$ beliebig klein wird.

Es würde also in diesem Fall ein ganzer Gürtel der Erdoberfläche zwischen den Kreisen, die zu Δ_{α_1} und $\Delta_{\alpha_1-d\alpha_1}$ gehören, überhaupt nicht von einem Bebenvorläufer getroffen werden.

Analoges würde natürlich gelten, wenn mehrere solcher Diskontinuitätsstellen beständen; es würde auch weiter daraus folgen, daß die Laufzeitkurve $T=f(\Delta)$ aus zwei oder mehreren getrennten Stücken bestehen müßte.

Ob derartiges wirklich bei der Erde vorkommt, ist vorläufig nicht mit Sicherheit zu entscheiden. Gewisse auffallende Erdbebendiagramme ohne Vorläufer könnten wenigstens in einer lokalen derartigen Beschaffenheit von $\varphi(\rho)$ ihre Ursache haben. Jedesfalls können es nur relativ schmale Gürtel der Erdoberfläche sein, die vor den Vorläufern geschützt sind.

So lange nicht das recht unwahrscheinliche Gegenteil sicher bewiesen ist, wollen wir für das Folgende annehmen,

daß derartige Diskontinuitäten nicht auftreten, d. h. daß die kritische Funktion immer nur eine reelle Wurzel für jeden Wert von α hat.

Nebenbei bemerkt, werden sich Folgerungen auch auf den Fall der eventuellen Diskontinuität anwenden lassen.

Wir gehen nun zur Behandlung des Falles 1 über, bei dem $\varphi(\rho)$ nur eine Wurzel hat.

Das kann ersichtlich nur dann eintreten, wenn $\varphi(\rho)$ mit wachsendem ρ immer wächst,

$$\frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} > 0;$$

da nun $\varphi(\rho) = \nu\rho$, so ergibt sich für ν die Bedingung

$$-\frac{d\nu}{d\rho} < \frac{\nu}{\rho}, \tag{6}$$

d. h. die relative Abnahme von ν mit wachsendem ρ muß immer kleiner sein als $\frac{\nu}{\rho}$.

Sollte es also irgendwo im Erdinneren Stellen geben, in denen c mit abnehmendem ρ oder ν mit wachsendem ρ abnimmt, so ist diese Abnahme durch Gleichung 6 begrenzt.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Größen über, die für die Beben von Interesse sind.

Wir wollen unter Stoßdistanz, respektive Stoßwinkel die sphärische Distanz (BB', siehe Fig. 3) der beiden Enden einer Stoßkurve, respektive den Winkel (BOB') zwischen den zu ihnen gezogenen Erdradien verstehen und sie mit Δ und Θ oder Δ_{α_1}, respektive Θ_{α_1} bezeichnen, wenn insbesondere hervorgehoben werden soll, daß sie einem bestimmten Wert α_1 zugeordnet sind.

Die zum Durchlaufen eines Strahles BB' nötige Zeit sei T (T_{α_1}), die Länge der Kurve L (L_{α_1}), ihre Gesamtkrümmung Φ (Φ_{α_1}). In Fig. 3 ist der Bebenherd mit H, das Epizentrum mit E bezeichnet.

Die sphärische Distanz zwischen Beobachtungsort B und dem Epizentrum sei $\Delta^{(w)}$, der Winkel BOE $\Theta^{(w)}$, die Zeit, die der Stoßstrahl vom Herd zum Beobachtungsort braucht, $T^{(w)}$, die entsprechende Strahllänge $L^{(w)}$. Die Distanz EB' heiße Δ', der Winkel EOB' Θ' und analog die Zeit, die der Stoß von H bis B' braucht, T', die Länge HB' L'.

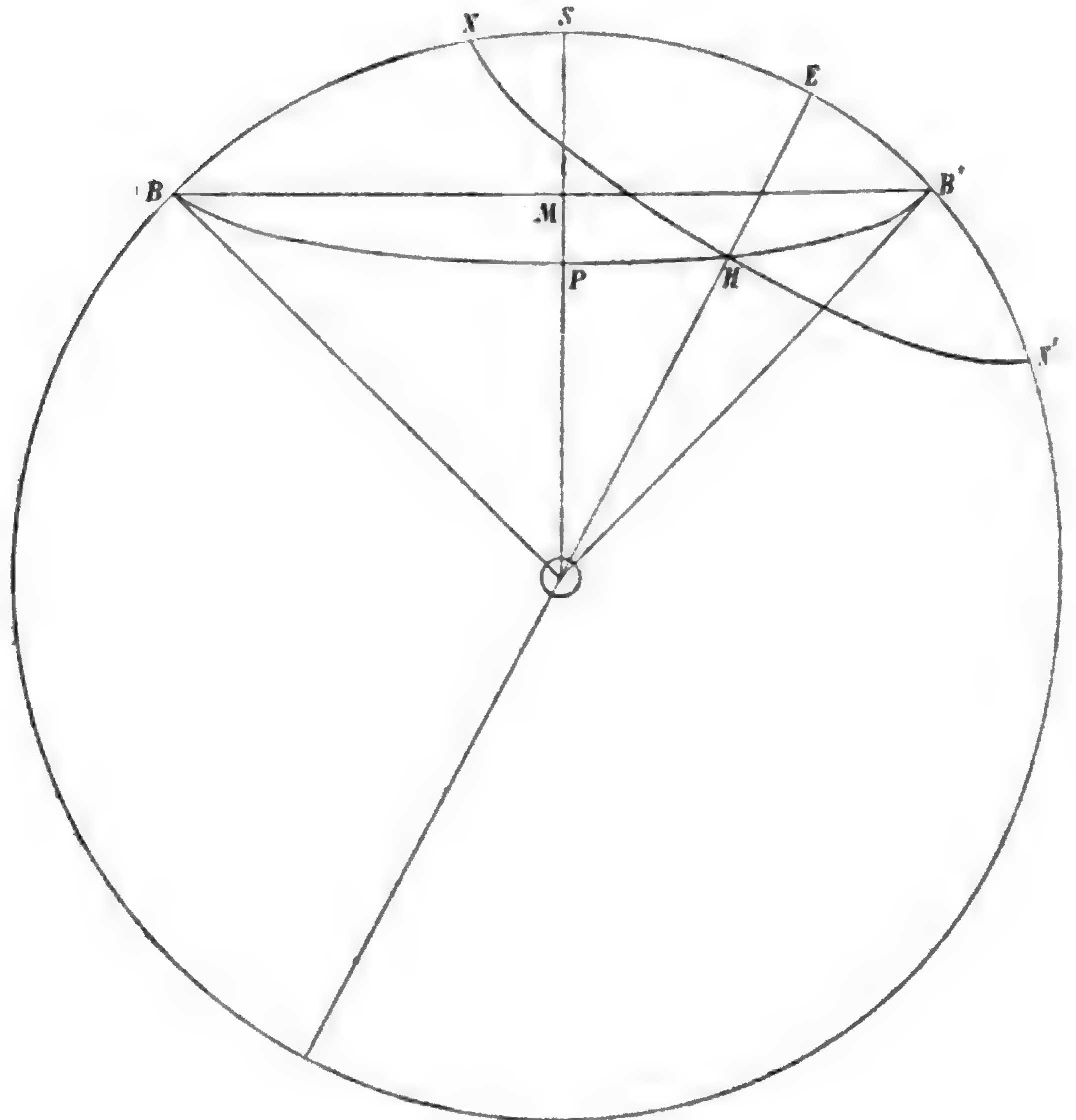


Fig. 3.

Es bestehen daher die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \Delta^{(w)} + \Delta', \\ \Theta &= \Theta^{(w)} + \Theta', \\ T &= T^{(w)} + T', \\ L &= L^{(w)} + L', \\ \Phi &= \Phi^{(w)} + \Phi'. \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Da der Bebenherd immer im Vergleiche mit dem Erdradius nahe der Erdoberfläche liegt, sind die gestrichelten Werte klein gegen die mit dem Index w, wenn der Beobachtungsort B weit genug vom Epizentrum entfernt ist. Für solche Distanzen ist dann genügend genau

$$\Delta = \Delta^{(w)}, \quad \Theta = \Theta^{(w)}, \quad T = T^{(w)}, \quad L = L^{(w)}. \tag{8}$$

Alle diese Größen lassen sich nun durch bestimmte Integrale darstellen.

Man erhält unter Benutzung der Gleichung 3 und 4:

$$\Theta = \int d\vartheta = 2\alpha \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha^2}}, \tag{9}$$

$$\Theta' = \alpha \int_{\rho_h}^{1} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha^2}}, \tag{10}$$

$$\Delta = r_0\Theta = 2r_0\alpha \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha^2}}, \tag{11}$$

$$\Delta' = r_0\Theta' = r_0\alpha \int_{\rho_h}^{1} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha^2}}, \tag{12}$$

$$L = \int ds = \int \frac{r\,d\vartheta}{\cos e} = 2r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu\rho\,d\rho}{\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha^2}}, \tag{13}$$

$$L' = r_0 \int_{\rho_h}^{1} \frac{\nu\rho\,d\rho}{\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha^2}}, \tag{14}$$

$$T = \int n\,ds = 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2\rho\,d\rho}{\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha^2}}, \tag{15}$$

$$T' = n_0 r_0 \int_{\rho_h}^{1} \frac{\nu^2\rho\,d\rho}{\sqrt{\nu^2\rho^2-\alpha^2}}, \tag{16}$$

$$\Phi = \int \frac{ds}{R} = 2\alpha \int_{\rho_m}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} . d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} \tag{17}$$

und schließlich

$$\Phi' = \alpha \int_{\rho_h}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} . d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \tag{18}$$

da der Krümmungsradius R durch die Gleichung[1]

$$\frac{1}{R} = \frac{n_0 r_0 \alpha}{r} \frac{dc}{dr} = \frac{\alpha}{r_0} \cdot \frac{1}{\rho \nu^2} \cdot \frac{d\nu}{d\rho}$$

gegeben ist.

Die unteren Grenzen der Integrale sind ρ_m und ρ_h. ρ_h ist die Entfernung des Bebenherdes vom Erdmittelpunkt ($r_0 = 1$ gesetzt), also konstant, während ρ_m die Wurzel der Gleichung 5,

$$\varphi(\rho) - \alpha = \nu\rho - \alpha = 0$$

ist und daher eine unbekannte Funktion von α ist. Die Integrale ergeben die Größen Θ, Δ, L, T, Φ als Funktion von α, respektive von ρ_h.

Wie man sieht, werden die Funktionen unter dem Integralzeichen unendlich für die untere Grenze, ein Umstand, der die Diskussion der Integrale außerordentlich erschwert, auch wenn man voraussetzt oder der Erfahrung entnimmt, daß die kritische Funktion immer so beschaffen ist, daß die Integrale selbst endlich bleiben.

Der Gang der Untersuchung, den ich ursprünglich befolgen wollte, war der folgende:

Gesetzt, wir kennten den zu jeder Stoßdistanz gehörigen Emergenzwinkel (wir beschränken uns wieder auf so große Distanzen, daß der Bebenherd mit dem Epizentrum zusammenfallend gedacht werden kann), Δ also als Funktion von α, so

---

[1] Siehe z. B. Rudzki, l. c.

könnte man, da die Laufzeitkurve T als Funktion von Δ gibt, auch T als Funktion von α bestimmen, so daß man die Gleichungen erhielte:

$$\psi_1(\alpha) = 2 r_0 \alpha \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} = \Delta \qquad 19)$$

und

$$\psi_2(\alpha) = 2 n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2 \rho\, d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} = T, \qquad 20)$$

von denen die linke Seite als empirisch gegeben zu betrachten wäre.

Ist durch diese Gleichungen die kritische Funktion $\varphi(\rho) = \nu . \rho$ und damit natürlich auch ν eindeutig bestimmt? Und wenn das der Fall ist, welche Schlüsse lassen sich aus dem Verhalten der Funktionen $\psi_1(\alpha)$ und $\psi_2(\alpha)$ auf die Beschaffenheit von $\varphi(\rho)$ ziehen?

Eine funktionentheoretisch strenge Behandlung dieser Fragen scheint besondere Schwierigkeiten zu bieten,[1] wozu vielleicht wesentlich mit beiträgt, daß es sich um uneigentliche Integrale handelt, die sich nicht nach α differenzieren lassen, solange über den Verlauf der kritischen Funktion in der Nähe der unteren Grenze nichts bekannt ist.

Ich habe daher bald von Versuchen, auf rein analytischem Weg eine Lösung zu finden, abstehen und einen mehr empirischen Weg einschlagen müssen, der im 5. Abschnitt auseinandergesetzt wird.

Dagegen ist es mir beim Studium der ersten Frage gelungen, nachzuweisen, daß die Gleichungen 19 und 20 nicht voneinander unabhängig sind, weil zwischen ihnen die Beziehung bestehen muß:

$$\frac{d\psi_2(\alpha)}{d\alpha} = n_0 \alpha \frac{d\psi_1(\alpha)}{d\alpha}, \qquad 21)$$

so daß, wenn $\Delta = \psi_1(\alpha)$ bekannt ist, sich die Zeit T berechnen läßt (n_0 als bekannt vorausgesetzt), die ein Bebenstrahl zum Durchlaufen seines Weges braucht.

---

[1] Herrn Prof. v. Dantscher bin ich für mannigfache Belehrung zu besonderem Danke verpflichtet.

Daraus scheint mir zu folgen (einen exakten Beweis vermag ich allerdings nicht zu geben), daß $\varphi(\rho)$ und damit ν als Funktion von ρ im allgemeinen durch $\psi_1(\alpha)$ oder $\psi_2(\alpha)$ wenigstens im reellen Ast eindeutig bestimmt ist.

Der Ableitung und Besprechung der Beziehung 21 ist der nächste Abschnitt gewidmet.

3. Über den Zusammenhang zwischen der scheinbaren Oberflächengeschwindigkeit und dem Emergenzwinkel.

Um die Beziehung Gleichung 21 nachzuweisen, bilden wir zunächst den Ausdruck $T - n_0 \alpha \Delta$ aus der Gleichung 15 und 11 und erhalten

$$T - n_0 \alpha \Delta = 2 n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2 \rho \, d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} - 2 n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\alpha^2 d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} =$$

$$= 2 n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho} \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}, \qquad 22)$$

ein Integral, das den Vorzug besitzt, daß die zu integrierende Funktion im Integrationsintervall nicht mehr unendlich wird; wir können daher nach α differenzieren und erhalten

$$\frac{d}{d\alpha}(T - n_0 \alpha \Delta) = -2 n_0 r_0 \alpha \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} +$$

$$+ \left[\frac{2 n_0 r_0}{\rho} \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2} \right]_{\rho = \rho_m} \cdot \frac{d\rho_m}{d\alpha}; \qquad 23)$$

der zweite Term rechts verschwindet für $\rho = \rho_m$, während der andere nichts anderes ist als $-n_0 \Delta$.

Führt man auch links die Differentiation aus, so ergibt sich

$$\frac{dT}{d\alpha} = n_0 \alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} \qquad 24)$$

die Beziehung von Gleichung 21.

Es läßt sich in analoger Weise zeigen, daß dieselbe Beziehung zwischen $T^{(w)}$ und $\Delta^{(w)}$ besteht, so daß man ganz

allgemein für eine beliebige Lage des Bebenherdes sagen kann, zwischen Laufzeit und Epizentraldistanz besteht die Gleichung

$$\frac{dT^{(w)}}{d\alpha} = n_0 \alpha \frac{d\Delta^{(w)}}{d\alpha}. \qquad 25)$$

Gleichung 25 läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\frac{dT^{(w)}}{d\Delta^{(w)}} = n_0 \alpha; \qquad 26)$$

nun ist aber

$$\frac{d\Delta^{(w)}}{dT^{(w)}} = v^{(s)}$$

die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit der Bebenwellen, somit besteht eine für jedes Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gültige Beziehung

$$\frac{c_0}{v^{(s)}} = \alpha = \cos e_0. \qquad 27)$$

In Worten ausgedrückt: Das Verhältnis der wirklichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_0 longitudinaler Wellen an der Erdoberfläche zur scheinbaren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v^{(s)} = \frac{d\Delta}{dT}$ ist gleich dem Cosinus des Emergenzwinkels in dem betreffenden Punkte.[1]

Diese Beziehung scheint mir nun sehr interessant; sie zeigt, daß die Kenntnis der Emergenzwinkel theoretisch nichts Neues kennen lehrt, da, wenn die Laufzeitkurve bekannt ist, für jedes Δ der Cosinus des entsprechenden Emergenzwinkels als das c_0-fache der Tangente des Neigungswinkels der T-Kurve gegen die Abszissenachse sich berechnen läßt.

Umgekehrt erscheint sie aber praktisch von großer Bedeutung; einmal ermöglicht die experimentelle Bestimmung der

[1] Nachträglich finde ich, daß bereits v. Kövesligethy, l. c., auf diese Beziehung gestoßen ist, allerdings nur unter Zugrundelegung des von ihm speziell angenommenen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes, während oben die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes nachgewiesen ist.

Emergenzwinkel eine unabhängige und noch sehr wünschenswerte Kontrolle der Laufzeitkurve; zweitens gestattet sie eine direkte Bestimmung von n_0, respektive c_0, wenn gleichzeitig die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit gemessen wird. Man ist daher nicht nur in der Lage, einen Mittelwert von c_0 für die Erdoberfläche zu gewinnen, sondern kann eventuell auch größere geologische Abnormalitäten in der Nähe eines Beobachtungsortes erschließen.

Ist c_0 einmal genügend genau für einen Ort bekannt, so gibt ferner Gleichung 27 oftmals ein Mittel an die Hand, wenn die Zeit des Eintreffens des ersten Stoßes in einer Nachbarstation bekannt ist, die Richtung, in der das Epizentrum liegt, genauer zu bestimmen, als dies aus den zwei Horizontalkomponenten des Stoßes geschehen kann.

Schließlich aber, und das scheint mir nicht unwichtig zu sein, gilt Gleichung 27 auch für den Fall, daß Scherungswellen (Torsionswellen) das Erdinnere durchziehen. Sollte es sich als richtig herausstellen, daß die zweiten Vorläufer solche Scherungswellen sind, dann könnte man auch für diese Wellen nach der weiter unten zu besprechenden Methode die Geschwindigkeit in verschiedenen Tiefen der Erde berechnen, aus den Geschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen unter Annahme eines Dichtigkeitsgesetzes die zwei Elastizitätskonstanten für die verschiedenen Erdschichten bestimmen und so zur Lösung eines wichtigen geophysikalischen Problems gelangen.

4. Experimentelle Prüfung der Beziehung zwischen Emergenzwinkel und Laufzeitkurve.

Um die Anwendbarkeit der Theorie zu prüfen und um zu untersuchen, wie weit die von Schlüter bestimmten Emergenzwinkel den zu erwartenden mittleren entsprechen und daher für weitergehende Schlüsse zu verwenden sind, und um schließlich eine eventuelle Korrektur der von mir in der ersten Abhandlung aufgestellten Laufzeitkurve zu gewinnen, habe ich folgenden Weg eingeschlagen.

Es wurden zunächst die von Schlüter gefundenen $\cos e_0$ zu den entsprechenden Epizentralentfernungen Δ als Abszissen

aufgetragen, diese Werte sind in Fig. 4 durch kleine Kreise gekennzeichnet; dann wurde die eingezeichnete Kurve hindurchgelegt. Der Zug dieser Kurve ist natürlich mit einer gewissen Willkür behaftet, die durch die geringe Anzahl der Beobachtungen bedingt ist. Mir kam es aber zunächst nur darauf an, zu untersuchen, ob die auffallende Einbiegung der Kurve eine reelle Grundlage hat.

Hierauf wurden durch mechanische Quadratur die Werte

$$1000 \int_2^\Delta \cos e_0 \, d\Delta$$

gebildet (der Faktor 1000 ist durch die Entfernungsmessung in Megametern bedingt).

Da, wie wir gesehen haben, allgemein die Gleichung besteht:

$$\frac{dT}{d\Delta} = n_0 \cos e_0,$$

ergibt sich:

$$T = n_0 \int_2^\Delta \cos e_0 \, d\Delta + C. \qquad 28)$$

Es handelt sich also nur um die Annahme eines Wertes für $n_0 = \frac{1}{c_0}$, den reziproken Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in der äußersten Erdrinde; c_0 muß jedenfalls größer sein als 3·3 *km*/Sek., da dieser Wert den Oberflächenwellen entspricht, und kleiner als 7·5 *km*/Sek.

Den Wert von zirka 7·5 *km*/Sek. findet Imamura[1] bei Untersuchung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\left(\frac{\Delta}{T}\right)$ der ersten Vorläufer bei Nahebeben für Epizentraldistanzen bis zirka einen Megameter; da wir berechtigt sind, anzunehmen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe der Oberfläche gegen das Erdinnere zunimmt, ist der Wert von 7·5 *km*/Sek. als ein Mittelwert zwischen c_0 und c_h anzusehen (c_h = Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Herdtiefe).

[1] Publ. Earthquake Inv. Com. No 18, 1904, p. 102.

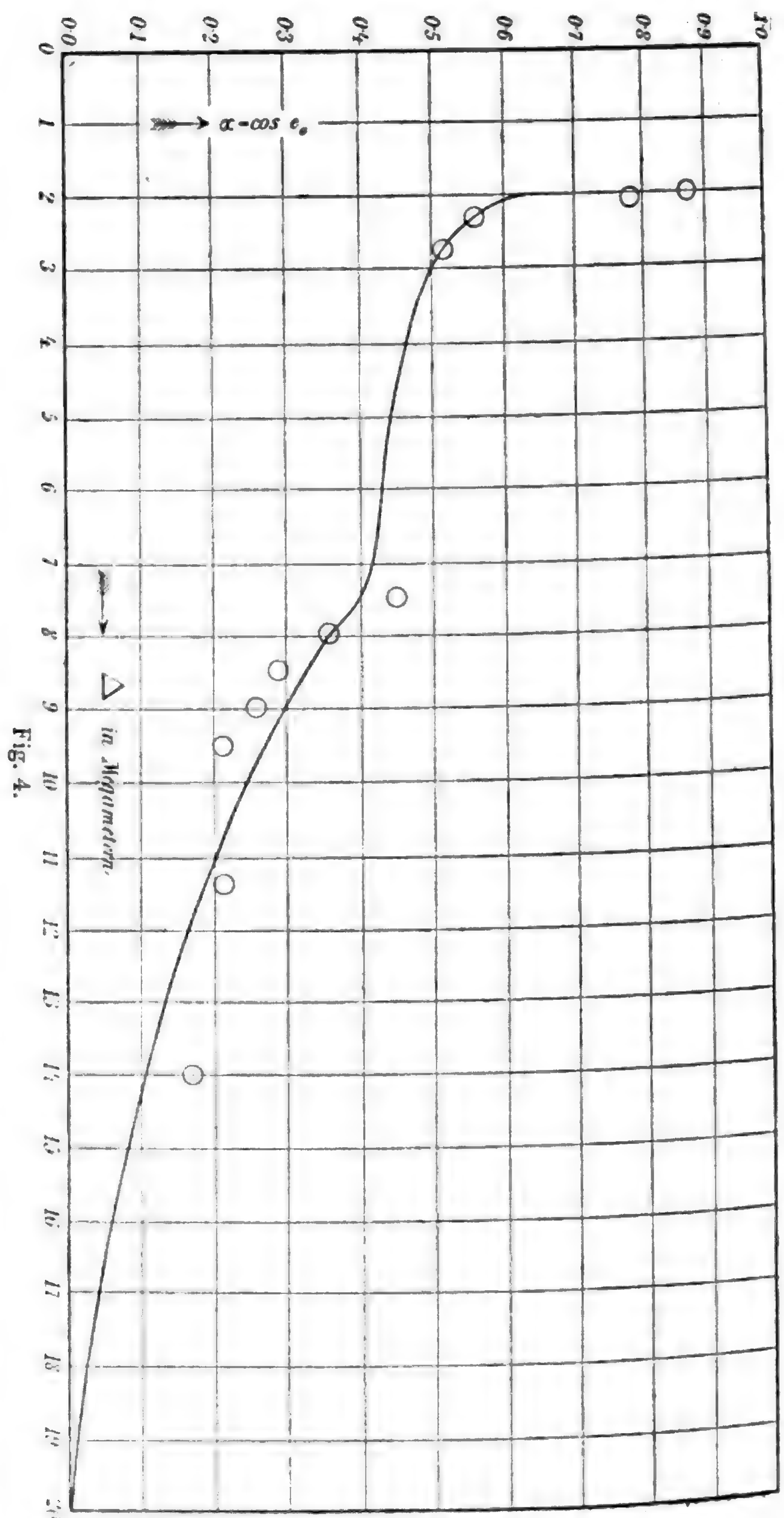

0·0
0·1
0·2
0·3
0·4
0·5
0·6
0·7
0·8
0·9
1·0
→ α = cos e₀
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
→ Δ in Megametern

Fig. 4.

Ich habe mich nach einigen Versuchen für die Werte

$$c_0 = 5 \cdot 5\ km/\text{Sek.},$$
$$n_0 = \frac{1}{5 \cdot 5} = 0 \cdot 18\ \text{Sek.}/km$$

entschieden und behalte ihn im Laufe dieser Untersuchung bei. Ich will damit natürlich nicht behaupten, daß dies schon der richtige Wert sei, erst ein viel ausgedehnteres Beobachtungsmaterial über Emergenzwinkel kann hier die Entscheidung bringen. Für das Wesentliche meiner Ausführungen ist es übrigens irrelevant, ob dieser Wert genau richtig ist oder nicht.

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C muß ein Wert für T als bekannt angenommen werden; ich habe dafür den Wert $T = 732$ Sek. bei einer Distanz $\Delta = 9 \cdot 0$ Megameter angenommen, weil dies der sicherste Punkt der Laufzeitkurve ist. Auf Grund dieser Zahl ergibt sich für $C = 174$ Sek.

Wir erhalten somit aus der Emergenzwinkelkurve eine neue Laufzeitkurve; die entsprechenden Zahlen sind in nachstehender Tabelle II zusammengestellt.

Um nun davon ein Bild zu geben, wie diese Kurve mit den Beobachtungen stimmt, habe ich in Fig. 1 meiner ersten Abhandlung die neue T-Kurve eingetragen; in Fig. 5 sind die Beobachtungswerte sowie die mit T_1 bezeichnete Kurve eine Kopie der alten, die mit T bezeichnete untere Kurve die neu berechnete.

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung im allgemeinen eine überraschend gute, woraus man wohl schließen darf, daß die Voraussetzungen der Theorie erfüllt und die Emergenzwinkelbestimmungen Schlüter's den Mittelwerten nahekommen.

Im speziellen ergeben sich für große Werte von Δ kleinere Zeiten, als ich sie ursprünglich angenommen habe; wieweit das richtig ist, kann erst die Erfahrung lehren. Jedesfalls ist aber die neue T-Kurve für große Werte von Δ besser begründet wie die alte, die mangels an Beobachtungen nach Gutdünken gezogen werden mußte, während die neue sich als Integralkurve der Emergenzwinkellinie ergibt.

Tabelle II.

	Δ														
	2·0	3·0	4·0	5·0	6·0	7·0	8·0	9·0	10·0	11·0	12·0	14·0	16·0	18·0	20·0
$\cos e_0$	0·64	0·51	0·47	0·44	0·43	0·42	0·36	0·30	0·25	0·21	0·17	0·11	0·06	0·025	0·00
e_0	50°	60°	62°	63°	65°	67°	69°	72°	74·5°	77°	80°	84°	87°	89°	90°
$1000 \int_2^\Delta \cos e_0 \, d\Delta$		554	1040	1490	1930	2350	2750	3070	3340	3570	3760	4030	4200	4286	4311
$T = 174 + 1000 \times 5 \cdot 5 \int_2^\Delta \cos e_0 \, d\Delta$ in Sekunden	174	275	363	445	525	601	674	732	781	823	857	907	939	953	960
T in Minuten	2·9	4·58	6·05	7·42	8·75	10·0	11·2	12·2	13·0	13·7	14·3	15·1	15·6	15·9	16·0

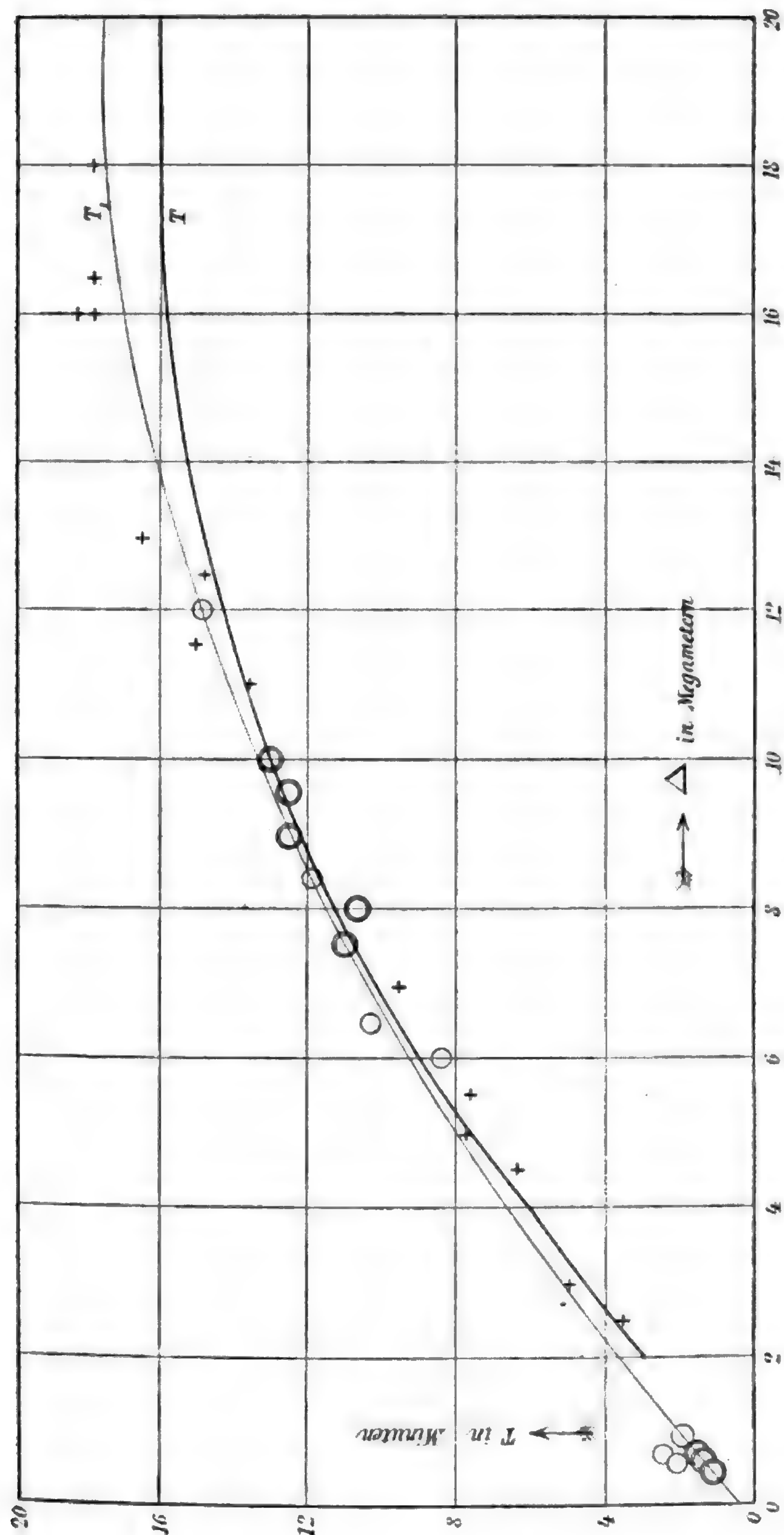

T in Minuten
Δ in Megametern
T
T₁
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
4
8
12
16
20

Fig. 5.

Wenn nun auch die Emergenzwinkel für Distanzen, die größer als 12 Megameter sind, nicht bestimmt sind, so weiß man doch aus der Theorie, daß sie mit wachsender Distanz dem Grenzwerte von 90° zustreben müssen, wodurch man über den ungefähren Verlauf der cos e-Kurve orientiert ist.

Was mir aber bei der neuen T-Kurve gegenüber der alten besonders bemerkenswert scheint, ist, daß sie sich im Intervalle von $\Delta = 2$ bis 8 Megameter viel besser den Beobachtungen anschließt.

In meiner ersten Abhandlung schrieb ich darüber: »Bedenklicher könnte erscheinen, daß zwischen $\Delta = 3$ und $\Delta = 6$ alle Punkte unterhalb der berechneten Kurve liegen, obgleich diesen Daten kein großes Gewicht zukommt; und es erscheint mir in der Tat möglich, daß ein reichlicheres Beobachtungsmaterial im angegebenen Intervall eine Einsenkung der Kurve erfordern wird...«; damals war mir die Beziehung zwischen Laufzeitkurve und Emergenzwinkel unbekannt.

Die neu berechnete T-Kurve zeigt nun in der Tat diese Einsenkung, und zwar ist sie hervorgerufen durch das sekundäre Maximum im Emergenzwinkelgraph. Ich glaube daher, ohne zu weit zu gehen, sagen zu können, wie immer es sich auch mit dem Absolutbetrage der Emergenzwinkel verhalten mag, jedenfalls ist im Intervalle zwischen $\Delta = 3$ und $\Delta = 7$ $\frac{d \cos e_0}{d\Delta}$ relativ klein und infolgedessen

$$\frac{d^2T}{d\Delta^2} = n_0 \frac{d \cos e_0}{d\Delta}$$

auch klein, woraus folgt, daß die T-Kurve in diesem Intervalle nahe geradlinig verläuft.

Aus dieser Tatsache werden sich dann weiterhin wichtige Schlüsse über den Verlauf der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinneren ergeben.

Über den Verlauf der T-Kurve im Intervalle $\Delta = 0$ bis $\Delta = 2$ bestimmte Annahmen zu machen, halte ich noch für verfrüht. Bei diesen Distanzen spielt die bei verschiedenen Beben variable Herdtiefe schon eine beträchtliche Rolle, so daß es sich als notwendig erweisen wird, das Beobachtungsmaterial

nach Größenklassen von Herdtiefen zu sondern, wozu jetzt noch zu wenig Daten vorliegen.

Den folgenden Untersuchungen habe ich die neue T-Kurve, respektive deren Werte in Tabelle II und die entsprechenden Werte von $\cos e_0$ zu Grunde gelegt.

5. Methode zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinneren.

Als bekannt setzen wir voraus den Wert von $n_0 = \frac{1}{c_0}$ und eine genügend genaue Laufzeitkurve der ersten Vorläufer; in Ermangelung besserer Werte wollen wir

$$n_0 = \frac{1}{5 \cdot 5} = 0 \cdot 18 \text{ Sek.}/km$$

und die Laufzeitkurve auf Fig. 5, respektive die Werte von T der Tabelle II unseren Rechnungen zu Grunde legen.

Wir beginnen zunächst mit so großen Distanzen, daß die Tiefe des Bebenherdes zu vernachlässigen, also genügend genau $T^{(u)} = T$ und $\Delta^{(u)} = \Delta$ zu setzen ist. Greifen wir nun ein beliebiges $\Delta = \Delta_{\alpha_1}$ heraus, suchen dazu das betreffende $T = T_{\alpha_1}$, so finden wir den dazugehörigen Parameter $\alpha_1 = \cos e_0$ aus der Laufzeitkurve durch die Gleichung

$$\alpha_1 = \frac{1}{n_0} \left(\frac{dT}{d\Delta}\right)_{\Delta = \Delta\alpha_1}.$$

Wir können uns also zwei Kurven zeichnen, wo α als Abszisse und Δ, respektive T als Ordinaten aufgetragen sind [die Funktionen $\psi_1(\alpha)$ und $\psi_2(\alpha)$ des zweiten Abschnittes].

Fig. 6 gibt ein Bild des Verlaufes dieser beiden Kurven und Tabelle III enthält die entsprechenden Werte.

Betrachten wir nun den Stoßstrahl, der zum Parameter α_1 gehört, so wird er bis zu einer gewissen maximalen Tiefe ρ_m in die Erde eindringen; kennen wir ρ_m, so findet sich der Wert des Brechungsexponenten ν_m aus der Gleichung $\nu_m \rho_m = \alpha_1$. Kennten wir nun z. B. ρ_m für jedes α, so ließe sich dann das ν_m berechnen und umgekehrt; wir hätten dann für jedes α das dazugehörige Wertepaar ν_m und ρ_m.

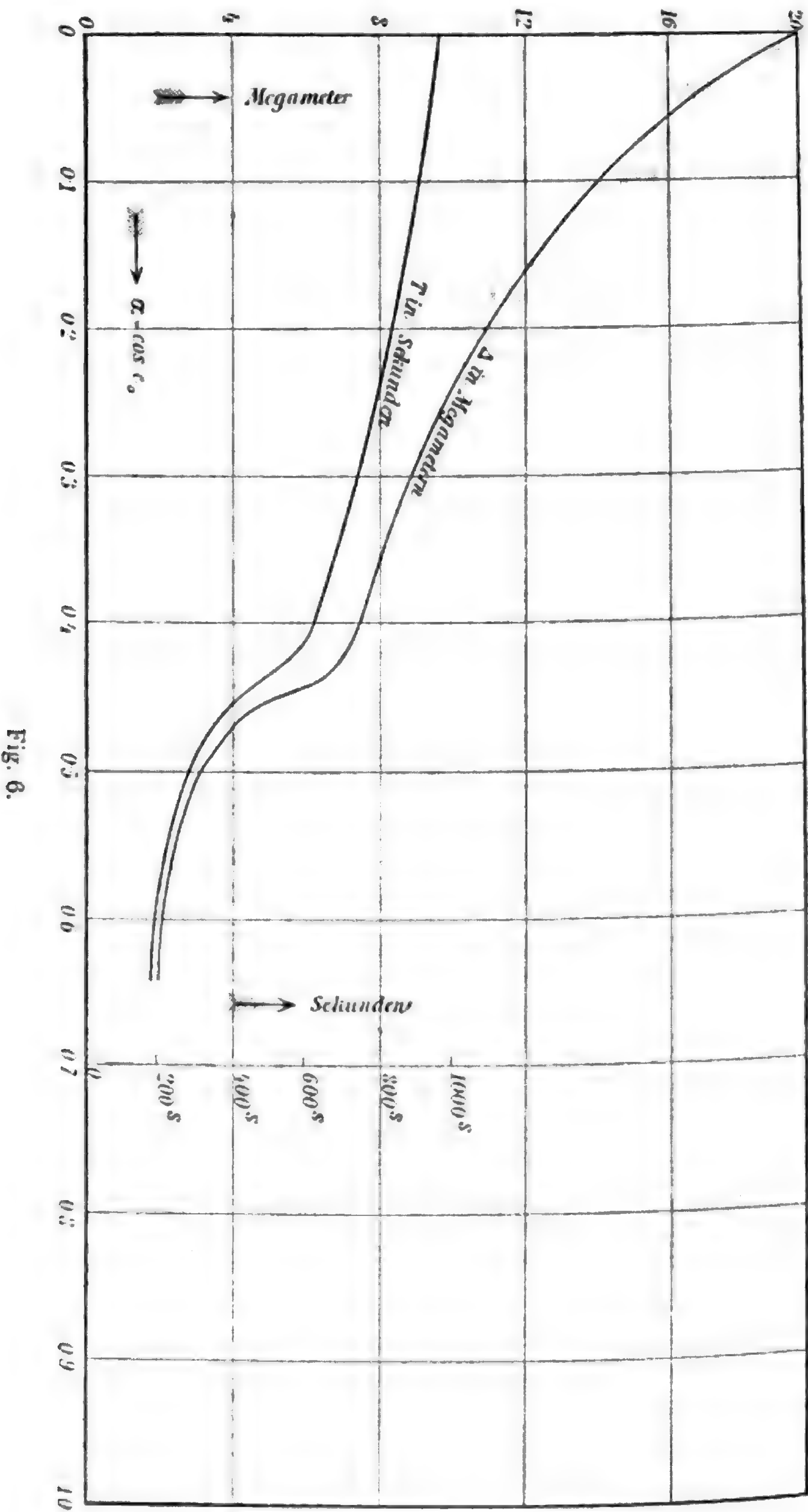

Megameter
T in Sekunden
Δ in Megametern
Sekunden
200ˢ
400ˢ
600ˢ
800ˢ
1000ˢ
0
4
8
12
16

Fig. 6.

Tabelle III.

	Δ Megameter	T Sekunden
$\alpha = 0\cdot00\ldots$	20·0	960
0·10...	14·3	913
0·20...	11·0	825
0·30...	8·90	730
0·40...	7·45	635
0·42...	6·90	595
0·44...	5·30	473
0·46...	4·20	383
0·48...	3·60	330
0·50...	3·15	287
0·60...	2·15	188
0·64...	2·00	173

Wir wollen die Geschwindigkeit c als Funktion von r kennen lernen; dies ist erreicht, wenn wir $\nu = \frac{c_0}{c}$ als Funktion von $\rho = \frac{r}{r_0}$ $\nu = F(\rho)$ darstellen können.

Denke man sich ρ als Abszisse, ν als Ordinaten aufgetragen, so stellt die Bedingung $\nu\rho = \alpha_1$ eine gleichseitige Hyperbel dar, wie sie in Fig. 7 z. B. aufgezeichnet ist; jedem Wert von α_1, also jedem Stoßstrahle ist eine Hyperbel zugeordnet.

Das einem Stoßstrahle mit dem Parameter α_1 zugeordnete Wertepaar ν_m, ρ_m muß also irgend einem Punkte der betreffenden Hyperbel zugehören.

Dadurch nun, und das ist das Wesen der Methode, daß man ρ_m oder ν_m in immer engere Grenzen einschließt, wird das Stück auf der Hyperbel, innerhalb deren der Punkt liegen kann, immer kleiner. Man erhält so auf den einzelnen Hyperbeln Punkte, die der gesuchten Kurve $\nu = F(\rho)$ angehören.

Bei der wirklichen Ausführung dieser Methode muß man aber darüber orientiert sein, ob ν im ganzen Intervall $0 \leqq \rho \leqq 1$ mit steigendem ρ wächst oder ob es Bereiche gibt, innerhalb deren ν mit wachsendem ρ abnimmt.

Der allgemeinen Orientierung über diesen Punkt ist der nächste Abschnitt gewidmet.

6. Kriterium für die Zunahme von ν.

Allgemeine Voraussetzung sei wieder, daß die kritische Funktion $\varphi(\rho) = \nu\rho$ im ganzen Intervalle mit zunehmendem ρ

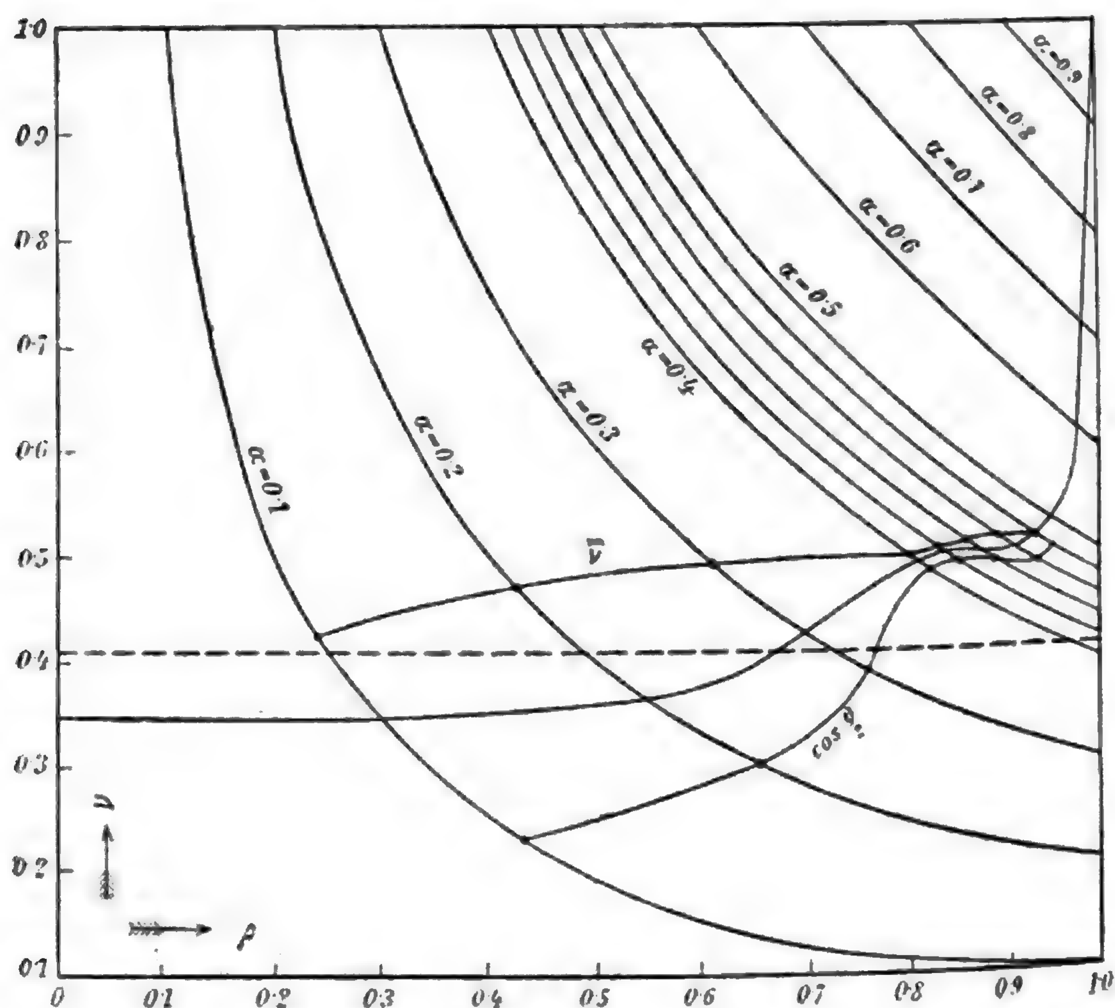


Fig. 7.

wächst und daß ferner die Untersuchung sich auf so große Distanzen erstreckt, daß der Bebenherd genügend genau als in der Oberfläche befindlich angenommen werden darf; ist dies der Fall, so besteht zwischen der Gesamtkrümmung Φ eines Bebenstrahles, dem Epizentralwinkel Θ und dem Emergenzwinkel e_0 die Beziehung

$$\Phi = 2e_0 - \Theta. \qquad 29)$$

Da wir Θ als Funktion von $\alpha = \cos e_0$ kennen, läßt sich auch Φ als Funktion von α aus Gleichung 29 bestimmen; es ergeben sich für Φ die Werte

	Φ
$\alpha = 0 \cdot 0$	$0 \cdot 0$
$0 \cdot 1$	$39 \cdot 7$
$0 \cdot 2$	$57 \cdot 9$
$0 \cdot 28$	$64 \cdot 2$
$0 \cdot 30$	$64 \cdot 8$
$0 \cdot 38$	$66 \cdot 1$
$0 \cdot 40$	$65 \cdot 4$
$0 \cdot 41$	$66 \cdot 2$
$0 \cdot 42$	$67 \cdot 8$
$0 \cdot 44$	$69 \cdot 8$
$0 \cdot 46$	$87 \cdot 2$
$0 \cdot 48$	$90 \cdot 1$
$0 \cdot 50$	$91 \cdot 6$
$0 \cdot 54$	$90 \cdot 6$
$0 \cdot 60$	$87 \cdot 1$
$0 \cdot 64$	$83 \cdot 0$,

welche in Fig. 8 als Kurve eingetragen sind. Den Verlauf von Φ wollen wir nun benützen, um ein Kriterium über die Zunahme von ν zu gewinnen.

Zunächst läßt sich zeigen, daß für jeden Wert von α, für den $\frac{d\Phi}{d\alpha} \leqq 0$ ist, $\left(\frac{d\nu}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_m} > 0$ sein muß; da nun jedem α ein bestimmtes ρ_m entspricht, ergibt sich daraus, daß in allen Intervallen, in denen $\frac{d\Phi}{d\alpha} \leqq 0$ ist, ν mit wachsendem ρ zunehmen muß.

Um dies zu beweisen, greifen wir einen bestimmten Stoßstrahl mit dem Parameter α_1 und einen zweiten, benachbarten, mit dem Parameter α_2, wobei $\alpha_2 > \alpha_1$ sein soll; die entsprechenden Gesamtkrümmungen seien Φ_{α_1} und Φ_{α_2}, die größten Eindringungstiefen ρ_{m_1} und ρ_{m_2}.

Für die Gesamtkrümmung Φ fanden wir den Ausdruck Gleichung 17; wir können daher schreiben:

$$\Phi_{\alpha_1} = 2\alpha_1 \int_{\rho_{m_1}}^{\rho_{m_2}} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2\rho^2 - \alpha_1^2}} + 2\alpha_1 \int_{\rho_{m_2}}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2\rho^2 - \alpha_1^2}} =$$

$$= \Phi'_{\alpha_1} + \Phi''_{\alpha_1} \qquad 30)$$

und

$$\Phi_{\alpha} = 2\alpha_2 \int_{\rho_{m_2}}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2\rho^2 - \alpha_2^2}}. \tag{31}$$

Zunächst sieht man leicht ein, daß Φ''_{α_1} immer kleiner sein muß als Φ_{α_2}, da der Nenner des Integrals im ganzen Integra-

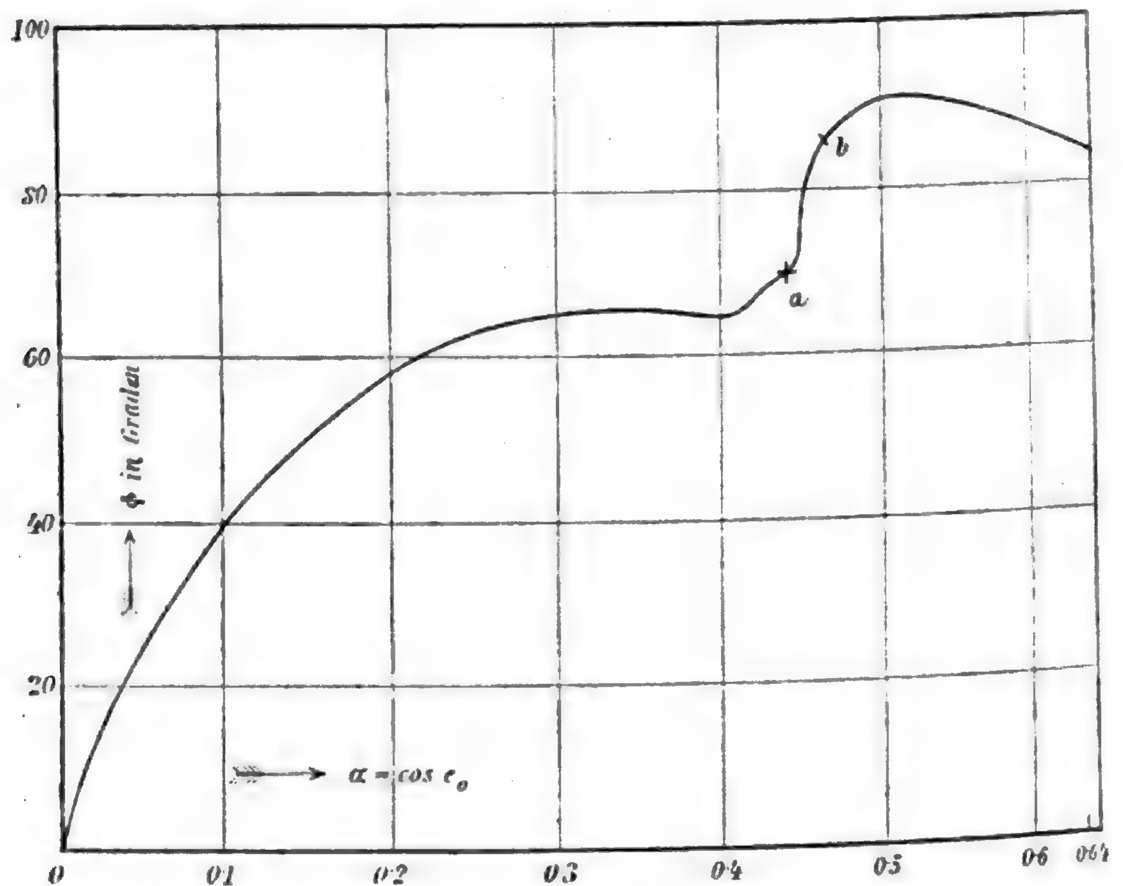


Fig. 8.

tionsintervall durchaus größer ist, da $\alpha_1 < \alpha_2$. Wenn nun $\Phi_{\alpha_1} \geqq \Phi_{\alpha_2}$ sein soll, und dies ist der Fall, wenn $\frac{d\Phi}{d\alpha} \leqq 0$, so muß

$$\Phi'_{\alpha_1} = 2\alpha_1 \int_{\rho_{m_1}}^{\rho_{m_2}} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2\rho^2 - \alpha_1^2}}$$

notwendig positiv sein, d. h. $\frac{d\nu}{d\rho}$ muß positiv sein im Intervall ρ_{m_1} bis ρ_{m_2} oder ν muß mit wachsendem ρ zunehmen, q. e. d.

Wir sehen aus Fig. 8, daß ν sicher zunimmt im Intervall $\alpha = 0\cdot35$ bis $\alpha = 0\cdot4$ und ferner $\alpha = 0\cdot5$ bis $\alpha = 0\cdot64$.

Es fragt sich nun nur noch, was man schließen kann, wenn $\dfrac{d\Phi}{d\alpha} > 0$ ist.

Wir wollen uns folgender Schlußweise bedienen.

Es ist

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} = \lim_{\alpha_2 = \alpha_1}\left[\frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi_{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right]$$

oder, wenn wir genügend kleine endliche Differenzen wählen:

$$\Delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1,$$

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} = \frac{\Delta\Phi_{\alpha_1}}{\Delta\alpha} = \frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi''_{\alpha_1}}{\Delta\alpha} - \frac{\Phi'_{\alpha_1}}{\Delta\alpha}.$$

Nehmen wir nun an, daß ν im Intervalle ρ_{m_1} bis ρ_{m_2} mit wachsendem ρ abnimmt oder höchstens gleich groß bleibt, so wird

$$\Phi'_{\alpha_1} \leqq 0,$$

woraus dann folgt:

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} \geqq \frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi''_{\alpha_1}}{\Delta\alpha}. \qquad 32)$$

Nun ist aber genügend genau

$$\frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi''_{\alpha_1}}{\Delta\alpha} = \left[\frac{\partial\Phi''_{\alpha_1}}{\partial\alpha}\right]_{\rho_{m_2} = \mathrm{const}}$$

und, wenn wir unter dem Integrale differenzieren:

$$\frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi''_{\alpha_1}}{\Delta\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[2\alpha_1 \int_{\rho_{m_2}}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho}\cdot d\rho}{\nu\sqrt{\nu^2\rho^2 - \alpha^2}}\right] =$$

$$= 2\int_{\rho_{m_2}}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho}\cdot d\rho}{\nu\sqrt{\nu^2\rho^2 - \alpha^2}} + 2\alpha_1^2 \int_{m_2}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho}\cdot d\rho}{\nu\sqrt{(\nu^2\rho^2 - \alpha_1^2)^3}}. \qquad 33)$$

Das zweite Integral der rechten Seite läßt sich nach dem Mittelwertsatz auch schreiben:

$$2\alpha_1^2 \int_{\rho_{m_2}}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{(\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2)^3}} = \frac{2\alpha_1^2}{\nu_x^2 \rho_x^2 - \alpha_1^2} \int_{\rho_{m_2}}^{1} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\nu_x^2 \rho_x^2 - \alpha_1^2} \cdot \Phi''_{\alpha_1},$$

wobei $\nu_x^2 \rho_x^2$ einen Mittelwert bedeutet, der zwischen $\nu_{m_2}^2 \rho_{m_2}^2$ und 1 liegt.

Gleichung 33 läßt sich also auch schreiben:

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} \geqq \frac{\Phi''_{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\nu_x^2 \rho_x^2 - \alpha_1^2} \cdot \Phi''_{\alpha_1} = \Phi''_{\alpha_1} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\nu_x^2 \rho_x^2 - \alpha_1^2} \right). \qquad 34)$$

Setzen wir $\nu_x^2 \rho_x^2 = 1$, so wird die rechte Seite der Gleichung 34 jedenfalls kleiner, ebenso, wenn wir statt Φ''_{α_1}: Φ_{α_1} einsetzen; es bleibt somit um so mehr die Ungleichung bestehen:

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} > \Phi_{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_1 (1 - \alpha_1^2)} \qquad 35)$$

oder

$$\alpha_1 (1 - \alpha_1^2) > \Phi_{\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha}{d\Phi_{\alpha_1}}. \qquad 36)$$

Da die rechte Seite der Gleichung 36 die Subtangente der Φ-Kurve im Punkt α_1 angibt, können wir sagen: Wenn ν mit wachsendem ρ abnimmt oder höchstens konstant bleibt, also $\frac{d\nu}{d\rho} \leqq 0$ ist, dann muß die Subtangente der Φ-Kurve im Punkt α_1 kleiner sein als der Ausdruck $\alpha_1 (1 - \alpha_1^2)$.

Ist also die Subtangente größer als $\alpha_1 (1 - \alpha_1^2)$, so muß $\frac{d\nu}{d\rho} > 0$ sein.

Den Inhalt dieses Abschnittes zusammenfassend, kann man sagen:

Konstruiert man eine Kurve der Gesamtkrümmung Φ, indem man zum Parameter α als Abszisse den entsprechenden

Wert von Φ als Ordinate einträgt, so lassen sich aus dem Verlaufe der Φ-Kurve folgende Schlüsse ziehen.

Ist in irgend einem Punkt α_1 $\frac{d\Phi}{d\alpha} \leqq 0$, so folgt daraus, daß im Abstande ρ_{m_1} vom Erdmittelpunkte v mit wachsendem ρ zunimmt, $\frac{dv}{d\rho} > 0$ ist. In Punkten α_1, wo $\frac{d\Phi}{d\alpha} > 0$ ist, hat man zu untersuchen, ob die Subtangente der Φ-Kurve größer ist als $\alpha_1(1-\alpha_1^2)$; ist dies der Fall, so ist auch für solche Punkte ρ_{m_1}, die diesen Parameterwerten α_1 zugeordnet sind, $\frac{dv}{d\rho} > 0$, d. h. v nimmt mit wachsendem ρ zu. Nur für solche α, respektive ρ_m kann $\frac{dv}{d\rho} \leqq 0$ sein, für die $\alpha_1(1-\alpha_1^2)$ größer ist als die Subtangente der Φ-Kurve.

Untersucht man unsere Spezialkurve Fig. 8 daraufhin, so zeigt es sich, daß, wenn v überhaupt abnimmt mit wachsendem ρ, dies nur im Intervall $\alpha = 0 \cdot 44$ und $\alpha = 0 \cdot 46$ der Fall sein kann.

7. Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Tiefen der Erde.

Ich will nun zur wirklichen Anwendung der im fünften Abschnitte gegebenen Methode schreiten, die dadurch wesentlich erleichtert wird, daß, wie der vorangehende Abschnitt gezeigt hat, wenn v überhaupt irgendwo mit wachsendem ρ abnimmt, dies nur in dem kleinen Intervall $\alpha = 0 \cdot 44$ bis $\alpha = 0 \cdot 46$ stattfinden kann; da nun im zweiten Abschnitte gezeigt ist, daß $-\frac{dv}{d\rho} < \frac{v}{\rho}$ sein muß, kann eine erhebliche Abnahme von v überhaupt nicht eintreten.

In Anbetracht des noch so unsicheren Zahlenmaterials will ich mich auf eine erste Annäherung beschränken und da können wir dann ruhig annehmen, daß v überhaupt nicht abnimmt.

Die Bahn des Stoßstrahles für $\alpha = 0$ ist ein Erddurchmesser; infolgedessen ist

$$T_0 = 2n_0 r_0 \int_0^1 \nu d\rho = 2n_0 r_0 \bar{\nu},$$

wobei $\bar{\nu}$ den Mittelwert von ν im Intervalle 0 bis 1 darstellt, und zwar ist

$$\bar{\nu} = \int_0^1 \nu . d\rho = \int_0^1 F(\rho) d\rho;$$

da nun $T_0 = 960$ Sek. ist, wird $\bar{\nu} = 0 \cdot 415$ der Mittelwert der gesuchten Funktion $F(\rho)$.

Für ρ_m läßt sich leicht eine obere Grenze angeben; es muß jedenfalls für jeden Stoßstrahl ρ_m kleiner sein als der Abstand der dem Strahl zugehörigen Sehne vom Erdmittelpunkt, also $\rho_m < \cos\frac{\Theta}{2}$. Berechnet man also für jedes α das zugehörige Θ und trägt die Werte von $\cos\frac{\Theta}{2}$ auf den Hyperbeln auf, so erhält man die Punkte, die in Fig. 7 eingezeichnet sind und weiß, daß die Kurve für $\nu = F(\rho)$ jedenfalls ober ihnen zu liegen kommt.

Andrerseits findet sich eine untere Grenze für ν_m auf folgende Weise. Die Zeit T ist gegeben durch die Gleichung 15

$$T = 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{\nu^2 \rho . d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}};$$

nach dem Mittelwertsatz kann man schreiben:

$$T = \bar{\nu} . 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{\nu \rho d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}},$$

wobei $\bar{\nu}$ einen Mittelwert von ν bedeutet, so daß $\nu_m < \bar{\nu} < 1$ ist, wenn ν im ganzen Intervalle $\rho_m \leqq \rho \leqq 1$ wächst mit wachsendem ρ.

Nun ist aber nach Gleichung 13

$$2r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{\nu \rho d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} = L$$

der Länge der Stoßstrahlkurve, also $T = \bar{\nu} n_0 L$; setzt man in der rechten Seite dieser Gleichung für L einen Wert ein, der

kleiner ist als L, z. B. die Länge der dem Stoßstrahl entsprechenden Sehne

$$S = 2 r_0 \sin \frac{\Theta}{2},$$

so wird

$$\bar{\nu} < \frac{T}{n_0 S}$$

und um so mehr

$$\nu_m < \frac{T}{2 n_0 r_0 \sin \frac{\Theta}{2}}.$$

In Tabelle IV sind die berechneten Werte zusammengestellt.

Tabelle IV.

	Δ Megameter	$\frac{\Theta}{2}$	T Sekunden	$\cos \frac{\Theta}{2}$	$\frac{T}{n_0 S}$
$\alpha = 0 \cdot 0$....	20·0	90°	960	0·00	0·416
0·1....	14·3	64 4°	913	0·43	0·437
0·2....	11·0	49·5	825	0·65	0·472
0·3....	8·90	40·1	730	0·77	0·490
0·4....	7·45	33·5	635	0·83	0·499
0·42...	6·90	31·1	595	0·86	0·498
0·44...	5·30	23·9	473	0·91	0·507
0·46...	4·20	18·9	383	0·95	0·513
0·48...	3·60	16·2	330	0·96	0·513

Zu höheren Werten von α bin ich nicht gegangen, da sich dann bereits der Einfluß der Herdtiefe zu zeigen beginnt.

Die Werte von $\frac{T}{2 n_0 r_0 \sin \frac{\Theta}{2}}$ sind ebenfalls in Fig. 7 eingezeichnet und durch einen Linienzug ($\bar{\nu}$) verbunden; da nun $\nu_m < \bar{\nu}$ sein muß, muß die gesuchte Kurve für ν unterhalb dieser Werte verlaufen.

Ich habe nun eine ν-Kurve in Fig. 7 so eingezeichnet, daß für $\rho = 1$ $\nu = 1$ wird, die Linie zwischen den beiden Punktreihen so hindurchgeht, daß das Integral

$$\int_0^1 v\,d\rho = 0\cdot 42$$

wird. Dadurch ist, wie man sieht, die Kurve $v = F(\rho)$ schon ziemlich genau bestimmt. Angenommen, daß die Zahlenwerte annähernd der Wirklichkeit entsprechen, gibt uns diese Kurve ein Bild über den Verlauf der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinneren, die eventuell zwischen $\alpha = 0\cdot 44$ und $\alpha = 0\cdot 46$ eine Korrektur in dem Sinne bedarf, daß v eine Strecke hindurch abnimmt. Im großen und ganzen dürfte aber das Bild richtig sein.

In folgender Tabelle habe ich die Zahlenwerte zusammengestellt, die sich für v und daraus für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bebenwellen ergeben; außerdem sind noch die Emergenzwinkel angegeben, die Strahlen entsprechen, die bis zur betreffenden Tiefe in das Erdinnere eindringen. Fig. 9 gibt eine graphische Darstellung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Funktion der Entfernung vom Erdmittelpunkte.

Tabelle V.

	v	c in Kilometer pro Sekunde	e_0
$\rho = 0\cdot 0$	0·35	15·7	90°
0·1	0·35	17·7	88
0·2	0·35	15·7	86
0·3	0·35	15·7	84
0·4	0·35	15·7	82
0·5	0·36	15·3	80
0·6	0·38	14·5	77
0·7	0·44	12·7	73
0·8	0·49	11·3	67
0·85	0·50	11·1	65
0·90	0·50	11·0	63
0·95	0·54	10·3	59
0·975	0·63	8·8	52
1·00	1·00	5·5	0

Im großen ergibt sich also folgendes Bild für den Verlauf von c.

Im Erdmittelpunkt ist c ein Maximum (15·7 *km*/Sek.) und nimmt kontinuierlich gegen die Oberfläche zu ab, bei etwa $^4/_5$ des Erdradius tritt ein Stillstand in der Abnahme (eventuell sogar ein kleiner Anstieg) ein, um bei etwa $^{19}/_{20}$ des Erdradius

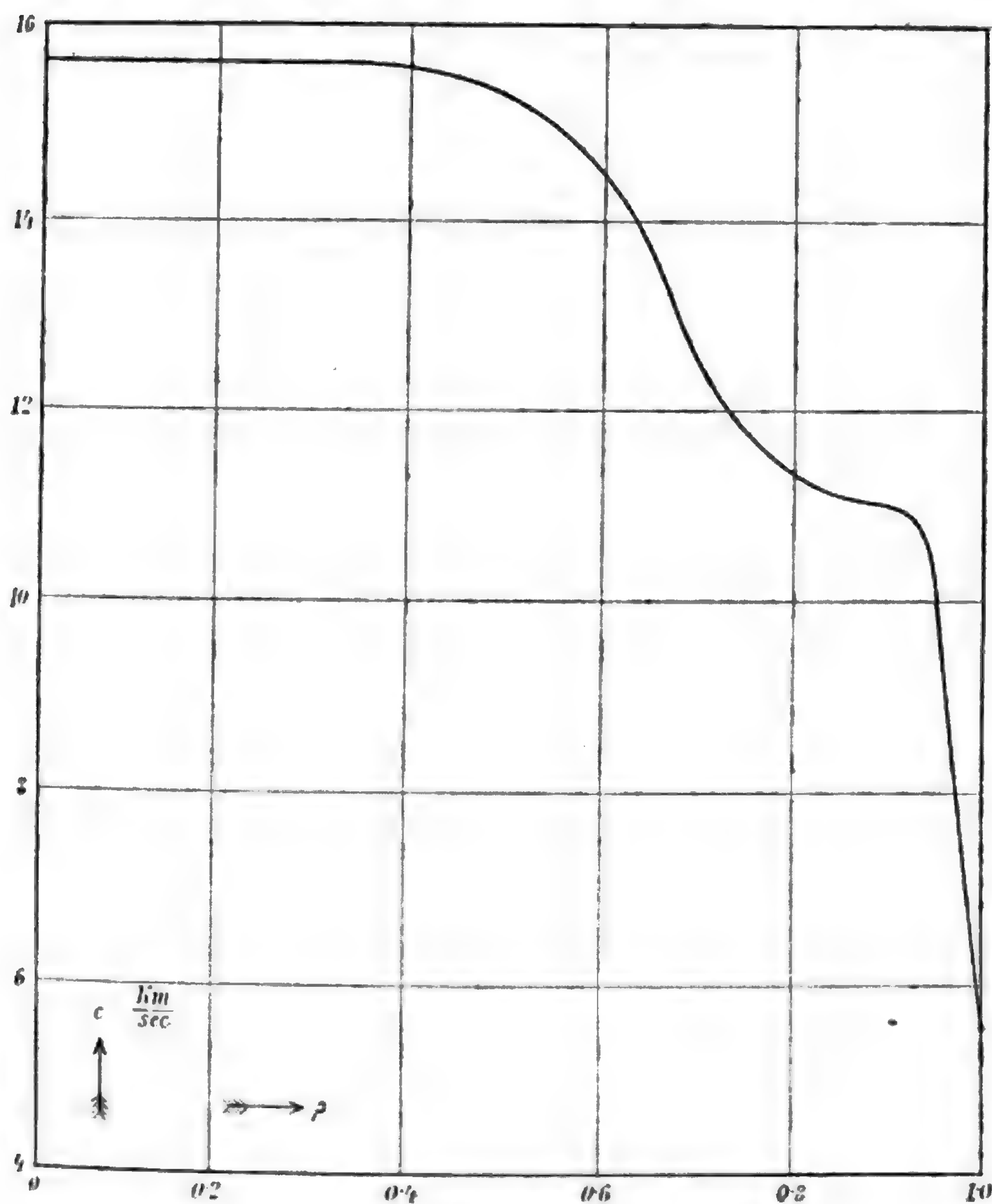


Fig. 9.

einem rapiden Abfall auf den Oberflächenwert von 5·5*km*/Sek. Platz zu machen. So unsicher die Absolutwerte und so roh die Annäherung auch sein mag, so scheinen doch ungefähr die beiden Punkte $\rho = \frac{4}{5}$ und $\rho = \frac{19}{20}$ als charakteristische Stellen der c-Kurve.

Dies steht in schönster Übereinstimmung mit der Wiechertschen Theorie, die im wesentlichen eine plötzliche Änderung des Erdmaterials bei etwa $^4/_5$ des Erdradius verlangt; andrerseits ist die Existenz der Milne-Láska'schen Kruste von $^1/_{20}$ Erdradiusdicke angedeutet.

Wenn ausgedehnteres Beobachtungsmaterial vorliegt, als es gegenwärtig der Fall ist, können eventuell weitere Regeln zur Gewinnung von Näherungswerten von c mit Vorteil Anwendung finden; darauf sowie auf die geophysikalischen Folgerungen, die sich aus dem Verlaufe der c-Kurve ziehen lassen, hoffe ich in einer späteren Mitteilung zurückzukommen.

Bis jetzt haben wir nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in größeren Tiefen der Erde behandelt; um ihre Veränderung in der Nähe der Erdoberfläche zu studieren, müssen andere Wege eingeschlagen, die im nächsten Abschnitte besprochen werden sollen.

8. Berechnung der Herdtiefe und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche.

Als gegeben vorausgesetzt sei wieder n_0 und die Laufzeitkurve, sei es die eines bestimmten Bebens oder eine mittlere; im folgenden ist der Einfachheit halber überall der Index (w) bei den einzelnen Größen weggelassen. Aus der Beziehung Gleichung 26

$$\frac{1}{n_0}\frac{dT}{d\Delta}=\alpha$$

ergibt sich für jedes T und Δ das zugehörige α. An einer Stelle der Laufzeitkurve wird $\frac{d^2T}{d\Delta^2}=0$, die zugehörigen Werte seien T_h, Δ_h und α_h; sie zeichnet sich dadurch aus,[1] daß dort die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit ein Minimum wird und der zugehörige Stoßstrahl NN' (Fig. 3) trennt die Schar der Strahlkurven in zwei Gruppen.

In die eine Gruppe gehören alle Stoßstrahlen, die Epizentralentfernungen entsprechen, die kleiner als Δ_h sind; in die zweite Gruppe die übrigen. Zu einem Werte von α gehören

[1] Siehe z. B. Rudzki, l. c.

also immer zwei Werte von Δ, einer, Δ_i, kleiner als Δ_h, der andere, Δ_a, größer.

Wir beginnen mit Werten von Δ, die kleiner sind als Δ_h. Es besteht dann die Beziehung

$$\Delta_i = r_0 \alpha \int_{\rho_h}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \tag{35}$$

wobei ρ_h die Entfernung des Bebenherdes vom Erdmittelpunkt ist; nennen wir die Herdtiefe $h = 1 - \rho_h$, führen in das Integral $\varepsilon = 1 - \rho$ als Variable ein und entwickeln ν nach Potenzen von ε:

$$\nu = 1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \ldots, \tag{36}$$

so wird

$$\nu^2 \rho^2 = 1 + (2 b_1 - 1)\varepsilon + b_2 \varepsilon^2 + \ldots$$

und

$$\Delta_i = r_0 \alpha \int_0^h (1-\varepsilon)^{-1} (1 + b_1 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2 \ldots - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} d\varepsilon.$$

Entwickelt man unter dem Integralzeichen, multipliziert und integriert, so ergibt sich:

$$\Delta_i = \frac{r_0 \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} (h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \ldots), \tag{37}$$

wobei die Koeffizienten $A_2, A_3 \ldots$ α und die Koeffizienten a der Entwicklung von ν enthalten.

Da nun h klein ist, kann man sich mit den ersten Gliedern der Reihe 37 begnügen und aus einer Anzahl verschiedener Δ_i die $a_1, a_2 \ldots$ und die Herdtiefe h am einfachsten wohl durch Probieren mit der nötigen Genauigkeit berechnen.

Gehen wir jetzt über Δ_h hinaus, also in das Gebiet, wo die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit wieder zunimmt, so gelten hier die Gleichungen 7, wobei zu beachten ist, daß $\Delta^{(u)} = \Delta_a$ und $\Delta' = \Delta_i$ ist.

Es ergibt sich somit für

$$\Delta_a + \Delta_i = 2 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}}; \tag{38}$$

auch hier läßt sich eine Reihenentwicklung vornehmen, die gestattet, wenn ν für einen Wert von ρ bekannt, die Werte von ν in der Nähe dieses Punktes zu finden; so fortschreitend, kann man dann für beliebige Tiefen die Werte für ν finden; auch hier wird die Rechnung durch Einsetzen von Näherungswerten sich vereinfachen.

Die wirkliche Durchführung dieser Rechnungen erfordert aber ein ziemlich exaktes Beobachtungsmaterial, so daß es sich vorläufig kaum der Mühe lohnen würde, eine praktische Durchrechnung zu probieren.

9. Zusammenfassung der wichtigsten Resultate.

Bezeichnet c_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen an der Erdoberfläche, T die Zeit, die der erste Stoß eines Bebens vom Herd bis zum Beobachtungsort braucht, Δ die Epizentraldistanz des Beobachtungsortes; konstruiert man ferner die Laufzeitkurve, indem zu Δ als Abszisse das zugehörige T als Ordinate aufgetragen wird, so läßt sich beweisen, daß für ein beliebiges Verteilungsgesetz der Geschwindigkeit im Erdinneren $(c = f(\rho))$,

$$c_0 \frac{dT}{d\Delta} = \cos e_0,$$

wo e_0 den Emergenzwinkel bedeutet, unter dem der betreffende Strahl die Erdoberfläche trifft; anders ausgedrückt, das Verhältnis der wirklichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit (c_0) zur scheinbaren $v^{(s)} = \frac{d\Delta}{dT}$ ist gleich dem Cosinus des Emergenzwinkels.

Diese Beziehung lehrt, daß sich aus der Laufzeitkurve die Emergenzwinkel berechnen und infolgedessen auch T und Δ als Funktion von $\alpha = \cos e_0$ sich darstellen lassen.

Eben wegen dieser Beziehung erscheint die experimentelle Bestimmung der Emergenzwinkel von großer Bedeutung; einmal ermöglicht sie eine unabhängige und noch sehr wünschenswerte Kontrolle der Laufzeitkurve; zweitens gestattet sie eine direkte Bestimmung von c_0, wenn gleichzeitig die scheinbare

Oberflächengeschwindigkeit bekannt ist. Man ist daher nicht nur in der Lage, Mittelwerte von c_0 für die Erdoberfläche zu gewinnen, sondern kann eventuell auch größere geologische Abnormalitäten in der Nähe eines Beobachtungsortes erschließen.

Schließlich aber ist nicht unwichtig, festzustellen, daß die obige Beziehung auch für transversale Wellen gilt.

Die Prüfung dieser Beziehung an den von Schlüter experimentell bestimmten Emergenzwinkeln ergibt eine überraschend gute Übereinstimmung. Die aus den Emergenzwinkeln berechnete Laufzeitkurve fällt mit der früher bestimmten Kurve nahe zusammen und schließt sich stellenweise sogar besser an die Zeitbeobachtungen an. Der Rechnung ist ein Wert von 5·5 *km*/Sek. für c_0 zu Grunde gelegt worden.

Im fünften Abschnitte wird eine geometrisch-synthetische Methode angegeben, um die wirkliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der ersten Vorläufer eines Bebens in verschiedenen Erdtiefen zu bestimmen.

Die Größe c nimmt im allgemeinen mit wachsender Entfernung vom Erdmittelpunkt ab; zur Entscheidung der Frage, ob diese Abnahme eine durchgängige ist oder ob es Stellen gibt, wo c mit wachsendem Radius zunimmt, wird ebenfalls eine Methode angegeben. Ihre Anwendung auf das vorliegende Zahlenmaterial ergibt, daß, wenn überhaupt, nur in einer relativ kleinen Schicht des Erdinneren die Geschwindigkeit wächst.

Im siebenten Abschnitte wird der Versuch gemacht, trotzdem das Beobachtungsmaterial recht dürftig ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinneren zu berechnen. Es ergibt sich im großen der folgende Verlauf.

Im Erdmittelpunkte ist c ein Maximum (15·7 *km*/Sek.) und nimmt kontinuierlich gegen die Oberfläche zu ab, bei etwa $^4/_5$ des Erdradius tritt ein Stillstand in der Abnahme (eventuell sogar ein kleiner Anstieg) ein, der anhält, bis etwa bei $^{19}/_{20}$ des Erdradius ein rapides Absinken auf den Oberflächenwert ($c_0 = 5 \cdot 5$ *km*/Sek.) beginnt.

Dieses typische Verhalten steht einerseits in guter Übereinstimmung mit der Wiechert'schen Theorie des Erdinneren, was als ein die Richtigkeit bestätigendes Moment von Wert ist,

andrerseits deutet es die Existenz einer von Milne und Láska angenommenen äußersten Erdkruste von $^{1}/_{20}$ Erdradiusdicke an.

Der letzte Abschnitt schließlich gibt einen Weg zur Bestimmung der Herdtiefe und der genaueren Ermittlung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. VII. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über die Leitfähigkeit gewisser wässeriger Lösungen von Kochsalz und Natriumcarbonat

von

A. Waßmuth,

k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1906.)

Durch eine Reihe von Forschern, insbesonders durch die Herren Tangl und Bugarszky,[1] wurde nachgewiesen, daß das Serum des menschlichen und tierischen Blutes hinsichtlich seiner elektrischen Leitfähigkeit im wesentlichen eine wässerige Lösung von m Grammäquivalenten (im Liter) Na Cl und m' Grammäquivalenten Na_2CO_3 darstelle, dem als Nichtleiter 7 bis 8% Eiweiß beigemengt sind; dabei ist im Mittel etwa $m = 0 \cdot 092$ und $m' = 0 \cdot 053$ zu setzen. Nach Versuchen der eben Genannten wird für je 1 g Eiweiß in 100 cm^3 Blutserum die elektrische Leitfähigkeit des letzteren um $2 \cdot 5$% vermindert. Hat man demnach durch die Analyse gefunden, daß in 100 cm^3 des vorliegenden Serums p Gramm an Eiweiß vorhanden sind, so wird man zu der ursprünglich gemessenen Leitfähigkeit des Serums noch $(2 \cdot 5 \times p)$% derselben dazugeben, um so jene Leitfähigkeit K zu erhalten, die das Serum hätte, wenn es gar kein Eiweiß enthielte, also bloß eine wässerige Lösung der beiden Salze wäre.

Es wirft sich die Frage auf, in welchem Zusammenhange die so gemessene Leitfähigkeit K mit den Grammäquivalenten m und m' steht, wobei immerhin m und m' sich nur innerhalb gewisser Grenzen zu bewegen hätten.

---

[1] Tangl und Bugarszky, Pflüger's Archiv, 72, p. 531 (1898); Hamburger, Der osmotische Druck und Ionenlehre, I, p. 489 (1902).

Eine Lösung dieser Frage haben die oben genannten beiden Forscher versucht, indem sie: $K = k + k'$ annahmen, d. h. voraussetzten, daß sich die Leitfähigkeit K der Mischung additiv aufbaue aus den Leitfähigkeiten k und k' der einzelnen Komponenten, der Chloride und Achloride, wenn das eine Mal nur m Grammäquivalente NaCl, das andere Mal nur m' Grammäquivalente Na_2CO_3 im Liter Wasser gelöst werden. Da beide Salze ein Ion gemeinschaftlich haben, so konnte diese Regel nicht richtig sein, sondern nur angenäherte Resultate liefern. Mischen wir z. B. eine wässerige Lösung von NaCl, für die $m = 0 \cdot 10$, also $10^3\, k = 9 \cdot 20$ ist, mit einer Lösung von KCl, bei der $m' = 0 \cdot 05$, d. h. $10^3\, k' = 5 \cdot 79$ ist, so sollte nach dieser Regel $10^3\, K = 9 \cdot 20 + 5 \cdot 79 = 14 \cdot 99$ werden, während der Versuch hiefür die kleinere Zahl $14 \cdot 26$ ergibt. Und so in ähnlichen Fällen, wo stets für K kleinere Werte gefunden werden, als sie dieser Regel entsprechen.

Einen anderen Weg, die Abhängigkeit der Leitfähigkeit K von den Konzentrationen m und m' festzustellen, schlug mein Sohn[1] ein, indem er auch die Leitfähigkeit K_r des r-fach verdünnten Serums — 1 l Serum mehr $(r-1)\, l$ Wasser — in den Kreis seiner Betrachtungen zog.

Den Anstoß hiezu gaben Beobachtungen von Oker-Blom,[2] der die sogenannte physiologische Leitfähigkeit (d. i. $r . K_r$) bei verschiedenen Graden r der Verdünnung verglich mit jener, wie sie bei einer $0 \cdot 7$prozentigen Kochsalzlösung auftritt und so fand, daß, wenn die r als Abszissen und die $r . K_r$ als Ordinaten dargestellt werden, die erstere Kurve viel steiler ansteige als die letztere. Nach Oker-Blom's Anschauung, der sich später auch Hamburger anschloß, sollte an dieser Erscheinung das vorhandene Natriumcarbonat in erster Linie die Schuld tragen; die nachfolgende Untersuchung wird zeigen, in welchem Grade diese Vermutung berechtigt war.

Bestand aber dieser Schluß zu Recht, so mußte sich umgekehrt nach der Ansicht meines Sohnes aus dem gemessenen

---

[1] Med. Dr. A. Waßmuth, Zur Analyse des Blutserums. Diese Sitzungsberichte, Bd. 114, III. Abt., 1905.

[2] Oker-Blom, Pflügers Archiv, *79*, p. 510 (1900) und Hamburger, Osmot. Druck, 4. Aufl., I, p. 482.

Leitungsvermögen des Serums in unverdünntem und verdünntem Zustande insbesonders bei kleinen Verdünnungen ein Schluß auf die Menge der Achloride ziehen lassen. Es schien angezeigt, diese Frage vom rein physikalischen Standpunkte aus zu untersuchen, wobei es sich also darum handelte, den Zusammenhang zwischen K, K_r, m und m' aufzuhellen. Sorgfältig und mit ganz vollkommenen Apparaten durchgeführte Versuche hätten dies Ziel, wie das Nachstehende zeigen wird, sicher erreichen lassen. Da aber solche Instrumente fehlten, so wurde auf den Rat eines Kollegen hin Gebrauch gemacht von der in vielen Fällen erprobten Barmwater'schen Beziehung, der sich auch einige vorläufige Versuche gut anzuschließen schienen. Als sicheres Ergebnis dieses ersten Schrittes fand mein Sohn die Tatsache, daß eine lineare Funktion von m und m' in einfachem Zusammenhange mit K und dem Verhältnisse $\frac{K_r}{K}$ stehe. War demnach die Kochsalzmenge m bekannt, so ließ sich nach dieser Relation aus den gemessenen Leitfähigkeiten K und K_r die Menge der Achloride m' berechnen.

Die nachfolgende Untersuchung wird dartun, daß die Barmwater'sche Beziehung die Erscheinungen ebenfalls nur angenähert wiedergibt, daß aber die eben erwähnte lineare Beziehung nichtsdestoweniger zu Recht besteht, wenn auch die Konstanten etwas andere Werte annehmen; diese Relation ist eben das Gemeinsame einer Reihe von Theorien.

Bei dieser Sachlage schien es angezeigt, vorerst die Leitfähigkeiten wässeriger Lösungen von $m_1 \frac{\text{Grammäquivalenten}}{\text{Liter}}$ Kochsalz und m_2 Grammäquivalenten Natriumcarbonat mit hinreichender Sorgfalt zu messen und hieran erst theoretische Erwägungen zu knüpfen. Es empfahl sich, die Werte von m_1 und m_2 sich innerhalb gewisser enger Grenzen bewegen zu lassen; in den nachfolgenden Versuchen schwankte m_1 etwa zwischen 0·1 bis 0·03 und m_2 gleichfalls von 0·1 bis 0·03.

Es wurden stets chemisch reine, mehrfach getrocknete Salze genommen und mittels der Wage vier Stammlösungen

und die Verdünnungen hergestellt, so daß für jede einzelne Lösung Messungen für $r = 1$, $1 \cdot 25$, $1 \cdot 50$, $1 \cdot 75$ und $r = 2$ vorlagen; es waren also gerade schwächere Verdünnungen herangezogen worden. Gut gereinigte und sorgfältig mit Glasstöpsel und Wachs geschlossene Flaschen schützten die Flüssigkeit vor Verdunsten. Kontrollversuche, die sich durch Kombinieren verschiedener Messungen ergaben, zeigten eine gute Übereinstimmung.

Die vier Stammlösungen waren:

Lösung	Im Liter Wasser waren aufgelöst:		Grammäquivalente/Liter	
	p_1 Gramm NaCl	p_2 Gramm Na_2CO_3	$m_1 = \frac{p_1}{58 \cdot 3}$	$m_2 = \frac{p_2}{53 \cdot 05}$
IV...........	6	6	0·102564	0·11310
I	6	3	0·102564	0·05655
II	4	3	0·068376	0·05655
III...........	2	3	0·034188	0·05655

Hiezu kamen, wie erwähnt, 16 weitere Lösungen, die aus den vier Stammlösungen durch entsprechende Verdünnungen [$r = 1 \cdot 25$, $1 \cdot 50$, $1 \cdot 75$ und $r = 2$] hergestellt wurden; für diese ist also statt m_1 und m_2 zu setzen: $\frac{m_1}{r}$ und $\frac{m_2}{r}$. Das Verdünnen geschah ebenfalls mittels Abwägen. In ein Becherglas ($C = 47 \cdot 945\,g$) wurden z. B. von der Lösung IV eine Menge hineingebracht, so daß das Gesamtgewicht nun $190 \cdot 05\,g$ betrug oder $142 \cdot 1\,g$ der Lösung IV darin enthalten waren. Dann wurde ein zweites Becherglas ($B = 33 \cdot 78\,g$) mit Hilfe einer Pipette gerade mit $71 \cdot 05 = \frac{1}{2} \, . \, 142 \cdot 1\,g$ Wasser angefüllt und beide Flüssigkeiten sorgfältig und innig gemischt; der neuen Lösung entsprachen $3\,g$ NaCl und $3\,g$ Na_2CO_3, denn sie war IV mit $r = 2$.

Die Widerstandsmessungen wurden nach der Angabe, wie sie F. Kohlrausch gegeben, mittels Brücke und Telephon

ausgeführt und hiezu Apparate benützt, die von dem Universitätsmechaniker F. Köhler in Leipzig bezogen waren. Die Ablesungen a an dem Platin-Iridiummeßdraht geschahen in der Nähe der Mitte, also nicht sehr weit von 500 entfernt. Die Vergleichswiderstände R, deren stets mindestens vier ausgewählt wurden, lieferte ein geprüfter Stöpselrheostat. Der zu messende Widerstand w ergab sich nach der Gleichung:

$$w = \frac{a}{1000-a} \times R = \left(\frac{a}{b}\right) . R,$$

wobei noch schließlich als Korrektur für die Zuleitungsdrähte der Betrag von 0·028 Ohm abzuziehen war. Der Quotient a/b findet sich in der Tafel 52 von F. Kohlrausch's »Lehrbuch der prakt. Physik«.

Zur Regulierung der Temperatur diente ein gleichfalls von Köhler bezogener Thermostat mit Flügelrad, dessen Thermometer noch sicher 0·02° erkennen ließ.

Für die Kapazität des verwendeten Leitfähigkeitsgefäßes, dessen Elektroden wohl platiniert waren, wurde als Mittel aus mehreren Messungen (mit verschiedenen, stets $^1/_{10}$normalen KCl-Lösungen) der Wert $C = 0 \cdot 1292$ gefunden, wobei die letzte Stelle um eine Einheit unsicher blieb.

Der Temperaturkoeffizient α des Leitungsvermögens ist nach Kohlrausch für mäßige Temperaturänderungen

für wässerige Lösungen von NaCl . . . . $\alpha = 0 \cdot 0226$
und für wässerige Lösungen von Na_2CO_3 . . . . $\alpha = 0 \cdot 0262$.

Direkte Messungen, die ich an der Lösung IV bei $r = 1 \cdot 5$ bei den Temperaturen 19·72° und 14·62° durchführte, ergaben im Mittel

$$\alpha = 0 \cdot 0233 = \frac{1}{100} \times (2^1/_3),$$

also einen dem obigen Mittel nahestehenden Wert. Die Angaben des Thermostaten wichen wenig von 18° ab, so daß die Reduktion auf diese Temperatur nur mit einem geringen Betrage in Rechnung trat. Die nachfolgenden ausführlicheren Daten beziehen sich z. B. auf Beobachtungen vom 5. März 1906 mit der Lösung II und $r = 1 \cdot 5$.

Vergleichs-widerstand R	Temperatur t	Ablesung a	Mittlere Ablesung	$\frac{a}{b}$	Widerstand w
12	18·03°	619·4 619·6 618·9 618·7	619·15	1·626	19·484
15	18·08	564·2 564·9 564·1 564·3 564·9	564·6	1·2968	19·424
20	18·00	492·7 493·3 492·6 492·8	492·85	0·971	19·410
25	18·02	437·9 437·7 437·2 437·6	437·6	0·7781	19·425
Mittel	18·03°	—	—	—	19·441

Daher $w_{18} = 19 \cdot 454$ und mit $C = 0 \cdot 1292$ ergibt sich schließlich:

$$\underbrace{10^3 K = 6 \cdot 6407}$$

mit einem kleinen wahrscheinlichen Fehler.

Die Resultate aller Beobachtungen gibt die nachfolgende Tabelle wieder, wobei also jede Zahl als Mittel aus mindestens 16 Einzelbeobachtungen erhalten wurde.

Tafel für $10^3 K_r$.

Lösung		$r = 1$ d. i. unverdünnt	$r = 1 \cdot 25$	$r = 1 \cdot 5$	$r = 1 \cdot 75$	$r = 2$
IV......	beobachtet	15·5200	12·669	10·7604	9·3976	8·2887
	berechnet	15·4737	12·6842	10·7645	9·3598	8·2860
I	beobachtet	12·4410	10·1732	8·6275	7·4778	6·6151
	berechnet	12·4425	10·1579	8·6049	7·4716	6·6070
II	beobachtet	9·6640	7·8919	6·6407	5·7760	5·1211
	berechnet	9·7092	7·9189	6·6955	5·8051	5·1272
III......	beobachtet	6·8310	5·6012	4·7452	4·1180	3·6397

Die Formel, nach der bei den Lösungen IV, I und II die Werte von $10^3 K_r$ berechnet wurden, wird weiter unten mitgeteilt werden.

Die vorliegenden Beobachtungen stimmen auch unter sich nicht schlecht. Denkt man sich z. B. 1 *l* der unverdünnten Lösung I (6 *g* NaCl und 3 *g* Na_2CO_3) gemischt mit 1 *l* der unverdünnten Lösung III (2 *g* NaCl und 3 *g* Na_2CO_3), so sind in diesen 2 Litern 8 *g* NaCl und 6 *g* Na_2CO_3 oder in 1 *l* sind 4 *g* NaCl und 3 *g* Na_2CO_3 oder eine solche Mischung stellt die Lösung II vor.

Das arithmetische Mittel der tausendfachen Leitfähigkeiten von I und III ist: $\frac{1}{2}(12 \cdot 4410 + 6 \cdot 8310) = \frac{1}{2} 19 \cdot 2720 = 9 \cdot 636$, also nahe gleich $9 \cdot 664$ der Leitfähigkeit von der Lösung II.

Mischen wir je 1 *l* der Lösungen II (4 *g* NaCl, 3 *g* Na_2CO_3) und III (2 *g* NaCl, 3 *g* Na_2CO_3) miteinander, so bekommen wir die zweifache Verdünnung der Lösung IV (6 *g* NaCl, 6 *g* Na_2CO_3).

Das arithmetische Mittel der tausendfachen Leitfähigkeiten von II und III wäre: $\frac{1}{2}[9 \cdot 6640 + 6 \cdot 8310] = 8 \cdot 2475$, während für die Lösung IV für $r = 2$ beobachtet wurde: $8 \cdot 2887$.

An der Hand dieser Beobachtungen ließ sich vorerst innerhalb der angeführten Grenzen der Einfluß der Verdünnung, d. h. die Abhängigkeit des $10^3 K_r$ von r feststellen. Zu dem Ende setzte ich, geleitet durch die Analogie für den Fall eines Salzes, voraus, daß

$$10^3 K_r . r = U - \frac{1}{r^{1/3}} \cdot V \qquad (1)$$

sei, wobei U und V gewisse, einstweilen noch unbekannte Funktionen von m_1 und m_2 vorstellen sollen. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate wurden dann für jede der vier Lösungen aus den bei den verschiedenen r beobachteten Leitfähigkeiten K_r die Werte von U und V berechnet. Die vier Lösungen folgen, wie die nachstehende Tafel zeigt, in höchst befriedigender Weise dem obigen Gesetze. Es wurde gefunden:

Lösung	U, V gefunden nach der Methode der kleinsten Quadrate	Werte von $10^3 K_r . r$ für					Anmerkung
		$r = 1$	$r = 1 \cdot 25$	$r = 1 \cdot 50$	$r = 1 \cdot 75$	$r = 2$	
IV	$U_4 = 20 \cdot 79519$	15·4888	15·8692	16·1597	16·3918	16·5835	berechnet nach Gleichung (1)
	$V_4 = 5 \cdot 30636$	15·5200	15·8363	16·1406	16·4458	16·5774	wirklich beobachtet
I	$U_1 = 16 \cdot 25618$	12·4397	12 7133	12·9222	13·0892	13·2270	berechnet nach Gleichung (1)
	$V_1 = 3 \cdot 81650$	12·4410	12·7165	12·9413	13·0862	13·2302	wirklich beobachtet
III	$U_2 = 12 \cdot 36147$	9·6534	9·8475	9·9957	10·1142	10·2120	berechnet nach Gleichung (1)
	$V_2 = 2 \cdot 70810$	9·6640	9·8649	9·9611	10·1080	10·2422	wirklich beobachtet
II	$U_3 = 9 \cdot 00130$	6·8357	6·9909	7·1094	7·2042	7·2824	berechnet nach Gleichung (1)
	$V_3 = 2 \cdot 16564$	6·8310	7·0015	7·1178	7·2065	7·2794	wirklich beobachtet

Die Abweichung zwischen Rechnung und Beobachtung ist durchwegs sehr gering und verbürgt die Anwendbarkeit der Beziehung (1) innerhalb der angegebenen Grenzen.

Stellt (1) das Verdünnungsgesetz vor, so erhalten wir hieraus für $r=1$ die Leitfähigkeit $K_1 = K$ der unverdünnten Lösung, indem dann

$$10^3 K = U - V \tag{2}$$

und für ein beliebiges r nach (1):

$$10^3 K_r . r = U - \frac{1}{r^{1/3}} V$$

wird. Wenn wir U und V aus (1) und (2) suchen, so finden wir:

$$U = 10^3 K . Q \tag{3}$$

und

$$V = 10^3 K . (Q-1), \tag{4}$$

wobei

$$Q = \frac{r^{1/3} \cdot \left(\frac{K_r}{K}\right) - 1}{r^{1/3} - 1} \tag{5}$$

nur von dem Verhältnis $\left(\frac{K_r}{K}\right)$ abhängt, hingegen nach (3) und (4) (bei einer und derselben Lösung) vom Grade r der Verdünnung unabhängig sein muß. Dasselbe zeigt die Beziehung

$$Q = \frac{U}{U-V} \tag{6}$$

und bestätigen dies auch die obigen Versuche.

So z. B. liefert die Lösung IV für $r = 1 \cdot 25$, $1 \cdot 5$, $1 \cdot 75$ und $r = 2$ die diesbezüglichen Q nach (5): $Q = 1 \cdot 2752$, $1 \cdot 3165$, $1 \cdot 3508$ und $1 \cdot 3305$, d. i. im Mittel $Q_4 = 1 \cdot 318$, während nach (6) folgt:

$$Q_4 = \frac{20 \cdot 79519}{15 \cdot 4888} = 1 \cdot 3426.$$

Ebenso lieferte die Lösung I nach (5) für Q die Werte 1·2996, 1·3186, 1·3104 und 1·3082, also im Mittel $Q_1 = 1 \cdot 3092$, während nach (6)

$$Q_1 = \frac{16 \cdot 25618}{12 \cdot 4397} = 1 \cdot 307$$

wird.

Für die Lösung II erlangt Q die Werte 1·2803, 1·2433, 1·2699 und 1·2901, d. i. im Mittel 1·2709, während nach (6)

$$Q_2 = \frac{12 \cdot 361473}{9 \cdot 6534} = 1 \cdot 2805$$

wird.

Für die Lösung III folgt aus (6):

$$Q_3 = \frac{9 \cdot 00130}{6 \cdot 8357} = 1 \cdot 317.$$

Da nach (6)

$$\frac{1}{Q} = 1 - \frac{V}{U}$$

ist, so hängt Q von dem Verhältnis $V:U$ ab und schwankt, wie man sieht, innerhalb enger Grenzen. Sobald wir erkannt haben werden, wie U und V von m_1 und m_2 abhängen, können wir auch nach (6) angeben, wie Q mit m_1 und m_2 zusammenhängt.

Um nun die Abhängigkeit der Größen U und V von den jeweiligen m_1 und m_2 zu ermitteln, wurde zuerst versucht, die modifizierte Barmwater'sche Formel:

$$10^3 K_r . r = (A m_1 + B m_2) - \frac{1}{r^{1/3}} (m_1 + m_2)^{1/3} (C m_1 + D m_2) =$$
$$= U - \frac{1}{r^{1/3}} V, \quad (7)$$

in der A, B, C und D noch zu bestimmende Konstanten vorstellen, den Versuchen in der Art anzupassen, daß die den verschiedenen Werten von m_1 und m_2 entsprechenden Größen U_4, U_1, U_2, U_3 und ebenso die V_4, V_1, V_2, V_3 richtig wiedergegeben wurden. Auch bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gelang dies selbst dann nicht, wenn die

Lösung III, wo die größten Verdünnungen vorkommen, ganz ausgeschaltet wurde. Trotz der großen Vorteile[1] dieser Barmwater'schen Formel mußte dieselbe deshalb fallen gelassen werden.

Zu einer sich viel besser den Versuchen anschließenden Formel führte folgende Überlegung. Wäre nur Kochsalz in der Lösung, so bestände bekanntlich innerhalb der obigen Grenzen für m_1 für die Leitfähigkeit k_1 der unverdünnten Lösung die Beziehung:

$$10^3 k_1 = A_0 m_1 - C_0 m_1^{4/3}, \qquad (8)$$

worin $A_0 = 110 \cdot 36$ und $C_0 = 39 \cdot 70$ zu setzen ist.[2]

Ebenso fände sich, wenn nur Na_2CO_3 in Lösung wäre, die analoge Gleichung:

$$10^3 k_2 = B_0 m_2 - D_0 m_2^{4/3}, \qquad (9)$$

wobei $B_0 = 118 \cdot 57$ und $D_0 = 104 \cdot 88$ ist.

Waren beide Salze in Lösung, so war jedenfalls die resultierende Leitfähigkeit $K < (k_1 + k_2)$, wenn die obigen in (8) und (9) auftretenden Konstanten bei k_1 und k_2 genommen wurden. Dies schloß nicht aus, daß sich andere Werte der Konstanten finden ließen, für die wirklich $K = k_1 + k_2$ ist, d. h. es war zu untersuchen, ob die Form

$$10^3 K_r . r = (A m_1 + B m_2) - \frac{1}{r^{1/3}} (C m_1^{4/3} + D m_2^{4/3}) =$$

$$= U - \frac{1}{r^{1/3}} V \qquad (10)$$

sich in befriedigender Weise den Versuchen anpassen ließe. Zu dem Ende wurden die Konstanten A und B in der Gleichung $A m_1 + B m_2 = U$ aus den obigen Werten von U für die

[1] Setzt man z. B. in dieser Formel $m_2 = 0$, so erhält man die richtige Gleichung, wenn nur Kochsalz vorhanden ist; ebenso für $m_1 = 0$. Wird eine Kochsalzlösung mit einer anderen Kochsalzlösung gemischt, so ist $A = B$, $C = D$ und wir bekommen wieder die richtige Beziehung.

[2] Med. Dr. A. Waßmuth, l. c. p. 7.

Lösungen IV, I und II nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt und so erhalten:

$$A = 114\cdot 2713, \quad B = 80\cdot 2628. \tag{11}$$

Ebenso wurde mit $V = Cm_1^{1/3} + Dm_2^{1/3}$ verfahren und gefunden:

$$C = 59\cdot 5227, \quad D = 45\cdot 0963. \tag{12}$$

Diese Werte der Konstanten brachten eine gute Übereinstimmung mit der Beobachtung, denn es war:

berechnet:	$U_4 = 20\cdot 79792$	$U_1 = 16\cdot 25902$	$U_2 = 12\cdot 35231$
beobachtet:	$20\cdot 79519$	$16\cdot 25618$	$12\cdot 36147$

und ebenso für die V:

berechnet:	$V_4 = 5\cdot 32424$	$V_1 = 3\cdot 83652$	$V_2 = 2\cdot 64312$
beobachtet:	$5\cdot 30636$	$3\cdot 81650$	$2\cdot 70810.$

Nach dieser Formel (10), in der nun die Konstanten die in (11) und (12) angegebenen Werte haben, sind dann auch schließlich die 15 Werte von $10^3 K_r$ in der auf p. 990 angegebenen Tafel berechnet worden; die gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung — die größte Abweichung bleibt unter $0\cdot 3\,\%$ — zeigt, daß die Gleichung (10) die Leitfähigkeiten K_r innerhalb der angegebenen Grenzen richtig wiedergibt.

Wegen $U = Am_1 + Bm_2$ und $V = Cm_1^{1/3} + Dm_2^{1/3}$ wird nun nach (6):

$$\frac{1}{Q} = 1 - \frac{V}{U} = 1 - \frac{Cm_1^{1/3} + Dm_2^{1/3}}{Am_1 + Bm_2}, \tag{13}$$

woraus man sieht, daß Q in verwickelter Weise von m_1 und m_2 abhängt; es wird unten gezeigt werden, daß unter normalen Verhältnissen eine Änderung des m_1 einen stärkeren Einfluß auf Q ausübt als eine gleich große Änderung des m_2.

Die wichtigste Beziehung liefert nach (3) $U = 10^3 K.Q$, d. i.

$$Am_1 + Bm_2 = 10^3 K.Q, \tag{14}$$

die also, wie oben hervorgehoben, zeigt, daß eine lineare Funktion der m_1 und m_2 im Zusammenhange steht mit K und dem

		$m_1 = 0 \cdot 11$	$m_1 = 0 \cdot$
$m_2 = 0 \cdot 03$	$U = U_1 + U_2$	$12 \cdot 570 + 2 \cdot 408 = 14 \cdot 978$	$11 \cdot 427 + 2 \cdot 408 =$
	$V = V_1 + V_2$	$3 \cdot 137 + 0 \cdot 420 = 3 \cdot 557$	$2 \cdot 763 + 0 \cdot 420 =$
	$10^3 K = U - V$	$11 \cdot 421$	
	$Q = U : (U - V)$	$1 \cdot 3114$	
$m_2 = 0 \cdot 04$	$U = U_1 + U_2$	$12 \cdot 570 + 3 \cdot 210 = 15 \cdot 780$	$11 \cdot 427 + 3 \cdot 210 =$
	$V = V_1 + V_2$	$3 \cdot 137 + 0 \cdot 617 = 3 \cdot 754$	$2 \cdot 763 + 0 \cdot 617 =$
	$10^3 K = U - V$	$12 \cdot 026$	
	$Q = U : (U - V)$	$1 \cdot 3122$	
$m_2 = 0 \cdot 05$	$U = U_1 + U_2$	$12 \cdot 570 + 4 \cdot 013 = 16 \cdot 583$	$11 \cdot 427 + 4 \cdot 013 =$
	$V = V_1 + V_2$	$3 \cdot 137 + 0 \cdot 831 = 3 \cdot 968$	$2 \cdot 763 + 0 \cdot 831 =$
	$10^3 K = U - V$	$12 \cdot 615$	
	$Q = U : (U - V)$	$1 \cdot 3145$	
$m_2 = 0 \cdot 06$	$U = U_1 + U_2$	$12 \cdot 570 + 4 \cdot 816 = 17 \cdot 386$	$11 \cdot 427 + 4 \cdot 816 =$
	$V = V_1 + V_2$	$3 \cdot 137 + 1 \cdot 059 = 4 \cdot 196$	$2 \cdot 763 + 1 \cdot 059 =$
	$10^3 K = U - V$	$13 \cdot 190$	
	$Q = U : (U - V)$	$1 \cdot 3181$	
$m_2 = 0 \cdot 07$	$U = U_1 + U_2$	$12 \cdot 570 + 5 \cdot 618 = 18 \cdot 188$	$11 \cdot 427 + 5 \cdot 618 =$
	$V = V_1 + V_2$	$3 \cdot 137 + 1 \cdot 301 = 4 \cdot 438$	$2 \cdot 763 + 1 \cdot 301 =$
	$10^3 K = U - V$	$13 \cdot 750$	
	$Q = U : (U - V)$	$1 \cdot 3228$	
$m_2 = 0 \cdot 08$	$U = U_1 + U_2$	$12 \cdot 570 + 6 \cdot 421 = 18 \cdot 991$	$11 \cdot 427 + 6 \cdot 421 =$
	$V = V_1 + V_2$	$3 \cdot 137 + 1 \cdot 555 = 4 \cdot 692$	$2 \cdot 763 + 1 \cdot 555 =$
	$10^3 K = U - V$	$14 \cdot 299$	
	$Q = U : (U - V)$	$1 \cdot 3281$	

Verhältnis $\left(\frac{K_r}{K}\right)$. Messen wir die Leitfähigkeit K der unverdünnten Mischung und zugleich (für mehrere Verdünnungen) das K_r, so können wir nach (5) das Q ermitteln, so daß aus (14) der Wert der Summe Am_1+Bm_2 sich sicher ergibt. Ist demnach z. B. durch irgend ein Verfahren die Menge m_1 des NaCl bekannt, so läßt sich aus Widerstandsmessungen allein nach (14) die Menge der Achloride m_2 ermitteln.[1]

Auch die Barmwarter'sche Gleichung hätte diese so wichtige Relation (14) geliefert, nur hätten die Konstanten A und B andere Werte erhalten. (Für ein einzelnes Salz gilt eine analoge, leicht zu prüfende Beziehung.)

Da neben der Gleichung (14) die weitere Beziehung $V = 10^3 K.(Q-1)$, d. i.

$$Cm_1^{1/3}+Dm_2^{1/3} = 10^3 K.(Q-1) \qquad (15)$$

besteht, so muß es möglich sein, aus den durch die Versuche bekannten Größen K und Q an der Hand von (14) und (15) die beiden Unbekannten m_1 und m_2 zu ermitteln.

Wird eine dieser zwei Unbekannten eliminiert, so stößt man auf eine Gleichung zwölften Grades, die praktisch nicht gut zu verwenden ist. Es wurde daher der umgekehrte Weg eingeschlagen und eine Tafel (vide Beilage) angelegt, in der für gegebene m_1 und m_2 die zugehörigen Werte von 10^3K und Q berechnet wurden. Eine solche Tafel gestattet in erster Annäherung m_1 und m_2 aus K und K_r zu bestimmen. Wir hätten z. B. für eine Lösung beobachtet unverdünnt $10^3K = 12 \cdot 441$ und verdünnt $10_3 K_{(7/4)} = 7 \cdot 4778$ und $10^3 K_2 = 6 \cdot 6151$, so berechnen wir uns zuerst $Q = \frac{r^{4/3}\frac{K_r}{K}-1}{r^{1/3}-1}$ für $r = 1 \cdot 75$ und $r = 2$ und finden hiefür: $1 \cdot 3104$ und $1 \cdot 3082$ also im Mittel $Q = 1 \cdot 3093$ und gehen nun mit den Werten: $10^3K = 12 \cdot 44$ und $Q = 1 \cdot 309$

[1] Nehmen wir für das Serum rund $Q = 1 \cdot 31$, für A und B ebenfalls einen Mittelwert, so können wir (14) angenähert schreiben: $m_1+m_2 = 1 \cdot 4^0/_0$ von (10^3K); ist m_1 bekannt, so findet man in roher Annäherung hieraus m_2, die Menge der Achloride.

in die Tafel ein. Man findet bei $10^3 K = 12 \cdot 421$ und $Q = 1 \cdot 3077$ die Werte $m_1 = 0 \cdot 10$ und $m_2 = 0 \cdot 06$.

Um für m_1 und m_2 genauere Werte zu erhalten, differenzieren wir die obigen Gleichungen und finden, wenn wir:

$$A - \frac{4}{3} C m_1^{1/3} = M_1, \; B - \frac{4}{3} D m_2^{1/3} = M_2$$

und

$$N = AM_2 - BM_1 = \frac{4}{3} [BC m_1^{1/3} - AD m_2^{1/3}]$$

setzen:

$$N . dm_1 = +10^3 K . M_2 . dQ + [QM_2 - B] . 10^3 . dK$$
$$N . dm_2 = -10^3 K . M_1 . dQ - [QM_1 - A] . 10^3 . dK.$$

Nehmen wir: $m_1 = 0 \cdot 1$, $m_2 = 0 \cdot 06$, so werden diese Gleichungen:

$$dm_1 = 2 \cdot 6387 . dQ - 0 \cdot 02334 . 10^3 dK$$
$$dm_2 = -3 \cdot 6021 . dQ + 0 \cdot 043764 . 10^3 dK.$$

Nun wurde beobachtet $Q = 1 \cdot 3092$, während die Tafel hiefür $1 \cdot 3077$ gab; wir können somit:

$$dQ = 1 \cdot 3092 - 1 \cdot 3077 = +0 \cdot 0015$$

und ebenso:

$$10^3 . dK = 12 \cdot 441 - 12 \cdot 421 = +0 \cdot 02$$

setzen und finden hiemit:

$$dm_1 = +0 \cdot 003958 - 0 \cdot 0004668 = +0 \cdot 003491$$
$$dm_2 = -0 \cdot 005403 + 0 \cdot 000975 = -0 \cdot 00443;$$

die verbesserten Werte von m_1 und m_2 werden:

$$m_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0035 = 0 \cdot 1035 \quad \text{statt } 0 \cdot 1026$$
$$m_2 = 0 \cdot 06 - 0 \cdot 00443 = 0 \cdot 05557 \quad \text{» } 0 \cdot 05655$$

da die als untersucht gedachte Lösung eben I ist.

Hiedurch erscheint der Grundgedanke meines Sohnes gerechtfertigt, daß sich aus Messungen der Leitfähigkeiten (in unverdünntem und verdünntem Zustande) allein schon die Werte von m_1 und m_2 ermitteln lassen müssen.

Solche Bestimmungen setzen aber sehr sorgfältige Messungen der Leitfähigkeiten voraus; schon ein Blick auf die Tafel zeigt uns, daß Q sehr genau bestimmt sein muß, da eine kleine Änderung des Q schon auf andere Werte von m_1 und m_2 hinweist.

Die Differentiationsformeln können wir auch schreiben:

$$10^3 dK = M_1 . dm_1 + M_2 . dm_2$$

und

$$-10^3 K . dQ = [QM_1 - A] dm_1 + [QM_2 - B] dm_2,$$

d. i. mit den Mittelwerten $m_1 = 0 \cdot 1$ und $m_2 = 0 \cdot 06$

$$10^3 dK = 80 \cdot 8 . dm_1 + 59 \cdot 2 . dm_2$$

und

$$dQ = 1 \cdot 048 . dm_1 + 0 \cdot 49 . dm_2 .$$

Hieraus ersieht man, daß, wenn nur m_1 zunimmt, Q und $10^3 K$ stärker zunehmen, als wenn nur m_2 um den gleichen Betrag wie m_1 wächst. Sei z. B. $dm_1 = 0 \cdot 01$ und $dm_2 = 0 \cdot 01$, so wird

$$10^3 dK = 0 \cdot 808 + 0 \cdot 592$$

und

$$dQ = 0 \cdot 0105 + 0 \cdot 0049;$$

es sind also die ersten Summanden viel größer als die zweiten.

Ähnliches zeigen die obigen Formeln für dm_1 und dm_2; eine Änderung des dQ um nur $0 \cdot 01$ vermehrt — bei konstantem $10^3 K$ — das m_1 um $0 \cdot 026$ und vermindert m_2 um $0 \cdot 036$. Eine kleine Unsicherheit in der Bestimmung von Q kann somit die Ermittlung des m_1 und m_2 schon etwas ungenau machen. Wird man daher das Verfahren, m_1 und m_2 durch sehr sorgfältige Widerstandsmessungen zu erhalten, nur in selteneren Fällen anwenden, so empfiehlt es sich hingegen sehr, von der Gleichung (14):

$$Am_1 + Bm_2 = 10^3 K . Q$$

Gebrauch zu machen. Innerhalb der obigen, doch ziemlich weiten Grenzen von m_1 und m_2 ändert sich eben Q nur wenig; wenige, aber gute Beobachtungen werden schon ein für die Anwendung von (14) hinreichend genaues Q liefern; als rohen Mittelwert kann man $1 \cdot 31$ nehmen.

Neben der praktischen Verwendbarkeit der obigen Beziehung (10) bietet auch die theoretische Seite einiges Interesse. Zunächst liefert sie zwangslos eine Erklärung von Oker-Blom's oben erwähnter Beobachtung. Trägt man r als Abszissen, $10^3 K_r . r$ als Ordinaten einer Kurve auf, so bildet die Tangente an diese Kurve mit der Abszissenachse den Winkel α, der gegeben ist durch

$$\operatorname{tg} \alpha = + \frac{1}{r^{1/3}} [C m_1^{1/3} + D m_2^{1/3}],$$

also mit steigender Verdünnung immer kleiner wird.

Hätten wir eine zweite Kurve konstruiert, wo die Abszissen gleichfalls durch r, die Ordinaten aber — sich nur auf NaCl beziehend — durch $10^3 K_r . r = A_0 m_1 - \frac{1}{r^{1/3}} C_0 m_0^{1/3}$ ausgedrückt sind, so würde die Tangente an diese zweite Kurve einen Winkel β mit der Abszissenachse einschließen, für den

$$\operatorname{tg} \beta = + \frac{1}{r^{1/3}} C_0 m_1^{1/3}$$

sein müßte.

Nun ist $C = 59 \cdot 52$, $C_0 = 39 \cdot 70$, so daß unbedingt

$$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$$

ist oder die erste Kurve — die der Mischung von NaCl und Na_2CO_3 entspricht — **viel steiler** ansteigt als die zweite, die sich nur auf die Kochsalzlösung bezieht. Das ist eben die Beobachtung von Oker-Blom.

Merkwürdigerweise ist

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{C}{C_0} + \frac{D}{D_0} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/3}$$

nur abhängig von dem Verhältnis $\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$ und unabhängig von der Verdünnung r. Die Vermutung, daß bei diesem steileren Ansteigen die Menge des Na_2CO_3 eine Rolle spielt, ist also

berechtigt, wenn auch nicht der absolute Wert von m_2, sondern das Verhältnis $\frac{m_2}{m_1}$ eine Rolle spielt.[1]

Weitere Aufschlüsse bekommen wir an der Hand der obigen Formeln über die Dissoziationsverhältnisse und die Erfüllung des Massenwirkungsgesetzes.

Wir nahmen (p. 995) an, daß $K = k_1 + k_2$ sei, wobei

$$10^3 k_1 = A m_1 - C m_1^{4/3}$$

sich auf das Kochsalz und

$$10^3 k_2 = B m_2 - D m_2^{4/3}$$

sich auf das Natriumcarbonat beziehen; dabei ist

$A = 114 \cdot 27$, $B = 80 \cdot 26$, $C = 59 \cdot 52$ und $D = 45 \cdot 10$,

während für die Einzellösungen

$A_0 = 110 \cdot 36$, $B_0 = 118 \cdot 57$, $C_0 = 39 \cdot 70$ und $D_0 = 104 \cdot 88$

ist; in der Mischung haben wir gewissermaßen die Übereinanderlagerung von zwei geänderten Einzellösungen.

Nennen wir Λ das Äquivalentleitvermögen des NaCl in der Mischung, d. i. $\Lambda = \frac{10^3 k_1}{m_1} = A - C m_1^{1/3}$ und Λ_0 das Äquivalentleitvermögen, wenn nur NaCl gelöst wäre, d. i. $\Lambda_0 = A_0 - C_0 m_1^{1/3}$, so wird:

$$\Lambda - \Lambda_0 = (A - A_0) - (C - C_0) m_1^{1/3} = +3 \cdot 91 - 19 \cdot 82 . m_1^{1/3}.$$

Diese Differenz ist aber innerhalb der obigen Grenzen negativ, denn erst für $m_1 = 0 \cdot 007678$ wäre $\Lambda - \Lambda_0 = 0$.

Das Äquivalentleitvermögen der NaCl-Lösung hat also durch die Mischung mit Na_2CO_3 abgenommen.

---

[1] Hat man aus der Tafel Näherungswerte von m_1 und m_2 erhalten, so kann man auf diese Art durch Konstruktion aus den Mittelwerten von $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$ auch einen angenäherten Wert von $\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$ erhalten.

So wird bei

$$\text{IV}\ldots\ldots m_1 = 0\cdot102564,\quad \Lambda-\Lambda_0 = -5\cdot37$$
$$\text{I}\ldots\ldots m_1 = 0\cdot068376,\quad \Lambda-\Lambda_0 = -4\cdot19 \text{ etc.}$$
$$\Lambda-\Lambda_0 = \text{negativ.}$$

Analoges gilt für die Na_2CO_3-Lösung. Hier haben wir ebenfalls:

$$\Lambda'-\Lambda'_0 = (B-B_0)+(D_0-D)\,m_2^{1/3} =$$
$$= -38\cdot31+59\cdot78\,m_2^{1/3} = \text{negativ,}$$

denn diese Differenz verschwindet erst bei $m_2 = 0\cdot2632$.

So ist z. B. Lösung IV: $m_2 = \frac{6}{53\cdot05} = 0\cdot1131$ und

$\Lambda'-\Lambda'_0 = -38\cdot31+28\cdot91 = -9\cdot40$, also negativ.

Es hat also auch das Äquivalentleitvermögen des Na_2CO_3 abgenommen. Die Dissoziationen α müssen demnach — gleiche Beweglichkeiten vorausgesetzt — ebenfalls abgenommen, respektive die Assoziationen $\beta = (1-\alpha)$ zugenommen haben.

Wir haben für die Kochsalzlösung $\alpha = \frac{A}{A_0} - \frac{C}{A_0}\,m_1^{1/3}$ und $\alpha_0 = 1 - \frac{C_0}{A_0}\,m_1^{1/3}$ und finden hieraus für die Änderung der Assoziation von $\beta_0 = 1-\alpha_0$ auf $\beta = 1-\alpha$ sehr nahe die Beziehung

$$\frac{\beta-\beta_0}{\beta_0} = 0\cdot5-0\cdot1\times m_1^{-1/3} = \text{positiv,}$$

z. B. für $m_1 = 0\cdot102564$ wird $\frac{\beta-\beta_0}{\beta_0} = 0\cdot5-0\cdot2136 = +0\cdot29$ etc. Desgleichen liefert die Na_2CO_3-Lösung

$$\frac{\beta'-\beta'_0}{\beta'_0} = -0\cdot570+0\cdot3653\times m_2^{-1/3} = \text{positiv,}$$

z. B. für $m_2 = 0\cdot05655$ wird $\frac{\beta'-\beta'_0}{\beta'_0} = -0\cdot5700+0\cdot9516 =$ $= +0\cdot3816$ u. s. w.

Untersucht man zum Schlusse, inwieweit das Massenwirkungsgesetz erfüllt ist, so sollte nach diesem

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}[\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2] = C_1$$

und

$$\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}[\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2] = C_2$$

sein, wo C_1 und C_2 Konstante vorstellen. Nun ist:

$$\alpha_1 m_1 = \frac{A m_1 - C m_1^{4/3}}{A_0} = \frac{10^3 k_1}{110 \cdot 36}$$

$$\alpha_2 m_2 = \frac{10^3 k_2}{B_0} = \frac{10^3 k_2}{118 \cdot 57}.$$

Da A_0 und B_0 nur wenig verschieden sind, so können wir für jede dieser Größen einen Mittelwert (etwa 114·5) setzen und bekommen:

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = \frac{10^3 k_1 + 10^3 k_2}{114 \cdot 5} = \frac{10^3 K}{114 \cdot 5}.$$

Es muß demnach, wenn noch $1-\alpha_1 = \beta_1$, $1-\alpha_2 = \beta_2$, $114 \cdot 5\, C_1 = c_1$, $114 \cdot 5\, C_2 = c_2$ gesetzt wird,

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 10^3 K = c_1 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2} \cdot 10^3 K = c_2 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

sein. Die nachfolgende Tafel zeigt, wie weit diese Beziehungen erfüllt sind:

m_1	m_2	$10^3 K$	c_1	c_2	$\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{m_2}{m_1}$
0·1	0·08	13·53	0·432	0·101	4·28	0·8
0·05	0·08	9·484	0·424	0·071	6·00	1·6
0·1	0·03	10·652	0·340	0·118	2·88	0·3
0·05	0·03	6·606	0 296	0·073	4·05	0·6
Mittel . .	—	—	$c_1 = 0 \cdot 373$	$c_2 = 0 \cdot 091$	$\frac{c_1}{c_2} = 4 \cdot 30$	—

Man erkennt, daß das Massenwirkungsgesetz in der vorliegenden Form nur in roher Annäherung erfüllt ist; es treten Werte von c_1 und c_2 auf, die um ein Fünftel des Mittelwertes von diesem entfernt sind. Man sieht ferner, daß, wenn m_2 konstant bleibt, dies auch c_1 tut und in gleicher Weise mit der Konstanz von m_1 auch die von c_2 verbunden ist. Es wachsen c_1 mit m_2 und c_2 mit m_1, so daß das Verhältnis $\frac{c_1}{c_2}$ sich, wie die letzte Kolonne zeigt, ähnlich verhält wie der Quotient $\frac{m_2}{m_1}$.

Die von Kohlrausch 1902 aufgestellte Annahme, daß jedes Ion mit einer umschließenden Wasserhülle verbunden sei, die nach Biltz und Bousfield (Zeitschrift für physik. Chemie, *53*, 258 [1905]) mit wachsender Verdünnung zunehme, spricht ebenfalls für eine Abänderung des obigen Ausdruckes des Massenwirkungsgesetzes.

Zur Ableitung des mathematischen Ausdruckes des zweiten Hauptsatzes

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 12. Juli 1906.)

Im folgenden ist ein neuer Weg angegeben, aus der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile zweiter Art den Satz abzuleiten, daß dQ/T ein vollständiges Differential ist.

Es sei eine beliebige Menge verschiedener Körper gegeben, die alle die Temperatur T besitzen. Es ist unmöglich, eine periodisch funktionierende Maschine zu konstruieren, die nichts anderes bewirkt als Arbeitsleistung auf Kosten des Wärmeinhaltes obigen Wärmereservoirs; eine solche wäre ein Perpetuum mobile zweiter Art.

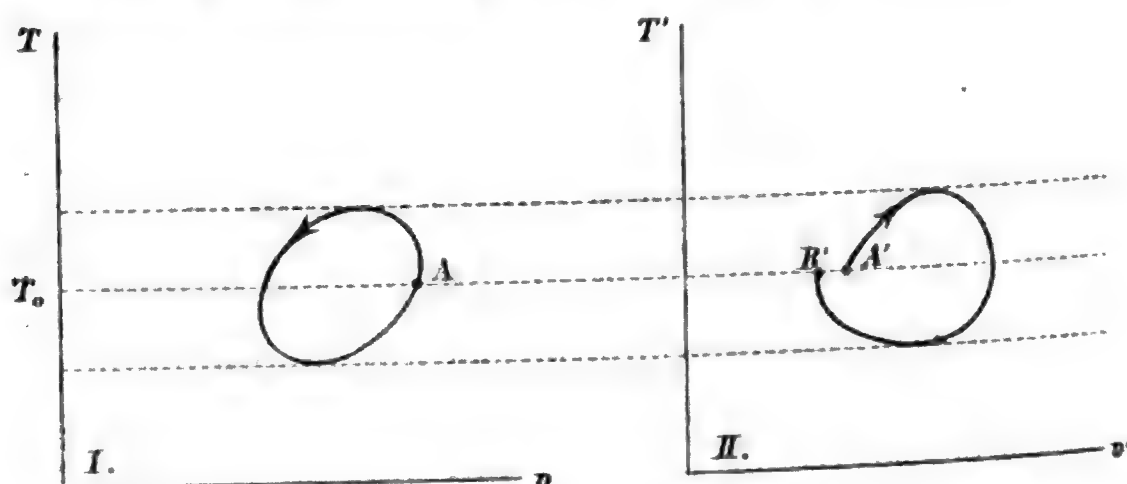
Wir wählen nun aus den obigen Körpern zwei beliebige, den Körper I und den Körper II aus. Wir bringen beide in Gefäße von veränderlichem Volumen, die wir so aneinander stellen, daß zwischen I und II Wärmeaustausch möglich ist; die beiden Körper werden dann stets dieselbe Temperatur haben. Sonst umschließen wir die beiden Körper mit einer adiabatischen Hülle, so daß nach außen kein Wärmeaustausch möglich ist. Die Wärme, die I abgibt, muß also von II aufgenommen werden und umgekehrt.

Die Zustandsvariablen von I seien p, v, T, die von II p', v', T'. Es ist stets $T' = T$.

Wir lassen jetzt I einen beliebigen Kreisprozeß durchlaufen. Die dabei frei werdende Wärme wird von II aufgenommen; also wird auch II eine Reihe von Zuständen durchlaufen, wobei stets die Temperatur von II gleich der von I ist.

Die Figur stellt dies im v, T-Diagramm dar; das linke Diagramm bezieht sich auf I, das rechte auf II. Die Anfangszustände sind durch A und A' gegeben; beide entsprechen der Temperatur T_0. Ist der Kreisprozeß von I durchlaufen, so ist dieser Körper wieder im Zustande A; der Körper II sei dann im Zustande B', welcher auch auf der Isotherme T_0 liegen muß.

Liegt der Punkt B' links von A', so können wir die Verbindung von I und II lösen, den Körper II mit den übrigen Körpern des Reservoirs verbinden und, da dieselben ja auch die Temperatur T_0 haben, den Körper II sich isotherm ausdehnen lassen, wobei Arbeit geleistet wird, die auf Kosten der Wärme des Reservoirs geht. Ist II wieder im Zustande A', so



ist alles im alten Zustande; es wurde aber Arbeit gewonnen. Wir können diesen Vorgang beliebig oft wiederholen; wir haben also ein Perpetuum mobile zweiter Art. Der Punkt B' kann also nicht links von A' liegen. Ebensowenig darf er rechts liegen; denn dann würde der Prozeß, in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen, wieder ein Perpetuum mobile zweiter Art liefern.

Es muß also B' mit A' zusammenfallen; d. h., wenn I einen Kreisprozeß durchläuft, so gelangt auch II wieder in den anfänglichen Zustand.

Die mathematische Formulierung dieser Tatsache ist leicht gefunden:

Wir schreiben das Differential der zugeführten Wärme für I in der Form:

$$dQ = X dT + Y dv,$$

für II:

$$dQ' = X'dT' + Y'dv'.$$

Es muß nun $dQ' = -dQ$, $dT' = dT$ sein; also

$$X'dT + Y'dv' = -XdT - Ydv$$

oder

$$dv' = -\frac{1}{Y'}[(X+X')dT + Ydv].$$

Da v' wieder denselben Anfangswert annehmen soll, wenn T und v dies tun, muß der obige Ausdruck für dv' ein vollständiges Differential sein. Es muß also sein:

$$\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_T \frac{X+X'}{Y'} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_v \frac{Y}{Y'}$$

oder

$$Y'.\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_T (X+X') - (X+X')\left(\frac{\partial Y'}{\partial v}\right)_T = Y'\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_v - Y\left(\frac{\partial Y'}{\partial T}\right)_v.$$

Nun ist X' und Y' ursprünglich als Funktion von v' und $T' = T$ gegeben; wir finden aber:

$$\left(\frac{\partial X'}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial X'}{\partial T}\right)_{v'} + \left(\frac{\partial X'}{\partial v'}\right)_T \left(\frac{\partial v'}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial X'}{\partial T}\right)_{v'} - \left(\frac{\partial X'}{\partial v'}\right)_T \cdot \frac{X+X'}{Y'}$$

$$\left(\frac{\partial X'}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial X'}{\partial v'}\right)_T \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)_T = -\left(\frac{\partial X'}{\partial v'}\right)_T \cdot \frac{Y}{Y'}$$

und analog für Y'.

Setzen wir dies ein, so erhalten wir nach einer einfachen Reduktion (die Indizes können jetzt weggelassen werden):

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial T}\right) = \frac{1}{Y'}\left(\frac{\partial X'}{\partial v'} - \frac{\partial Y'}{\partial T'}\right).$$

Da die Körper I und II ganz beliebig waren, muß also der Ausdruck

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial T}\right)$$

für alle Körper (bei derselben Temperatur) den gleichen Wert haben. (Er kann nur eine Funktion der Temperatur sein.) Bei

einem idealen Gase hat der Ausdruck den Wert $-\frac{1}{T}$; deshalb muß allgemein

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial Y}{\partial T}-\frac{\partial X}{\partial v}\right)=\frac{1}{T}$$

sein. Daraus folgt

$$\frac{1}{T}\frac{\partial X}{\partial v}=\frac{1}{T}\frac{\partial Y}{\partial T}-\frac{Y}{T^2}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{T}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{Y}{T}\right),$$

d. h. es ist dQ/T ein vollständiges Differential.

Unsere Betrachtung basiert darauf, daß man zwei Körpern Wärme zuführt, respektive entzieht, wobei die Temperatur beider konstant bleiben soll. Es wäre natürlich möglich, daß man dadurch in labile oder unmögliche Zustände kommt. Der eine der beiden Körper spielt aber hier nur die Rolle eines Hilfskörpers; wir können also ein ideales Gas dafür wählen. Der andere Körper aber braucht bloß mögliche Zustände anzunehmen; der zweite Hauptsatz hat ja nur für solche zu gelten.

Wir könnten jetzt natürlich auch zeigen, daß für irreversible Zustandsänderung die bekannte Ungleichung zu gelten hat. Wir bemerken jedoch nur, daß bei irreversiblem Vorgange der Punkt B' nicht mit A' zusammenfallen muß; er darf jedoch nicht links von A' liegen, sondern nur rechts.

Die Fehlerkurven der photographischen Punktbestimmung

von

Prof. **A. Klingatsch** in Graz.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1906.)

I.

Werden in den Endpunkten einer gemessenen Standlinie photogrammetrische Aufnahmen gemacht, so kann aus den Abbildungen der Raumpunkte die Lage der letzteren in bekannter Weise abgeleitet werden. Wir untersuchen die Genauigkeit in der Bestimmung ihrer Projektion auf eine horizontale Ebene und setzen die Bildebene des Apparates als vertikal voraus.

In Fig. 1 bezeichnet:

$\overline{O_1O_2} = c$ die Standlinie,

P_1, P_2 die Abbildung von P auf eine in der Bilddistanz $\overline{O_1A_1} = \overline{O_2A_2} = f$ gelegte Parallelebene E_1, respektive E_2 zur Bildebene,

$\varphi_1 \varphi_2$ die Orientierungswinkel der optischen Achse,

$\overline{A_1P_1} = u_1$ $\overline{A_2P_2} = u_2$ die auf der Platte zu messende Abszisse, bezogen auf das Achsenkreuz der Platte.

$\alpha_1 \alpha_2$ die Richtungswinkel.

Da sich P im Schnitt der beiden Geraden O_1P_1, O_2P_2 ergibt, so ist die Genauigkeit dieser Punktbestimmung, also auch der erstere bestimmende mittlere Fehler M dieses Schnittpunktes eine Funktion des Schnittwinkels $O_1PO_2 = \gamma$ sowie der mittleren als bekannt anzusehenden Parallelverschiebungen m', m'', welche die Geraden O_1P_1, O_2P_2 infolge der Justierungs- und

Messungsfehler erfahren. Hiebei ist nach dem zuerst von Helmert[1] veröffentlichten Ausdrucke

$$M^2 = \frac{m'^2 + m''^2}{\sin^2 \gamma}, \qquad \ldots 1)$$

nach welchem für jede gegebene Lage von P, M gefunden werden kann.

Von allgemeineren Gesichtspunkten können Genauigkeitsuntersuchungen durchgeführt werden, wenn man diejenigen

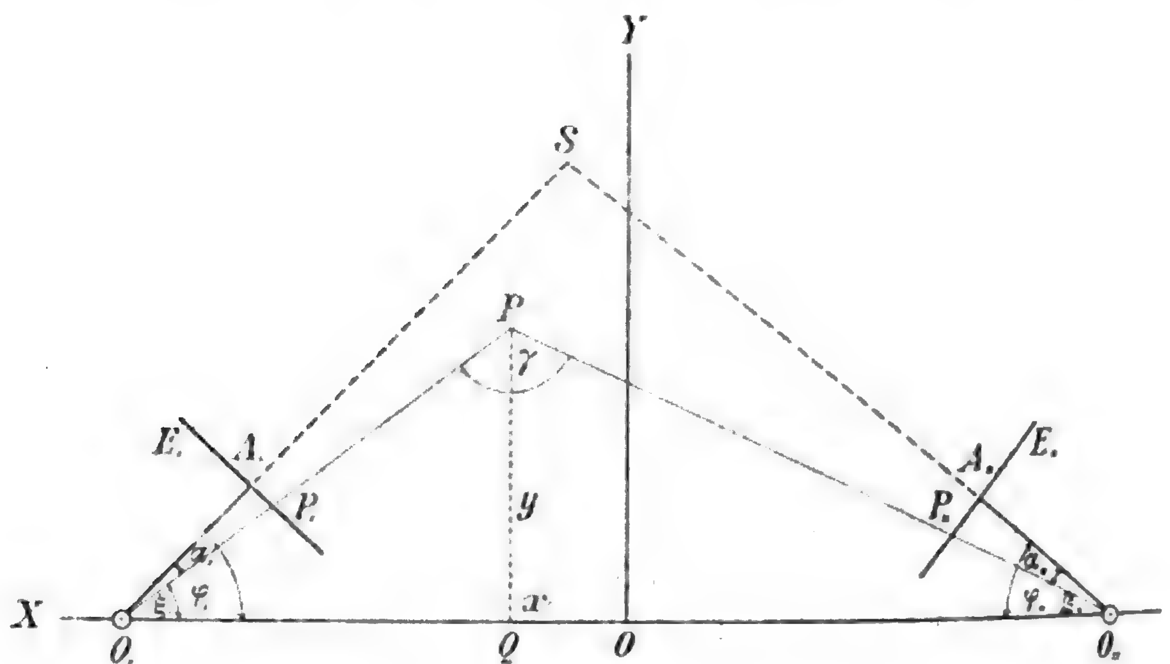


Fig. 1.

Kurven bestimmt, in welchen M konstant bleibt. Man erhält dann Kurvenscharen gleicher Genauigkeit, welche in der Folge als Fehler- oder Genauigkeitskurven bezeichnet werden sollen. In diesen ist bei gegebenen c, $\varphi_1\,\varphi_2$ der Punktfehler der Parameter.

Für andere Orientierungswinkel $\varphi'_1\,\varphi'_2$ erhält man eine andere Kurvenschar; man kann dann aus den früher definierten Fehlerkurven weitere dadurch ableiten, daß stets eine Kurve C der Schar $\varphi_1\,\varphi_2$ mit derjenigen C' der Schar $\varphi'_1\,\varphi'_2$ zum Schnitt gebracht werden soll, für welche das Verhältnis der diesen beiden Kurven entsprechenden mittleren Punktfehler konstant

[1] Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1868, p. 84.

ist. Man erhält dadurch Kurven für konstantes Fehlerverhältnis, welche also einen Einblick in die relative Genauigkeit der den Aufnahmen $\varphi_1 \varphi_2$ und $\varphi_1' \varphi_2'$ entsprechenden beiden Punktbestimmungen geben.

Endlich kann noch die Abhängigkeit des Punktfehlers für einen gegebenen Punkt von den Orientierungswinkeln $\varphi_1 \varphi_2$ untersucht werden.

Die hier angedeuteten Probleme sind Gegenstand dieser Abhandlung, wodurch auch die Grundlagen für die analogen Untersuchungen im Raum gegeben sind.

II.

Der Halbierungspunkt O von $O_1 O_2$ wird zum Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems angenommen; $\overline{OO_1}$ sei die positive Richtung der x.

Sind m'_α, m''_α die mittleren Fehler von $\alpha_1 \alpha_2$ und werden die Orientierungswinkel $\varphi_1 \varphi_2$ fehlerfrei vorausgesetzt, so sind die mittleren Parallelverschiebungen $m' m''$ von $O_1 P$, $O_2 P$ gegeben durch

$$m' = \overline{O_1 P} . m'_\alpha, \qquad m'' = \overline{O_2 P} . m''_\alpha.$$

Wegen

$$\overline{O_1 P} . \overline{O_2 P} . \sin \gamma = c . y,$$

wird aus 1)

$$c^2 . y^2 . M^2 = \overline{O_1 P^4} . \overline{O_2 P^2} m'^2_\alpha + \overline{O_1 P^2} . \overline{O_2 P^4} m''^2_\alpha. \qquad \ldots 2)$$

Da

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{u_1}{f}, \text{ also } d\alpha_1 = \frac{\cos^2 \alpha_1 . du - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 df}{f}$$

ist, so erhält man, wenn für $d\alpha_1$, du, df die mittleren unregelmäßigen Fehler $\pm m'_\alpha$, $\pm m_u$, $\pm m_f$ gesetzt werden,

$$m'^2_\alpha = \frac{(\cos^2 \alpha_1 m_u^2 + \sin^2 \alpha_1 m_f^2) \cos^2 \alpha_1}{f^2}. \qquad \ldots 3)$$

In 3) bedeutet demnach m_u den mittleren Fehler in der Plattenausmessung, m_f jenen in der Bestimmung der Bilddistanz. In jenen Fällen, wo für die erstere eigene Apparate

Verwendung finden, ist m_u wesentlich kleiner als m_f. Bei der Anwendung der Photogrammetrie zu geodätischen Aufnahmen erfolgt jedoch die Ausmessung auf den Positiven mit Benützung von Transversalmaßstäben, so daß in diesem Falle die Genauigkeit in der Entnahme von u annähernd ebenso groß ist, wie der Fehler in der Bestimmung der Bilddistanz, so daß für die weitere Untersuchung $m_u = m_f$ gesetzt werden kann.

Man erhält dann aus 3)

$$m_\alpha'^2 = \frac{\cos^2 \alpha_1 . m_f^2}{f^2} \text{ und ebenso } m_\alpha''^2 = \frac{\cos^2 \alpha_2 . m_f^2}{f^2}. \qquad \ldots 4)$$

Da endlich

$$\cos \alpha_1 = \frac{y . \sin \varphi_1 + \left(\frac{c}{2} - x\right) \cos \varphi_1}{\overline{O_1 P}},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{y . \sin \varphi_2 + \left(\frac{c}{2} + x\right) \cos \varphi_2}{\overline{O_2 P}},$$

$$\overline{O_1 P} = \sqrt{\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2}, \qquad \overline{O_2 P} = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2}$$

ist, so ergibt sich aus 4) und 2) die Gleichung der Fehlerkurven

$$\left[\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2\right] \left[\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2\right] \left[\left(y \sin \varphi_1 + \left(\frac{c}{2} - x\right) \cos \varphi_1\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(y \sin \varphi_2 + \left(\frac{c}{2} + x\right) \cos \varphi_2\right)^2\right] - \mu^2 y^2 = 0 \qquad \ldots 5)$$

oder

$$F(x, y, \varphi_1 \varphi_2 \mu) = 0,$$

wobei

$$\mu = \frac{c . f . M}{m_f} \qquad \ldots 6)$$

gesetzt wurde.

Da in 6) c, f, m_f gegebene konstante Größen sind, so entspricht jedem Werte von M ein ebensolcher μ, so daß für die durch 5) bestimmte Kurvenschar C_6, μ den Parameter bildet.

III.

Zum Zwecke einer geometrischen Erzeugung dieser Fehlerkurven bringen wir das Kreisbüschel mit den Grundpunkten $O_1 O_2$

$$x^2 + \left(y - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}\right)^2 = r^2 \qquad \ldots 7)$$

in Beziehung zu der Schar konzentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen

$$\left(y \sin\varphi_1 + \left(\frac{c}{2} - x\right)\cos\varphi_1\right)^2 + \\ + \left(y \sin\varphi_2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)\cos\varphi_2\right)^2 = r_1^2 \qquad \ldots 8)$$

wo in 6) und 7) r — der Kreishalbmesser — und r_1 die Parameter sind.

Für die Abszisse p und die Ordinate q des Mittelpunktes Ω der konzentrischen Ellipsenschar erhält man in dem früheren Achsensystem

$$p = -c.\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{2.\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad q = -c.\frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad \ldots 9)$$

während die Achsenrichtungen durch

$$\psi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \text{ und } \psi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \pm 90 \qquad \ldots 10)$$

bestimmt sind, hiebei ψ von der positiven Richtung der x im rechtsläufigen Sinne gezählt.

Die Halbachsen a, b sind

$$a^2 = \frac{r_1^2}{2.\cos^2\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}, \quad b^2 = \frac{r_1^2}{2.\sin^2\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}; \qquad \ldots 11)$$

somit ist das konstante Achsenverhältnis

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \qquad \ldots 12)$$

Mit $r_1 = 0$ genügen p, q der Gleichung 8); die entsprechende Ellipse reduziert sich auf den Punkt Ω.

Die Parameter r, r_1 sollen nun der Bedingung

$$r . r_1 = \frac{\mu}{2} \qquad \ldots 13)$$

entsprechen.

Dann ist also jedem Kreis des Büschels eine Ellipse der Schar zugeordnet. Der Ort für die Schnitte der entsprechenden C_2 ergibt sich durch Elimination von r, r_1 aus 7), 8) und 13) als die frühere durch 5) ausgedrückte dem Parameter μ entsprechende C_6.

Die Fehlerkurven werden daher als Schnitte eines Kreisbüschels mit den Grundpunkten $O_1 O_2$ und einer Schar konzentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen erzeugt, wobei die Parameter r, r_1 der entsprechenden Kurven der Bedingung 13) zu genügen haben.

Nachstehend die speziellen Fälle:

a) $\varphi_1 + \varphi_2 = 90$.

Der Schnitt S (Fig. 1) der den Aufnahmen in O_1 und O_2 entsprechenden optischen Achsen des Apparates liegt dann im Halbkreis über $O_1 O_2$.

Aus 9) wird

$$p = \frac{c}{2} \cos 2\varphi_1, \quad q = -\frac{c}{2} \sin 2\varphi_1, \qquad \ldots 9a)$$

während 11) wegen 13)

$$a^2 = b^2 = \frac{\mu^2}{4 r^2} \qquad \ldots 11a)$$

gibt.

Die Schar konzentrischer Ellipsen geht daher in diesem Falle in eine Schar konzentrischer Kreise über, deren Mittelpunkt Ω wegen $9a)$ mit S einen Durchmesser des Kreises $r = \frac{c}{2}$ gibt.

Jedem r des Kreisbüschels entspricht somit bei gegebenem μ der aus $11a)$ folgende Kreishalbmesser a der konzentrischen Schar.

$b)\ \varphi_1 = \varphi_2.$

Es wird aus 9)

$$p = 0, \quad q = -\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\varphi_1 \qquad \ldots 9b)$$

und aus 11) wegen 13)

$$a^2 = \frac{\mu^2}{8r^2.\cos^2\varphi_1}, \quad b^2 = \frac{\mu^2}{8r^2.\sin^2\varphi_1}. \qquad \ldots 11b)$$

Ist überdies

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 45°,$$

so erhält man aus $9a$), $9b$) und $11a$), $11b$) übereinstimmend

$$p = 0, \quad q = -\frac{c}{2} \qquad \ldots 9'b)$$

$$a^2 = b^2 = \frac{\mu^2}{4r^2} \qquad \ldots 11'b)$$

und demnach zwischen zwei entsprechenden Kreisen des Büschels und der Schar bei gegebenem μ die Beziehung

$$a.r = \frac{\mu}{2} \qquad \ldots 14)$$

$c)\ \varphi_1 + \varphi_2 = 180.$

Aus 9) und 10) folgt

$$p = \infty, \quad q = \infty, \quad \psi = 90 - \varphi_1,$$

während 8) die beiden parallelen und zu den Richtungen φ_1, φ_2 normalen Geraden

$$y = \operatorname{cotg}\varphi_1 . x \pm \frac{1}{2r.\sin\varphi_1}\sqrt{\frac{\mu^2}{2} - r^2.c^2.\cos^2\varphi_1} \qquad \ldots 11c)$$

gibt.

Die konzentrischen Ellipsen gehen in diesem Falle in ein Parallelstrahlenbüschel über. Jedem r des Kreisbüschels entsprechen somit zwei Strahlen in letzterem, welche auf der Y gleiche Abschnitte bestimmen.

IV.

Wir untersuchen die C_6 in den folgenden beiden speziellen Fällen.

$$a)\ \varphi_1 = \varphi_2 = 90.$$

Die Achsen des photographischen Apparates sind bei beiden Aufnahmen zueinander parallel, und zwar senkrecht zur Standlinie $O_1 O_2$.

Aus 5) folgt die Gleichung der Fehlerkurven

$$\left[\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2\right]\left[\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2\right] - \frac{\mu^2}{2} = 0. \quad \ldots 5a)$$

Die Kurven konstanten Punktfehlers sind in diesem Falle konfokale Cassinische Kurven mit $O_1 O_2$ als Brennpunkten.

Aus 11 c) wird

$$y = \pm \frac{\mu}{4r} \cdot \sqrt{2};$$

sie ergeben sich demnach als Schnitte eines Kreisbüschels mit einem zur Achse des letzteren parallelen Strahlenbüschel, woraus auch eine einfache Konstruktion dieser Kurven folgt.

Je nachdem $\mu \lesseqgtr \frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{2}$, hat man die bekannten Spezialitäten, nämlich zwei gesonderte Blätter, die Lemniscate oder eine Ovalfigur.

$$b)\ \varphi_1 = \varphi_2 = 45.$$

Aus 8) wird wegen 13) und 11′b)

$$\left(y + \frac{c}{2}\right)^2 + x^2 = a^2 \quad \ldots 8b)$$

und folglich die Gleichung der C_6

$$\left[\left(x^2 + y^2 - \frac{c^2}{4}\right)^2 + c^2 y^2\right]\left[\left(y + \frac{c}{2}\right)^2 + x^2\right] - \mu^2 y^2 = 0. \ldots 5b)$$

Auch in diesem Falle ist eine einfache Konstruktion nach 9′b) und 14) möglich. Da $r \gtreqless \frac{c}{2}$, liegt die jedem μ

entsprechende Kurve innerhalb des Kreises $a = \frac{\mu}{c}$ der konzentrischen Schar.

Da wegen 7)

$$\left(x^2+y^2-\frac{c^2}{4}\right)^2+c^2y^2=4r^2y^2$$

ist, wird wegen 8*b*)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\left(a^2\cdot\sqrt{r^2-\frac{c^2}{4}}+r^2\cdot y\right)x}{\left(4r^2-c^2-4y\sqrt{r^2-\frac{c^2}{4}}\right)a^2-4r^2y\left(y+\frac{c}{2}\right)}. \qquad \ldots 15)$$

Mit den zusammengehörigen Werten

$$y=0, \quad x=\frac{c}{2} \quad a=\frac{c}{2}\sqrt{2},$$

wird aus 15) wegen 14)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c}{\sqrt{4r^2-c^2}}=\frac{c^2}{\sqrt{2\mu^2-c^4}}. \qquad \ldots 16)$$

Dem Kreis der konzentrischen Schar durch die beiden Grundpunkte $O_1 O_2$ des Kreisbüschels entsprechen zwei zu X symmetrisch liegende Kreise in letzterem; die Tangenten in O_1 und O_2 an diese beiden Kreise sind wegen 16) auch Tangenten an die C_6. Solange also $\mu > \frac{c^2}{2}\sqrt{2}$ ist, sind die Tangenten in den Doppelpunkten O_1 und O_2 reell. Für $\mu = c^2$ durchschneiden sich die durch O_1 und O_2 gehenden Kurventeile rechtwinkelig, während mit $\mu = \frac{c^2}{2}\sqrt{2}$ die beiden Tangenten zusammenfallen; die Kurve besitzt in diesem Falle in O_1 und O_2 einen Rückkehrpunkt.

Für $r = \frac{c}{2}$ wird mit 7) und 15)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y+\frac{c}{2}}.$$

Der dem kleinsten reellen Kreise des Büschels entsprechende größte Kreis $a = \frac{\mu}{c}$ der konzentrischen Schar berührt somit die Kurve in den Schnittpunkten dieser beiden Kreise.

Mit $x = 0$ zerfällt 5*b*) in die beiden kubischen Gleichungen

$$y^3 + \frac{c}{2} y^2 + \left(\frac{c^2}{4} \pm \mu\right) y + \frac{c^3}{8} = 0, \qquad \ldots 17)$$

welche für den Wert

$$\mu = \mu_0 = \mp \left(3y^2 + cy + \frac{c^2}{4}\right) \qquad \ldots 18)$$

zwei gleiche reelle positive sowie zwei reelle negative Wurzeln geben. Mit den ersteren gibt 18) $\mu_0 = 0 \cdot 9026 c^2$ als den zugehörigen Wert des Parameters.

Ist $\mu > \mu_0$, so besteht die Kurve aus zwei getrennten Teilen, welche sich in den Doppelpunkten durchschneiden. Für $\mu = c^2$ zerfällt hiebei die C_6 in den Kreis

$$\left(y + \frac{c}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{c^2}{2}$$

durch $O_1 O_2$ mit dem Mittelpunkt Ω und in die C_4

$$(y^2 + x^2)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{2} cy - \frac{c^2}{16}\right) c^2 = 0,$$

wie auch unmittelbar klar ist, da für diesen Wert von μ wegen 14) der Kreis $a = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{2}$ mit einem der beiden entsprechenden Kreise r zusammenfällt, somit einen Bestandteil der C_6 bildet.

Für $\mu = \mu_0$ wird mit $x = 0$, wie immer $\frac{\partial F}{dx} = 0$ und wegen 18) auch $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$; die Kurve besitzt auf der positiven Ordinatenachse einen Doppelpunkt, dessen Ordinate den beiden positiven gleichen Wurzeln von 17) entspricht.

Ist $\mu_0 > \mu > \frac{c^2}{2} \sqrt{2}$, so besteht der den positiven Ordinaten entsprechende Teil aus zwei Blättern.

Wird $\mu < \frac{c^2}{2}\sqrt{2}$, so werden nach dem Früheren die Doppelpunktstangenten imaginär; die Kurve besitzt nur negative Ordinaten.

Dem Werte $\mu = 0$ endlich genügt in beiden Gleichungen 17) $y = -\frac{c}{2}$; die Kurve reduziert sich auf einen Punkt, den Mittelpunkt Ω der konzentrischen Kreise.

In Fig. 2 sind folgende Fälle dargestellt:

I	für den Parameter	$\mu = c^2$,
II	» » »	$\mu = \mu_0$,
III	» » »	$\mu = 0 \cdot 85\, c^2$,
IV	» » »	$\mu = \frac{c^2}{2}\sqrt{2}$,
V	» » »	$\mu = \frac{c^2}{2}$.

Von den Fehlerkurven kommen selbstverständlich nur die den positiven Ordinaten entsprechenden Teile und von letzteren nur diejenigen Stücke in Betracht, welche innerhalb des von dem Apparat bestrichenen Aufnahmsfeldes gelegen sind, für welche daher eine Realisierung der Abbildung erfolgt.

Nimmt man in 6) die Bilddistanz $f = 0 \cdot 184\, mm$, den mittleren Fehler ihrer Bestimmung $m_f = 0 \cdot 1\, mm$ und setzt $\mu = k.c^2$, so ist der mittlere Punktfehler $M = 0 \cdot 00054\, kc$, so daß sich für $c = 100\, m$ und $k = 1$, $k = 2, \ldots M = 0 \cdot 05\, m$, $M = 0 \cdot 10\, m$ ergibt.

V.

Für dieselbe Standlinie $\overline{O_1 O_2} = c$ gehört zu den Orientierungswinkeln $\varphi_1 \varphi_2$ eine Kurvenschar C_6, zu den Winkeln $\varphi'_1 \varphi'_2$, einer zweiten Punktbestimmung entsprechend, eine Schar C'_6, welche beziehungsweise den Gleichungen

$$F(x, y, \varphi_1 \varphi_2 \mu) = 0, \quad F(x, y, \varphi'_1 \varphi'_2 \mu') = 0 \qquad \ldots 19)$$

genügen.

Jedem Werte von μ entspricht eine bestimmte C_6, jedem Werte von μ' eine ebensolche C'_6. Es sollen nun solche Kurven

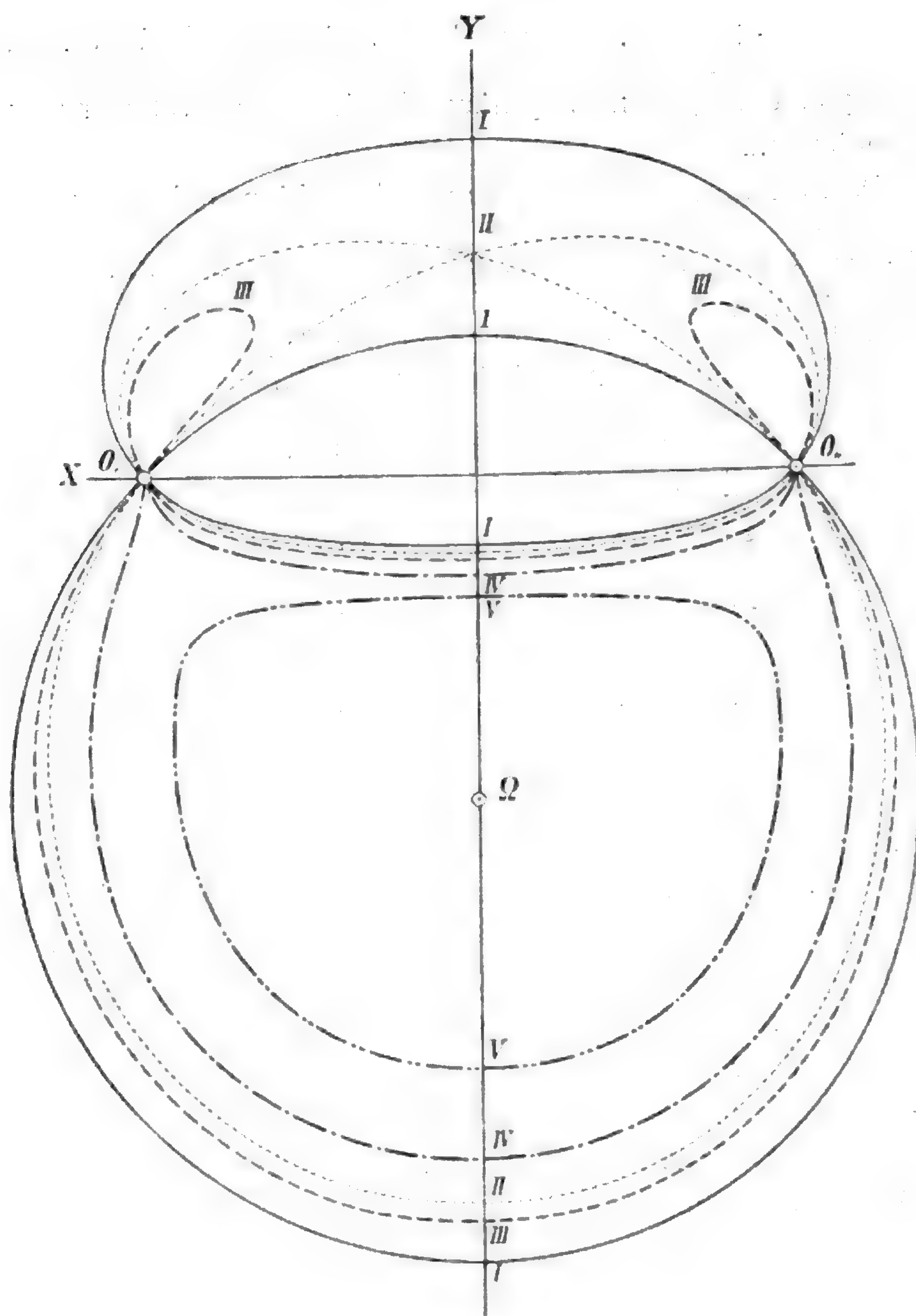


Fig. 2.

in den beiden Scharen als entsprechende bezeichnet und zum Schnitt gebracht werden, für welche das Verhältnis ihrer respektiven Parameter konstant ist, welche also der Bedingung

$$\frac{\mu^2}{\mu'^2} = n \qquad \ldots 20)$$

genügen.

Man erhält dadurch, wie schon im ersten Abschnitt bemerkt wurde, Kurven konstanten Fehlerverhältnisses. Da nämlich zwei Aufnahmen mit den Orientierungswinkeln $\varphi_1 \varphi_2$ die horizontale Projektion eines Punktsystems bestimmen und dasselbe von zwei anderen Aufnahmen mit den Winkeln $\varphi_1' \varphi_2'$ gilt, so entspricht der erwähnten Kurve die Gesamtheit aller Punkte, für welche sich aus beiden Bestimmungen dasselbe Verhältnis der mittleren Fehler ergibt. Der Parameter in den sich ergebenden Kurvenscharen ist somit n; die dem Werte $n = 1$ entsprechende Kurve gibt daher diejenigen Punkte, welche aus den beiden Paaren von Aufnahmen gleich genau erhalten werden.

Die Gleichung für die Schnittkurve entsprechender C_6 und C_6' ergibt sich durch Elimination von μ und μ' aus 19) und 20) und liefert die C_2

$$a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{13} x + a_{23} y + a_{33} = 0, \qquad \ldots 21)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= (\cos^2 \varphi_1' + \cos^2 \varphi_2')\, n - (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2) \\
a_{12} &= (\sin 2\varphi_2' - \sin 2\varphi_1')\, n - (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \\
a_{22} &= (\sin^2 \varphi_1' + \sin^2 \varphi_2')\, n - (\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2) \\
a_{13} &= (\cos^2 \varphi_2' - \cos^2 \varphi_1')\, nc - (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_1)\, c \\
a_{23} &= \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1' + \sin 2\varphi_2')\, nc - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)\, c \\
a_{33} &= \frac{c^2}{4} [(\cos^2 \varphi_1' + \cos^2 \varphi_2')\, n - (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2)]
\end{aligned}\right\} \ldots 22)$$

ist. Hieraus folgt zunächst

$$a_{11} + a_{22} = 2(n-1). \qquad \ldots 23)$$

Ordnet man daher jeder C_6 diejenige C_6' zu, welche zu demselben Werte des Parameters gehört, setzt also in 20) $\mu = \mu'$ und demgemäß in 23) $n = 1$, so ergibt sich als Schnittkurve eine gleichseitige Hyperbel.

Für die Mittelpunktskoordinaten, die Abszisse $\mathfrak{p}$ und die Ordinate $\mathfrak{q}$ erhält man in dem ursprünglichen Achsensystem

$$\mathfrak{p} = \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2}, \qquad \mathfrak{q} = \frac{a_3 n^2 + b_3 n + c_3}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2}, \qquad \ldots 24)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{c}{2} \sin(\varphi_1'+\varphi_2') \sin(\varphi_1'-\varphi_2') \\
b_1 &= -\frac{c}{2} [\sin^2(\varphi_2'-\varphi_2) - \sin(\varphi_1+\varphi_2') \sin(\varphi_2'-\varphi_1) + \\
&\qquad + \sin(\varphi_1'+\varphi_2) \sin(\varphi_1'-\varphi_2) - \sin^2(\varphi_1'-\varphi_1)] \\
c_1 &= \frac{c}{2} \sin(\varphi_1+\varphi_2) \sin(\varphi_1-\varphi_2) \\
a_2 &= -\sin^2(\varphi_1'+\varphi_2') \\
b_2 &= \sin^2(\varphi_1-\varphi_1') + \sin^2(\varphi_2-\varphi_2') + \\
&\qquad + \sin^2(\varphi_2+\varphi_1') + \sin^2(\varphi_1+\varphi_2') \\
c_2 &= -\sin^2(\varphi_1+\varphi_2) \\
a_3 &= c.\cos\varphi_1' \cos\varphi_2' \sin(\varphi_1'+\varphi_2') \\
b_3 &= -c [\sin(\varphi_1'+\varphi_2) \cos\varphi_1' \cos\varphi_2 + \\
&\qquad + \sin(\varphi_1+\varphi_2') \cos\varphi_1 \cos\varphi_2'] \\
c_3 &= c.\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 . \sin(\varphi_1+\varphi_2)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots 25)$$

ist.

Da

$$a_2 n^2 + b_2 n + c_2 = 0 \quad \ldots 26)$$

wegen 23) und 25) zwei reelle positive Wurzeln $n_1 n_2$, wo $o < n_1 < 1$, $n_2 > 1$ ist, besitzt, welche daher den Gleichungen

$$n_1 n_2 = \frac{c_2}{a_2}, \qquad n_1 + n_2 = -\frac{b_2}{a_2} \quad \ldots 26')$$

genügen, so sind die Kegelschnitte 21) Ellipsen für

$$o < n < n_1 \quad \text{und} \quad n > n_2,$$

Hyperbeln für

$$n_1 < n < n_2,$$

während den Nullstellen $n_1 n_2$ von 26) Parabeln entsprechen. Die Achsenrichtungen ergeben sich aus 22) mit

$$\operatorname{tg} 2\psi = -\frac{(\sin 2\varphi_2' - \sin 2\varphi_1')\, n - (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)}{-(\cos 2\varphi_1' + \cos 2\varphi_2')\, n + \cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2}. \quad \ldots 27)$$

Sind so wie früher p, q die Koordinaten des Mittelpunktes Ω der konzentrischen Ellipsenschar, welche mit dem Kreis-

büschel durch $O_1 O_2$ die C_6 erzeugen und haben $p'q'$ analoge Bedeutung bezüglich Ω' für die C_6', so erhält man wegen 9) und 25) aus 24) mit $n = 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \frac{c_1}{c_2} = p \\ \mathfrak{q} &= \frac{c_3}{c_2} = q, \end{aligned} \qquad \ldots 28)$$

und mit $n = \infty$

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \frac{a_1}{a_2} = p' \\ \mathfrak{q} &= \frac{a_3}{a_2} = q'. \end{aligned} \qquad \ldots 29)$$

Für diese beiden Werte reduzieren sich die Kegelschnitte auf die Punkte Ω, Ω' wie aus 22) und 8) mit $r' = 0$, respektive $r_1' = 0$ hervorgeht.

Die Elimination von n aus 24) gibt die Kurve, auf welcher die Mittelpunkte der Kegelschnitte liegen, also den Träger der Kegelschnittschar. Diese ist zufolge 24) ein Kegelschnitt und nach dem früheren eine Hyperbel, deren Asymptoten die Achsenrichtungen der Parabeln bestimmen, welche den Werten $n = n_1$, $n = n_2$ entsprechen. Diese Richtungen ergeben sich demnach aus 24) mit

$$\frac{d\mathfrak{q}}{d\mathfrak{p}} = \frac{\frac{d\mathfrak{q}}{dn}}{\frac{d\mathfrak{p}}{dn}} = \frac{(a_3 b_2 - a_2 b_3) n^2 + 2(a_3 c_2 - a_2 c_3) n + b_3 c_2 - b_2 c_3}{(a_1 b_2 - a_2 b_1) n^2 + 2(a_1 c_2 - a_2 c_1) n + b_1 c_2 - b_2 c_1}, \ldots 30)$$

wenn in 30) für n, n_1 beziehungsweise n_2 gesetzt wird.

Diese Hyperbel geht wegen 28) und 29 auch durch die Punkte Ω und Ω'; die Tangenten in denselben folgen aus 30) mit $n = 0$, beziehungsweise $n = \infty$ mit

$$\frac{d\mathfrak{q}}{d\mathfrak{p}} = \frac{b_3 c_2 - b_2 c_3}{b_1 c_2 - b_2 c_1}, \text{ respektive } \frac{d\mathfrak{q}}{d\mathfrak{p}} = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \ldots 30')$$

welche sich demnach in dem Punkte $x = \frac{b_1}{b_2}$, $y = \frac{b_3}{b_2}$ schneiden.

Liegen die Schnittpunkte S, S' der optischen Achsen, welche den Aufnahmen $\varphi_1\varphi_2$ und $\varphi_1'\varphi_2'$ entsprechen, in einem Kreise des Büschels durch O_1O_2, so wird aus 25) $c_2 = a_2$ und wegen 26') $n_1 = \frac{1}{n_2}$,

Wird überdies für beliebige $\varphi_1\varphi_2$

$$\varphi_1' = 90+\varphi_1, \quad \varphi_2' = \varphi_2 - 90,$$

so genügen wegen

$$a_2 = c_2 = -\sin^2(\varphi_1+\varphi_2), \quad b_2 = 2(1+\cos^2(\varphi_1+\varphi_2))$$

der Gleichung 26) die beiden Werte

$$n_1 = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}, \quad n_2 = \operatorname{cotg}^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}.$$

Die diesen beiden Werten entsprechenden Parabeln sind dann wegen 20) und 12) Genauigkeitskurven für Fehlerverhältnisse, welche mit dem Achsenverhältnis der konzentrischen ähnlichen Ellipsenscharen Ω und Ω' übereinstimmen. Die Achsen der letzteren stehen wegen 10) und

$$\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} = \frac{\varphi_2'-\varphi_1'}{2} + 90$$

in diesem Falle aufeinander senkrecht. Da ferner 27) für die obige Annahme unabhängig von n

$$\psi = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$$

liefert, so sind auch die Achsen aller Kegelschnitte, welche durch die Schnitte entsprechender C_6 und C_6' erzeugt werden, in diesem Falle parallel zu zwei festen Richtungen, nämlich zu jenen, welche durch die Achsen der konzentrischen Ellipsenscharen Ω und Ω' gegeben sind.

Da für die frühere Annahme

$$a_1 = -c_1 = \frac{c}{2}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\sin(\varphi_2-\varphi_1), \quad b_1 = 0$$

$$a_3 = -c\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$
$$b_3 = c.\cos(\varphi_1+\varphi_2)\sin(\varphi_1+\varphi_2), \quad c_3 = b_3 - a_3$$

wird, so folgt aus 30)

$$\left(\frac{d\mathfrak{q}}{d\mathfrak{p}}\right)_{n=n_1} = -\frac{1}{\left(\frac{d\mathfrak{q}}{d\mathfrak{p}}\right)_{n=n_2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}.$$

Die Hyperbel ist dann eine gleichseitige und es stehen somit die Achsen der Parabeln, welche den Werten $n_1 n_2$ entsprechen, aufeinander senkrecht. Die Tangenten in Ω und Ω' an die Hyperbel schneiden sich wegen $b_1 = 0$ in einem Punkte der Ordinatenachse.

VI.

Von Interesse ist der spezielle Fall, wo S und S' im Halbkreis über $O_1 O_2$ liegen, somit

$$\varphi_1+\varphi_2 = 90 \quad \text{und} \quad \varphi'_1+\varphi'_2 = 90$$

ist und folglich nach IIIa die konzentrischen Ellipsen Ω und Ω' in Kreise übergehen.

Wegen

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = n-1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = n-1,\\ &a_{13} = -c.\cos 2\varphi'_1.n + c.\cos 2\varphi_1,\\ &\qquad a_{23} = c.\sin 2\varphi'_1.n - c.\sin 2\varphi_1, \quad a_{33} = \frac{c^2}{4}(n-1) \end{aligned}\right\} \ldots 22\,a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = -\frac{c}{2}\cos 2\varphi'_1, \quad b_1 = c.\cos(\varphi'_1-\varphi_1)\cos(\varphi_1+\varphi'_1),\\ &\qquad\qquad c_1 = -\frac{c}{2}\cos 2\varphi_1\\ &a_2 = -1, \qquad b_2 = 2, \qquad c_2 = -1,\\ &a_3 = \frac{c}{2}\sin 2\varphi'_1, \quad b_3 = -c.\cos(\varphi'_1-\varphi_1)\sin(\varphi_1+\varphi'_1),\\ &\qquad\qquad c_3 = \frac{c}{2}\cdot\sin 2\varphi_1 \end{aligned}\right\} \ldots 25\,a)$$

genügt 26) der eine Wert $n=1$, welchem wegen 22a) nach 21) die Gerade

$$y = -\frac{a_{13}}{a_{23}}\cdot x = -\frac{\cos 2\varphi'_1 - \cos 2\varphi_1}{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi'_1}\cdot x \qquad \ldots 31)$$

entspricht.

Für die übrigen Werte von n sind die Kegelschnitte Kreise, deren Mittelpunktskoordinaten durch

$$\mathfrak{p}=c\frac{\cos 2\varphi_1'.n-\cos 2\varphi_1}{2(n-1)},\quad \mathfrak{q}=-c\frac{\sin 2\varphi_1'.n-\sin 2\varphi_1}{2(n-1)} \quad \ldots 24a)$$

und deren Halbmesser ρ durch

$$\rho^2=\frac{c^2.\sin^2(\varphi_1'-\varphi_1).n}{(n-1)^2} \quad \ldots 32)$$

gegeben ist.

Die Mittelpunkte der Kreise liegen wegen 24a) auf der durch Ω und Ω' gehenden Geraden

$$\mathfrak{q}=\frac{\sin 2\varphi_1-\sin 2\varphi_1'}{\cos 2\varphi_1'-\cos 2\varphi_1}\mathfrak{p}+c\cdot\frac{\sin 2(\varphi_1'-\varphi_1)}{2(\cos 2\varphi_1'-\cos 2\varphi_1)}. \quad \ldots 33)$$

Die dem Werte $n=1$ entsprechende Gerade 31) steht somit auf der durch 33) bestimmten senkrecht und geht wegen IIIa durch den Halbierungspunkt M der Strecke $\overline{\Omega\Omega'}$.

Da ferner wegen 24a), 25a), 28), 29) und 32) zwischen M und den Schnittpunkten $T_1 T_2$ eines Kreises mit der Geraden $\Omega\Omega'$ die Beziehung

$$\overline{MT_1}.\overline{MT_2}=\overline{M\Omega}^2=\frac{c^2}{4}\sin^2(\varphi_1'-\varphi_1)$$

besteht, so bilden die Kreise, in welchen sich entsprechende C_6 und C_6' schneiden, die Orthogonalschar zu einem Kreisbüschel mit den Grundpunkten Ω und Ω'. Dem Werte $n=1$ entspricht sonach die Potenzlinie der ersteren.

VII.

Von den beiden Kurvenscharen C_6 und C_6' werde nun die eine, etwa C_6', dahin spezialisiert, daß in 19)

$$\varphi_1'=\varphi_2'=90$$

gesetzt wird, wodurch letztere in die Schar konfokaler Cassinischer Kurven übergeht.

Es wird dann

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11} = -(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2), & a_{12} = -(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1), \\ & a_{22} = 2n-(\sin^2\varphi_1+\sin^2\varphi_2); \\ a_{13} = -c(\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1), & a_{23} = -\frac{c}{2}(\sin 2\varphi_1+\sin 2\varphi_2), \\ & a_{33} = -\frac{c^2}{4}(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2) \end{array}\right\} \ldots 22b)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0, \quad b_1 = -c(\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_1), \\ \qquad c_1 = -\frac{c}{2}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\sin(\varphi_2-\varphi_1) \\ a_2 = 0, \quad b_2 = 2(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2), \\ \qquad c_2 = -\sin^2(\varphi_1+\varphi_2) \\ a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \\ \qquad c_3 = c.\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2). \end{array}\right\} \ldots 25b)$$

Die Achsenrichtungen der Kegelschnitte sind dann wegen 27) aus

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1}{2n+\cos 2\varphi_1+\cos 2\varphi_2} \quad \ldots 34)$$

und die Gleichung der transformierten Kurve durch

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\varkappa = 0 \quad \ldots 35)$$

gegeben, wo

$$\varkappa = -\frac{4.c^2.\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2.n}{2(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2).n-\sin^2(\varphi_1+\varphi_2)} \quad \ldots 36)$$

ist und $\lambda_1 \lambda_2$ wegen 23) der Gleichung

$$\lambda^2-2(n-1)\lambda-\frac{1}{4}(a_{12}^2-4a_{11}a_{22}) = 0 \quad \ldots 37)$$

genügen.

Wegen 25 b) liegen die durch 24) bestimmten Mittelpunkte auf einer durch Ω gehenden Geraden g, deren Richtungswinkel ω wegen 22 b) und 25 b) aus

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{b_2 c_3}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = -\frac{2(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2)}{\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1} = -\frac{2a_{11}}{a_{12}}$$

bestimmt ist.

Die Achse $O_1 O_2$ des Kreisbüschels und die die Mittelpunkte der C_2 enthaltende Gerade g sind demnach konjugierte Richtungen sowohl bezüglich der letzteren als auch in Bezug auf die konzentrischen, die C_6 erzeugenden ähnlichen Ellipsen. Der Richtungswinkel ω bestimmt zugleich die Achsenrichtung der dem Werte $n = -\frac{c_2}{b_2}$ entsprechenden Parabel, welch erstere mit diesem Werte ebenso aus 34) erhalten wird.

Da für $n = 1$ aus 34)

$$\operatorname{tg} 2\psi = -\operatorname{cotg} \omega \quad \text{oder} \quad \psi = 45 + \frac{\omega}{2}$$

folgt, so schließen die Asymptoten der dem Werte $n = 1$ entsprechenden gleichseitigen Hyperbel mit g und der Achse $O_1 O_2$ des Kreisbüschels gleiche Winkel ein.

Nachstehend die speziellen Annahmen:

a) $\varphi_1 + \varphi_2 = 90.$

Aus 35) ergeben sich die Halbachsen

$$a^2 = -\frac{\varkappa}{\lambda_1} = -\frac{c^2 . \sin^2 2\varphi_1 . n}{2(2n-1)}, \quad b^2 = -\frac{\varkappa}{\lambda_2} = \frac{c^2 . \sin^2 2\varphi_1 . n}{2(2n-1)^2}$$

und aus 24) die Mittelpunktskoordinaten

$$\mathfrak{p} = \frac{c}{2} \cdot \cos 2\varphi_1, \quad \mathfrak{q} = \frac{c . \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{2n-1}.$$

Je nachdem also $n \lesseqgtr \frac{1}{2}$ ist, erhält man die Ellipse, die Parabel oder die Hyperbel.

b) $\varphi_1 = \varphi_2.$

Es wird

$$a^2 = -\frac{c^2 . n}{4(n - \sin^2 \varphi_1)}, \quad b^2 = \frac{c^2 . \cos^2 \varphi_1 . n}{4(n - \sin^2 \varphi_1)^2}.$$

Mit $n < \sin^2 \varphi_1$ erhält man daher Ellipsen und für $n = -\cos 2\varphi_1$, hiebei $\cos 2\varphi_1 < 0$ vorausgesetzt, einen Kreis vom Halbmesser $\rho = \frac{c}{2 . \cos \varphi_1} \sqrt{-\cos 2\varphi_1}$.

Für $n = \sin^2 \varphi_1$ die Parabel

$$X^2 = -c \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot Y,$$

deren Leitlinie für $\varphi = 45$ somit mit der Achse $O_1 O_2$ des Kreisbüschels und deren Brennpunkt in diesem Falle mit dem Mittelpunkt Ω der konzentrischen Kreise zusammenfällt.

Für $n > \sin^2 \varphi_1$ Hyperbeln, welche für $n = 1$ in die gleichseitige

$$Y^2 - X^2 = \frac{c^2}{4 \cdot \cos^2 \varphi_1}$$

übergehen.

$$c) \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 90.$$

In diesem Falle wird aus C_6 die C_4, welche mit C_4' eine und dieselbe Kurvenschar bildet. Mit dem hier allein in Betracht kommenden Werte $n = 1$, wo dann jede C_4 mit der ihr entsprechenden C_4' zusammenfällt, verschwinden in 22) sämtliche Koeffizienten, da die in dem früheren Sinne definierten Kurven nicht mehr bestehen.

VIII.

Während bei der geodätischen Punktbestimmung bei gegebenen Messungsfehlern jedem Punkte ein bestimmter Fehler entspricht, tritt bei der photographischen Methode noch die Abhängigkeit desselben von den Orientierungswinkeln $\varphi_1 \varphi_2$ hinzu. Bisher wurden letztere als gegebene, unveränderliche Größen angesehen. Es soll nun noch die Abhängigkeit des Fehlers in einem bestimmten Punkte $P(x, y)$ von diesen Winkeln untersucht werden.

In 5) sind nunmehr x, y als konstant, hingegen $\varphi_1 \varphi_2$ als voneinander unabhängige veränderliche Größen anzusehen.

Mit

$$\nu^2 = \frac{\mu^2 \cdot y^2}{\left[\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2\right]\left[\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2\right]}, \qquad \ldots 38)$$

$$\nu_1^2 = \left(y \sin \varphi_1 + \left(\frac{c}{2} - x\right) \cos \varphi_1\right)^2, \qquad \ldots 39)$$

$$\nu_2^2 = \left(y \sin \varphi_2 + \left(\frac{c}{2} + x\right) \cos \varphi_2\right)^2, \qquad \ldots 40)$$

wird aus 5)

$$\nu^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2. \qquad \ldots 41)$$

Setzt man

$$\frac{\partial \nu}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial \varphi_2} = 0,$$

so werden für die Aufnahmen in O_1 und O_2 je zwei zueinander senkrechte durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} 2\psi_1 = -\frac{y(c-2x)}{y^2 - \left(\frac{c}{2} - x\right)^2} \qquad \ldots 42)$$

$$\operatorname{tg} 2\psi_2 = -\frac{y(c+2x)}{y^2 - \left(\frac{c}{2} + x\right)^2} \qquad \ldots 43)$$

bestimmte Richtungen erhalten, in welchen ν_1 und ν_2 den größten Wert $\nu'_1 \nu'_2$ — der Richtung O_1P, respektive O_2P entsprechend — und den kleinsten Wert $\nu''_1 = \nu''_2 = 0$ erreichen.

Für je eine durch O_1 und O_2 gehende Richtung, welche mit jener der ν''_1, ν''_2 die Winkel Θ_1, respektive Θ_2 einschließt, wird für diese Richtung

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \nu'_1 \sin \Theta_1, \\ \text{beziehungsweise} \qquad \nu_2 &= \nu'_2 \sin \Theta_2. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 44)$$

Hienach lassen sich bei gegebener Punktlage und gegebenem Gesichtsfeldwinkel des Apparates die Orientierungswinkel so bestimmen, daß der durch 41) gegebene Punktfehler möglichst klein wird.

Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertz'sche Wellen

von

Josef R. v. Geitler.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1906.)

V. Bjerknes[1] hat gezeigt, daß die nichtmagnetischen Metalle hinsichtlich ihrer Fähigkeit, elektrische Wellen zu dämpfen, sich in derselben Reihenfolge ordnen wie ihre spezifischen elektrischen Widerstände. Seine Versuche beziehen sich jedoch nur auf Wellen einer Periode. Es schien mir daher nicht ohne Interesse, zu untersuchen, ob und in welcher Weise das Verhältnis der Dämpfungskonstanten verschiedener Metalle von der Wellenlänge abhänge; denn eine etwa vorhandene anomale Absorption müßte durch solche Messungen nachgewiesen werden können. Es möge gleich hier bemerkt werden, daß in dem untersuchten Bereiche von Wellenlängen für Kupfer, Neusilber und Zink anomale Absorption nicht gefunden wurde; von vornherein war aber ein normales Verhalten der verschiedenen Metalle nicht mit Sicherheit zu erwarten, hatte doch Drude[2] bei Flüssigkeiten anomale Absorption im Gebiete der Hertz'schen Wellen erhalten. Bei Metallen wäre eine solche Erscheinung vielleicht sogar weniger überraschend, wenn man bedenkt, daß infolge des enormen Brechungsexponenten der Metalle für diese Perioden die Länge

[1] V. Bjerknes, Wied. Ann., 47, p. 69 (1892).
[2] P. Drude, Wied. Ann., 58, p. 1 (1896).

der ins Metall eindringenden Wellen nur Bruchteile eines Millimeters beträgt und die Wellen in den kleinen Strukturelementen des Materials Hindernisse von der Größenordnung der Wellenlänge selbst vorfinden dürften. Für das Verständnis des anomalen Verhaltens der Flüssigkeiten liegt die Schwierigkeit aber gerade darin, sich in den gegenüber den langen Wellen als homogen zu betrachtenden Flüssigkeiten das Vorhandensein von solchen Gebilden vorzustellen, die man, z. B. in optischen Fällen, beim Auftreten anomaler Absorptionen u. dgl. als deren Ursache anzunehmen gewohnt ist.

I. Theoretischer Teil.

Das Prinzip der Messungen war dasselbe, das Bjerknes in der oben erwähnten Arbeit verwendet hatte. Die Abweichungen in den Einzelheiten der Versuchsanordnung ergeben sich aus der weiter unten mitgeteilten Beschreibung meiner Experimente. Vorher möge es jedoch gestattet sein, jene theoretischen Betrachtungen anzustellen, die zur Deutung der Versuchsergebnisse erforderlich sind. Zu diesem Zwecke sei das Bjerknes'sche Messungsverfahren kurz in Erinnerung gebracht: Bjerknes bediente sich möglichst gleichdimensionierter, kreisförmiger Resonatoren aus verschiedenen, durch dasselbe Loch gezogenen Metalldrähten, deren Enden mit einem Hertz-Bjerknes'schen Elektrometer verbunden werden konnten. Die verschiedenen Drähte wurden gegeneinander ausgetauscht und nacheinander der Beobachtung unterworfen, indem für jedes Material der Elektrometerausschlag gemessen wurde, den ein und derselbe auf die Periode des Resonators abgestimmte und mit ihm lose gekoppelte Primärkreis erzeugte.

Daß die Größe des Elektrometerausschlages als Maß für die Dämpfung im Resonator verwendet werden kann, hat Bjerknes[1] nachgewiesen. Schon nach wenig Oszillationen des rasch gedämpften primären Kreises kann man nämlich den Resonator selbst als Erreger betrachten und seine Schwingungen durch die Gleichung darstellen:

$$\varphi = B.e^{-\beta t} \cos bt, \qquad \ldots 1)$$

[1] V. Bjerknes, Wied. Ann., 44, p. 83 (1891).

wo φ die Potentialdifferenz der Elektrometerplatten bedeuten möge. Der Elektrometerausschlag ist dann dem Impulse $J = \int_0^\infty \varphi^2 dt$ proportional, der sich für nicht zu große Werte der Dämpfungskonstanten β zu

$$J = \frac{B^2}{4\beta} \quad \ldots 2)$$

berechnet.

Hieraus ergeben sich für den vorliegenden Zweck nachstehende Folgerungen:

Für verschiedene Resonatoren, deren Anfangspotentialdifferenz B dieselbe ist, wird das Verhältnis n der Elektrometerausschläge

$$n = \frac{J}{J'} = \frac{\beta'}{\beta} \quad \ldots 3')$$

also gleich dem reziproken Werte des Verhältnisses der Dämpfungskonstanten β und β' der betreffenden Resonatoren. Da bei der Bjerknes'schen (und bei meiner) Versuchsanordnung die B-Werte für alle Resonatoren dieselben sind, wie sich aus den Beobachtungen von H. Hertz[1] über die Unabhängigkeit der maximalen Funkenlänge eines Resonators von dessen materieller Beschaffenheit ergibt, so bietet die Methode die Möglichkeit, das Verhältnis n der Dämpfungskonstanten für verschiedene Wellenlängen in einfacher Weise zu ermitteln.

Es soll nun zunächst kurz erörtert werden, in welcher Weise sich das Verhältnis n mit der Wellenlänge ändern muß, wenn einesteils normale, andernteils anomale Absorption der Drähte für bestimmte Periodenbezirke vorausgesetzt wird.

Die Dämpfung der Schwingungen in einem Hertz'schen Erreger — und als solchen können wir nach dem oben Gesagten den Resonator betrachten — ist, wie schon Hertz[2] gezeigt und besonders Bjerknes[3] ausgeführt hat, das Resultat zweier ver-

[1] H. Hertz, Ges. Werke, Bd. 2, p. 50.

[2] H. Hertz, Ges. Werke, Bd. 2, p. 147.

[3] V. Bjerknes, Bihang till k. Svenska Vet.-Akad. Handlingar, Bd. 20, Afd. I, No. 5 (1895): Über elektrische Resonanz II. Mit dieser Arbeit wurde ich erst in einem späten Zeitpunkte meiner Versuche bekannt.

schiedenen Wirkungen, und demgemäß setzen sich die Konstanten β aus zwei Summanden zusammen; der eine, im folgenden α genannte, bezieht sich auf jenen Teil der aufgefangenen Energie, der sich beim Eindringen der Wellen in den Draht in (Joule'sche) Wärme verwandelt; der andere stellt die Dämpfung dar, die durch Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen vom Erreger (Resonator) in den umgebenden Raum erzeugt wird; er soll mit dem Buchstaben δ bezeichnet und nach Bjerknes das Hertz'sche Dekrement genannt werden. Wir müssen daher das Verhältnis n in der Form schreiben:

$$n = \frac{\alpha' + \delta'}{\alpha + \delta}. \qquad \ldots 3)$$

Die Joule'schen Dekremente sind wesentlich von dem Material und der Gestalt des Resonators, sowie von der Schwingungsdauer abhängig. Sie haben bekanntlich den Wert

$$\alpha = \frac{w \cdot \tau}{2L}, \qquad \ldots 4)$$

wo τ die ganze Schwingungsdauer, L den Selbstinduktionskoeffizienten, w den Widerstand des Resonators für das betreffende τ bedeuten. Nach Lord Rayleigh und J. Stefan[1] ist für unmagnetisches Material und sehr schnelle Schwingungen der Periode τ der Widerstand

$$w = \frac{l}{R} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}, \qquad \ldots 5)$$

wenn l die Gesamtlänge, R den Halbmesser und σ den spezifischen Widerstand des Drahtes für Gleichstrom darstellen.

Bei Verwendung vollkommen kongruenter Erreger (Resonatoren) verschiedenen Materials ist demnach das Verhältnis der Joule'schen Dekremente

$$\nu = \frac{\alpha'}{\alpha} = \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}} \qquad \ldots 6)$$

---

[1] J. Stefan, Wied. Ann., 41, p. 411 (1890).

von der Periode unabhängig und gleich der Quadratwurzel aus dem Verhältnis ihrer spezifischen Widerstände. Wären demnach die Hertz'schen Dekremente sehr klein gegen die Joule'schen (Gleichung 3), so müßte auch $n = \nu$ von der Schwingungsdauer unabhängig sein. In diesem Falle müßte sich das Vorhandensein anomaler Absorption eines der Metalle für die betreffende Schwingungsdauer durch eine Abweichung des Wertes von n von der Konstanten ν kundgeben.

Nun wäre es aber ein verhängnisvoller Irrtum, die Hertzschen Dekremente gegenüber den Joule'schen ohneweiters vernachlässigen zu wollen. Hertz selbst hat für einen schwingenden elektrischen Doppelpunkt die Größe der durch Strahlung (Abschnüren von Kraftlinien) hervorgerufenen Dämpfung zu berechnen gelehrt.[1] Die näherungsweise Anwendung dieser Rechnung auf einen 1 *m* langen geradlinigen Oszillator, an dessen Enden Kugeln von 15 *cm* Halbmesser angebracht waren (entsprechend einer Wellenlänge von etwa 480 *cm*), führte ihn zu dem Resultate, daß die dem Erreger ursprünglich mitgeteilte Energie schon nach 11 Halbschwingungen durch die Strahlung allein auf die Hälfte ihres Anfangswertes gesunken sein mußte, selbst wenn der Widerstand des Leiters zu vernachlässigen gewesen wäre.

Das Hertz'sche Dekrement eines elektromagnetischen Oszillators hängt offenbar sehr von dessen geometrischer Gestalt ab und ist wohl gerade in dem von Hertz betrachteten Falle des geradlinigen Erregers besonders groß. Daß aber auch für andersgestaltete Systeme die Hertz'schen Dekremente von der Größenordnung der Joule'schen sein, ja diese beträchtlich übertreffen können, zeigen die Versuche von Bjerknes mit kreisförmigen Resonatoren von 106·5 *cm* Umfang; er fand[2] für 0·2 *mm* Kupferdrähte $\alpha = 0\cdot021$, $\delta = 0\cdot018$, für 0·5 *mm* Kupferdrähte $\alpha = 0\cdot0078$, $\delta = 0\cdot0266$ (die Werte α sind nach Gleichung 4) berechnet und die δ aus den berechneten Werten von α und den beobachteten Werten von β gewonnen).

---

[1] H. Hertz, Ges. Werke, Bd. 2, p. 160.

[2] Bjerknes, l. c., p. 36.

Bei meinen Versuchen kamen durchwegs Paralleldraht-resonatoren zur Verwendung. Die folgenden Überlegungen über die zu erwartende Abhängigkeit des Verhältnisses n (Gleichung 3) von der Periode τ, wenn die Dekremente δ gegen die α nicht vernachlässigt werden dürfen, beziehen sich daher in erster Linie auf Erreger (Resonatoren) dieser Gestalt.

Zunächst sei bemerkt, daß für eine und dieselbe Schwingungsdauer τ die Werte δ und δ' in dem Ausdrucke für n einander gleich (δ) gesetzt werden können. Dies folgt aus der Erwägung, daß für den Wert von δ neben der materiellen Beschaffenheit des Mediums in der Umgebung[1] des Resonators (in unserem Falle also Luft) nur die geometrische Konfiguration des Resonators selbst, nicht aber dessen eigene materielle Beschaffenheit maßgebend sein dürfte.[2] Da aber nur diese letztere geändert wurde, so kann, bis zum Beweise des Gegenteils, δ für beide Resonatoren gleich gesetzt werden. Es sei jedoch betont, daß trotzdem das Strahlungsvermögen eines Resonators, wie weiter unten noch gezeigt werden soll, von seinen stofflichen Eigenschaften abhängig ist.

Wir können demnach schreiben:

$$n = \frac{\alpha'+\delta}{\alpha+\delta} = \frac{\nu+\gamma}{1+\gamma}, \qquad \ldots 7)$$

wenn $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}$ gesetzt wird und ν die frühere Bedeutung (Gleichung 6) besitzt, also einen von τ unabhängigen Wert darstellt; hiebei soll festgesetzt werden, daß stets $\nu < 1$ sei, was durch passende Wahl der verglichenen Metalle natürlich immer erfüllt werden kann. Um die Abhängigkeit des Verhältnisses n von der Periode τ zu finden, soll folgendermaßen verfahren werden: Aus Gleichung 7) folgt unmittelbar:

$$\frac{dn}{d\gamma} = \frac{1-\nu}{(1+\gamma)^2}. \qquad \ldots 8)$$

Da nach der Voraussetzung über ν die rechte Seite von Gleichung 8) stets >0 ist, so hat dn stets dasselbe Vorzeichen

[1] R. Clausius, Mechan. Wärmetheorie, III. Aufl., Bd. I, p. 335 ff.

[2] Vergl. auch Bjerknes, l. c., p. 36.

wie $d\gamma$; um daher den Sinn der Abhängigkeit des n von τ zu ermitteln, genügt es, $\frac{d\gamma}{d\tau}$ zu berechnen. Nach der Definition von γ ergibt sich aber

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\delta}{d\tau} - \gamma\frac{d\alpha}{d\tau}\right), \qquad \ldots 9)$$

und es ist daher

$$\frac{d\gamma}{d\tau} \gtreqless 0,$$

wenn

$$\frac{d\delta}{d\tau} - \gamma\frac{d\alpha}{d\tau} \gtreqless 0. \qquad \ldots 10)$$

Setzt man in Gleichung 4) den Wert von w aus Gleichung 5) und für L den Wert ein, der für den Fall paralleler Drähte vom Abstande d und der Gesamtlänge l gilt, nämlich

$$L = 2l \lg \text{nat} \frac{d}{R},$$

so folgt

$$\alpha = \frac{\sqrt{\sigma . \tau}}{4R \lg \text{nat} \frac{d}{R}} = c . \sqrt{\tau}, \qquad \ldots 4a)$$

wo der Faktor c stets > 0 ist. Demnach ist auch

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{c}{2\sqrt{\tau}} \qquad \ldots 4b)$$

stets > 0 und es hat $d\alpha$ dasselbe Zeichen wie $d\tau$. Wie sich schon unmittelbar aus Gleichung 4a) ergibt, nimmt also das Joule'sche Dekrement mit abnehmender Schwingungsdauer (Wellenlänge) ebenfalls ab.

Es ist sonach in Gleichung 9) und 10) stets $\gamma . \frac{d\alpha}{d\tau} > 0$. Über das Vorzeichen des Wertes $\frac{d\gamma}{d\tau}$ in Gleichung 9) entscheidet daher das Vorzeichen und eventuell die Größe von $\frac{d\delta}{d\tau}$. Nun gelingt es allerdings im allgemeinen und auch für den vorliegenden Fall nicht, das Dekrement δ als Funktion der

geometrischen Konstanten und somit der Periode des Resonators analytisch zu berechnen; aber es ist möglich, den Sinn dieser Abhängigkeit und demnach das Vorzeichen von $\frac{d\delta}{d\tau}$ für die hier in Betracht kommenden Verhältnisse und andere einfache Fälle mit einiger Wahrscheinlichkeit vorauszusehen. Wenn nämlich die von den einzelnen Punkten des Erregers (Resonators) ausgehenden Elementarwellen einander in allen Punkten des umgebenden Raumes vernichten, so wird überhaupt keine Strahlung stattfinden und $\delta = 0$ und unabhängig von der Periode sein.[1] Dies wäre der Fall, wenn der Resonator aus zwei unmittelbar nebeneinander gelegten parallelen Drähten bestünde, deren Abstand also gegen die Wellenlänge vollständig zu vernachlässigen wäre; da entsprechende Punkte der Drähte nämlich stets in entgegengesetzten Phasen schwingen, so müssen sich die von ihnen ausgehenden Elementarwellen überall im Raume aufheben — oder man kann, vom Standpunkte der Kraftlinientheorie aufgefaßt, sagen, daß die Kraftlinien nur in unmittelbarster Nähe der Drähte verlaufen, so daß es zu einem Abschnüren derselben überhaupt nicht kommt. Ein solcher Resonator würde übrigens auch keine zugestrahlte Energie aufzunehmen vermögen. Zieht man nun die wirklich vorkommenden Fälle in Betracht, also z. B. Resonatoren aus parallelen, in endlichem Abstande befindlichen Drähten wie in den folgenden Experimenten, so ergibt sich leicht, daß die Strahlung für eine gegebene Schwingungsdauer um so größer sein muß, je größer der Abstand der Drähte, und für einen gegebenen Abstand d der Drähte um so größer, je kürzer die Wellenlänge und daher die Periode τ ist. Für unseren Fall eines Paralleldrahtresonators von konstantem d und durch eine Brücke veränderlicher Länge folgt demnach, daß

$$\frac{d\delta}{d\tau} < 0 \qquad \ldots 11)$$

sein muß, da ja nach den eben angestellten Überlegungen $d\delta$ und $d\tau$ hier stets entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen. Für unseren Fall ist also stets

[1] Vergl. H. Poincaré, Les oscillations électriques, Paris 1894, p. 100, § 51.

$$\frac{d\delta}{d\tau} - \gamma \frac{d\alpha}{d\tau} < 0$$

und nach Gleichung 10) daher auch stets

$$\frac{d\gamma}{d\tau} < 0. \qquad \ldots 10a)$$

Da wir aber (Gleichung 8) fanden, daß stets $\frac{dn}{d\gamma} > 0$, so ergibt sich das Resultat, daß im Falle unserer Versuche das Verhältnis n der Dämpfungskonstanten mit abnehmender Schwingungsdauer wachsen muß.

Es sei nun noch der Fall eines kreisförmigen Resonators in Betracht gezogen, obwohl solche bei den Versuchen nicht in Verwendung kamen. Da Drude[1] findet, daß die halbe Eigenwellenlänge $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ eines nahezu zum Kreise gebogenen dünnen Drahtes um $6 \cdot 5\%$ größer als die Drahtlänge l ist, so folgt daraus — innerhalb der Grenzen der Gültigkeit von Drude's Regel — die Unabhängigkeit des Verhältnisses $\frac{\lambda}{l}$ von der Periode. Es sind demnach die geometrischen Verhältnisse, die die Strahlung bedingen, von der Schwingungsdauer unabhängig und man darf daher vermuten, daß für kreisförmige Oszillatoren $\frac{d\delta}{d\tau} = 0$ ist.

Eine Anwendung der voranstehenden Betrachtungen auf den Leuchtprozeß ist naheliegend. Betrachtet man die strahlenden Elementarkomplexe leuchtender Dämpfe unter dem Bilde äußerst kleiner Hertz'scher Erreger oder Gruppen von solchen[2] und wünscht hiebei der überraschend kleinen Dämpfung des ausgesendeten Lichtes Rechnung zu tragen, wie sie sich aus den Versuchen über Interferenzen mit sehr hohen Gangunterschieden ergibt,[3] so wird man genötigt sein, die

[1] P. Drude, Ann. d. Phys., 9, p. 331, 609 (1902).

[2] Vergl. z. B. H. Ebert, Wied. Ann., 49, p. 651 (1893) u. a.

[3] H. Fizeau, Ann. de chim. et phys. (3), *66*, p. 429 (1862); F. Lippich, diese Sitzungsber., *72*, p. 335 (1875); H. Ebert, Wied. Ann., *34*, p. 39 (1888); O. Lummer und E. Gehrke, Verh. d. deutsch. physik. Ges., *4*, p. 337 (1902).

Dimensionen dieser Erreger wenigstens nach einer Richtung hin als sehr klein gegen die ausgestrahlte Wellenlänge anzunehmen.

Es ist nun noch zu erörtern, welche Erscheinungen bei anomalem Verhalten eines der beiden Metalle innerhalb eines bestimmten Wellenlängenbezirkes zu erwarten wären. Hiebei sollen Anomalien der Dekremente δ nach den früheren Auseinandersetzungen für ausgeschlossen gelten. Eine sprunghafte Vergrößerung (Verkleinerung) von α' hätte nach Gleichung 7) eine ähnliche Wirkung wie eine anomale Verkleinerung (Vergrößerung) des Wertes α; beide müßten sich durch eine vom glatten Verlauf abweichende Gestalt der für n als Funktion der Wellenlänge ermittelten Kurve bemerkbar machen. Die Entscheidung darüber, welche der angenommenen Möglichkeiten vorliegt, könnte dann noch durch den Vergleich mit einem dritten Metall erzielt werden.

Es wurde schon oben erwähnt, daß das Strahlungsvermögen eines Hertz'schen Schwingungskreises nicht nur durch den Wert seines Dekrementes δ, sondern auch durch seine stoffliche Beschaffenheit bestimmt sei. Diese Behauptung soll nun noch näher begründet werden.

Ein aus Kondensator und Schließungsdraht bestehender Schwingungskreis sei zu Beginn zur Potentialdifferenz B geladen. Der Einfachheit halber seien seine Kapazität und sein Selbstinduktionskoeffizient gleich Eins gesetzt; sein verfügbarer Energievorrat ist demnach B^2. Ist seine Dämpfungskonstante $\beta = 0$, so ist der Verlauf der Potentialschwingung

$$\varphi = B.\cos bt;$$

seine elektrische Energie (φ^2) folgt demnach der Gleichung

$$\varphi^2 = B^2 \cos^2 bt.$$

Der ganze Schwingungsvorgang besteht in einer fortgesetzten verlustlosen Verwandlung der elektrischen Energie des Kreises in magnetische Form und umgekehrt. Demnach ist der Verlauf der magnetischen Schwingung gegeben durch

$$\psi = B.\sin bt$$

und jener der magnetischen Energieschwingung durch

$$\psi^2 = B^2 . \sin^2 bt .$$

Es ist daher zu jeder Zeit die elektromagnetische Gesamtenergie des Erregers konstant, nämlich

$$\varphi^2 + \psi^2 = B^2 .$$

Ist hingegen die Schwingung gedämpft und bedeutet wieder β die Dämpfungskonstante, so lauten die entsprechenden Gleichungen:

für die elektrische Schwingung:

$$\varphi = B . e^{-\beta t} . \cos bt ,$$

für die elektrische Energie:

$$\varphi^2 = B^2 . e^{-2\beta t} \cos^2 bt , \qquad \ldots 12)$$

für die magnetische Schwingung:

$$\psi = B . e^{-\beta t} \sin bt ,$$

für die magnetische Energie:

$$\psi^2 = B^2 . e^{-2\beta t} \sin^2 bt . \qquad \ldots 12a)$$

Hieraus ergibt sich der zeitliche Verlauf der elektromagnetischen Gesamtenergie U des Oszillators

$$U = \varphi^2 + \psi^2 = B^2 . e^{-2\beta t} . \qquad \ldots 13)$$

Nach genügend langer Zeit ($t = \infty$) ist der ganze Energievorrat $U_0 = B^2$ einesteils in den Schwingungskreis eingedrungen und dort in Wärme verwandelt (u_∞), andernteils ins umgebende Medium ausgestrahlt worden (v_∞), so daß nach dem Energieprinzip die Beziehung bestehen muß:

$$u_\infty + v_\infty = U_0 = B^2 . \qquad \ldots 14)$$

Um nun u_∞ und v_∞ zu berechnen, soll die naheliegende und wohl sicher zutreffende Annahme gemacht werden, daß sowohl die im Zeitelement dt vom Kreise aufgenommene als auch die ins umgebende Medium ausgestrahlte Energie dem

in dem betreffenden Augenblicke noch vorhandenen Vorrat an elektromagnetischer Energie U proportional sei, d. h.

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cdot dt = \varkappa . U . dt; \quad \frac{\partial v}{\partial t}\cdot dt = \rho . U . dt. \qquad \ldots 15)$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt

$$u = \varkappa . \int U dt = \varkappa . B^2 . \int e^{-2\beta t} . dt =$$
$$= -\frac{\varkappa}{2\beta}\cdot B^2 . e^{-2\beta t} + C \qquad \ldots 16a)$$

$$v = \rho . \int U dt = \rho . B^2 . \int e^{-2\beta t} . dt =$$
$$= -\frac{\rho}{2\beta}\cdot B^2 . e^{-2\beta t} + D. \qquad \ldots 17a)$$

Aus der Anfangsbedingung, daß für $t = 0$ auch $u = v = 0$ sein müssen, ergeben sich die Werte der Integrationskonstanten

$$C = \frac{\varkappa}{2\beta}\cdot B^2; \quad D = \frac{\rho}{2\beta}\cdot B^2$$

und demnach

$$u = \frac{\varkappa}{2\beta}\cdot B^2 . (1 - e^{-2\beta t}) \qquad \ldots 16b)$$

$$v = \frac{\rho}{2\beta}\cdot B^2 . (1 - e^{-2\beta t}) \qquad \ldots 17b)$$

Für $t = \infty$ folgt daraus

$$u_\infty = \frac{\varkappa}{2\beta}\cdot B^2 = C \qquad \ldots 16)$$

$$v_\infty = \frac{\rho}{2\beta}\cdot B^2 = D. \qquad \ldots 17)$$

Die Werte aus Gleichung 16) und 17) in Gleichung 14) eingesetzt, ergeben

$$u_\infty + v_\infty = \frac{\varkappa + \rho}{2\beta}\cdot B^2 = B^2. \qquad \ldots 14a)$$

Es muß demnach sein:

$$\frac{\varkappa + \rho}{2\beta} = \frac{\varkappa + \rho}{2(\alpha + \delta)} = 1. \qquad \ldots 18)$$

Die einfachste Annahme, durch die diese Bedingung erfüllt wird, ist

$$\varkappa = 2\alpha; \qquad \rho = 2\delta;$$

also

$$u_\infty = \frac{\alpha}{\beta} \cdot B^2; \quad v_\infty = \frac{\delta}{\beta} \cdot B^2.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{u_\infty}{v_\infty} = \frac{\alpha}{\delta}.$$

Nennt man nun Strahlungsvermögen S des Erregers das Verhältnis der gesamten Ausstrahlung zum anfänglichen Energievorrat, sein Absorptionsvermögen A das Verhältnis der ganzen eingedrungenen Energie zum Anfangsvorrat, so folgt:

$$S = \frac{v_\infty}{U_0} = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\delta}{\alpha + \delta} \qquad \ldots 19)$$

$$A = \frac{u_\infty}{U_0} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \delta}. \qquad \ldots 20)$$

Aus Gleichung 19) ergibt sich somit die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung, daß das Strahlungsvermögen des Hertz'schen Erregers (Resonators) nicht nur vom Dekremente δ, sondern auch vom Material abhängt, dessen Einfluß durch das im Nenner auftretende Joule'sche Dekrement α zum Ausdrucke kommt. Analoges gilt vom Absorptionsvermögen, das nach Gleichung 20) nicht nur von α, sondern auch vom Hertz'schen Dekrement δ abhängt.

Es muß sich demnach in der Stärke der Strahlung die materielle Natur des Hertz'schen Schwingungskreises und ein eventuell anomales Verhalten der Materialkonstanten α verraten.

Das Verhältnis der Strahlungsvermögen zweier gleichgebauter Erreger aus verschiedenem Material ist nach Gleichung 19) und Gleichung 7)

$$\frac{S}{S'} = \frac{\alpha' + \delta}{\alpha + \delta} = n. \qquad \ldots 21)$$

Das Verhältnis der Elektrometerausschläge bei der von Bjerknes (l. c.) und mir verwendeten Versuchsanordnung ergibt somit auch das Verhältnis der hier als Strahlungsvermögen bezeichneten Größen für die betreffenden Leiterformen.

Kann man δ gegen α und α' vernachlässigen, so wird Gleichung 21) mit Rücksicht auf Gleichung 6)

$$\frac{S}{S'} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}} = \nu, \qquad \ldots 22)$$

also unabhängig von der Schwingungsdauer. Sind hingegen die Hertz'schen Dekremente der beiden Erreger nicht dieselben, so wird

$$\frac{S}{S'} = \frac{\delta}{\delta'} \cdot \frac{\alpha'+\delta'}{\alpha+\delta};$$

sind wieder δ und δ' klein gegen α und α', so folgt

$$\frac{S}{S'} = \frac{\delta}{\delta'}\sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}}. \qquad \ldots 22a)$$

Je mehr also das Verhältnis $\frac{\delta}{\delta'}$ sich der Einheit nähert, desto mehr nähert sich das Gesetz für das Verhältnis der Strahlungsvermögen auch in diesem Falle dem oben angegebenen.

Das durch Gleichung 22) ausgedrückte Resultat, wonach die Strahlungsvermögen zweier Erreger (unter den dort gemachten Annahmen über δ) im reziproken Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den spezifischen Widerständen stehen, scheint auf den ersten Blick dem aus Maxwell's Theorie folgenden[1] und von E. Hagen und H. Rubens[2] experimentell bestätigten Resultate zu widersprechen, daß die Emissionsvermögen zweier Metalle für dieselbe Temperatur und Wellenlänge im direkten Verhältnisse dieser Quadratwurzeln stehen.

---

[1] P. Drude, Physik des Äthers, 1894, p. 574; E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, p. 444 (1900); M. Planck, Berl. Akad., p. 278 (1903).

[2] Hagen und Rubens, Ann. d. Phys., 11, p. 873 (1903).

Der Widerspruch ist aber nur ein scheinbarer und möge zur Vermeidung von Mißverständnissen kurz aufgeklärt werden. Das hier betrachtete Strahlungsvermögen eines Erregers und das Emissionsvermögen bei Hagen und Rubens sind Größen, die ganz verschiedenen physikalischen Vorgängen entsprechen. Hagen und Rubens bestimmen das Emissionsvermögen bekanntlich nach zwei verschiedenen Methoden: erstens indem die Intensität der Strahlung von bestimmter Wellenlänge, die von verschiedenen gleichtemperierten Metallflächen ausgeht, direkt gemessen wird, zweitens indem der Intensitätsverlust bestimmt wird, den die von einer Lichtquelle von bekannter Intensität ausgehende Strahlung von bestimmter Periode bei der nahezu senkrechten Reflexion an verschiedenen Metallspiegeln erleidet. Ist U die auf den Spiegel einfallende, r die reflektierte Energie, so ist $U-r$ der bei der Reflexion ins Metall eingedrungene Teil oder, wenn $U = 100$ gesetzt und der reflektierte Teil $\mathfrak{R}$ in Prozenten der einfallenden Strahlung gemessen wird, so ist der eingedrungene Teil in Prozenten der einfallenden Intensität $100-\mathfrak{R}$; ebensogroß muß nach dem Kirchhoff'schen Gesetze das Emissionsvermögen des Spiegels für die betreffende Temperatur und Wellenlänge sein. Voraussetzung der ersteren Methode ist eine hinreichende Dicke der strahlenden Schicht; sie könnte mit elektromagnetischen Erregern in der Weise nachgeahmt werden, daß man eine sehr große Zahl gleicher Schwingungskreise aus demselben Material (I) raumgitterartig verteilt, genau ebenso mit Erregern aus anderem Metall (II) verfährt, alle gleich stark erregt und die Intensitäten der von diesen beiden Aggregaten ausgesandten Strahlungen miteinander vergleicht.

Die zweite Methode läßt sich schon mit einem einzigen Erreger verwirklichen und entspricht folgendem Vorgange: Die Fortleitung elektromagnetischer Wellen an Drähten und ihr Eindringen in dieselben kann man als die fortgesetzte Brechung eines streifend auf die Drahtoberfläche einfallenden Wellenzuges betrachten.[1] Der Vorgang im Erreger selbst ist

[1] Vergl. wegen der einschlägigen Literatur etwa: v. Geitler, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. Braunschweig 1905, p. 142.

von ganz derselben Natur, nur daß die Wellen, statt an einer unendlich langen Leitung fortzueilen, zwischen den Enden des Erregers beständig hin- und hergeworfen werden. Von der in einem bestimmten Augenblicke noch vorhandenen elektromagnetischen Energie U dringt im nächsten Zeitteilchen dt ein bestimmter Betrag du in den Draht ein (wo er in Wärme verwandelt wird). Der um diesen Betrag verminderte Wert von U, also $U - \frac{\partial u}{\partial t} dt = r$ kann als die Intensität der bei streifender Inzidenz reflektierten Strahlung betrachtet werden, die nun im weiteren Gange der Ereignisse teils in den Draht eindringt, teils durch Abschnüren von Kraftlinien in den Raum gestrahlt wird. Es ist demnach $U - r$ oder, in Prozenten der einfallenden Menge U ausgedrückt, $100\left(1 - \frac{r}{U}\right) = 100 - \mathfrak{R}$, der eingedrungene Teil der Strahlung; ebensogroß ist nach dem Kirchhoff'schen Satze, der ja allgemeine Gültigkeit hat, das Emissionsvermögen des Metalles für die betreffende Wellenlänge.

Nach den Gleichungen 13) und den folgenden oben abgeleiteten Beziehungen ist nun

$$U - r = \frac{\partial u}{\partial t} . dt = 2\alpha . B^2 . e^{-2\beta t} dt$$

und demnach

$$100 - \mathfrak{R} = 200 . \alpha . dt. \qquad \ldots 23)$$

Für einen Erreger aus anderem Metalle folgt

$$100 - \mathfrak{R}' = 200 . \alpha' . dt \qquad \ldots 23a)$$

und daher für das Verhältnis der Emissionsvermögen E und E' der Metalle für die betreffende Wellenlänge und Temperatur mit Rücksicht auf Gleichung 6)

$$\frac{E}{E'} = \frac{100 - \mathfrak{R}}{100 - \mathfrak{R}'} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma'}}, \qquad \ldots 24)$$

also in Übereinstimmung mit den Forderungen der Maxwell-schen Theorie die von Hagen und Rubens experimentell gefundene Beziehung.

Während sich also der Ablauf der Schwingungen innerhalb des Erregers selbst in jedem Augenblicke nach dem Hagen-Rubens'schen Gesetze regelt, gilt für das Strahlungsvermögen des ganzen Erregers in den umgebenden Raum die von mir aufgestellte Beziehung.

II. Experimenteller Teil.

Bei allen Versuchen bestand der Primärkreis aus einem Drahtrechtecke; in die eine kurze Rechteckseite war ein Platten-Luftkondensator von veränderlicher Kapazität, in die andere eine Funkenstrecke eingeschaltet, von der Drähte zu einem Ruhmkorff'schen Induktionsapparat führten. Dieser wurde bei den früheren Versuchen mit dem Neef'schen Hammer, späterhin mit einem Quecksilber-Turbinenunterbrecher von Siemens & Halske betrieben. Die Funkenstrecke bestand entweder aus zwei Messing- oder Zinkkugeln von 4 *cm* Durchmesser und wurde mit und ohne Durchblasen eines Luftstromes benützt, oder aus Messingkugeln von 7 *mm* Durchmesser unter Petroleum. Eine befriedigende Konstanz der Funkenwirksamkeit war auf keine Weise zu erzielen. Die Verwendung des Petroleumbades macht zwar die Funken sehr wirksam[1] und der Zufall fügt es auch manchmal, daß sie während einiger Zeit ziemlich konstant bleiben; die sehr starke Korrosion des Elektrodenmaterials verändert aber meist in kurzer Zeit die Länge der Funkenstrecke und somit auch die Intensität der primären Schwingung.

Als Material für die Resonatordrähte verwendete ich Kupfer, Zink und Neusilber. Der Durchmesser der Drähte wird an entsprechender Stelle vermerkt werden. Die Resonatoren waren von dem schon in früheren Arbeiten zuerst von mir verwendeten Typus, der sich ja auch bei späteren Untersuchungen[2] als sehr geeignet zu Wellenlängenmessungen erwiesen hat. Die Abstimmung der Resonatoren auf den Primärkreis erfolgte

---

[1] Sarasin und de la Rive, Arch. des scienc. phys. et nat., *28*, p. 306 (1892); vergl. auch H. Bauernberger, diese Sitzungsber., 102, p. 782 (1893).

[2] Vergl. z. B. F. Kiebitz, Ann. d. Phys., *5*, p. 872 (1901); P. Drude, Ann. d. Phys., *9*, p. 611 (1902).

durch Verschieben einer Brücke; als solche empfiehlt es sich, statt eines Drahtes einen Blechstreifen des betreffenden Metalles zu verwenden, der in eine entsprechende Form gebogen wird, um beim Verschieben guten Kontakt mit den Resonatordrähten zu sichern. Der Vorteil des Blechstreifens gegenüber dem einfachen Draht besteht in der viel vollständigeren Reflexion, die die Wellen an ihm erleiden. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß die Intensität der Resonatorschwingungen wächst, wenn man in einiger Entfernung hinter der in Resonanzstellung befindlichen Drahtbrücke einen zweiten Draht über die Resonatordrähte legt; dieser Erfolg tritt hingegen nicht ein, wenn als erste Brücke ein hinreichend breiter Blechstreifen verwendet wird. Dieses Verhalten ist nach den Untersuchungen von Drude[1] über die Reflexion elektrischer Drahtwellen an Brückendrähten ohneweiters verständlich.

Aus diesem Grunde wurde auch die von mir durch einige Zeit benützte Methode der Intensitätsmessung der Resonatorschwingung mit Hilfe von Thermoelementen (nach Klemenčič),[2] die gleichzeitig als Brückendrähte dienten, wieder verlassen, denn die sehr feinen, wenn auch kurzen Drähtchen des Thermoelementes mußten eine nur mangelhafte Reflexion zur Folge haben; außerdem trug ich gegen die Anwendung dieser Methode Bedenken, da die starke Absorption der dünnen Eisen-Konstantandrähte der Elemente jedenfalls eine Fehlerquelle darstellt, wenn man den Zweck verfolgt, die Absorption des Resonatordrahtes selbst zu bestimmen und dies um so mehr, mit je kürzeren Wellen man es zu tun hat.

Die Messung der Resonatorschwingungen erfolgte daher fast durchwegs nach dem Vorgange von Bjerknes mit Hilfe eines Hertz'schen Elektrometers, dessen Platten mit den offenen Drahtenden des Resonators durch kleine Quecksilbernäpfe derart verbunden waren, daß einesteils Handhabungen am Resonator (wie z. B. Verschieben der Brücke), andernteils ein Auswechseln der verschiedenen Resonatoren gegeneinander sowie die Eichung des Elektrometers ohne mechanische

---

1 P. Drude, Abh. der kgl. sächs. Ges. d. W., XXIII, p. 167 (1896).

2 Vergl. P. Drude, Ann. d. Phys., 15, p. 714 (1904).

Erschütterungen des auf einem isolierten Pfeiler des Institutes aufgestellten Instrumentes erfolgen konnten. Die weiterhin mitgeteilten Experimente sind alle mit dem Elektrometer ausgeführt.

Die Aufstellung war meist wie in Fig. 1 derart getroffen, daß sich das Elektrometer *E* oberhalb der primären Funkenstrecke *f* befand. Die Entfernung der horizontalen Ebenen des primären und sekundären Kreises voneinander betrug zirka 30 *cm* und mehr. Die Koppelung war daher gering, wie sich auch aus der Schärfe der Resonanzmaxima erkennen ließ. Allerdings dürfte die verschiedene Stärke der Koppelung, die sich bei gegebenem Abstande der beiden Schwingungskreise, aber verschiedener Wellenlänge und verschiedenem Resonatormaterial ergibt, eine Fehlerquelle bedeuten. Aber die Dimen-



Fig. 1.

sionen des Experimentierraumes verursachen wohl in jedem Falle durch Reflexionen an den Wänden Fehler derselben Größe, die sich nicht vermeiden lassen.

Um von der Unregelmäßigkeit der primären Funken unabhängig zu sein, versuchte ich, die beiden Resonatoren symmetrisch zum Erreger anzuordnen und mit Hilfe zweier Elektrometer (respektive Thermobrücken) gleichzeitig zu beobachten. Doch mußte ich diesen Plan aufgeben, da es sich zeigte, daß eine gegenseitige Beeinflussung der beiden Resonanzkreise vorhanden war, wodurch die Messungen in unkontrollierbarer Weise beeinflußt worden wären. So mußte ich nach längeren vergeblichen Versuchen wieder zu der ursprünglichen, im vorangehenden beschriebenen Anordnung zurückkehren. Der Vergleich der einzelnen Resonatoren wurde in der Weise vorgenommen, daß sie möglichst rasch gegeneinander ausgewechselt und die Elektrometerausschläge abgelesen wurden. Der Inkonstanz der Funken wurde durch wiederholte

abwechselnde Beobachtungen und Mittelnehmen aus den Ablesungen Rechnung getragen.

Bei den ersten Versuchen, die bis zu (ganzen) Wellenlängen von etwa 36 *m*, also Resonatorlängen von etwa 9 *m* reichten, wurden die Resonatoren aus mehreren Abteilungen gebildet, die bei jedem Wechsel frisch aneinandergelötet werden mußten. Die einzelnen Abteilungen bestanden aus Glasröhren, an deren Enden sich Holzklötze mit kleinen Stützen befanden, die die Drähte in Spannung und konstantem Abstande hielten. Späterhin wurden mehrere möglichst gleiche, 350 *cm* lange und 18 *cm* breite Holzrahmen hergestellt, die aus je zwei durch einige Querhölzer verbundenen Holzleisten bestanden, und die Drähte durch einige an den Leisten angebrachte Holzstützen etwa 3 *cm* über den Leisten ausgespannt. Diese Rahmen konnten nun sehr bequem und rasch miteinander vertauscht werden. Die Entfernung der 5 *cm* breiten Blechbrücken vom Elektrometer wurde an einer auf die Holzleisten jedes Rahmens übertragenen Skala, die von 10 zu 10 *cm* fortschritt, abgelesen. Durch die Nähe der Holzleisten wurde jedenfalls die Lage des Resonanzmaximums gegenüber freigespannten Drähten nach Drude's Untersuchungen ein wenig verändert. Da es aber nicht auf absolute Messungen der Wellenlängen, sondern nur auf den Vergleich verschiedener Metalle bei derselben Wellenlänge ankam, so ist dieser Umstand ohne Einfluß auf das Resultat, da, wie erwähnt, für möglichste geometrische Gleichheit der einzelnen Resonatoren gesorgt war.

Die nachstehende Fig. 2 gibt das Resultat von Messungen wieder, die an Kupfer- (0·99 *mm*) und Neusilberdrähten (1·015 *mm*) angestellt sind. Die Distanz der Resonatordrähte war 12 *cm*. Als Abszissen sind die Entfernungen der Brücke vom Elektrometer $\left(\text{etwa} = \frac{\lambda}{4}\right)$ in Zentimetern aufgetragen. Die Ordinaten stellen das Verhältnis n der Elektrometerausschläge für $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Kupfer}}$ für die betreffende Wellenlänge dar. Die beobachteten Punkte sind bezeichnet, die beigefügten Zahlen bedeuten die Anzahl von Einzelbeobachtungen, aus denen der betreffende Punkt berechnet wurde. Bei Resonator-

längen unter 120 *cm* waren die primären Funken (in Luft) so unregelmäßig und die Elektrometerausschläge so klein, daß verläßliche Resultate nicht zu erzielen waren.

Die Figur läßt deutlich erkennen, daß das Verhältnis n der Ausschläge $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Kupfer}}$ für Resonator (Viertelwellen) längen zwischen 900 und 600 *cm* schon nahezu konstant ist. Der

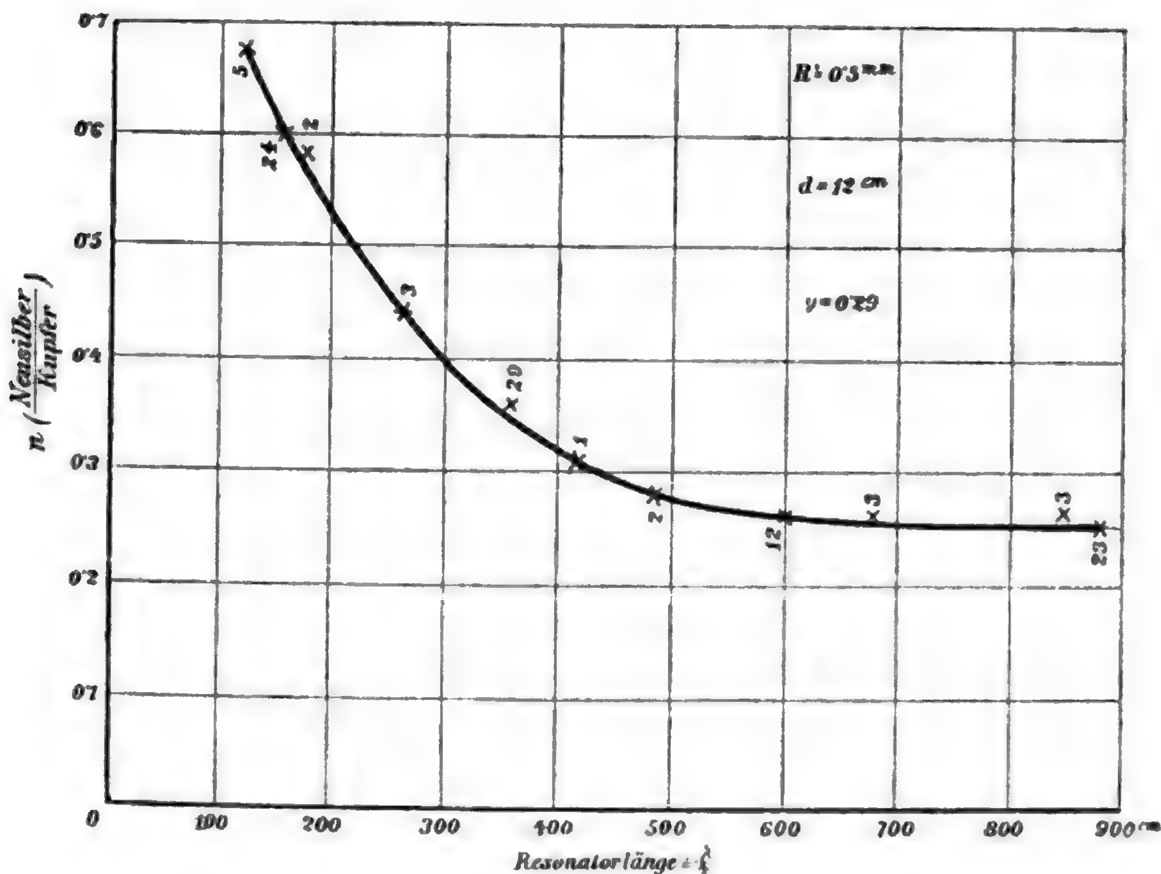


Fig. 2.

Wert dieses Verhältnisses 0·26 steht in befriedigender Übereinstimmung mit dem Werte von $\nu = \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}} = 0 \cdot 29$ (vergl. Gleichung 6). Bei Resonatorlängen, die größer als 600 *cm* sind, befinden wir uns unter den geschilderten Versuchsbedingungen schon in jenem Gebiete, wo die Hertz'schen Dekremente δ gegenüber den Joule'schen Dekrementen α vernachlässigt werden können. Hier nimmt also n den theoretischen konstanten Grenzwert ν an und nach Gleichung 22) ist demnach für Paralleldrahtresonatoren verschiedenen Materials von der verwendeten Gestalt das Verhältnis der Strahlungsvermögen

für gleiche Wellenlängen konstant, sobald die Resonatorlänge 600 *cm* übersteigt.

Unterhalb 600 *cm* wächst der Wert von n mit abnehmender Periode in Übereinstimmung mit den theoretischen Überlegungen, die an Gleichung 8) geknüpft wurden. Unterhalb 120 *cm* Resonatorlänge konnte der Verlauf der n-Kurve aus den obigen Gründen nicht verfolgt werden; doch muß man annehmen, daß sich n dem Grenzwerte 1 nähert, je mehr die Joule'schen Dekremente gegenüber den Hertz'schen vernachlässigt werden können. Die Kurve dürfte daher unterhalb $\frac{\lambda}{4} = 120\,cm$ einen Wendepunkt aufweisen. Ihr glatter Verlauf macht es wahrscheinlich, daß innerhalb der beobachteten Grenzen weder Kupfer noch Neusilber Anomalien der Absorption aufweisen.

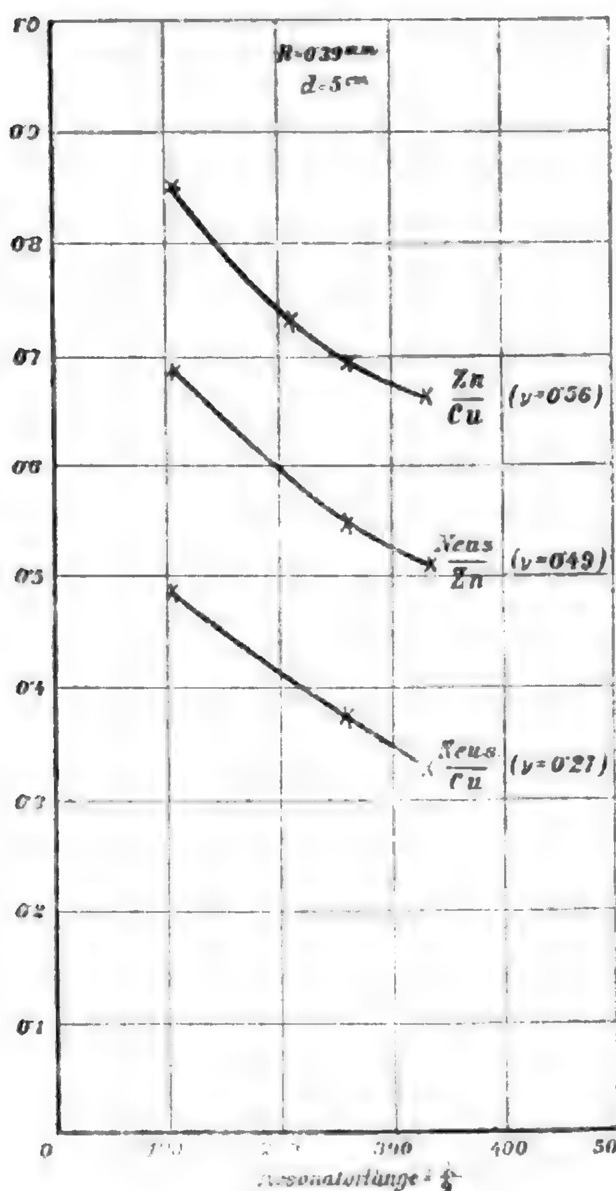


Fig. 3.

In der nebenstehenden Fig. 3 sei noch der Verlauf der n-Kurven für $\frac{\text{Zink}}{\text{Kupfer}}$ und $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Kupfer}}$ (beide beobachtet) sowie für $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Zink}}$ (aus den beiden ersteren Kurven berechnet) für Viertelwellenlängen von etwa 100 bis 330 *cm* zur Anschauung gebracht. Die betreffenden Versuche wurden mit genau gleichen Drähten von 0·78 *mm* Durchmesser und 5 *cm* Abstand angestellt. Die erregenden Funken sprangen unter Petroleum über. Die Resonatorebene

lag 30 *cm* über der Ebene des Erregers. Der mir bei diesen Versuchen zur Verfügung stehende Raum gestattete leider nicht, mit größeren als den angegebenen Wellenlängen zu experimentieren.

Eine nähere Erläuterung dieser Figur erscheint überflüssig. Nur auf die sehr befriedigende Übereinstimmung des Verlaufes der beiden Neusilber-Kupferlinien in Fig. 2 und 3 sei hingewiesen. Entsprechend dem kleineren Werte für ν sowie der kleineren Drahtdistanz und Drahtstärke für das in Fig. 3 verwendete Material liegt hier die n-Linie durchaus tiefer als in Fig. 2, zeigt im übrigen jedoch den gleichen Verlauf, trotzdem die beiden Kurven zu ganz verschiedenen Zeiten, mit verschiedenem Material und bei veränderter Versuchsanordnung aufgenommen wurden.

Zusammenfassung der Resultate.

Es wurde eine Methode angegeben, die es gestattet hätte, eine etwa vorhandene anomale Absorption der Metalle für elektrische Wellen experimentell nachzuweisen; es wurde mit ihrer Hilfe gezeigt, daß für Kupfer und Neusilber im Bereiche der ganzen Wellenlängen von etwa 400 bis 3600 *cm*, für Zink von etwa 400 bis 1320 *cm* anomale Absorption nicht vorhanden ist.

Es wurde auf theoretischem Wege geschlossen, daß für kongruente Paralleldrahtresonatoren aus verschiedenem Metall das Verhältnis n der Elektrometerausschläge (gleich dem reziproken Verhältnisse der Dämpfungskonstanten) mit abnehmender Schwingungsdauer wachsen muß (wenn als Zähler des Verhältnisses stets der Ausschlag für das Metall mit dem größeren spezifischen Leitungswiderstand gewählt wird); dieser Schluß wurde auf experimentellem Wege bestätigt.

Es wurde nachgewiesen, daß dieses Verhältnis n gleich dem Verhältnisse der Strahlungsvermögen der beiden Resonatoren (Erreger) ist.

Es wurde theoretisch abgeleitet, daß sich der Ablauf der Schwingungen innerhalb eines schwingenden Systems in jedem Augenblicke nach dem Hagen-Rubens'schen Gesetze regelt,

wonach das Verhältnis der Emissionsvermögen zweier Metalle für eine bestimmte Wellenlänge und Temperatur gleich dem **direkten** Verhältnisse der Quadratwurzeln ihrer spezifischen elektrischen Widerstände ist; daß hingegen die Strahlungsvermögen zweier kongruenten Erreger aus verschiedenem Metall, wenn die Hertz'schen Dekremente klein gegen die Joule'schen Dekremente sind, im **reziproken** Verhältnisse dieser Quadratwurzeln stehen.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIV.

Messungen des Ionengehaltes der Luft auf dem Säntis im Sommer 1905

von

Dr. **Viktor Conrad.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1906.)

Dank einer Subvention, welche mir von der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien aus dem Ponti-Fonde verliehen wurde, war es mir möglich, meine luftelektrischen Messungen auf Berggipfeln im Sommer 1905 wieder aufzunehmen.

Als Beobachtungsort wurde das Observatorium auf dem Säntis (2500 *m*) gewählt, das der schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt untersteht. Für die Wahl dieses Ortes sprachen außer persönlichen Gründen noch der Umstand, daß der Säntis von Ost über Nord nach Westen nahezu unvermittelt steil gegen die Ebene zu abfällt. Da den Verfasser namentlich das Studium der Wirkung der auf- und absteigenden Luftströme auf den Ionengehalt der Luft interessierte, erschien ihm die eben beschriebene Lage und Formation des Säntis für seine Zwecke sehr günstig. Wie später gezeigt werden soll, haben sich die gehegten Erwartungen keineswegs ganz erfüllt, indem sich die luftelektrischen Verhältnisse des Säntisgipfels als ungemein komplizierte ergaben.

Zur Messung des Ionengehaltes wurde ein Ebert'scher Aspirationsapparat von Günther & Tegetmayer in Braunschweig neuer Konstruktion mit vertikalem Kondensator verwendet. Die Beweglichkeitsmessungen wurden mit dem Hilfs-

kondensator nach Mache angestellt. Diese Apparate wurden mir von Herrn Prof. Franz Exner leihweise überlassen, wofür ich an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank ausspreche.

Was die Isolation des Elektroskops betrifft, so kann gesagt werden, daß dieselbe eine so vollkommene war, daß alle durch dieselbe entstehenden Fehler tief unter der Fehlergrenze der Beobachtungen lagen. Zur Sicherung der Isolation wurde in das Trockenrohr stets Natrium eingeführt und morgens und abends von der Oxydschichte befreit, beziehungsweise erneuert. Das von allen Beobachtern erwähnte Flattern der Blättchen bei funktionierendem Aspirator stellte sich auch bei den vorbereitenden Messungen in Wien als ungemein lästig heraus. Bei dem verwendeten Apparat wurde es jedoch nur durch schlechte Dichtung der Röhren an das Elektroskopgehäuse und namentlich durch die schlechte Dichtung der Glasplatten des Elektroskops erzeugt. Die Lederdichtungen wurden durch Auftragen von Hahnfett, die Dichtungen der Gläser durch Bestreichen mit einer dickflüssigen Lösung von Mastix in Alkohol bewirkt. Nachdem dies geschehen war, hörte das Flattern der Blättchen vollkommen auf. Auch eine verschiedene Einstellung der Blättchen bei arretiertem und laufendem Aspirator konnte nicht festgestellt werden.

Anfänglich war es geplant, immer parallel mit den Ionengehaltsmessungen auch Beweglichkeitsmessungen zu machen. Um die Messungen nicht allzu sehr auszudehnen, wurde der Vorschaltkondensator auch bei sämtlichen Ionengehaltsmessungen vorgesteckt gelassen. Der relative Wert der Messungen, auf den es bei der Gipfellage des Beobachtungsortes und bei der spitzen Formation des Gipfels namentlich ankam — da ja bei dem enorm starken Gipfelfelde die absoluten Werte ohnehin nicht von großer Bedeutung sind — wurde durch den geerdeten Vorschaltkondensator sicherlich nicht beeinträchtigt; um nun doch auch absolute Werte zu erhalten, wurde eine Reihe von Vergleichsmessungen mit und ohne Vorschaltkondensator angestellt. Das Resultat dieser Messungen war, daß man mit dem Vorschaltkondensator zirka 10 bis 15% tiefere Werte erhält als ohne denselben. Auch bei den Einzelmessungen wurden nie so hohe Verluste durch den Vorschaltkondensator

festgestellt, wie sie die Herren Mache und v. Schweidler[1] gefunden haben, nämlich im Mittel zu 28·6%, beziehungsweise 28·7%, im Maximum aber zu 53%. Die im folgenden mitgeteilten Werte sind nicht korrigiert und müssen zirka mit 1·15 multipliziert werden um die absoluten Werte zu erhalten. Natürlich wurde bei der Berechnung des Ionengehaltes bei vorgestecktem und nicht vorgestecktem Vorschaltkondensator die verschiedene Fördermenge des Aspirators berücksichtigt, wie dieselbe in der Konstantentafel von der Firma Günther & Tegetmayer angegeben war.

Die Ladung des Hilfskondensators wurde durch eine Trockenbatterie von 16 kleinen Elementen besorgt, in der Art, daß ein Pol an die Klemme des Vorschaltkondensators gelegt wurde, während der andere Pol geerdet wurde. Die Spannung der Batterie wurde mit einem Milli-Volt-Amperemeter von Siemens & Halske, das auf Volt so gestöpselt war, daß ein Teilstrich 0·1 Volt betrug, oftmals kontrolliert. Es genügten immer 12 bis 14 Elemente, die eine sehr konstante Spannung von 17 bis 20 Volt abgaben. Die Verwendung solcher kleiner Trockenbatterien kann daher für diesen Zweck empfohlen werden. Sie sind überall im Handel erhältlich und leicht transportabel. Alle 16 Elemente waren in einem Kästchen von den Dimensionen 18×18×12 *cm* untergebracht und litten auch beim Transport nicht im geringsten.

Als Aufstellungsort des Apparates diente im allgemeinen eine kleine Konsole vor dem Ostfenster des Instrumentenzimmers, zirka 8 *m* über dem Boden. Die Erdleitung wurde an die Erdleitung der Blitzableiteranlage angeschlossen. Während des Funktionierens des Aspirators war das Fenster immer geschlossen und wurde nur behufs Ablesung des Elektroskops geöffnet. Die Ablesungen bei Nacht wurden mittels einer Petroleumlaterne gemacht, die ziemlich weit vom Apparat weggehalten werden konnte und keinen nachweisbaren Einfluß auf die erhaltenen Werte hatte.

Ein kleiner Teil der Messungen wurde auf der Plattform des Observatoriums angestellt. Die daselbst gewonnenen Werte

---

[1] Physik. Zeitschrift, VI. Jahrg., Nr. 3, p. 71.

unterschieden sich prinzipiell nicht von den Übrigen. Parallelmessungen konnten mangels eines zweiten Apparates nicht ausgeführt werden.

Um immer mit gleichen Quantitäten durchgesaugter Luft arbeiten zu können, wurde nicht nach gleichen Zeiten, sondern nach gleichviel Umdrehungen des Federgehäuses abgelesen. Nach jeder Umdrehung wurde der Aspirator neuerlich aufgezogen und nur zur Kontrolle des Zählens der Glockenzeichen, die nach jeder Umdrehung des Federhauses erfolgten, wurde eine Stopuhr zu Hilfe genommen. Die erste Ablesung des Elektroskops wurde erst bei jenem Glockenzeichen angestellt, bei dem der Aspirator (dem Gehör nach) seine volle Tourenzahl erreicht hatte.

Die zweite Ablesung geschah nach sechs Umdrehungen des Federgehäuses. Da der Spannungsabfall nach sechs Umdrehungen, einige wenige Fälle ausgenommen, immerhin ein genügender war, schien es geraten, nur so wenige Umdrehungen zu nehmen, um die für eine Doppelbeobachtung notwendige Zeit möglichst abzukürzen und so zahlreichere Beobachtungen machen zu können, was ja zur Feststellung des täglichen Ganges eine Notwendigkeit war.

Die Konstanten des Apparates konnte der Verfasser mangels der hiezu nötigen Apparate nicht selbst feststellen, sondern mußte die von der Firma Günther & Tegetmayer beigegebenen Konstanten der Berechnung des Ionengehaltes der Luft zu Grunde legen. Nach diesen Angaben transportierte der Aspirator, wenn er nach jedem Glockenzeichen von neuem aufgezogen wurde, von einem Zeichen bis zum anderen $175 \cdot 49\, l$ Luft, daher bei sechs Umdrehungen des Federgehäuses $1 \cdot 053\, m^3$, und zwar bei vorgestecktem Vorschaltkondensator. Ohne Hilfskondensator wurden bei sechs Umdrehungen des Federgehäuses $1 \cdot 158\, m^3$ gefördert. Eine Umdrehung des Federgehäuses dauerte zirka 95 Sekunden, daher sechs Umdrehungen zirka 9 Minuten 30 Sekunden.

Nach der von Ebert[1] angegebenen Formel

$$f = \frac{C}{300\, M}$$

[1] Illustrierte aeronaut. Mitt., Heft 4, Oktober 1902.

ergab sich als Umrechnungsfaktor für den Spannungsabfall in Volt in freie Elektrizitätsmenge per Kubikmeter die Konstante $f = \frac{1}{28 \cdot 6}$.

Die im folgenden mitgeteilten Beobachtungen wurden in der Zeit vom 1. bis 14. August 1905 angestellt. Es wurde möglichst jede gerade Stunde eine Bestimmung des positiven und des negativen Ionengehaltes vorgenommen, und zwar zirka eine Viertelstunde vor der vollen Stunde begonnen, eine Viertelstunde nachher beendet, da die gesamte Doppelmessung einschließlich der Umpolarisation zirka eine halbe Stunde beanspruchte. Die Messungen unterblieben im allgemeinen nur, wenn Niederschlag oder Sturm den Apparat gefährdeten.

Das Wetter war den Beobachtungen leider nicht günstig; auch an den zur Ableitung des täglichen Ganges verwendeten, sonst wolkenlosen Tagen gab es am Nachmittag aufsteigende Cumuluswolken und Nebelschwaden, die sich freilich bald wieder auflösten. Detailliertere Bemerkungen über das Wetter sind den Beobachtungsdaten von Fall zu Fall angefügt.

Der tägliche Gang des Ionengehaltes.

Zur Ableitung des täglichen Ganges wurden 62 Doppelbeobachtungen verwendet, die am 3., 4., 9. und 10. August angestellt wurden.

Es muß hier nochmals nachdrücklich hervorgehoben werden, daß diese Tage keineswegs wolkenlos waren. Sie wurden zu obgenanntem Zwecke nur deshalb verwendet, weil sie erstens immerhin noch die besten waren, zweitens, weil die Wolkenbildung an diesen Tagen eigentlich nur der verstärkte Ausdruck des Phänomens der auf- und absteigenden Luftströme war. Nacht und Morgen waren sehr schön und wolkenlos, vormittags Cumulusbildung am Horizont, nachmittags allseitig und aus dem Tale aufsteigende Wolken und Nebel, die sich gegen 4^h p. wieder auflösen, um wieder eine sternenhelle schöne Nacht folgen zu lassen. Der Morgen des 4. August zeichnete sich durch einen geschlossenen Wolkenboden tief unter dem Gipfel aus, während der Nachmittag des 10. August

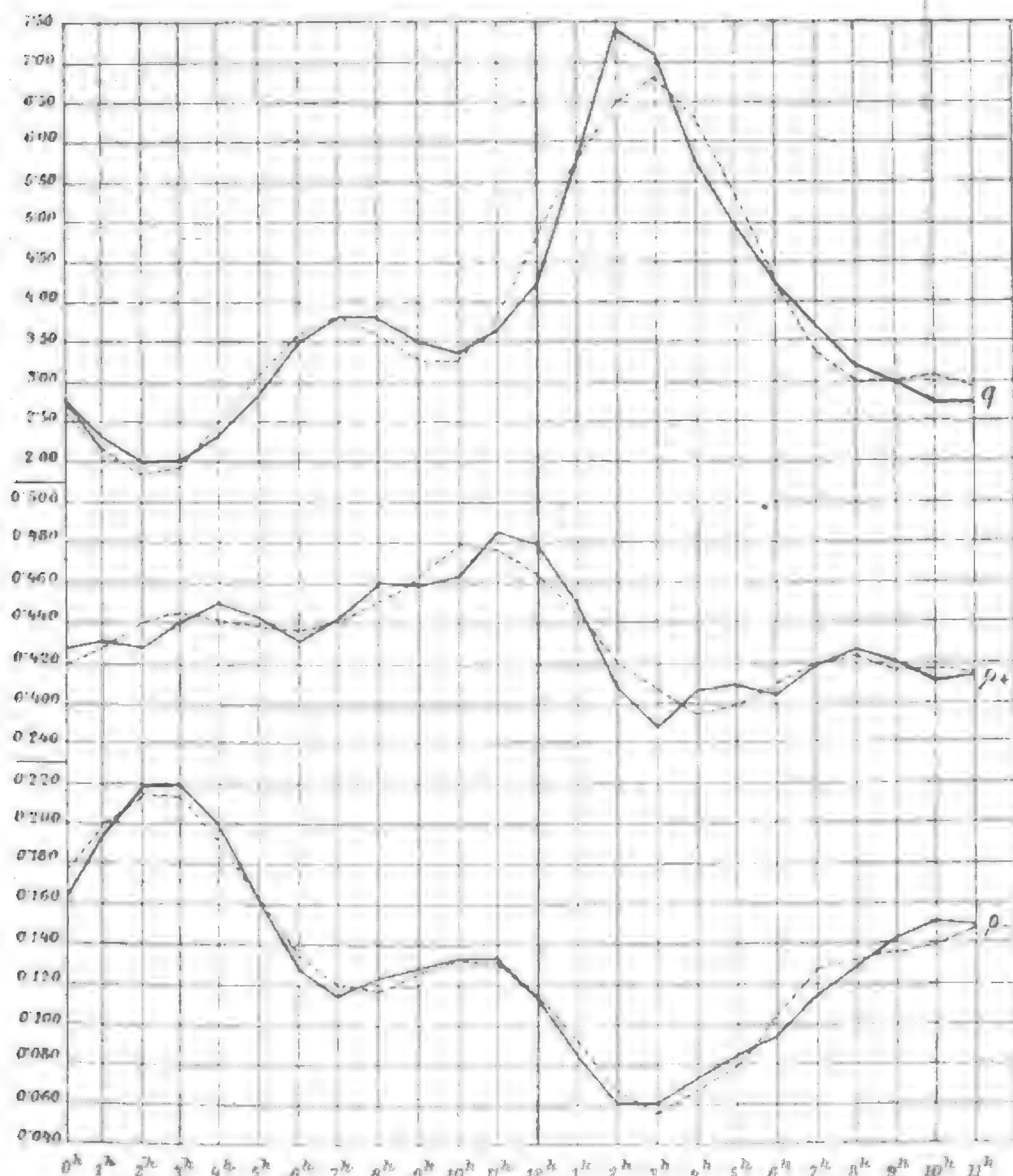
eine besonders starke Bewölkung aufwies. Nach dem 10. August trat dann ein jäher Witterungssturz mit Gewitter und Niederschlag ein, so daß an eine Arbeitsmöglichkeit nicht mehr zu denken war. Ein einzelner schöner Tag, der 15. August, wurde noch zu Vergleichsmessungen am Fuße des Säntis (Wasserau) benutzt. Dieselben sollen am Schlusse mitgeteilt werden. Das Wetter in der Schweiz blieb dann den ganzen Sommer so unstet, daß es dem Verfasser unmöglich wurde, seinen ursprünglichen Plan zur Ausführung zu bringen, die Ionisationsmessungen auf dem Gornergrat um die Zeit der partiellen Sonnenfinsternis fortzusetzen.

Die folgende Tabelle I gibt die Mittelwerte aus den genannten 4 Tagen (3., 4., 9. und 10. August), und zwar enthält die erste Kolonne die Stunde, die zweite die Menge freier positiver Elektrizität im Kubikmeter in elektrostatischen Einheiten (ρ_+), die dritte dieselbe Größe für das negative Vorzeichen (ρ_-). Die vierte Kolonne enthält die angenäherten Mittelwerte für die Größe $q = \frac{\Sigma \rho_+}{\Sigma \rho_-}$. Die fünfte, sechste und siebente Kolonne enthält die nach der Formel $\frac{a+2b+c}{4}$ ausgeglichenen Werte von ρ_+, ρ_- und q, die achte, neunte und zehnte die Abweichungen dieser Größen vom Mittelwert. Die interpolierten Werte sind durch Klammern kenntlich gemacht.

Zur besseren Anschaulichkeit sind die ausgeglichenen Werte von ρ_+, ρ_- und q in der Figur durch die ausgezogenen Kurven dargestellt.

Wenn man die unten in der Tabelle angegebenen Mittelwerte betrachtet, so fällt vor allem auf, daß das ρ_+ gegenüber den in der Ebene gefundenen Werte nicht besonders hoch ist, dagegen der Wert von ρ_- sehr stark herabgedrückt erscheint. Man hat es hier offenbar mit dem Effekt des außerordentlich starken Gipfelfeldes zu tun. Die Wirkung desselben tritt in dem hohen Mittelwert des $q = 3\cdot76$ noch deutlicher zu Tage. Gegen den im Tale (Wasserau) gefundenen Mittelwert weist der auf dem Säntis gewonnene immerhin eine Erhöhung auf. In Wasserau wurde ein Wert von $\rho_+ = 0\cdot303$ E. E. (ebenfalls unkorrigiert) gefunden. Auch diese relative Erhöhung mag

jedoch auch nur der Wirkung des Gipfelfeldes zugeschrieben werden. Der mittlere Ionengehalt $\frac{\rho_+ + \rho_-}{2}$ beträgt auf dem Säntis 0·283 E. E., im Tale 0·286 E. E., ist also auf dem Säntis und in Wasserau gleich.



Beim Anblick der Kurven, die den täglichen Gang von ρ_+ und ρ_- darstellen, fällt vor allem die Ungleichartigkeit der beiden Kurven auf: ρ_+ hat sein Hauptmaximum um 11^h a., ρ_- jedoch um 3^h a. Die Minima stimmen in der Zeit ihres Eintreffens gut überein; ρ_+ hat sein Minimum um 3^h p., ρ_- um 2^h p. Ein sekundäres Maximum von ρ_+ um 4^h a. fällt

Tabelle I.

Zeit	Positive	Negative	q	Ausgeglichen			Abweichungen vom Mittelwert $\times 10^3$		Abweichungen vom Mittelwert $\times 10^2$
	freie Elektrizitätsmenge im Kubikmeter Luft in elektrostatischen Einheiten			ρ_+	ρ_-	q	ρ_+	ρ_-	q
0^h a.	0·444	0·157	2·83	0·430	0·163	2·69	— 4	+30	—110
1^h a.	(0·433)	(0·194)	(2·32)	0·433	0·194	2·32	— 1	+61	—147
2^h a.	0·422	**0·232**	1·82*	0·429	0·219	1·99*	— 5	+86	—180
3^h a.	(0·441)	(0·220)	(2·01)	0·441	**0·220**	2·01	+ 7	+87	—178
4^h a.	0·460	0·209	2·20	0·451	0·200	2·33	+17	+67	—146
5^h a.	(0·443)	(0·163)	(2·92)	0·443	0·163	2·92	+ 9	+30	— 87
6^h a.	0·426	0·117	3·65	0·433	0·128	3·51	— 1	— 5	— 28
7^h a.	0·437	(0·117)	(3·83)	0·443	0·117	3·83	+ 9	—16	+ 4
8^h a.	0·474	0·118	4·02	0·461	0·122	3·82	+27	—11	+ 3
9^h a.	0·460	0·135	3·41	0·459	0·129	3·56	+25	— 4	— 23

10h a.	0·443	0·130	3·41	0·464	0·135	3·42	+30	+ 2	− 37
11h a.	0·509	0·147	3·46	0·485	0·134	3·65	+51	+ 1	− 14
Mittag	0·478	0·112	4·28	0·479	0·115	4·24	+45	−18	+ 45
1h p.	0·449	0·091	4·94	0·446	0·085	5·72	+12	−48	+193
2h p.	0·410	0·047*	8·72	0·409	0·061*	7·38	−25	−72	+359
3h p.	0·368*	(0·061)	(7·14)	0·392*	0·061*	7·14	−42	−72	+335
4h p.	0·423	0·076	5·56	0·405	0·074	5·81	−29	−59	+202
5h p.	(0·405)	(0·083)	(4·97)	0·408	0·083	4·97	−26	−50	+118
6h p.	0·399	0·091	4·38	0·406	0·097	4·28	−28	−36	+ 49
7h p.	0·423	0·124	3·41	0·419	0·116	3·66	−15	−17	− 13
8h p.	0·431	0·125	3·44	0·427	0·129	3·32	− 7	− 4	− 47
9h p.	(0·422)	(0·142)	(3·01)	0·422	0·142	3·01	−12	+ 9	− 78
10h p.	0·413	0·160	2·58	0·412	0·151	2·74	−22	+18	−105
11h p.	0·399	0·143	2·79	0·414	0·150	2·75	−20	+17	−104
Mittel	0·435	0·133	3·79	0·434	0·133	3·79	—	—	—

so ziemlich mit dem Hauptmaximum von ρ_- zusammen, während ein sekundäres Maximum von ρ_- um 11^h a. mit dem Hauptmaximum von ρ_+ der Zeit nach sich in guter Übereinstimmung befindet.

Wenn auch die Kurven in ihrer Unregelmäßigkeit deutlich zeigen, daß den schlechten Witterungsverhältnissen gegenüber keineswegs genügend viele Beobachtungen vorliegen, so wurde doch der Vollständigkeit halber die Darstellung des täglichen Ganges mittels der harmonischen Analyse unternommen. Es ist:

$$\rho_+ = 0\cdot434+0\cdot026 \sin(332°+x)+0\cdot014 \sin(138°+2x)+ +0\cdot014 \sin(307°+3x)$$

$$\rho_- = 0\cdot133+0\cdot056 \sin(52°+x)+0\cdot012 \sin(79°+2x)+ +0\cdot024 \sin(322°+3x)$$

$$q = 3\cdot79+1\cdot74 \sin(237°+x)+0\cdot62 \sin(348°+2x)+ +0\cdot76 \sin(147°+3x).$$

Wie man aus den Formeln ersieht, hat man es hier durchwegs mit dreifachen Perioden zu tun. Die Amplitude der dritteltägigen Welle ist in allen drei Fällen noch ausschlaggebend und erst die Amplitude der vierteltägigen Welle sinkt stark ab, ohne jedoch vollkommen vernachlässigbar zu sein. Auch hierin kommt wohl die Tatsache zum Vorschein, daß durch die geringe Zahl der Beobachtungen die Zufälligkeiten nicht genügend ausgeschieden sind.

Was nun die bedeutende Verschiedenheit der ρ_+- und ρ_--Kurve betrifft, so mag es vielleicht doch möglich sein, auf die Gründe hinzuweisen, die eventuell ein solches verschiedenes Verhalten bedingen könnten. Es mag einerseits in der größeren Empfindlichkeit der negativen Ionen gegen Feuchtigkeit, Kondensation und anderweitige Trübung liegen, andrerseits in der individuellen Beschaffenheit des Säntisgipfels. Während auf dem Sonnblick relativ einfache luftelektrische Verhältnisse gefunden wurden, zeigt eben der Säntis recht komplizierte. Der Sonnblick hat einen durch und durch gefrorenen Gipfel und ist von einem nahezu kontinuierlichen Gürtel von Gletschern umgeben. Unter diesen Umständen kann man also annehmen,

daß auf dem Sonnblick gar keine ionisierende Emanation aus dem umgebenden Boden dringt und der Ionengehalt der Luft, respektive wahrscheinlicher die Ionenbeweglichkeit einzig und allein durch die vertikalen Luftströmungen bestimmt wird. Die Möglichkeit dieser Hypothese wurde seinerzeit vom Verfasser sowohl dem Verhalten des täglichen Ganges nach als auch bei der Diskussion der Abhängigkeit der luftelektrischen von den meteorologischen Elementen gezeigt[1] und wurde auch von anderer Seite bei Messungen im Winter auf einem Berge, der mit einer dicken Schneedecke bedeckt war, in ähnlicher Weise nachgewiesen.[2]

Beim Säntisgipfel liegen nun die Verhältnisse gänzlich anders. Der Gipfel ist schneefrei und stark zerklüftet. Hier kann man sich sehr gut denken, daß bei steigender Temperatur und vielleicht örtlich sinkendem Luftdruck Emanation aus dem Boden dringt und den Ionengehalt der Luft vergrößert. Über dieses Phänomen wird sich nun der Einfluß der auf- und absteigenden Luftströme lagern. Gehen wir nun von dem Gesichtspunkt aus, daß durch steigende relative Feuchtigkeit und heraufgeführte Staubteilchen vor allem die negativen Ionen in ihrer Beweglichkeit gehemmt und dann teilweise durch den Ebert'schen Aspirationsapparat nicht mehr gezählt werden! Es wird dann bei aufsteigendem Luftstrom der Gehalt an negativen Ionen — wenigstens scheinbar — stark herabgedrückt werden; sicherlich bei weitem stärker als der Gehalt an positiven Ionen. Andrerseits werden die negativen Ionen bei absteigendem Luftstrom relativ größere Beweglichkeit erlangen. Auf diese Art könnte man sich also die verschiedentliche Form des täglichen Ganges erklären.

Bei den positiven Ionen spielt die Wirkung der Emanation der Bodenluft die entscheidende Rolle, während die Messungen der Zahl der negativen Ionen bedeutend mehr durch die vertikalen Luftströmungen beeinflußt werden, indem hier die Beweglichkeitsänderungen bedeutendere sind. Erst wenn es zu

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, Jänner 1905.

[2] Ficker und Defant, diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, Februar 1905.

wirklichen Kondensationserscheinungen kommt, wie dies an den Beobachtungstagen leider der Fall war, werden beide Ionenarten als Kondensationskerne ausgeschieden werden und der Ionengehalt beider Vorzeichen muß sinken, ein Minimum erreichen. Freilich werden auch hier die negativen Ionen bedeutend mehr in Mitleidenschaft gezogen werden, das q muß hier also anwachsen. Wie man aus der Darstellung in der Figur ersieht, erreicht auch das q zur Zeit des Minimums beider Vorzeichen sein Maximum.

Weiters mag noch die verschiedene tägliche Amplitude des positiven und negativen Ionengehaltes hervorgehoben werden. Die Zahl der negativen Ionen schwankt um 21% um den Mittelwert, die Zahl der negativen aber um 119%! Auch hierin liegt vielleicht schon ein Hinweis auf den Umstand, daß die negativen Ionen namentlich Beweglichkeitsänderungen, weniger effektiven Zahländerungen unterworfen sind.

Schließlich möge noch auf die Übereinstimmung zwischen der Kurve für ρ_- mit der seinerzeit gefundenen Kurve für die positive Zerstreuung auf dem Sonnblick[1] hingewiesen werden.

Die positive Zerstreuung auf dem Sonnblick wies ein Maximum um zirka 4^h a., ein Minimum um 2^h p., ein sekundäres Maximum um 11^h a. auf. Die entsprechenden Extreme von ρ_- fallen bei den Säntisbeobachtungen, wie aus der Figur hervorgeht, auf 3^h a., 2^h p. und 10^h a. bis 11^h a.

Die auf dem Sonnblick gefundene Kurve für die negative Zerstreuung weist jedoch ein gänzlich anderes Verhalten auf als die auf dem Säntis für ρ_+ gefundene Kurve.

Was das verschiedene Verhalten der beiden Ionengattungen betrifft, findet auch Ebert[2] anläßlich seiner luftelektrischen Untersuchungen bei der Sonnenfinsternis im August 1905, daß bei Eintritt der Totalität der Überschuß an positiver Ladung von $-0\cdot04$ auf $+0\cdot10$ wächst, während q von $0\cdot90$ auf $1\cdot30$ steigt. Auch Ebert schreibt dieses Phänomen dem verschiedenen Verhalten der beiden Ionengattungen bei wachsender Feuchtigkeit zu, wie sie ja durch

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXIII, Abt. IIa, Oktober 1904, p. 1150.

[2] Physik. Zeitschrift, VI. Jahrg., Nr. 20.

den Temperaturfall während der Sonnenfinsternis bedingt wird.

Was nun die Wirkung der steigenden Temperatur auf den Ionengehalt betrifft, so müßte dieselbe im Tale ausgeprägt zu finden sein. Tatsächlich erhielt Gockel[1] einen täglichen Gang, der mit dieser Anschauung in guter Übereinstimmung steht. Ich erlaube mir, hier eine Stelle der zitierten Abhandlung wörtlich anzuführen: »Der Zusammenhang zwischen Ionisierung und Temperatur ist aus dem täglichen Gange deutlich zu ersehen. Die Verspätung des Maximums der Ionisation gegenüber dem Maximum der Lufttemperatur deutet darauf hin, daß die Erwärmung des Bodens die Ionisation befördert.« Daß ein nicht sehr massenreicher Felsgipfel, wie in unserem Falle, dieser Wirkung besonders ausgesetzt sein wird, ist augenscheinlich. Das weitere Ansteigen des Gehaltes an negativen Ionen wird dann durch die Wirkungen des aufsteigenden Luftstromes verdeckt.

Der oben ausgesprochenen Anschauung stehen zwei Beobachtungstatsachen entgegen: Gockel findet bei aufsteigendem Nebel eine Vermehrung des negativen Ionengehaltes und ein Absinken der Größe q; Schweidler[2] findet in der Ebene in Mattsee »morgens und nach Sonnenuntergang hohe Werte, in der zwischenliegenden Zeit tiefe Werte des Ionengehaltes«. Freilich heißt es dann weiter: »Ob das kleine sekundäre Maximum um 3^h p. reell ist oder bei größerer Anzahl der Messungen verschwinden würde, läßt sich vorläufig nicht entscheiden«. Ob wir es hier mit wirklich kleinerem Ionengehalt um die Zeit des Temperaturmaximums zu tun haben oder nur mit einer Ionenadsorption durch Bildung von Dunstschichten um die heiße Tageszeit, mag dahingestellt bleiben. Es mag nur noch darauf hingewiesen werden, daß der Verfasser in Wasserau denselben täglichen Gang gefunden und dabei deutlich die Dunstbildung beobachtet hat. Jedenfalls kann hier nur eine Vermehrung des Beobachtungsmaterials weiteren Aufschluß bringen.

---

[1] Meteorolog. Zeitschrift, 1906, p. 53.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, Dezember 1905.

Beziehungen des Ionengehaltes zu den meteorologischen Elementen.

Bei der geringen Zahl der Beobachtungen wurde es unterlassen, die Beziehungen des Ionengehaltes zu Luftdruck, Luftdruckänderung und Fernsicht zu untersuchen. Der Einfluß der Windgeschwindigkeit, der gewiß von Interesse wäre, konnte nicht untersucht werden, da das Anemometer während meiner Anwesenheit auf dem Säntis gerade Schaden gelitten hatte und nicht funktionierte.

Es mögen daher nur jene Beziehungen hier Platz finden, die im Zusammenhange mit dem Erklärungsversuch des täglichen Ganges stehen.

Tabelle II.

1. Temperatur auf dem Säntis und Ionengehalt.

Temperatur	p_+	p_-	q	n[1]
3°, 4°, 5°, 6°, 7°	0·419	0·135	3·10	19
8°, 9°	0·428	0·130	3·29	20
10°, 11°	0·437	0·133	3·29	20
12°, 13°, 14°	0·398	0·107	3·72	12

Bis 11° steigt also der Gehalt an positiven Ionen, die Zahl der negativen bleibt ziemlich konstant, das q wächst daher. Weiter steigende Temperatur erniedrigt sowohl die Zahl der positiven wie der negativen Ionen; q steigt dabei weiter an. Bei diesen hohen Temperaturen war meist schon starke Bewölkung, was sowohl das Sinken der Ionenzahlen als auch das Steigen der Größe q erklärt.

[1] n = Zahl der Beobachtungen.

Tabelle III.

2. Temperatur in Zürich und Ionengehalt.

Temperatur	p_+	p_-	q	n
10 bis 20°	0·453	0·149	3·04	30
20 » 25°	0·433	0·135	3·20	18
25 » 30°	0·402	0·104	3·86	17
über 30°	0·370	0·061	6·07	5

Je höher die Temperatur in der Ebene steigt, desto mehr Grund wird für einen aufsteigenden Luftstrom vorhanden sein. Nach dem früher gegebenen Erklärungsversuch sollen beide Ionenarten an Zahl abnehmen und die Unipolarität verschärft werden, da die negativen Ionen bei Kondensationsbildung zuerst ausfallen, respektive in ihrer Wanderungsgeschwindigkeit gehemmt werden. Wie man aus Tabelle III ersieht, ergeben sich wirklich die geforderten Beziehungen. Noch stärker tritt dieser Einfluß hervor, wenn man ein besseres Kriterium für den aufsteigenden Luftstrom annimmt als die Temperatur in der Ebene, nämlich den Temperaturgradienten (Temperaturabfall pro 100 *m*) zwischen Zürich und Säntisgipfel. Diese Beziehung wird in Tabelle IV zur Darstellung gebracht.

Tabelle IV.

Temperaturgradient Zürich-Säntis 0° C.	p_+	p_-	q	n
0·2, 0·3, 0·4	0·439	0·152	2·89	26
0·5, 0·6	0·442	0·128	3·46	16
0·7, 0·8	0·401	0·108	3·71	22
0·9	0·350	0·069	5·08	4

Die positiven Ionen werden durch steigenden Gradienten relativ wenig, die negativen stark beeinflußt, daher das rasche Anwachsen der Größe q.

Beweglichkeitsmessungen.

Die Zahl der angestellten Beweglichkeitsmessungen ist eine sehr kleine, da die Ionengehaltsmessungen nicht viel Zeit übrig ließen. Dieselben mögen hier dennoch Platz finden, da ja nur relativ wenige Beweglichkeitsmessungen in den vorhandenen Publikationen vorliegen.

Die mittlere spezifische Ionengeschwindigkeit wurde, wie eingangs bemerkt, mit dem Vorschaltkondensator nach Mache gemessen und mittels der von Mache[1] angegebenen Näherungsformel berechnet. Es ist die mittlere spezifische Ionengeschwindigkeit

$$\bar{u} = \frac{M \,.\, ln \frac{R}{r}}{2\pi \,.\, L \,.\, \Delta V},$$

wobei M die Zahl der in der Sekunde durchgesaugten Kubikzentimeter Luft, R und r den äußeren, beziehungsweise inneren Radius des Vorschaltkondensators und L die Länge des Innenzylinders in Zentimetern bedeutet.

ΔV bedeutet die Höhe des Hilfspotentials am Vorschaltkondensator, die notwendig wäre, um die eintretende Luft im Vorschaltkondensator vollkommen zu entionisieren. ΔV wurde durch Proportion, nicht durch graphische Darstellung aufgesucht.

Bei dem verwendeten Apparat ergaben sich folgende Konstanten:

$$2R = 3\cdot0\,cm, \quad 2r = 0\cdot5\,cm, \quad \frac{R}{r} = 6,$$

$$L = 12\,cm, \qquad M = 1847\,cm^3/\text{sec}.$$

Es ist daher

$$\frac{M \,.\, ln \frac{R}{r}}{2\pi L} = 44\cdot568$$

und

$$\bar{u} = 44\cdot568 \frac{1}{\Delta V}.$$

---

[1] Physik. Zeitschrift, IV. Jahrg., Nr. 26, p. 717.

Tabelle V enthält das Verzeichnis der angestellten Beweglichkeitsmessungen. $\bar{u}_+$ und $\bar{u}_-$ bedeutet die Wanderungsgeschwindigkeit in Zentimeter in einem Felde von 1 Volt/1 *cm*.

Tabelle V.

Datum	Zeit	$\bar{u}_+$	$\bar{u}_-$	$\frac{\bar{u}_-}{\bar{u}_+}$	Wetter
8./VIII.	10^h a.	1·241	1·432	1·15	Wolkenbildung.
9./VIII.	4^h p.	0·445	—	—	Gewitterwolke in der Nähe des Gipfels.
9./VIII.	7^h p.	1·328	—	1·27	Wolkenlos, Sonnenuntergang.
9./VIII.	8^h p.	—	1·685		Wolkenlos.
10./VIII.	11^h30^m a	1·474	—	0·67?	Täler dunstig, Cu am Horizont.
10./VIII.	12^h a.	—	0·989		Starke Wolkenbildung.
10./VIII.	6^h p.	1·172	—	1·52	Zenith wolkenlos.
10./VIII.	7^h p.	—	1·787		Zenith wolkenlos.
Mittel...	—	1·132	1·498	1·32	—

Messungen in Wasserau.

Um über die luftelektrischen Verhältnisse im Tale ein wenig orientiert zu sein, wurden am Fuße des Säntis in Wasserau (870 *m* nach Meyer-Schweiz) einige Messungen des Ionengehaltes und der Ionenbeweglichkeit angestellt. Wasserau liegt am Ausgange des engen Tales, das sich vom Säntis gegen Appenzell herabzieht. Als spezieller Beobachtungsort wurde eine Wiese vor dem Gasthause gewählt. Die Apparate wurden auf einem Tische untergebracht, der immer so verschoben wurde, daß die Apparate beinahe immer im Schatten des ziemlich hohen Hauses standen. Die Entfernung vom Hause betrug zirka 15 *m*. Die Erdleitung wurde an das eiserne Auslaufrohr einer gefaßten Quelle angeschlossen. Die Messungen fallen alle auf den 15. August, der durchaus sehr schön war, nur der Nachmittag wies wieder einige hochziehende Cumuluswolken auf, doch muß ausdrücklich bemerkt

werden, daß sich um die heiße Tageszeit eine Dunstschichte über den Talboden gelagert hatte, die erst in den Abendstunden wieder verschwand.

Tabelle VI enthält die in Wasserau angestellten Messungen.

Tabelle VI.

Ortszeit	ρ_+	ρ_-	q	u_+	u_-
7^h a.	0·349	—	—	—	—
9^h a.	0·315	0·322	0·98	—	—
11^h a.	0·220	0·192	1·15	—	—
1^h p.	0·287	0·249	1·15	—	—
3^h p.	0·252	0·252	1·00	—	—
4^h30^m p.	0·297	0·297	1·00	—	—
5^h30^m p.	0·301	—	—	0·540	—
6^h p.	—	0·311	—	—	0·877
7^h p.	0·402	—	—	1·211	—
7^h30^m p.	—	0·389	—	—	1·283
Mittel	0·303	0·270	1·12	—	—

Erhöht man die Mittelwerte von ρ_+ und ρ_- mit Rücksicht auf den geerdeten Vorschaltkondensator, wie früher bemerkt, um 15%, so erhält man:

$$\rho'_+ = 0\cdot348 \quad \text{und} \quad \rho'_- = 0\cdot310,$$

Werte, die mit dem von E. v. Schweidler gefundenen Mittelwert $\rho_+ = 0\cdot365$ ziemlich gut übereinstimmen.

Der Wert von q ist etwas kleiner ausgefallen als die von Ebert (1·24) und Schweidler (1·20) gefundenen Werte.

Zusammenfassung.

1. Die tägliche Änderung des Gehaltes an positiven Ionen zeigt einen bedeutend anderen Typus als die tägliche Änderung des Gehaltes an negativen Ionen.

2. Der tägliche Gang von ρ_+ wird in erster Linie durch die aus dem Boden austretende Emanation und erst in zweiter Linie durch die Vertikalbewegungen der Luft beeinflußt. Der tägliche Gang von ρ_- steht nahezu ganz unter dem Einfluß der auf- und absteigenden Luftströme und erst in zweiter Linie tritt in ihm die Einwirkung der Bodenluft zu Tage.

3. Die luftelektrischen Verhältnisse eines nicht vereisten Berggipfels sind, nach den Erfahrungen des Verfassers auf dem Sonnblick und auf dem Säntis zu urteilen, bedeutend komplizierter und schwieriger zu analysieren wie auf einem vereisten und durchgefrorenen Gipfel, wo man von den Wirkungen der Bodenluft frei ist.

4. Sämtliche auf dem Säntis gefundene Beobachtungstatsachen lassen sich durch die Annahme der Ionisierung der Luft durch die Emanation der Bodenluft und durch die Wirkungen der vertikalen Luftströmungen erklären.

Zum Schlusse drängt es mich, allen jenen meinen Dank auszusprechen, durch deren Unterstützung und Entgegenkommen es mir möglich wurde, die luftelektrischen Untersuchungen auf dem Säntis anzustellen:

Meinen ergebensten Dank spreche ich der hohen kaiserlichen Akademie für die Bewilligung einer Subvention aus dem Ponti-Fonde aus.

Der schweizerischen Gesandtschaft in Wien danke ich auf das verbindlichste für ihr außerordentliches Entgegenkommen, durch das mir sämtliche Zollschwierigkeiten beim Transport der Apparate erspart blieben.

Meinen besonderen Dank schulde ich dem Direktor der schweizerischen Meteorologischen Anstalt, Herrn Dr. J. Maurer, der mir ein Zimmer auf dem Säntisobservatorium in liebenswürdigster Weise zur Verfügung stellte und mir auf meine Bitte die meteorologischen Daten vom Säntis und von Zürich in Abschrift zukommen ließ.

Schließlich danke ich den Beobachtern auf dem Säntis, Herrn und Frau J. Bommer, für alle Freundlichkeit und

Liebenswürdigkeit, die sie mir stets entgegengebracht haben.

Wien, im Juli 1906.

K. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

Anhang.

Die folgende Tabelle enthält die am Säntis gewonnenen Beobachtungen in chronologischer Reihenfolge.

ρ_+ und ρ_- sind in elektrostatischen Einheiten im Kubikmeter gegeben. q ist das Verhältnis von $\frac{\rho_+}{\rho_-}$. Die letzte Kolonne enthält Notizen über das zur Beobachtungszeit herrschende Wetter.

Nummer	Datum	Ortszeit	ρ_+	ρ_-	q	Wetter
1	3. VIII.	5^h a.	0·625	0·119	5·25	Sonnendunst.
2	3.	6^h a.	0·498	0·100	4·98	Sonnendunst, Wolkenboden.
3	3.	7^h a.	0·458	0·089	5·15	Dichter Wolkenboden.
4	3.	8^h a.	0·576	0·069	8·35	Cu, Sonnendunst, Wolkenboden.
5	3.	9^h a.	0·482	0·203	2·37	Cu, Köpfe und Wülste.
6	3.	10^h a.	0·525	0·176	2·98	Aufsteigende Cu, Sonnendunst.
7	3.	11^h a.	0·603	0·203	2·97	Wogender Wolkenboden; Bergrauch, Sonnendunst.
8	3.	12^h	0·525	0·118	4·79	Dunst, Wolkentürme, Wind aus SSW, in höheren Schichten entgegengesetzte Richtung.
9	3.	1^h p.	0·382	0·118	3·24	Starker Dunst, Wolkenmauer im W, Cu.
10	3.	2^h p.	0·412	0·049	8·40	Wolkenwand im W, starker Dunst, Bergrauch, beginnende Aufheiterung.
11	3.	3^h p.	0·357	0·176	2·03	Aufsteigende Cu, Cu-Boden, Dunst.
12	3.	4^h p.	0·485	0·079	6·14	Aufheiterung, jedoch noch wogender Bergrauch.
13	3.	6^h p.	0·412	0·097	4·25	Fortschreitende Aufheiterung.
14	3.	7^h p.	0·454	0·124	3·66	Fortschreitende Aufheiterung, Dunst zunehmend.
15	3.	8^h p.	0·439	0·100	4·39	
16	3.	9^h p.	0·360	0·016	22·50	Klare, warme, wolkenlose Nacht.
17	3.	10^h p.	0·421	0·157	2·68	

Nummer	Datum	Ortszeit	p_+	p_-	q	Wetter
18	4. VIII.	0^h a.	0·494	0·148	3·34	Klare, warme, wolkenlose Nacht.
19	4.	2^h a.	0·421	0·245	1·72	
20	4.	4^h a.	0·482	0·206	2·34	
21	4.	6^h a.	0·439	—	—	Klarer Morgen, Sonnenaufgang, Wind verstärkt.
22	4.	9^h a.	0·454	0·088	5·16	Talnebel zerteilt sich, Sonnendunst.
23	4.	10^h a.	0·451	0·088	5·13	Cu-Bildung am Horizont.
24	4.	11^h a.	0·567	0·194	2·87	
25	4.	12^h	0·416	0·167	2·49	Flockige und ballige Cu, im W Bildung einer Wolkenwand.
26	4.	1^h	0·427	0·107	3·92	Zenith Cu-Wolken, Wolkenwand, Bergrauch.
27	4.	2^h p.	0·357	0·049	7·29	Cu-Türme beginnen sich zu lösen, wogender Bergrauch.
28	4.	3^h p.	0·255	0·097	2·63	Bergrauch bis zum Gipfel, leichte Windstöße.
29	4.	4^h p.	0·367	0·069	5·32	Aufheiterung.
30	4.	5^h p.	0·351	0·148	2·37	Aufheiterung, Sonnendunst.
31	4.	6^h p.	0·382	0·063	6·06	» Windstöße Sonnendunst.
32	4.	7^h p.	0·363	0·148	2·45	Sonnendunst, neuerliche Cu-Bildung, Wasserziehen.
33	4.	8^h p.	0·394	0·151	2·61	Aufheiterung, fast wolkenlos, nur im W Cu.

34	4. VIII.	10^h p.	0·312	0·215	1·45	Fast wolkenlos, sternenklar, mild.
35	5.	0^h a.	0·373	0·066	5·65	Dunstig, wolkenlos.
36	5.	1^h a.	0·445	0·106	4·30	
37	5.	3^h a.	0·348	0·097	3·59	Dunstig, leichte Wolkenbildung am Horizont, (Zamboni-Säule gebrochen).
38	5.	3^h p.	0·339	0·066	5·14	Nebel und Bergrauch, sodann Regen und Gewitter.
39	7.	5^h a.	0·196	0·000	∞	Nebel, Schnee.
40	8.	6^h a.	0·381	0·070	4·54	Aufheiterung, Zenith blau, Cu am Horizont, Dunst über den Tälern.
41	8.	7^h a.	0·427	0·000	∞	Cu vergrößern sich.
42	8.	8^h a.	0·528	0·070	7·54	Cu am Osthorizont, Dunst, vorübergehende Str-Bildung.
43	8.	9^h a.	0·465	0·115	4·04	Sonnendunst, Cu-, Str- und alto Cu-Bildung und aufsteigende Talnebel.
44	8.	10^h a.	0·483	0·091	5·31	Cu-Bildung, vorübergehende Str-Bildung.
45	8.	10^h a.	—	—	—	(Beweglichkeitsmessung.)
46	8.	11^h a.	0·428	0·245	1·75	Veränderliches Wetter, ziehende Nebelschwaden.
47	8.	1^h p.	0·381	0·069	5·52	Bergrauch, Nebel, Cu, vereinzelte Regentropfen.
48	8.	2^h p.	0·325	0·073	4·45	Cu und Nebel.
49	8.	3^h p.	0·220	0·045	4·89	
50	8.	6^h p.	0·287	0·084	3·42	Nebel, flockige Cu, Tendenz zur Aufheiterung, Dunst, Wasserziehen.

Nummer	Datum	Ortszeit	ρ_+	ρ_-	q	Wetter
51	8. VIII.	7^h p.	0·336	0·024	14·00	Ausheiterung, aber noch Cu-Bänke.
52	8.	8^h p.	0·360	0·059	4·89	Ausheiterung.
53	8.	10^h p.	0·486	0·245	1·98	Dunst.
54	9.	1^h a.	0·255	0·175	1·46	Klar.
55	9.	3^h a.	0·357	0·294	1·21	(Klar.)
56	9.	4^h a.	0·348	0·203	1·71	Klar, Cu-Bänke am Horizont.
57	9.	5^h a.	0·357	0·056	6·38	Klar, Cu-Bänke am Horizont, Täler dunstig.
58	9.	6^h a.	0·419	0·069	6·07	(Klar, Cu-Bänke am Horizont, Täler dunstig.)
59	9.	7^h a.	0·454	0·147	3·09	Cu am Horizont im Umbildung, Ci-Bildung.
60	9.	8^h a.	0·472	0·101	4·67	Cu-Bildung, große Cu am Himmel.
61	9.	9^h a.	0·507	0·057	8·77	Gewitterwolke, Trübung.
62	9.	10^h a.	0·458	(0·136)	3·36	Gewitterwolke, Trübung, Cu, Dunst.
63	9.	11^h a.	0·455	0·091	5·00	(Gewitterwolke, Trübung, Cu, Dunst.)
64	9.	1^h p.	0·514	0·077	6·68	Dicke Cu, aber beginnende Aufheiterung.
65	9.	2^h p.	0·413	0·056	7·38	Aufheiterung.
66	9.	3^h p.	0·409	—	—	Aufheiterung, im Tale scheint Föhn zu sein.
67	9.	4^h p.	—	0·046	—	Aufheiterung.
68	9.	6^h p.	0·374	0·101	3·70	Aufheiterung, schwacher Sonnendunst.

69	9. VIII.	7^h p.	0·441	—	—	Wolkenlos, klar.
70	9.	8^h p.	—	0·095	—	Klar, mondhell.
71	9.	10^h p.	0·454	0·052	8·73	Sternenklar.
72	10.	3^h a.	0·445	0·252	1·77	Wolkenlos, kalt, klar.
73	10.	4^h a.	0·472	0·227	2·08	
74	10.	6^h a.	0·350	0·150	2·33	Wolkenlos, Dunst.
75	10.	7^h a.	0·399	0·217	1·84	
76	10.	9^h a.	0·399	0·192	2·08	Einige Cu, Dunst.
77	10.	10^h a.	0·339	0·122	2·78	Einige Cu, Dunst, Wind verstärkt.
78	10.	11^h a.	0·486	—	—	Cu, Wind läßt nach.
79	10.	12^h	—	0·080	—	Cu und Cu-Bänke, Dunst.
80	10.	2^h p.	0·458	0·035	13·09	Cu in rascher Umbildung, Nebelschwaden.
81	10.	6^h p.	0·427	—	—	Nach Aufheiterung wolkenlos im Zenith, am Horizont noch Cu.
82	10.	7^h p.	—	0·122	—	Neuerliche Wolkenbildung.
83	10.	10^h p.	0·465	0·217	2·14	Es bildet sich im Zenith eine Wetterwolke, beginnendes Nebeltreiben, das schlechtes Wetter herbeiführt.

Das elektrische Verhalten der allotropen Selenmodifikationen unter dem Einflusse von Wärme und Licht

von

Paul v. Schrott.

(Mit 23 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1906.)

I. Historischer Überblick.

Das Selen zeigt in seinen verschiedenen Modifikationen ein verschiedenes Verhalten gegenüber dem elektrischen Strome. Im amorphen Zustande leitet es den elektrischen Strom nicht. In den bisher untersuchten, durch Erhitzen des amorphen Selens hergestellten kristallinischen Modifikationen ist es dagegen ein Leiter der Elektrizität, dessen Widerstand von folgenden drei Faktoren in hohem Grad abhängig ist:

1. Von der Größe des hindurchgesendeten Stromes,
2. von der Temperatur,
3. von der Intensität des darauffallenden Lichtes.

Außerdem kann das kristallinische Selen unter Einfluß des Lichtes eine elektromotorische Kraft erzeugen.

Abgesehen von den orientierenden Experimenten von Knox[1] (1839) und Rieß[2] (1845), welche feststellten, daß das amorphe Selen Nichtleiter der Elektrizität ist, stammen die ersten Versuche über den Einfluß der Wärme auf die Leitfähigkeit des Selens von Hittorf[3] (1851), welcher fand, daß

[1] Knox (1839), Trans. Roy. Irish Acad., Bd. 19, p. 149 (1843); auch Phil. Mag. (3), Bd. 16, p. 185.

[2] Rieß (1845), Pogg. Ann. d. Phys., Bd. 64, p. 50.

[3] Hittorf (1851), Pogg. Ann. d. Phys., Bd. 84, p. 214 bis 220.

der Widerstand des Selens mit steigender Temperatur abnehme. Zum gleichen Resultate kamen Draper und Moss[1] (1876), während Adams[2] (1875) ein entgegengesetztes Verhalten des Selens konstatierte. Dieser scheinbare Widerspruch wurde durch Werner Siemens[3] (1875) aufgeklärt. Derselbe unterscheidet drei Formen des graukristallinischen Selens:

1. Amorphes Selen durch Erhitzung auf 100° C. in kristallinisches umgewandelt. Modifikation I.

2. Umgewandelt durch direktes, andauerndes Erhitzen des amorphen Selens auf 200° C. Modifikation II.

3. Aus dem geschmolzenen Zustande durch langes Erhitzen auf 195° C. kristallisiert. Modifikation III.

Modifikation I und III haben nach Siemens einen negativen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes, Modifikation II einen positiven (metallisches Selen). Ferner fand Siemens, daß Modifikation I und III sich nicht mehr durch Erhitzen in Modifikation II umwandeln lassen, letztere vielmehr nur durch direktes Erhitzen des amorphen Selens über 200° C. hergestellt werden könne.

Das metallische Selen scheint bei Temperaturen unter 200° nicht stabil zu sein, sondern sich bei gewöhnlicher Temperatur im Laufe der Zeit in Modifikation I umzuwandeln bis auf einen Rest, der in letzterem gelöst bleibt (feste Lösung). Je nach der Größe dieses Restes zeigt das Selen zwischen weiteren oder engeren Grenzen einen positiven Temperaturkoeffizienten.

Abkühlung des Selens unter —15° soll die Modifikation II vollständig in Modifikation I umwandeln, d. h. einen positiven Temperaturkoeffizienten aufheben.

Zu ähnlichen Resultaten, jedoch in mancher Beziehung schärfer präzisiert, kam Rieß[4] (1902). Er findet, daß bei

---

1 Draper und Moss (1876), Chemical News, Bd. 33, p. 1; Jahresber. d. Chem., 1876, p. 129 und 180.

2 W. G. Adams (1875), Proc. Roy. Soc., Bd. 23, p. 535 bis 539; Pogg. Ann. d. Phys., Bd. 159, p. 622.

3 W. Siemens (1876), Berl. Sitzungsber. Akad., 1876, p. 95; Pogg. Ann. d. Phys., Bd. 159, p. 117.

4 Ch. Rieß (1902), Beibl. Ann. d. Phys., 1903, p. 1101; Diss. Erlangen 1902.

längerem Erhitzen des amorphen Selens über 200° der Widerstand bis zu einem Maximum zunehme. War das letztere erreicht, so zeigt das Selen beim Abkühlen sogleich metallischen Charakter; war jedoch das Maximum nicht erreicht, so steigt zunächst beim Abkühlen der Widerstand bis zu einem Maximum und sinkt erst von da ab. Diesen Umkehrpunkt fand er nicht stabil, sondern abhängig von der Höhe und Dauer der vorangegangenen Erhitzung. Im Gegensatze zu Siemens konstatierte er, daß ein Umkehrpunkt auch bei Erhitzung unter 200° auftreten könne, doch liegt derselbe dann sehr tief, selbst unter 0°. Auch war Abkühlung bis —27° nicht im stande, einen positiven Temperaturkoeffizienten zu zerstören.

Nach den eben erörterten Untersuchungen ist es auch erklärlich, daß die Angaben Mercadier's[1] (1881), Bidwell's (1881),[2] (1895),[3] A. Pocchettino's[4] (1902), über das Verhalten des Selens bei Erwärmung und Abkühlung voneinander abweichen, da die Selenpräparate auf verschiedene Weise hergestellt waren.

Robert Marc (1903),[5] (1906)[6] gelangte in seiner jüngsten Arbeit, durch welche die Resultate der früheren berichtigt erscheinen, zu dem Schlusse, daß die einzige bei allen Temperaturen stabile Form des graukristallinischen Selens, die Form des erreichten Gleichgewichtes zwischen zwei voneinander verschiedenen Modifikationen des graukristallinischen Selens sei. Die Existenz dieser letzteren wies Marc durch Wärmetönungsuntersuchungen nach.

Im Jahre 1873 fand Willoughby Smith,[7] daß der Widerstand des Selens bei Belichtung sich vermindere. Es liegt

---

[1] Mercadier (1881), Compt. rend., Bd. 92, p. 1407.

[2] Bidwell (1881), Phil. Mag., Bd. 11, p. 302; Beibl. Ann. d. Phys., Bd. 5, p. 526.

[3] Bidwell (1895), Phil. Mag., Bd. 20, p. 178; Beibl. Ann. d. Phys., Bd. 9, p. 674.

[4] A. Pocchettino (1902), Atti R. Accad. dei Lincei Roma (5), Bd. 11, I., 286 bis 289, 24. April; Chem. Zentralbl., 1902, Bd. I, p. 1187.

[5] R. Marc (1903), Zeitschr. für anorg. Chemie, Bd. 37, p. 450 bis 474.

[6] R. Marc (1906), Zeitschr. für anorg. Chemie, Bd. 48, p. 393 bis 426.

[7] Smith (1873), Amer. Journ. Sci. (3), Bd. 5, p. 301. — Nature, Bd. VII, p. 302. — Ber. d. deutschen chem. Ges., Bd. 6, p. 204.

jedoch keine Nachricht vor, welcher Art dieses Selenpräparat war.

Sale[1] bestätigte im selben Jahre die Angaben Smith's, gleichfalls ohne über die Herstellung des lichtempfindlichen Selens nähere Angaben zu machen.

Erst Werner Siemens[2] (1877) konstatierte, daß je nach der Modifikation des Selens die Art der Widerstandsänderung bei Belichtung verschieden sei. Während Modifikation I bei fortdauernder Belichtung auch durch Stunden ihren Widerstand beständig vermindert, erreicht nach Siemens Modifikation II nach einigen Sekunden der Belichtungsdauer ein Minimum des Widerstandes mit darauffolgender langsamer Zunahme desselben (Ermüdung des Selens). Dabei ist die absolute Lichtempfindlichkeit der Modifikation II nach Siemens eine bedeutend größere als die der Modifikation I. Auch Ruhmer[3] (1902) unterscheidet zwei Selenmodifikationen, eine harte und eine weiche, deren Verhalten bei Belichtung ein verschiedenes ist. Während die harte Modifikation, welche man durch rasches, unter Erschütterung erfolgendes Abkühlen des geschmolzenen Selens erhält, nur für kräftige Lichteindrücke empfindlich ist, reagiert nach Ruhmer die weiche Modifikation, welche man durch längeres Erhitzen des amorphen Selens über 200° erhält, stärker auf schwache Lichteindrücke. Ruhmer findet außerdem die absolute Lichtempfindlichkeit der weichen Modifikation bedeutend größer als die Empfindlichkeit der harten Modifikation.

Dieses so merkwürdige Verhalten dieser beiden Modifikationen ist in der vorliegenden Arbeit zum Gegenstand eines eingehenden Studiums gemacht worden und glaube ich durch meine Versuche diese Erscheinung vollkommen aufgeklärt zu haben.

---

[1] Sale (1873), Proc. Roy. Soc., Bd. 21, p. 283; Pogg. Ann. d. Phys., Bd. 150, p. 333.

[2] W. Siemens (1877), Berl. Sitzungsber. Akad. Wiss., 1877, p. 299. — Wied. Ann. d. Phys., Bd. 2, p. 521.

[3] E. Ruhmer (1902), Phys. Zeitschr., Bd. III, p. 468.

A. Pocchettino[1] (1902) und A. Carpini[2] (1906) untersuchten die Lichtempfindlichkeit von Selenzellen bei Temperatur der flüssigen Luft (—185°) und bis +100° C. Sie fanden in beiden Fällen Verminderung der Empfindlichkeit.

Über die Frage, in welchem Teile des Spektrums ein Maximum der Wirkung auf das Selen sei, gehen die Angaben der einzelnen Forscher stark auseinander. Sale[3] (1873) fand das Maximum im Infrarot, Siemens[4] (1877) ebenfalls die Lichtwirkung von Violett bis Rot steigend, im Infrarot noch vorhanden. Daß die größte Wirkung im Rot liegt, wird uns außerdem noch von Forssmann[5] (1877) und Mercadier[6] (1881) bestätigt. Der erstere findet ein Maximum im Rot und Gelb, ein Minimum im Grün, der letztere die größte Wirkung im Gelb, Rot und Infrarot wirken schwächer, Violett und Ultraviolett gar nicht.

Nur Adams[7] (1876) konstatierte ein Maximum der Wirkung im gelbgrünen Teile.

Berndt[8] (1904) findet, daß die Empfindlichkeit mit der Wellenlänge abnehme, erwähnt aber selbst, daß die Genauigkeit seiner diesbezüglichen Versuche nicht entsprechend sei.

Pfund[9] (1904) fand sowohl bei reinem Selen als auch bei Seleniden das Maximum der Wirkung immer an der Stelle des Spektrums, wo die Wellenlänge 700 μ betrug, das ist im Hellrot.

Die Ursachen dieser Differenzen dürften einerseits in der Verschiedenheit der zur Untersuchung verwendeten Selenpräparate, andrerseits darin liegen, daß die relative Farbenempfindlichkeit des Selens von der Temperatur abhängig ist, welch

---

[1] A. a. O.

[2] A. Carpini (1906), Atti R. Accad. dei Lincei Roma, Bd. 14, p. 667. — Chem. Zentralbl., 1906, Bd. I, p. 635.

[3] A. a. O.

[4] A. a. O.

[5] Forssmann (1877), Wied. Ann. d. Phys., Bd. 2, p. 513.

[6] A. a. O.

[7] A. a. O.

[8] G. Berndt (1904), Phys. Zeitschr., Bd. V, p. 122.

[9] A. H. Pfund (1904), Phil. Mag., Bd. VII, p. 26.

letztere Tatsache Marc[1] (1903) fand. Aus letzterer Arbeit geht auch hervor, daß die Verhältnisse, die Farbenempfindlichkeit des Selens betreffend, sehr komplizierter Natur zu sein scheinen.

Während nun die Angaben aller Forscher darin übereinstimmen, daß der Widerstand des Selens bei Belichtung sich vermindere, geben die Versuche Kalischer's[2] (1887) ein entgegengesetztes Resultat, indem er bei einigen Selenpräparaten bei greller Belichtung zwar eine momentane kleine Abnahme, unmittelbar darauf aber eine Zunahme des Widerstandes über den Dunkelwiderstand hinaus beobachtete. Nach Verdunkelung erreichte die Zelle nur langsam ihren ursprünglichen Dunkelwiderstand.

Es müßte demnach eine Selenmodifikation geben, bei welcher das Maximum des Widerstandes nicht im Dunkeln liegt.

Diese Angabe Kalischer's, daß das Licht den Leitwiderstand des Selens erhöhen kann, steht vereinzelt da und fand in der Fachliteratur wenig Beachtung. Da dieselbe jedoch so vollständig von den übrigen Angaben über die Wirkung des Lichtes auf das Selen abweicht und sich den allgemein akzeptierten Regeln über das Selen nicht anpaßt, erschien mir die Untersuchung dieser Frage von Bedeutung und wurde dieselbe in vorliegender Arbeit näher erörtert.

Sowohl in den eben erörterten Abhandlungen wie auch bei den Versuchen zahlreicher anderer Forscher[3] war die

---

[1] A. a. O.

[2] S. Kalischer (1887), Wied. Ann. d. Phys., Bd. 32, p. 108 bis 113.

[3] Von den wichtigsten Arbeiten wären zu erwähnen: Rosse (1874), Phil. Mag., Bd. 47, p. 161. — Adams und Day (1876), Proc. Roy. Soc., Bd. 24, p. 163. — Gordon, Jahresber. d. Chem., 1876, p. 121. — Braun (1877), Wied. Ann. d Phys., Bd. I, p. 95. — Sabine (1878), Nature, Bd. 17, p. 512; Phil. Mag., Bd. 5, p. 401. — Breguet (1880), Ann. d. Chim. et d. Phys., Bd. 21, p. 560. — Obach (1880), Nature, Bd. 22, p. 496. — Bell (1880), Ann. d. Chim. et d Phys., Bd. 31, p. 399. — Blondlot (1880), Compt. rend., Bd. 91, p. 882. — Weinhold (1880), Elektrotechn. Zeitschr., p. 423. — Moser (1881), Phil. Mag., Bd. 12, p. 212. — Sirks (1881), Beibl. Ann. d. Phys., Bd. 5, p. 526. — Bellati & Romanese (1882), Atti Ist. Ven., Bd. 7, p. 8. — Fritts (1883), Silliman. Journ., Bd. 26, p. 465. — Hesehus (1884), Rep. d. Phys., Bd. 20 *a*, p. 490; *b*, p. 565; *c*, p. 631. —

Bedingung für das Entstehen des kristallinischen, lichtempfindlichen Selens immer ein mit dem amorphen Selen vorgenommener Erwärmungsprozeß, indem die verschiedenen Modifikationen durch längeres Erhitzen des amorphen, starren oder geschmolzenen Selens erhalten wurden. Obwohl diese Modifikationen in ihrem Verhalten gegen Licht und Wärme große Verschiedenheiten zeigen, was sowohl aus den Versuchen von Siemens und Ries wie auch von Marc hervorgeht, welche zwei und auch mehr Formen des graukristallinischen Selens annehmen, so wurden dieselben doch bisher als chemisch identisch angenommen. Auch Saunders[1] (1900) faßt diese Formen und auch das aus Kaliumselenid kristallisierte graue Selen unter dem Namen »graukristallinisches (metallisches) Selen« zusammen. Da über das elektrische Verhalten dieses letzteren auf chemischem Weg erzeugten graukristallinischen Selens noch nichts bekannt war, so wurde dieses Präparat einer eingehenden Untersuchung unterzogen. Da ferner Saunders in der erwähnten, sehr eingehenden Untersuchung über das chemische Verhalten des Selens fand, daß das rote amorphe Selen durch Stehenlassen in bestimmten Flüssigkeiten durchgreifenden Veränderungen unterliegt, so wurden auch derartige Präparate, ferner das aus Schwefelkohlenstoff rotkristallisierte Selen auf ihr elektrisches Verhalten bei verschiedenen Temperaturen untersucht.

Clark (1885), Chem. News, Bd. 51, p. 261. — Righi (1887), Beibl. Ann. d. Phys., 1888, Bd. 12, p. 683. — Uljanin (1888), Wied. Ann. d. Phys., Bd. 34, p. 241. — Minchin (1891), Beibl. Ann. d. Phys., Bd. 15, p. 449. — Minchin (1893), Beibl. Ann. d. Phys., Bd. 17, p. 770 und 845. — Majorana (1894), Beibl. Ann. d. Phys., Bd. 18, p. 930. — Agostini (1899), Beibl. Ann. d. Phys., Bd. 23, p. 663. — Perreau (1899), Compt. rend., Bd. 129, p. 956. — Massini (1901), Eclair. éléctr., Bd. 29, p. 68. — Himstedt (1901), Drude's Ann. d. Phys., Bd. 4, p. 531. — E. Bloch (1901), Chem. Zentralbl., Bd. I, p. 1078. — A. B. Griffiths (1903), Chem. Zentralbl., Bd. II, p. 1266. — E. Hopius (1903), Journ. d. russ. phys. chem. Ges., Bd. 35, p. 581. — W. A. Davis (1904), Nature, Bd. 70, p. 506. — M. Coste (1905), Compt. rend., Bd. 141, p. 715. — Heschus (1906), Phys. Zeitschr., Bd. 7, p. 163.

[1] Saunders (1900), Journ. of Physic. Chem., Bd. IV, p. 424.

Ein zweiter Teil der vorliegenden Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung der Lichtempfindlichkeit als Funktion der Temperatur bei allen erwähnten Selenmodifikationen, da speziell dieses Verhalten geeignet erscheint, Aufklärungen über die intramolekularen Veränderungen der Modifikationen bei verschiedenen Temperaturen, wie auch über die Natur der Lichtempfindlichkeit überhaupt zu geben.

II. Anordnung und Durchführung der eigenen Versuche.

Da die zur Untersuchung gelangenden Präparate als Kristallisationsprodukte nur in pulver- oder körnerförmigem Zustand erhalten werden können, so mußte von dem gebräuchlichen Verfahren, das Selen in Form von »Zellen« zu untersuchen, abgegangen werden und wurde nach der von Dr. Streintz[1] in Graz bei Untersuchung des elektrischen Verhaltens von Metalloxyden und -Sulfiden bereits angewendeten Methode, das aufs feinste pulverisierte Selen unter hohem Druck in die Form kleiner Zylinder gepreßt und mit Zuhilfenahme einer geeigneten Kontaktvorrichtung untersucht. Dieses Verfahren bot auch den Vorteil, daß sich der spezifische Widerstand des Präparates leicht bestimmen ließ, da die Abmessungen des Versuchskörpers mit einer Mikrometerlehre auf Hundertelmillimeter genau gemessen werden konnten. Dadurch war es auch möglich, die Modifikationen untereinander zu vergleichen.

Als Preßmatrize diente ein Stahlzylinder von 80 *mm* Höhe und 50 *mm* Durchmesser, durch welchen der Länge nach ein Loch von 8 *mm* Durchmesser gebohrt und dann ausgeschliffen wurde. In die Bohrung wurde der Preßstempel und der Gegenstempel, der mit der Unterlagsplatte aus einem Stücke bestand, genau eingepaßt. Die Preßstempel bestanden aus gehärtetem Stahl und waren die Preßflächen plan geschliffen. Das zur Untersuchung gelangende Material wurde, wenn es nicht schon in Pulverform gefällt war, in einer Achatreibschale zu unfühlbarem Pulver zerrieben, sodann im Exsikkator über Phosphor-

[1] F. Streintz, Wied. Ann. d. Phys., 1900, Bd. 3, p. 1, und 1902, Bd. 9, p. 854.

pentoxyd 2 bis 3 Tage getrocknet und erst unmittelbar vor dem Pressen herausgenommen. In die Matrize wurde es mit einem auf das sorgfältigste gereinigten Glastrichter eingefüllt, und wurde überhaupt bei der ganzen Untersuchung die größte Sorgfalt darauf verwendet, ein Verunreinigen der Präparate, sei es durch fremde Materialien, sei es durch Vermischen verschiedener Modifikationen, möglichst hintanzuhalten.

Das Pressen wurde im mechanisch-technischen Laboratorium der k. k. Technischen Hochschule in Wien auf einer hydraulischen Presse für Handbetrieb vorgenommen. Dieselbe gestattete einen Maximaldruck von 30.000 *kg*, während der zur Anwendung gelangende Druck 4000 bis 6000 *kg* war, was bei

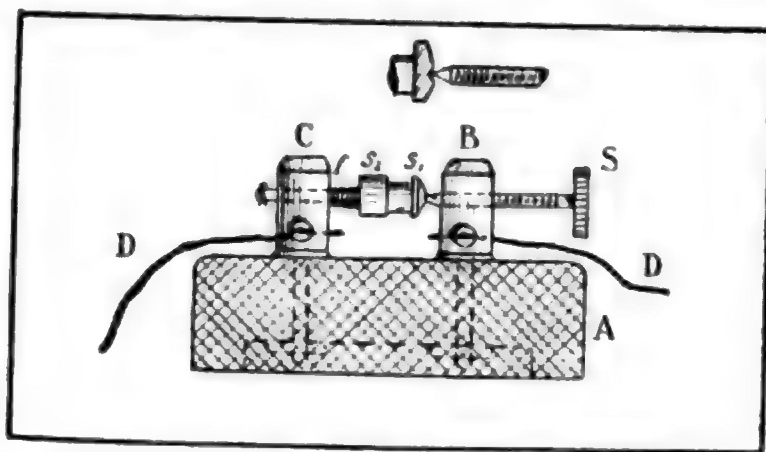


Fig. 1.

einer Druckfläche von $0 \cdot 5\, cm^2$ einer Pressung des Materials mit 8000 bis 12000 *kg* pro Quadratzentimeter entspricht. Nach erfolgtem Pressen wurden die Kontaktflächen der Selenzylinder auf einer mattierten Glasscheibe vollkommen plan geschliffen.

Zur Bestimmung des Widerstandes der auf diese Weise gewonnenen Selenzylinder wurde beistehend abgebildete Kontaktvorrichtung Fig. 1 hergestellt. Auf einem Porzellansockel *A* sind zwei Messingständer *B* und *C* festgeschraubt, in welchen mit Klemmschrauben *D*, *D* die Zuleitungsdrähte befestigt wurden. In dem einen Ständer ist ein Muttergewinde eingeschnitten, in welchem die an einem randrierten Knopf drehbare Schraubenspindel *S* bewegt, mittels welcher ein plangeschliffenes Stahlplättchen s_1 gegen ein zweites im anderen Ständer an einem Stiel verschiebbares, ebenfalls plangeschliffenes Stahlplättchen s_2 gepreßt werden kann. Mit Hilfe einer zwischen

letzteres Plättchen und den Ständer *C* über den Stiel des Plättchens s_1 geschobenen Spiralfeder *f* läßt sich der Druck auf den zwischen die beiden Kontaktplättchen gespannten Selenzylinder beliebig ändern. Durch Drehen der Schraube *S* wurde der Federdruck so lange gesteigert, bis der Galvanometerausschlag konstant war, d. h. durch weiteres Anpressen der Elektroden der Widerstand nicht mehr kleiner wurde. Sodann wurde die Schraube noch einige Male angezogen, so daß auch beim Erwärmen der Vorrichtung der Kontakt sich nicht änderte. Die Elektroden hatten 10 *mm* im Durchmesser. Um auch für den Fall, daß die Begrenzungsflächen der Selenzylinder nicht vollkommen parallel bearbeitet worden waren, dennoch vollständige Berührung mit der Kontaktfläche zu erhalten, war das Plättchen s_1 nicht mit der Schraubenspindel fest verbunden, sondern wurde durch die Schraube nur im Mittelpunkt angepreßt, konnte demnach mit der anderen Kontaktfläche einen Winkel einschließen.

Um den Selenzylinder belichten zu können, wurde die Kontaktvorrichtung auf einem Eisengestelle zwischen zwei 35 HK. Glühlampen in einer Entfernung von 10 *cm* fest montiert, so daß die Lichtintensität ungefähr 7000 MK. betrug.

Die ganze Vorrichtung wurde in einem doppelwandigen Heißluftthermostaten erhitzt. Derselbe war für Gasheizung eingerichtet und mit einem Regulator versehen, welcher es gestattete, die Temperatur mit einer Schwankung von $\pm 3°$ C. konstant zu halten. Die Temperaturmessung erfolgte mittels eines Thermometers, dessen Kugel unmittelbar neben dem Selenzylinder sich befand.

Wegen der großen in Betracht kommenden Widerstände wurde zur Messung derselben die Methode des direkten Ausschlages verwendet. Das Galvanometer war ein Drehspuleninstrument von Siemens & Halske und hatte samt Vorschaltwiderstand 10.000 Ohm. Es wurde objektive Ablesung gewählt. Die Empfindlichkeit betrug bei dem gewählten Skalenabstande $1 \cdot 42 \times 10^{-9}$ Ampère für 1 Skalenteil Ausschlag. Durch einen Nebenschluß nach Ayrton ließ sich die Empfindlichkeit von 1/1 bis $1/10^4$ verringern. Als Meßbatterie diente eine kleine, aus 40 Elementen bestehende Akkumulatorenbatterie von

ungefähr 80 Volt Spannung. Um Isolationsstörungen hintanzuhalten, wurde für die Zuleitungen gummiisolierter Draht genommen, der überdies über Porzellanisolatoren geführt wurde, auch die Batterie stand auf Porzellanunterlagen. Es ergab sich auch tatsächlich, daß störende Nebenschlüsse nicht vorhanden waren. Zu Beginn und zu Ende einer jeden Versuchsreihe wurde der Galvanometerausschlag bei einem Widerstande von 100.000 Ohm und der bei der Messung angewendeten Batteriespannung gemessen und aus dem Verhältnisse der Ausschläge

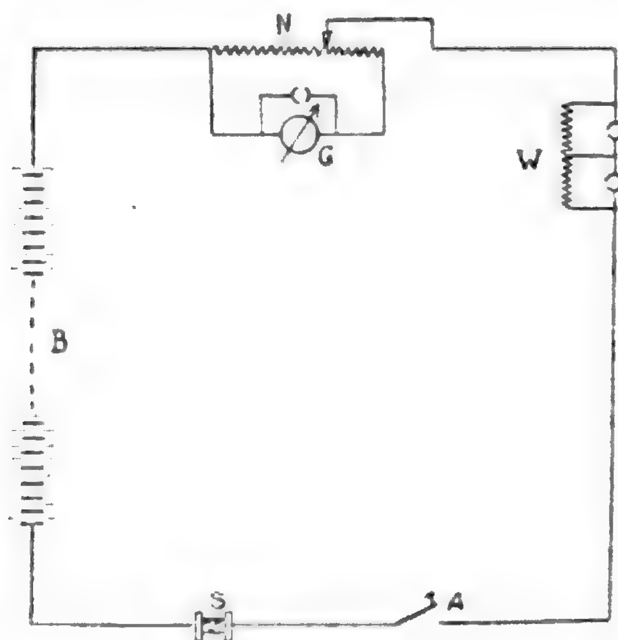


Fig. 2.

B Batterie.
N Nebenschluß nach Ayrton.
G Galvanometer.
W Widerstand von 100.000 Ohm.
A Ausschalter.
S Selenkörper.

die gemessenen Widerstände bestimmt. Die Versuchsanordnung ist aus nebenstehendem Schaltungsschema Fig. 2 ersichtlich.

Als Ausgangspunkt der Untersuchung diente chemisch reines Selen, welches mir aus dem photochemischen Laboratorium der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien zur Verfügung gestellt wurde, woselbst es von Prof. Dr. Franz Novak für Zwecke spektralanalytischer Versuche möglichst rein hergestellt war. Aus einem an und für sich reinen Selen, welches von Dr. Wilh. Szigeti in der Schwefel-

säurefabrik in Brassó (Kronstadt, Ungarn) hergestellt wurde, war nach den mir gemachten Mitteilungen das Selen weiter gereinigt worden, indem es in sublimierte selenige Säure übergeführt, in Wasser gelöst, mit sehr viel Salzsäure versetzt und bei zirka 15° C. mit wässeriger schwefeliger Säure vermischt wurde, wonach sich das rote amorphe Selen (Selen praecipitatum rubrum) ausschied. Der Selenniederschlag wurde gewaschen, neuerdings mit konzentrierter Salpetersäure im Wasserbad oxydiert, eingedampft, nach Zusatz von Salzsäure nochmals mit schwefeliger Säure gefällt, gewaschen und schließlich im Vakuum getrocknet; bis zu seiner Verwendung wurde es im Exsikkator über Phosphorpentoxyd aufbewahrt, um hygroskopische Feuchtigkeit hintanzuhalten.

Bevor an die eigentliche Untersuchung geschritten wurde, mußte festgestellt werden, ob nicht durch die Stahlelektroden eine Bildung von Eisenselenid und dadurch Veränderung der Leitfähigkeit des Selens herbeigeführt werde.

Es war dies allerdings nicht wahrscheinlich, da einerseits Siemens[1] feststellt, daß Eisen unter den gegebenen Versuchsbedingungen von Selen nicht angegriffen wird, andrerseits bei dieser Methode die Berührungsfläche im Verhältnisse zur Gesamtmasse des Selens sehr klein ist (bei den »Zellen« sind die Umstände für Selenidbildung viel günstiger). Es wurde ein aus kristallinischem Selen gepreßter Zylinder 6 Stunden lang auf eine Temperatur von 210° C. (± 3° C.) in der Kontaktvorrichtung erhitzt. Nach erfolgtem Abkühlen zeigten sich die Elektroden in keiner Weise angegriffen. Die Kontaktflächen des Selenzylinders wurden nun auf einer mattierten Glasscheibe abgeschliffen und der auf der Glasplatte haften gebliebene Teil auf einen Gehalt an Eisen untersucht,[2] wobei sich herausstellte, daß keine nachweisbaren Spuren von Eisen vorhanden waren.

Es sind demnach die vorliegenden Untersuchungen mit vollkommen chemisch reinem Selen ausgeführt.

---

[1] A. a. O.

[2] Das Selen wurde in Salpetersäure gelöst, die Lösung im Wasserbad eingedampft und auf Eisengehalt mittels Blutlaugensalz sowie mittels Schwefelcyankalium geprüft.

III. Untersuchung der elektrischen Leitfähigkeit der allotropen Selenmodifikationen bei verschiedenen Temperaturen.

A. Die kristallinischen Modifikationen durch verschiedene Erhitzungsprozesse aus dem amorphen Selen erzeugt.

1. Rotes amorphes präzipitiertes Selen wurde 2 Tage im Vakuum unter der Luftpumpe über Chlorcalcium getrocknet und sodann unter einem Drucke von 10.000 *kg* pro Quadratzentimeter gepreßt. Das Volumen verminderte sich dabei sehr stark. Nach der Pressung hatte das Material die rote Farbe vollständig verloren, die Selenzylinder erschienen schwarz, graphitisch glänzend, von beträchtlicher Festigkeit, der Bruch war ganz homogen, muschelig, mit Glasglanz und vollkommen schwarz, das Material war vom schwarzen, glasigen Selen in nichts zu unterscheiden.[1] Es wird durch meinen Befund die Vermutung Saunders' bestätigt, daß das schwarze glasige und rote amorphe Selen sich nur durch den Aggregatzustand unterscheiden, da man durch genügend feine Pulverung aus dem schwarzen Selen ein rotes Pulver erhält, welches sich in nichts vom roten präzipitierten Selen unterscheidet. Ein Zylinder wurde in die Kontaktvorrichtung gespannt, bei Zimmertemperatur zeigte das Galvanometer bei Empfindlichkeit 1/1 keinen Ausschlag. Es kann also das amorphe Selen als Nichtleiter angesehen werden. Das Selen wurde nun im Thermostaten langsam erwärmt (Tabelle 1, Fig. 3, Kurve I_1 und I_2). Bei 113° C. konnte man einen Ausschlag wahrnehmen. Die Leitfähigkeit stieg so schnell, daß sogleich auf die Empfindlichkeitsstufe 1/100 übergegangen werden mußte. Der Widerstand fiel beständig bis 178° C., um von dort angefangen langsam zu steigen. Bei 215° C. stieg der Widerstand noch immer. Es wurde nicht gewartet, bis der Widerstand sein Maximum

---

[1] Die Dichte bei 15° C. betrug $d = 4 \cdot 163$, wogegen Saunders für das rote präzipitierte Selen $d = 4 \cdot 26$, für das glasige $4 \cdot 28$ findet. Die Differenz dürfte auf Hohlräume im gepreßten Körper zurückzuführen sein, jedenfalls hatte sich durch das Pressen die Dichte nicht vergrößert.

erreichte, sondern langsam abgekühlt (Kurve I_2). Bei Abkühlung zeigte der Widerstand starke Zunahme. Bei 120° C. nun wurde der Versuch abgebrochen. Der Zylinder hatte, wie sich beim Herausnehmen der Kontaktvorrichtung zeigte, ein mattgraues Aussehen angenommen, ließ sich mit der Feile bearbeiten und zeigte hiebei metallisch glänzende Flächen. Das Selen war demnach zufolge der Erhitzung kristallinisch geworden. Auch zeigte der Zylinder eine schwache Deformation, was dem Weichwerden des amorphen Selens beim Übergang in die kristallinische Modifikation zuzuschreiben ist. Es wurde nun die Kontaktschraube neuerdings angezogen und der Körper wieder erwärmt (Tabelle 2, Fig. 3, Kurve II). Es zeigte sich, daß derselbe bis 120° C. einen positiven Temperaturkoeffizienten bekommen hatte, also bis zu diesem Punkte sich wie ein Metall verhielt, von diesem Punkt an nahm bei fortgesetzter Erwärmung der Widerstand ab.

Tabelle 1.

Fig. 3, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm
113° C.	2800·00
114	550·00
117	0·42
124	0·48
130	0·42
190	0·26
204	0·41
208	0·69
209	0·8
211	0·88
201	1·1
190	2·2
177	3·2
164	3·7
153	6·1
142	11·0
131	18
122	27·5

Tabelle 2.

Fig. 3, Kurve II.

Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm
78° C.	27·5
89	42
92	46
109	55
109	69
117	80
129	82
134	80
145	61
155	42
160	42
170	18
183	7·3
191	4·4
199	2·5
210	1·22
215	1·0

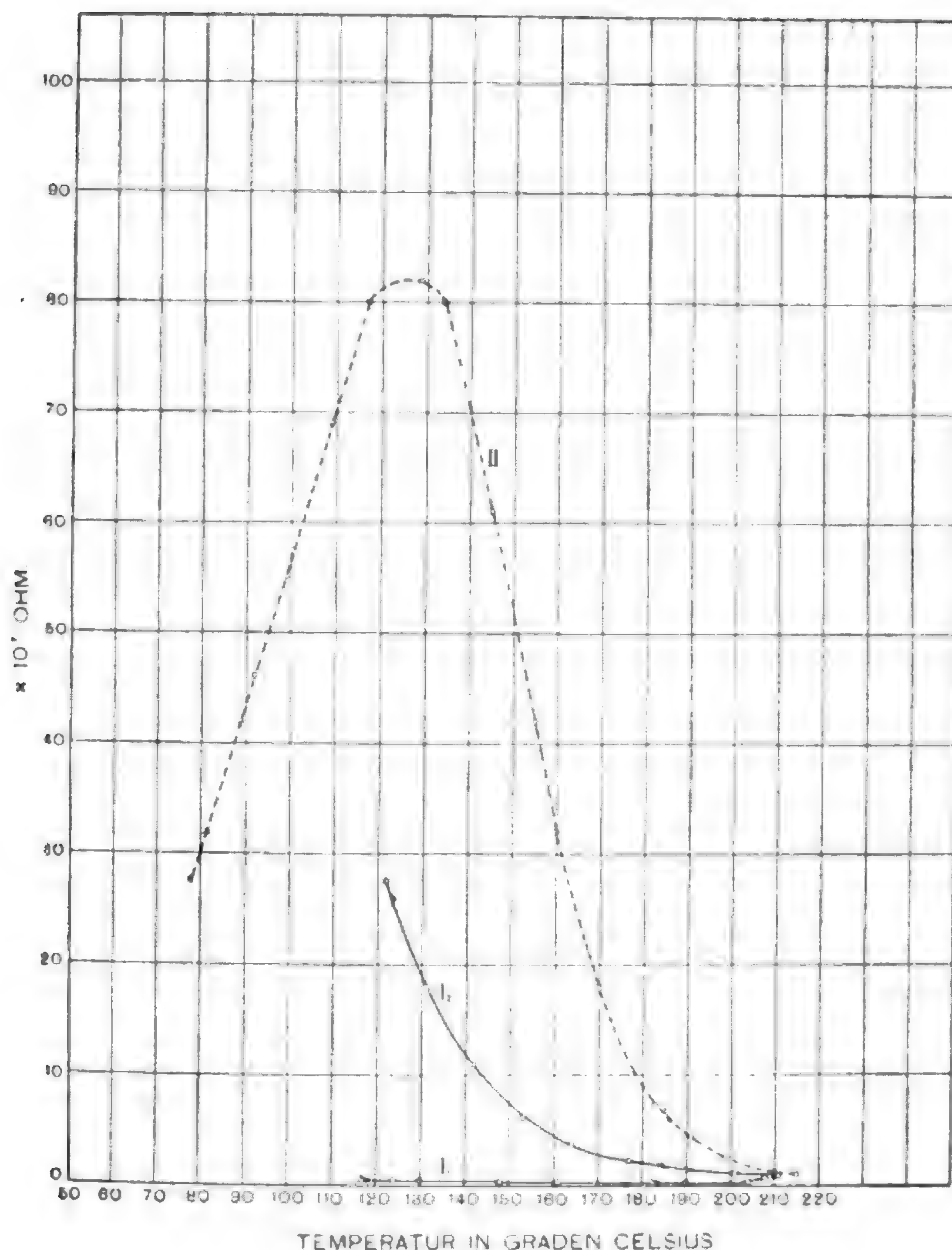


Fig. 3.

2. An den folgenden Tagen wurde das Verhalten desselben Körpers sowohl bei Erwärmung als auch bei Abkühlung untersucht (Tabelle 3 und 4, Fig. 4, Kurve I_1, I_2, II_1, II_2). Beide Male zeigte sich bei Erwärmung ein positiver Temperaturkoeffizient bis 130° C., während bei Abkühlung dieser Umkehrpunkt erst bei 90° C. eintrat. Auch die absoluten Werte des Widerstandes differierten beträchtlich voneinander.

Tabelle 3.

Fig. 4, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^8 Ohm
12° C.	1·7
25	1·26
35	1·4
52	4·4
59	7
70	12
81	21
190	30
100	42·5
113	62
119	71
130	80
135	76
139	70
145	62
149	56
155	44
158	38
167	24
173	17
185	8
192	4·8
203	2·1
207	1·5
209	1·4
209	1·1
193	1·4
188	1·6
183	1·9
157	5·6
145	8·8
121	26
110	40
96	50
82	50
69	35
63	25
50	11·3

Tabelle 4.

Fig. 4, Kurve II_1 und II_2.

Temperatur	Widerstand 10^8 Ohm
12° C.	1·8
25	1·73
35	1·83
65	1·2
90	26
99	35
106	43
115	55
123	62
130	67·5
137	60
144	54
155	37
167	21
177	12
205	1·7
209	1·4
191	2·1
183	2·5
178	2·7
173	3·2
170	3·6
165	4·3
160	5·2
151	8·1
140	15
130	24·2
122	36
115	46
100	72
89	80
82	70
74	57
65	40
61	30
56	21

Als dasselbe Präparat nach 7 Wochen abermals untersucht wurde (in der Zwischenzeit war es bei Zimmertemperatur [15° C.]

im Dunkeln aufbewahrt worden), zeigte es ein vollständig geändertes Verhalten (Tabelle 5, Fig. 4, Kurve III_1, III_2).

Tabelle 5.

Fig. 4, Kurve III_1 und III_2.

Temperatur	Widerstand 10^8 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^8 Ohm
21° C.	7·58	170° C.	11·65
30	9·25	180	9·15
35	11·0	190	5·1
40	13·3	200	4·06
45	15·7	205	3·06
50	18·3	210	18·4
60	21·7	215	8·39
65	22	215	5·3
70	21	210	5·41
76	19·7	135	12·3
80	18·9	130	15
90	18·3	125	18·3
100	17·8	120	21·2
110	18·4	115	24·7
120	19	88	15
130	18·7	75	7·35
140	18·7	70	5·5
150	15·7	65	4·16
155	13·9	48	12
165	12·6		

Die starken Widerstandsmaxima beim Erwärmen waren verschwunden, metallisches Verhalten zeigte es nur bis 65° C., allerdings zeigte sich ein kleines Maximum auch bei 130° C. Der ganze Verlauf der Kurve war viel flacher. Bei Abkühlung zeigte sich der Umkehrpunkt auf 110° C. vorgerückt, auch hatte der Widerstand bei diesem Punkt einen höheren Wert als beim Erwärmen.

Es war also durch neuerliches Erhitzen wieder eine molekulare Umlagerung in diesem Selenkörper erfolgt. Dafür spricht auch die Änderung der Größe des Zylinders; vor dem Erhitzen

betrug die Länge $l = 3 \cdot 96$ *mm*, Durchmesser $d = 8 \cdot 19$ *mm*, nachher waren die Größen $l = 3 \cdot 68$, $d = 8 \cdot 29$.

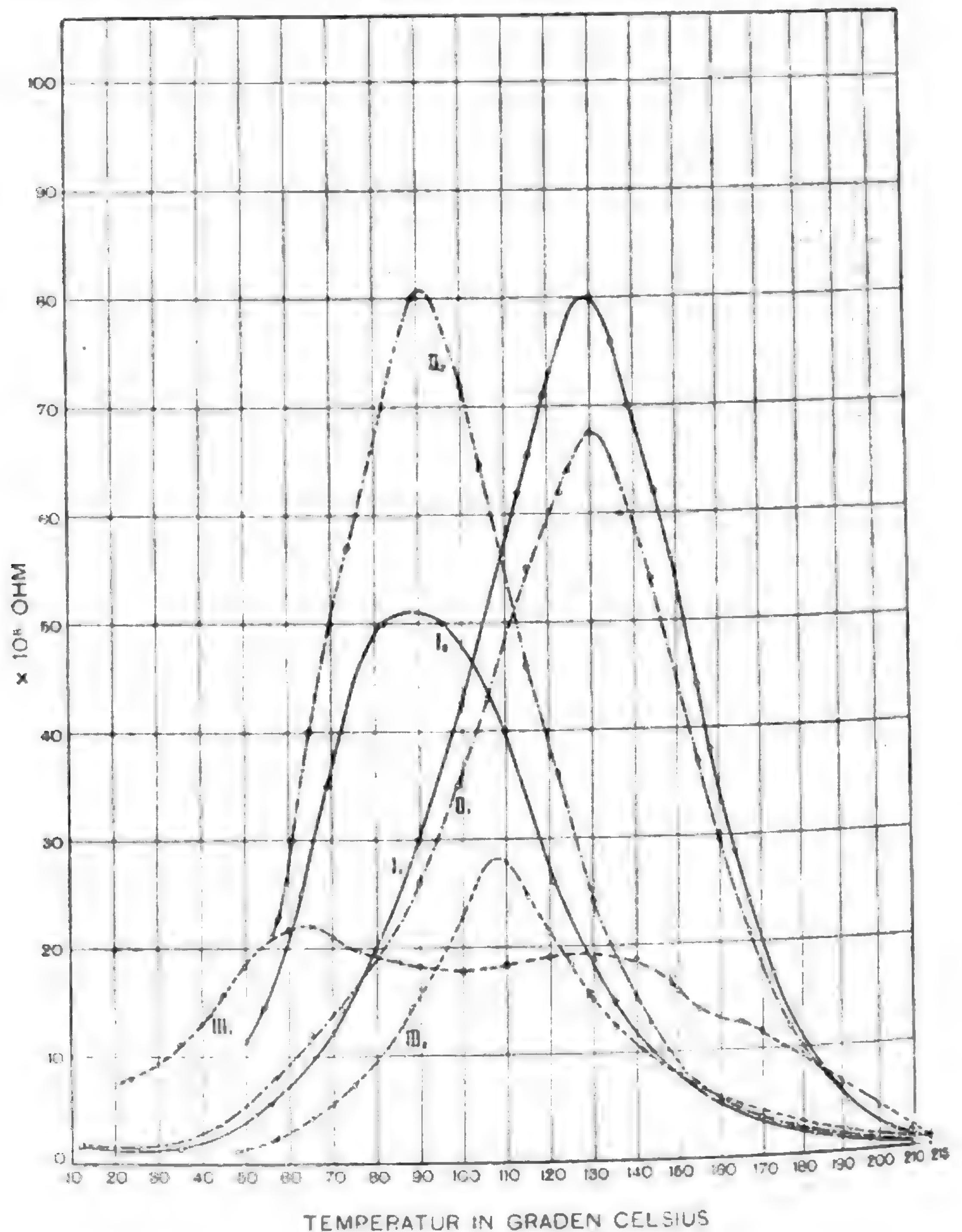


Fig. 4.

Wir sehen demnach, daß vorliegendes Präparat kein fertiges, stabiles Produkt war, sondern daß es beständigen molekularen Umwandlungsprozessen unterliegt, deren Verlauf sowohl durch die Zeit als auch durch die Temperatur bedingt wird.

3. Ein zweiter Zylinder aus demselben Materiale (Selen praecipitatum rubrum) wurde im Thermostaten erhitzt. Bei 100° C. begann er zu leiten, wurde aber ganz weich und vollständig deformiert. Es wurde daher die Kontaktvorrichtung aus dem Thermostaten herausgenommen und auf 80° C. abgekühlt. Die Masse wurde wieder hart, hatte aber bereits das Aussehen des kristallinischen Selens, trotzdem ging der Ausschlag des Galvanometers auf 0 zurück. Als der Körper weiter erhitzt wurde (Tabelle 6, Fig. 5, Kurve I_1, I_2), zeigte er durchwegs einen negativen Temperaturkoeffizienten. Er wurde 4 Stunden auf 210 bis 215° C. erhalten, wobei der Widerstand beständig sank, und sodann abgekühlt (Kurve I_2). Bei Abkühlung stieg der Widerstand sogleich, blieb aber um einen beträchtlichen Betrag unter den früher beobachteten Werten.

Tabelle 6.

Fig. 5, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm
110° C.	4400	190° C.	2·36
120	3400	180	2·9
130	2050	170	3·5
140	1230	160	4·1
150	730	150	4·67
160	435	139	5·18
170	262	130	5·65
180	159	120	6·78
190	97·5	110	8·9
200	57·3	90	20·5
205	44	80	30·6
210	27·3	70	48
215	6	60	79
215[1]	1·88	30	256
200	2·02	17	456

[1] Nach vierstündiger Erhitzung auf 215° C.

Das Präparat wurde nun auf —33° C. abgekühlt. Als Kältemischung wurde ein Gemisch von Äther und Kohlensäureschnee verwendet und die Kontaktvorrichtung direkt in das Gemisch hineingestellt, da dasselbe vollkommen isolierte. Die Kontaktvorrichtung blieb bis zur Temperatur +10° C. im Bade, wurde sodann herausgenommen und in den Thermostaten zur weiteren Erhitzung gestellt.

Auch hier zeigte sich (Tabelle 7, Fig. 5, Kurve II_1, II_2) von —33° bis +215° C. durchwegs nichtmetallisches Verhalten; auch bei darauffolgender Abkühlung konnte, trotzdem abermals eine Stunde auf 210° C. erhitzt worden war, ein positiver Temperaturkoeffizient nicht bemerkt werden.

Tabelle 7.

Fig. 5, Kurve II_1 und II_2.

Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm
—33° C.	1185	120° C.	6·45
30	925	130	6·85
25	540	140	6·85
20	454	150	7·1
15	403	160	6·95
5	328	170	6·7
0	300	180	5·9
+ 5	283	190	5·55
10	260	200	5·2
20	213	210	5·1
30	185	215	5·4
40	158	165	8·75
50	112	160	9·5
55	75·5	150	10·85
60	25·6	140	11·8
65	17·2	130	12·8
70	7·1	120	14·9
80	5·9	110	17·2
90	6·35	75	41·5
100	6·45	64	60·3
110	6·45		

Es hatte also in diesem Fall eine kurze Unterbrechung bei Erhitzung hingereicht, die Bildung metallisch leitenden Selens auch bei Temperaturen über 200° C. hintanzuhalten.

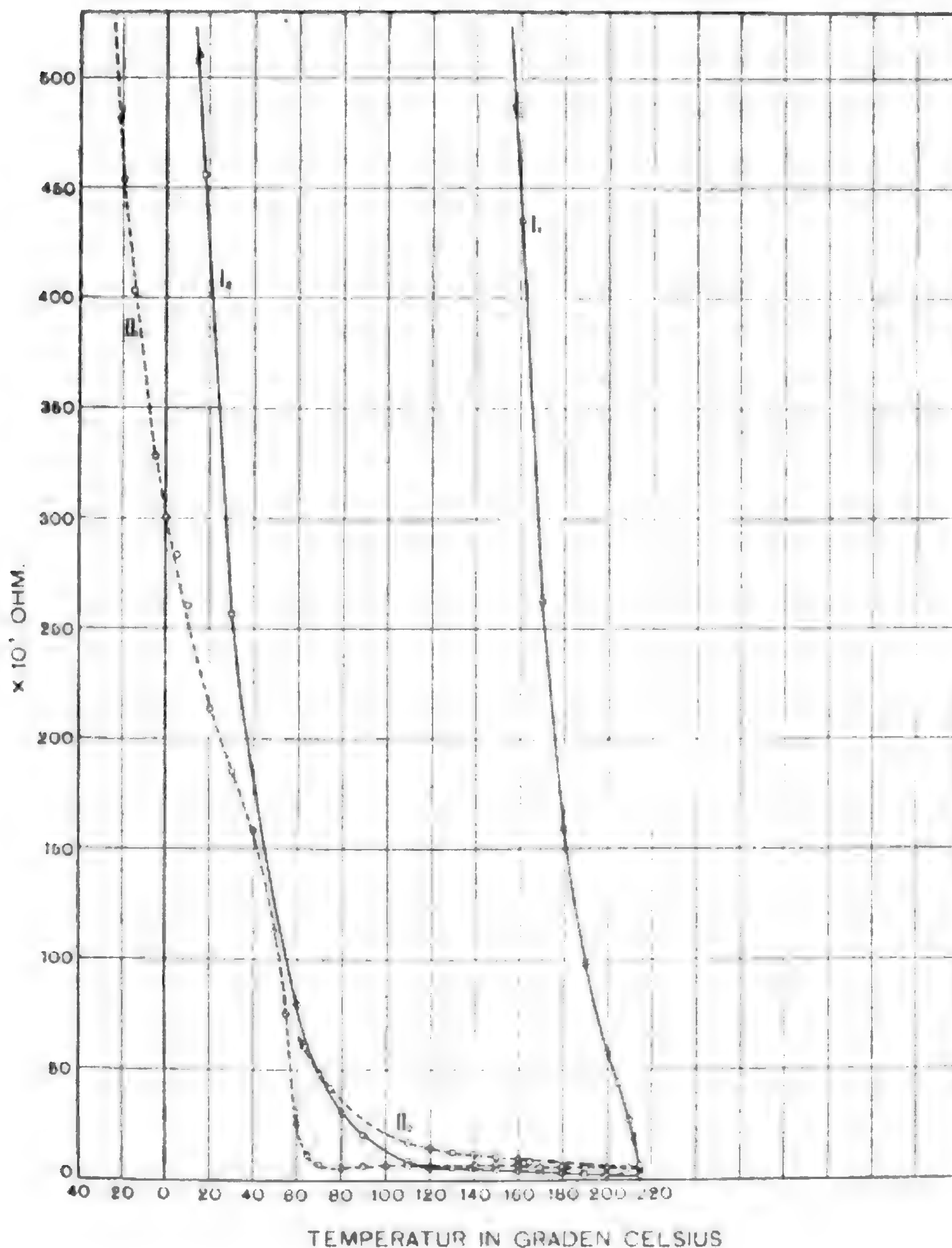


Fig. 5.

4. Chemisch reines Selen wurde geschmolzen, auf 180° C. abgekühlt und 4 Stunden im Luftbad auf dieser Temperatur mit Schwankungen ± 3° C. erhalten. Es resultierte eine graue,

glänzende Masse von sehr schön ausgeprägter, strahlig kristallinischer Struktur, ähnlich dem Wismut, die sich mit der Feile gut bearbeiten ließ. Es wurde darum zunächst ein parallelopipedischer Körper herausgeschnitten, der übrig bleibende Teil feinst gepulvert und unter einem Drucke von 8000 *kg* pro Quadratzentimeter gepreßt. Der gepreßte Zylinder zeigte sehr feinkörnigen, stahlartigen Bruch und nahm bei Bearbeitung mit Feile oder Schmirgelpapier schönen Metallglanz an. Tabelle 8, Fig. 6, Kurve I_1, I_2, zeigt das Verhalten eines solchen Zylinders beim Erwärmen. Wie auch Siemens schon konstatierte, ist dieses aus dem geschmolzenen Zustande kristallinisch gewordene Selen nicht metallisch. Da die Größen des Zylinders in der Länge $l = 7 \cdot 21$ *mm* und im Durchmesser $d = 8 \cdot 32$ *mm* war, entspricht dies bei einem Widerstande von 109×10^5 Ohm bei 20° C. einem spezifischen Widerstande von $\sigma = 8 \cdot 25 \times 10^6$ Ohmzentimeter.

Tabelle 8.

Fig. 6, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm
20° C.	109	150° C.	7·1
30	89	160	6·7
40	71	170	6·6
50	57	180	5·8
60	46	190	4·5
70	34	200	2·7
80	26	210	1·4
90	20	215	1·0
100	15	200	1·1
110	12	170	1·5
120	10	134	2·6
130	8	111	3·0
140	7·3	60	3·4

Als der Zylinder wieder erwärmt wurde, zeigte er bis 50° C. deutlich einen positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes (Tabelle 9, Fig. 6, Kurve II). Es war also bei diesem

Präparat eine teilweise Umwandlung der Modifikation I in II durch Erhitzung eingetreten. Das aus der Masse herausgeschnittene Plättchen zeigte dasselbe Verhalten wie der Zylinder.

Tabelle 9.

Fig. 6, Kurve II.

Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm
14° C.	8·7	120° C.	4·4
20	8·85	130	3·75
30	9·1	140	3·14
40	9·35	150	2·63
50	9·5	160	2·21
60	9·3	170	1·9
70	8·55	180	1·63
80	7·7	190	1·42
95	6·4	200	1·31
100	6·0	210	1·24
110	5·1	215	1·20

5. Ähnlich verhielt sich folgendes Selenpräparat. Chemisch reines Selen wurde in einem Porzellantiegel geschmolzen und durch Aufstellen auf eine kalte Metallplatte und später in kaltes Wasser rasch erkalten gelassen, wodurch es zu schwarzem, glasigen Selen erstarrte. Dieses wurde nun langsam auf 195° C. erhitzt, wobei es durch Abgabe der eigenen latenten Wärme teilweise schmolz. Es wurde nun auf 195° C. dauernd gehalten, wobei die Masse langsam vom Rande gegen die Mitte kristallisierte. Nach 5 Stunden war die ganze Masse kristallinisch. Aus dieser Masse wurde ein parallelopipedisches Plättchen 7 : 7 : 2·8 *mm* Seitenlänge geschnitten und im Thermostaten erwärmt (Tabelle 10, Fig. 7, Kurve I_1, I_2). Auch hier war der Temperaturkoeffizient durchaus negativ. Es wurde 2 Stunden lang auf 210° bis 215° C. erwärmt, wobei der Widerstand ständig sich verminderte. Der spezifische Widerstand des Materials bei 20° C. betrug $\sigma = 2 \cdot 52 \times 10^6$ Ohmzentimeter.

Ein aus demselben Material gepreßter Zylinder gab bei Erwärmung dasselbe Resultat.

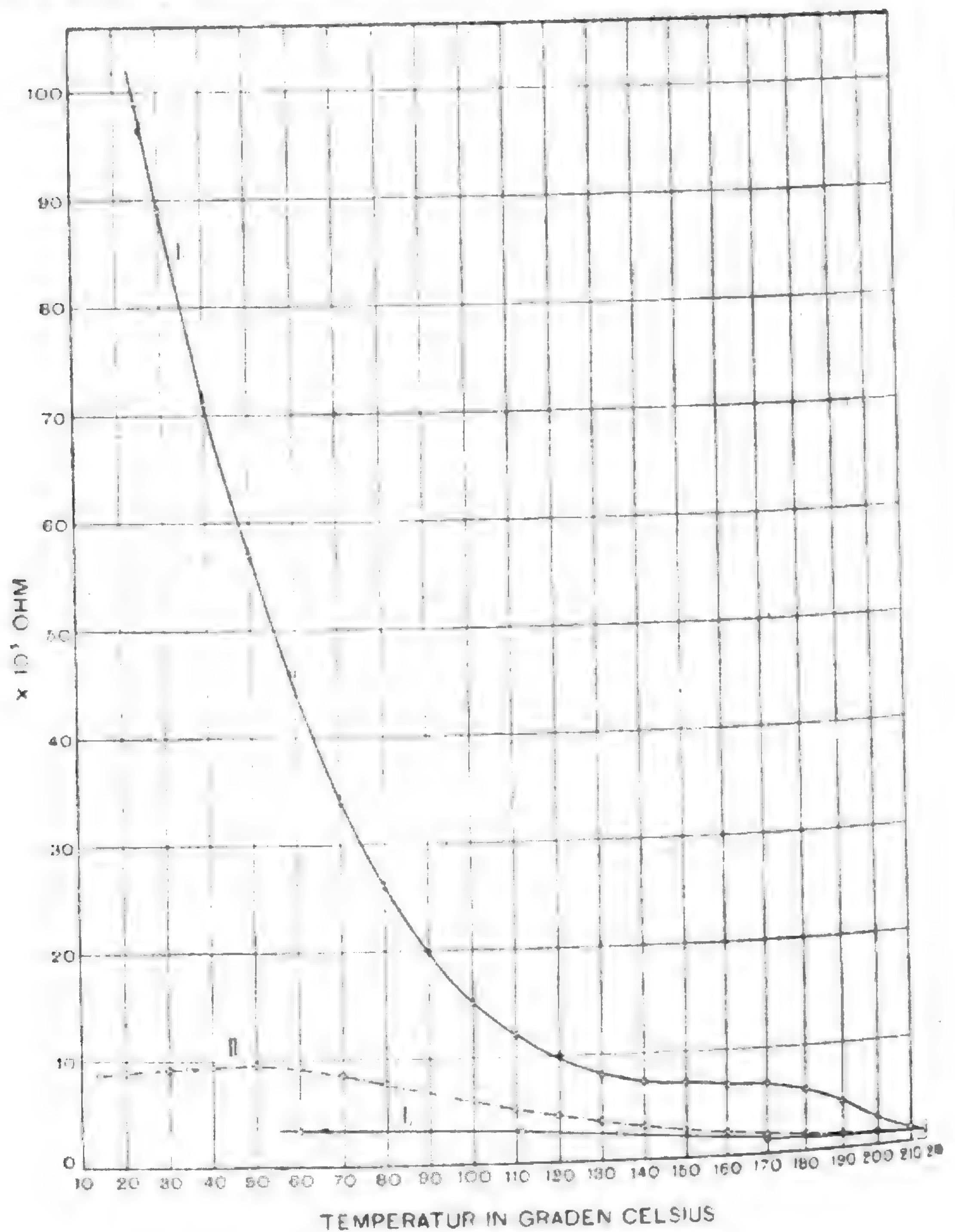


Fig. 6.

Derselbe wurde 5 Stunden lang auf 210° bis 215° C. erhitzt und gleichzeitig dasselbe Material in Pulverform. Bei Abkühlung (vergl. Tabelle 12, Fig. 8, Kurve II) zeigte sich zwischen 120° und 185° C. ein positiver Temperaturkoeffizient, im übrigen Verlaufe der Kurve war derselbe negativ.

Tabelle 10.

Fig. 7, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm
20° C.	144	200° C.	7·2
30	133	210	6
40	116	215	5·4
50	99	215	2·52
65	73·5	198	2·7
85	44·5	189	2·85
100	32	170	3·65
110	26·5	160	4·35
120	22·7	150	5·3
140	17·2	139	6·6
150	15·1	127	8·95
160	13·1	113	13·3
170	11·5	90	17·1
180	9·9	70	23
191	8·3		

Tabelle 11.

Fig. 8, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm
15° C.	200·0	187° C.	0·572
40	97·0	180	0·615
56	61·5	168	0·76
70	36·5	160	0·9
88	16·9	150	1·16
101	11·9	140	1·48
112	8·2	130	2·1
122	5·5	120	2·9
132	4·36	110	4·0
142	4·15	99	5·69
154	3·35	90	7·4
168	2·47	80	9·5
180	1·62	70	10·8
192	1·12	55	11·2
200	0·795	33	9·15
200	0·55		

Als der Zylinder herausgenommen wurde, zeigte es sich, daß er etwas deformiert war, die Länge war von 3·96 *mm* auf 3·8 *mm* gesunken, der Durchmesser von 8·25 *mm* auf 8·54 *mm*

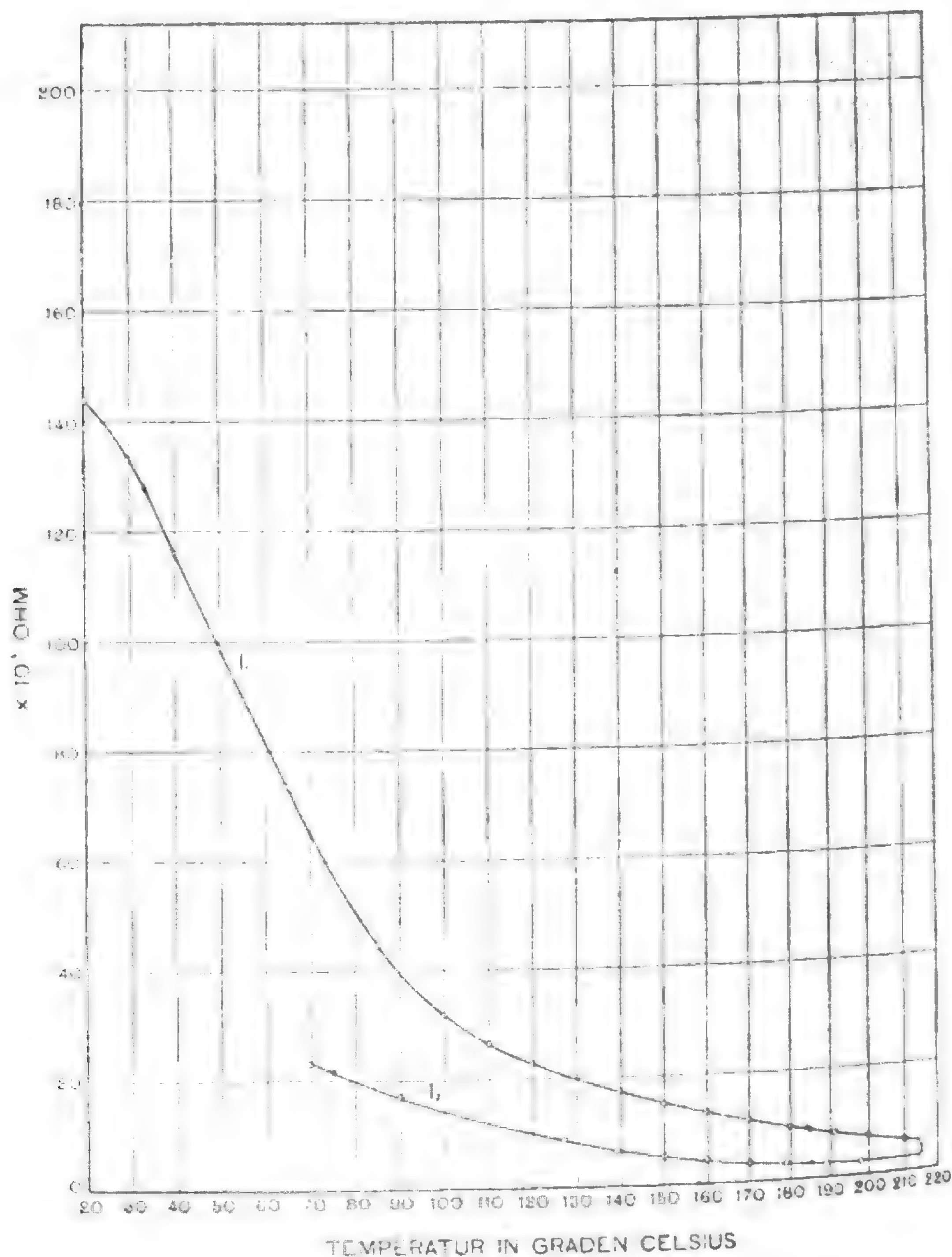


Fig. 7.

gestiegen, in der Mitte war eine tonnenförmige Ausbauchung. Diese Deformation sowie das Auftreten eines positiven Temperaturkoeffizienten weisen deutlich darauf hin, daß das Selen eine molekulare Änderung erfahren hat. Das gleichzeitig

erhitzte Pulver war derart zusammengesintert, daß es neuerdings in der Reibschale zerrieben werden mußte. Das Pulver wurde gepreßt und im Thermostaten untersucht; zwischen den

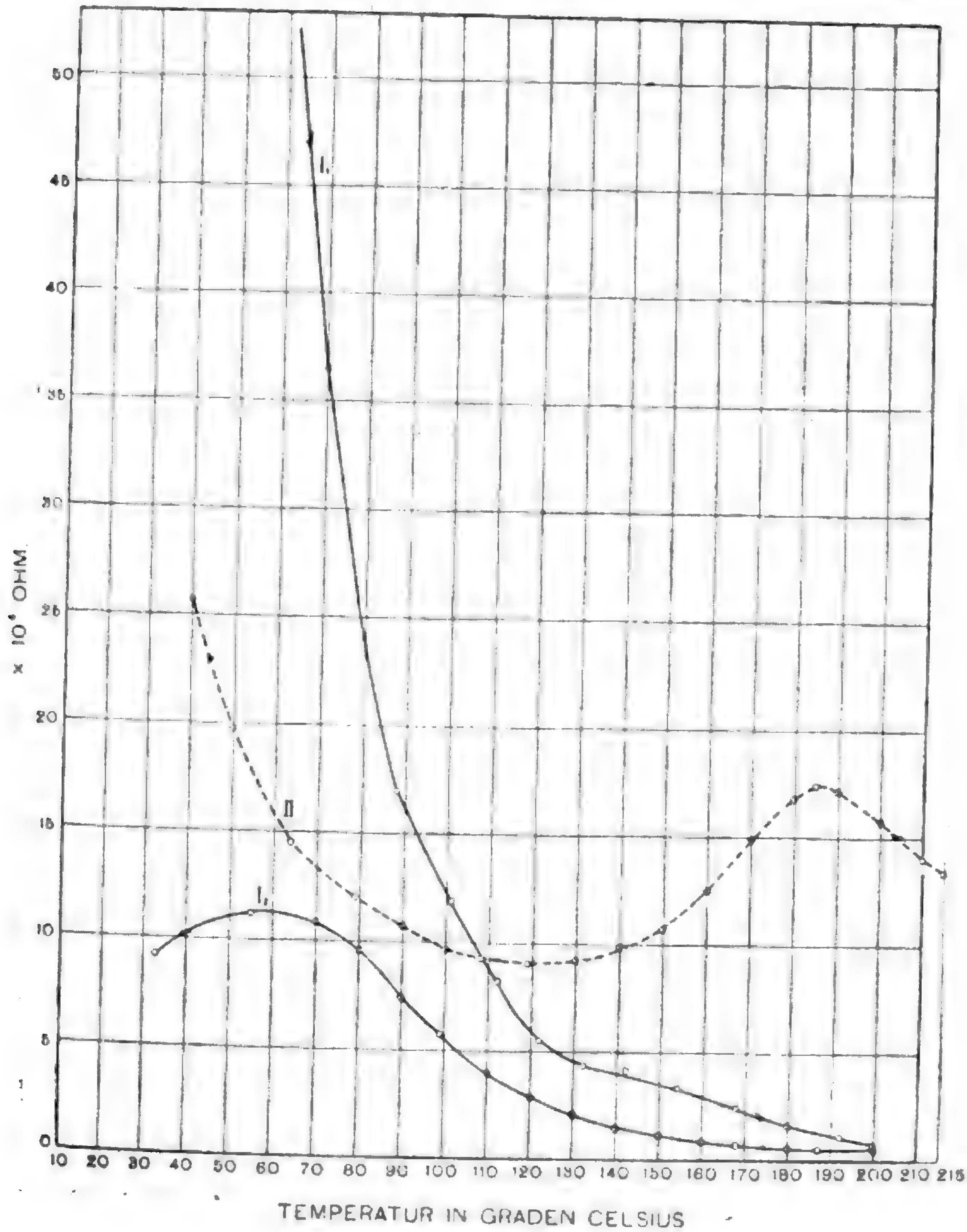


Fig. 8.

beiden Versuchen lag ein Zeitraum von 5 Wochen. Wie Tabelle 11, Fig. 8, Kurve I_1, I_2, zeigt (der Maßstab bezieht sich auf Kurve I_1, I_2, während Kurve II in 100mal kleinerem Maßstabe gezeichnet ist, also statt $\times 10^6$ zu denken, ist $\times 10^4$ Ohm).

hat in dieser Zeit eine durchgreifende Umbildung des Präparats stattgefunden. Der spezifische Widerstand bei 20° C. betrug jetzt $1 \cdot 34 \times 10^{8}$ Ohmzentimeter, weitaus größer als vor dieser Zeit. Der Temperaturkoeffizient war wieder durchwegs negativ, jedoch zeigte sich bei Abkühlung, trotzdem nur kurze Zeit über 200° C. erhitzt worden war, von 80° angefangen metallisches Verhalten.

Tabelle 12.

Fig. 8, Kurve II.

Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm
215° C.	13·4	130° C.	9·25
210	14	119	9·05
190	17·1	108	9·25
185	17·4	100	9·65
180	16·8	90	10·7
170	14·9	79	12
160	12·5	64	14·5
150	10·7	50	19·7
140	9·85	40	25·6

Wir haben es also auch hier mit keinem stabilen Material zu tun, vielmehr scheint hier längere Erwärmung über 200° C. imstande zu sein, das Material teilweise in die metallische Modifikation überzuführen, und es scheint demnach das früher erwähnte Gesetz von Siemens nicht allgemeine Gültigkeit zu haben.

6. Chemisch reines, rotes, präzipitiertes Selen wurde 9 Stunden in destilliertem Wasser gekocht, wodurch es schwarz wurde und wahrscheinlich in die kristallinische Form überging. Da dieses Präparat sicher nicht über 100° C. erhitzt worden war und wegen der langen Dauer dieser Erhitzung sicher das Material vollständig umgewandelt war, so würde es die nicht-metallische Form (im Sinne der Siemens'schen Nomenklatur) in ihrer größten Reinheit vorstellen. Aus diesem Material wurde nach dem Pulvern ein Zylinder von der Größe $l = 6 \cdot 94$, $d = 8 \cdot 33$ gepreßt. Beim Erwärmen des Zylinders zeigte sich

vollständig nichtmetallisches Verhalten (Tabelle 13, Fig. 9, Kurve I_1, I_2). Die Temperatur wurde 30 Minuten lang auf 210° C. erhalten, sodann wurde langsam abgekühlt. Der Widerstand stieg hiebei, blieb aber weit unter dem ursprünglichen Wert, ohne daß sich jedoch ein positiver Temperaturkoeffizient gezeigt hätte. Es war also auch hier eine molekulare Veränderung eingetreten, was durch das Weichwerden des Zylinders bestätigt wird, dadurch wurde die Länge auf 6·535 *mm* vermindert.

Tabelle 13.

Fig. 9, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^5 Ohm
20° C.	3555	210° C.	0·425
30	2340	200	0·514
40	1500	190	0·543
50	1040	180	0·64
60	715	170	0·85
70	495	160	1·01
80	345	150	1·2
90	210	140	1·51
100	136	130	1·87
110	110	120	2·42
120	92·5	107	3·07
130	72·3	100	3·42
140	55	90	4·25
150	40·7	80	5·25
160	30·4	70	6·8
170	22·3	60	9·5
180	15·3	49	13·5
190	8·8	41	21
200	3·95	33·2	36
210	1·84	15	100

Der Durchmesser an der stärksten Stelle betrug nach dem Erwärmen 8·75 *mm*. Vor dem Erwärmen betrug der spezifische Widerstand 3×10^8 Ohmzentimeter, nachher $7 \cdot 02 \times 10^6$ Ohmzentimeter, hatte sich also durch die Erwärmung sehr

beträchtlich geändert. Die vorliegende Form ist demnach auch in keinem stabilen Zustande, denn ihr Verhalten wird durch Erhitzung dauernd geändert.

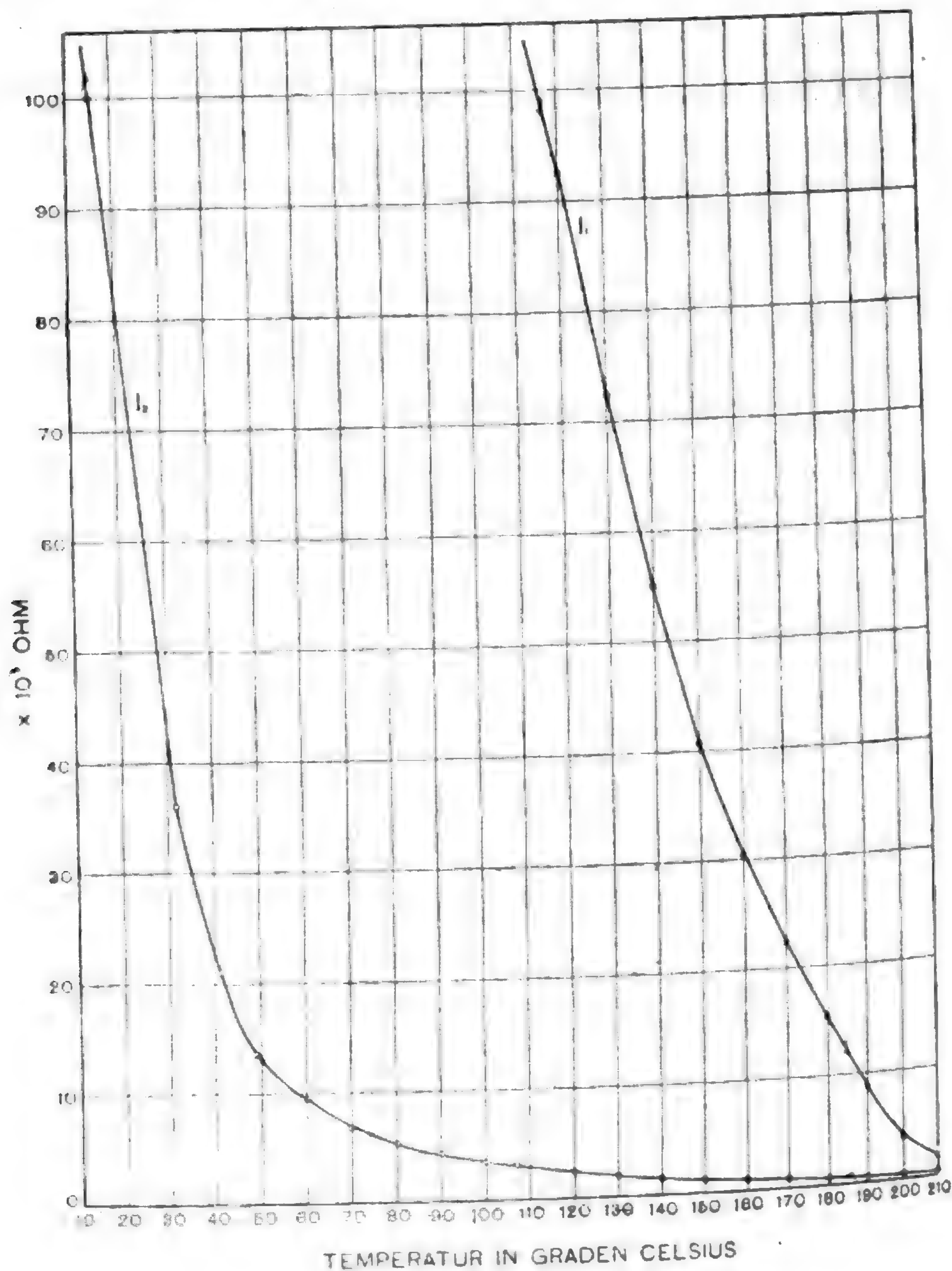


Fig. 9.

Man kann die Resultate vorstehender Untersuchungen des amorphen Selens in folgende Regeln zusammenfassen:

1. Das rote, präzipitierte und das schwarze, glasige Selen sind nur durch den Aggregatzustand unterschiedene Formen

des Selens und lassen sich durch Pressen des ersteren unter sehr hohem Druck oder sehr feine Zerteilung des letzteren ineinander überführen. Beide sind Nichtleiter der Elektrizität.

2. Erhitzt man amorphes Selen rasch über 200° C., ohne es jedoch zum Schmelzen zu bringen, so zeigt sich beim Abkühlen innerhalb weiter Grenzen ein positiver Temperaturkoeffizient des Widerstandes. Das Auftreten des letzteren wird jedoch schon durch eine kleine Diskontinuität des Erwärmungsprozesses verhindert.

3. Es ist immer durch langdauernde Erhitzung möglich, Modifikation I und III in Modifikation II zum Teil überzuführen.

4. Die durch Erhitzen des amorphen Selens gewonnenen kristallinischen Modifikationen sind nicht stabil, da sich im Laufe der Zeit Modifikation II in Modifikation I rückbildet. Doch läßt sich ein derartig rückgebildetes Selen durch kurze Erhitzung wieder in Selen der Modifikation II verwandeln.

B. Kristallinisches »hartes« Selen.

Das eingehende Studium der von Ruhmer[1] »hartes« Selen genannten Modifikation des kristallinischen Selens ist von großem Interesse, da dieselbe einerseits häufig erwähnt und für Zwecke der Photophonie o. dgl. technische Zwecke verwendet wird, andrerseits die Unkenntnis ihres elektrischen Verhaltens bereits zu mancherlei Irrtümern geführt hat, welche zu berichtigen wünschenswert erschien. Die erste Angabe über diese Modifikation stammt von Ries, während Ruhmer dieselbe zuerst technisch verwertete.

Um dieses Präparat in größeren Mengen zu erhalten, verfuhr ich folgendermaßen. In einem Porzellantiegel wurden etwa 30 *g* chemisch reines Selen geschmolzen. Sodann wurde der Tiegel langsam abgekühlt, wobei das Selen mit einem Glasstabe beständig umgerührt wurde.

Das Selen wurde immer dickflüssiger und verlor plötzlich sein glänzend schwarzes Aussehen, wurde blaugrau, feinkörnig, war vollkommen starr und hart, das Selen war kristallinisch geworden. Wurde jedoch in dem Augenblick, in welchem das

[1] A. a. O.

Selen so dickflüssig war, daß man sein sofortiges Erstarren voraussetzen konnte, das Umrühren unterbrochen, so erstarrte es im nächsten Momente zu schwarzem, glasigen Selen. Es ist vollkommen irrelevant, ob das geschmolzene Selen hoch über den Schmelzpunkt erhitzt war oder nicht und ob es langsam oder schnell erkaltet. Man muß nur im Augenblicke des Erstarrens das Selen in heftige Bewegung bringen, es wird dadurch der Kristallisationsprozeß ausgelöst. Bloße Erschütterung des Selens hat gar keinen Einfluß. Will man Zellen dieser Modifikation erzeugen, so braucht man nur das auf die Zelle gebrachte geschmolzene Selen im Augenblicke des Erstarrens glatt zu streichen. Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man das auf die Zelle gestrichene, erkaltete, glasige Selen langsam erwärmt, bis es weich wird, sodann abkühlt und rasch mit einem Stäbchen überstreicht. Das Selen wird dann graukristallinisch.

Tabelle 14.

Fig. 10, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm
21° C.	60	210° C.	0·506[1]
30	45	200	0·6
40	32·75	190	0·705
50	22·75	180	0·815
60	15·2	170	0·925
70	10·65	160	0·93
80	7·25	150	0·94
90	5·7	140	0·925
100	5·45	130	0·955
110	5·02	120	1·0
120	4·4	110	1·1
130	3·82	100	1·34
140	3·05	90	1·57
150	2·22	80	1·92
160	1·44	68	2·46
170	1·08	58	3·05
180	0·778	50	3·65
190	0·532	40	4·46
200	0·33	34	5
210	0·242		

[1] Nach einer Stunde.

Die aus diesem Material gepreßten Zylinder zeigten, wie alle anderen aus kristallinischem Selen gepreßten, beim Bearbeiten mit der Feile metallischen Glanz, der Bruch hatte ein sehr feinkörniges, graues, stahlartiges Aussehen.

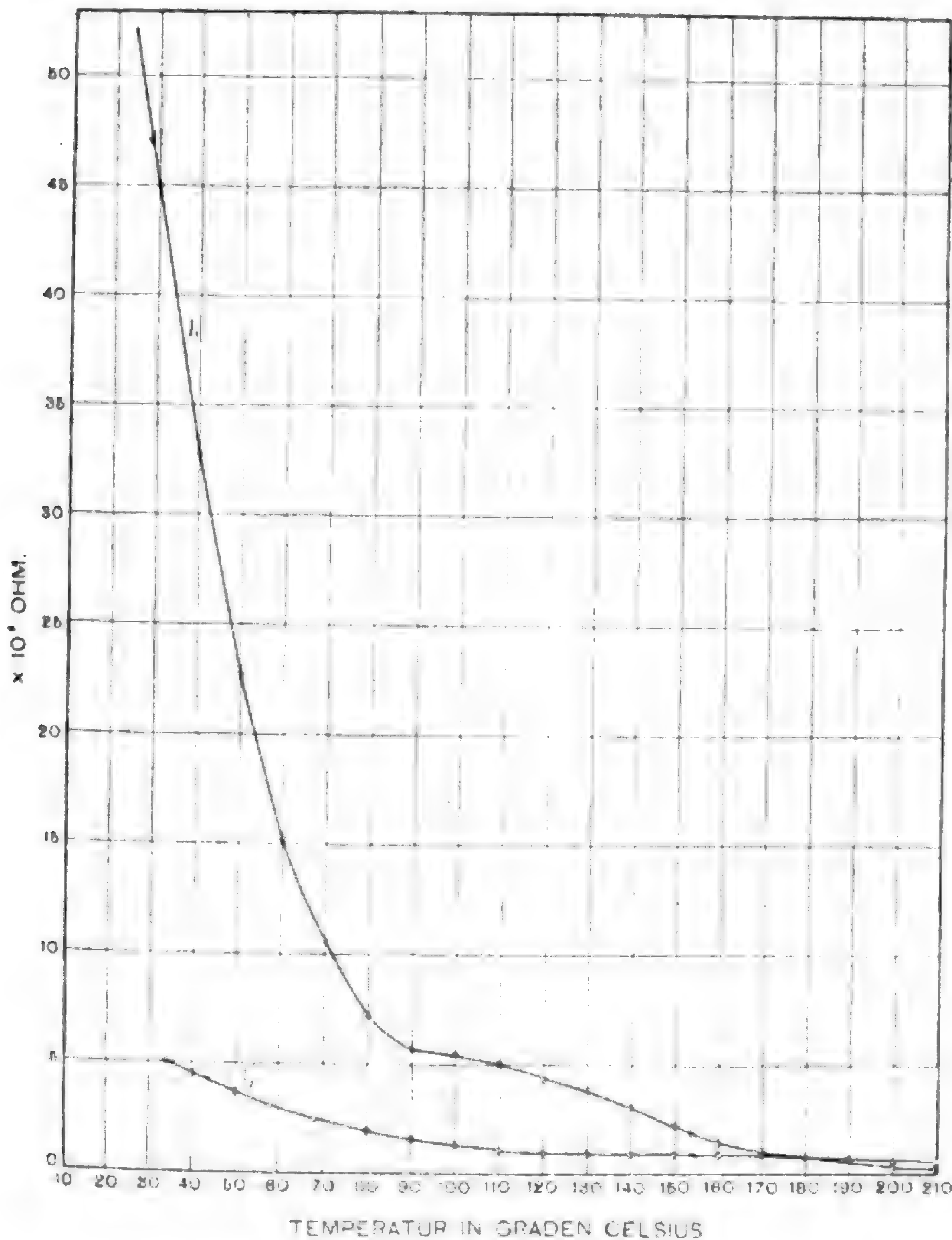


Fig. 10.

Das Verhalten bei Erwärmung ist aus Tabelle 14, Fig. 10, Kurve I_1, I_2 ersichtlich. Es zeigte sich, daß dasselbe durchaus nichtmetallisch war. Die Temperatur wurde eine Stunde auf 210° C. gehalten, wobei der Widerstand um mehr als das

doppelte stieg. Bei Abkühlung (Kurve I_2) verlief die Kurve kurze Zeit oberhalb der Erwärmungskurve, um dann bei weitem kleinere Werte zu zeigen als bei Erwärmung. Nirgends zeigte sich ein positiver Temperaturkoeffizient des Widerstandes. Der spezifische Widerstand bei 20° C. betrug $4 \cdot 53 \times 10^7$ Ohmzentimeter.

Ein zweiter Zylinder aus demselben Material wurde gleichfalls untersucht (Tabelle 15, Fig. 11, Kurve I_1, I_2). Das relative Verhalten war dasselbe wie beim vorigen Versuche.

Tabelle 15.

Fig. 11, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm
14° C.	109·5	195° C.	0·487
30	63·0	201·5	0·387
44	38·25	209·5	0·34
51	27·6	186	0·73
56	21·5	175	0·96
61	17·15	160	1·2
69	12·95	146	1·63
77	10·2	132	1·98
84·5	8·45	118	2·18
93·5	7·55	106	2·48
102	7·15	96	2·89
115	6·1	86	3·40
125	5·25	72	4·64
133	4·13	63	6·15
143	3·15	54	7·95
160	1·65	47	9·75
170	1·18	42·5	11·75
180	0·86	15	32

[Der feinpunktierte Teil der Kurve I_2 in Fig. 11 ist frei eingezeichnet, da der Punkt bei 15° C. erst am folgenden Tag aufgenommen wurde und Zwischenpunkte fehlen.]

Bei neuerlicher Erwärmung desselben Zylinders (Tabelle 16, Fig. 11, Kurve II_1, II_2) zeigte der Hauptverlauf der

Kurve bei Erwärmung ein ähnliches Verhalten wie bei der ersten Erwärmung, doch zeigen die Abweichungen der beiden Kurven voneinander deutlich, daß molekulare Umlagerungen

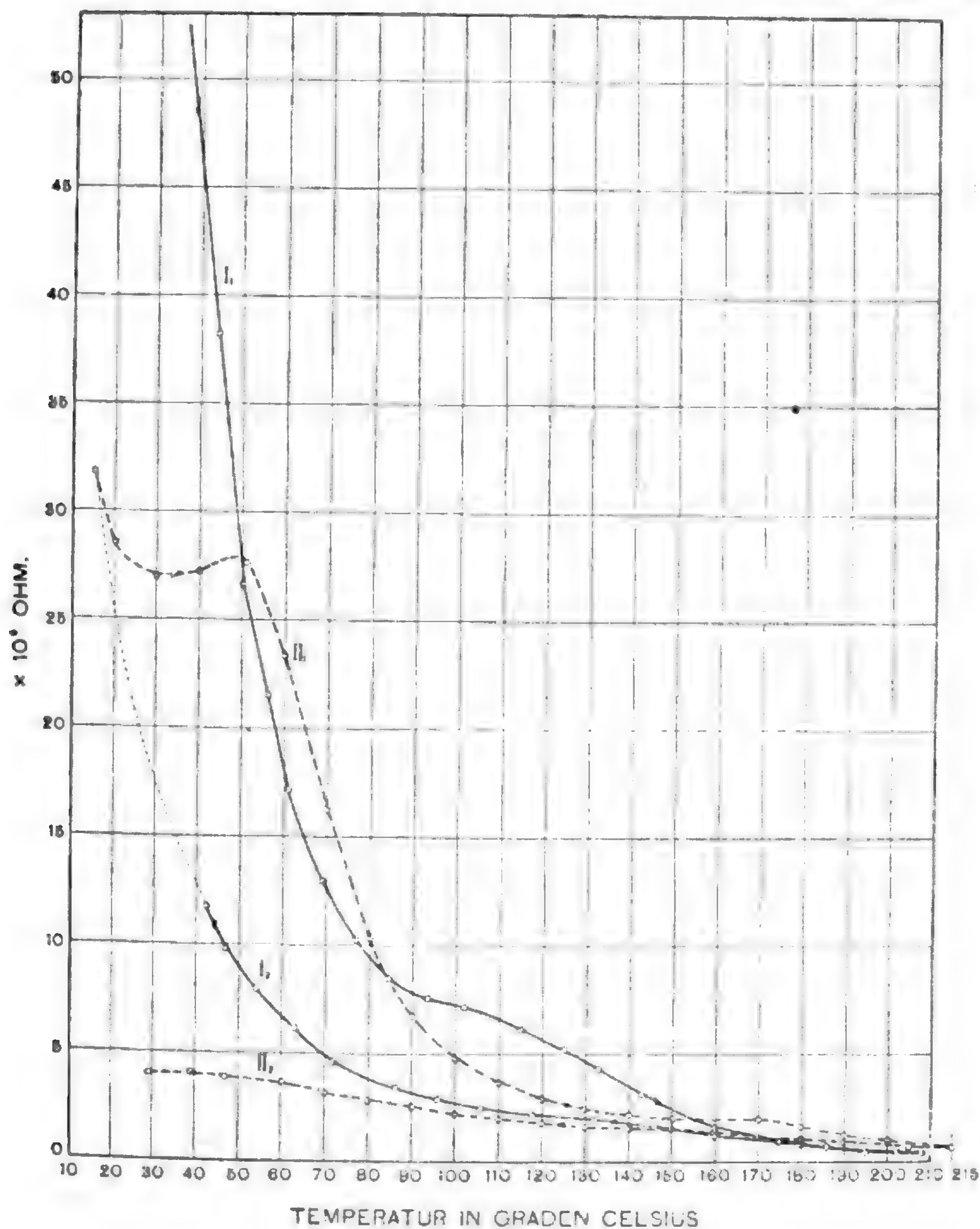


Fig. 11.

stattgefunden haben. Dies wird durch das Verhalten bei der darauffolgenden Abkühlung bestätigt, da sich bei 39° C. ein Umkehrpunkt ausgebildet hat, von welchem ab das Leitvermögen metallischer Natur war.

Tabelle 16.

Fig. 11, Kurve II_1 und II_2.

Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm
15° C.	31·8	215° C.	0·675
20	28·5	205	0·75
30	27	190	0·775
40	27·2	180	1·06
50	26·6	170	1·19
60	23·3	160	1·41
70	16·2	150	1·53
80	10·3	140	1·59
90	6·7	130	1·67
100	4·72	120	1·81
110	3·64	110	1·99
120	2·94	100	2·2
130	2·48	90	2·5
140	2·17	80	2·8
150	2·02	70	3·17
170	1·98	60	3·6
180	1·67	47	3·84
190	1·28	39	4·02
200	1·03	29	4·0

Es ergeben sich somit für das Verhalten der »harten« Selenmodifikationen folgende Regeln:

1. Das »harte« Selen ist eine vollständig nichtmetallische Modifikation, es verhält sich ähnlich dem bei 100° C. kristallinisch gemachten oder dem aus dem geschmolzenen Zustande kristallisierten Selen.

2. Durch öfteres, längeres Erhitzen über 200° C. gelingt es in manchen Fällen, diese Modifikation zum Teil in die metallische umzuwandeln, d. h. ihr zwischen größeren oder kleineren Temperaturgrenzen einen positiven Temperaturkoeffizienten zu erteilen.

3. Das harte Selen ist ebenso wie die sub *A* angeführten Modifikationen in hohem Grade labil.

C.

a) Aus Schwefelkohlenstoff kristallisiertes rotes Selen.

Diese Modifikation entsteht aus einer Lösung von amorphem Selen in Schwefelkohlenstoff. Die Kristalle, welche nach Mitscherlich[1] meistens Mischkristalle zweier Kristallformen enthalten, wurden in einer Reibschale aufs feinste zerrieben. In pulverförmigem Zustande war es dem amorphen roten präzipitierten Selen sehr ähnlich, jedoch schon beim Pressen zeigte es ein von letzterem vollständig verschiedenes Verhalten. Die gepreßten Zylinder hatten die rote Farbe beibehalten, der Bruch war blätterig, der Zusammenhang wenig fest.

Es gelangten im ganzen drei Zylinder aus diesem Material zur Untersuchung, deren Verhalten bei Erwärmung ein vollkommen identisches war, weshalb hier nur die mit einem Versuchskörper ausgeführten Versuche aufgenommen wurden. Bei Zimmertemperatur (16° bis 20° C.) war gar keine Leitfähigkeit vorhanden. Der Zylinder wurde nun im Thermostaten erwärmt. Bei 110° C. begann der Zylinder den elektrischen Strom zu leiten. Das dieser Modifikation eigentümliche Verhalten bei weiterer Erwärmung ist aus Tabelle 17, Fig. 12, Kurve I_1, I_2 ersichtlich. Die Leitfähigkeit nahm bis 157° C. zu, von da ab zeigte sich bis 200° C. eine Zunahme des Widerstandes (positiver Temperaturkoeffizient), von 200° C. an sank bei weiterer Erhitzung der Widerstand. Bei Abkühlung stieg der Widerstand stark an. Der Versuch wurde bei 150° C. abgebrochen. Bei den beiden anderen Zylindern zeigte sich beim Abkühlen von 170° C. an ein positiver Temperaturkoeffizient.

Durch das Erwärmen hatte der Zylinder seine rote Farbe verloren und war in graukristallinisches Selen übergegangen. Der Bruch war sehr feinkörnig, grau, hatte stahlartiges Aussehen und nahm beim Bearbeiten mit der Feile lebhaften Metallglanz an.

---

[1] Mitscherlich (1855), Ber. d. Berl. Akad. Wiss., p. 413; Ann. d. Phys. (3), Bd. 6, p. 301.

Tabelle 17.

Fig. 12, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm
111° C.	118×10^9	180° C.	57·0
120	59×10^8	190	82·3
130	35×10^7	200	107
140	208	203	106
145	57·8	205	99·0
150	37·6	210	71
155	34·0	210	60·2
160	33·7	209	58·5
165	35·7	205	59·5
170	42·2	156	16·6

Tabelle 18.

Fig. 12, Kurve II_1 und II_2.

Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm
12° C.	4·06	180° C.	84·5
21	4·24	190	68·5
30	4·3	200	53
35	4·55	210	43
50	5·85	215	35·7
60	7·7	215	26·5
65	8·35	210	25
70	9·1	200	27
75	9·85	190	32·7
80	10·3	180	41·7
90	12	170	53
100	14·5	160	61·5
110	19·5	150	61·3
120	29	140	51·5
130	45	130	40·4
140	60·5	120	28·2
150	72·5	110	18·5
160	82·5	100	12·2
170	87	25	2

Der Zylinder wurde am nächsten Tage neuerdings erwärmt (Tabelle 18, Fig. 12, Kurve II_1, II_2). Obwohl die Temperatur beim ersten Erhitzen nur kurze Zeit über 200° C. erhalten

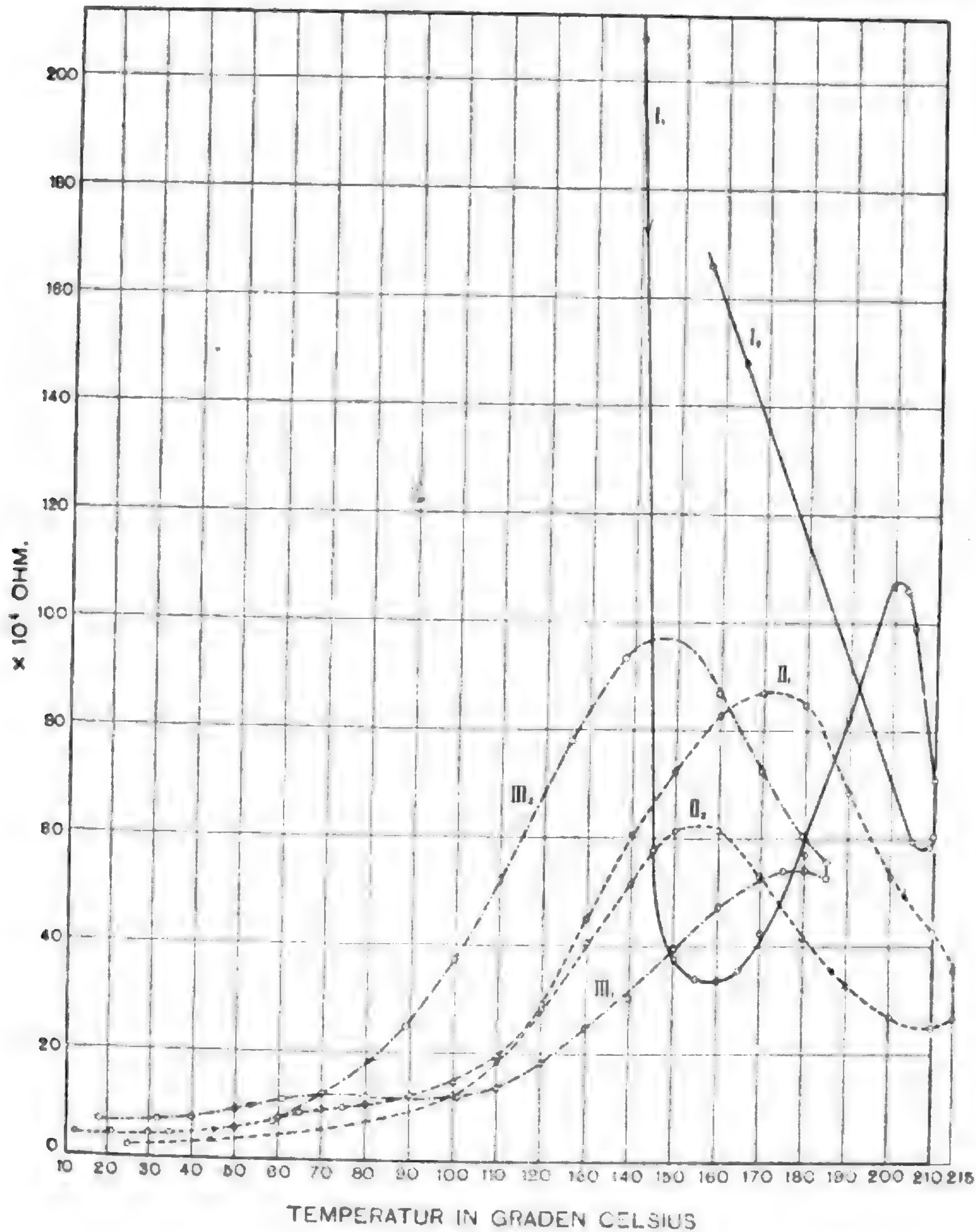


Fig. 12.

worden war, zeigte sich doch ein positiver Temperaturkoeffizient bis zur Temperatur von 170° C., im Gegensatze zu allen bisher bekannten Modifikationen, bei welchen ein positiver Temperaturkoeffizient nur bei lange dauernder Erhitzung über

200° C. eintrat und auch da nicht in so weiten Temperaturgrenzen. Von 170° C. bis 215° C. nahm der Widerstand ab. Bei Abkühlung trat der positive Temperaturkoeffizient erst bei 155° C. auf. Wie aus den Kurven zu sehen ist, differieren die Widerstände bei derselben Temperatur bei Erhitzung und Abkühlung in ihren absoluten Werten beträchtlich. Es scheint demnach das Präparat in keinem stabilen Zustande sich zu befinden, sondern durch die Erhitzung molekularen Umlagerungen unterworfen zu sein. Derselbe Versuchszylinder wurde nochmals erwärmt, aber nur bis zu jener Temperatur, bis zu welcher ein positiver Temperaturkoeffizent auftrat (175° C.) und wurde nach Erreichung dieser Temperatur abgekühlt (Tabelle 19, Fig. 12, Kurve III_1, III_2).

Tabelle 19.

Fig. 12, Kurve III_1 und III_2.

Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm
13° C.	6·67	170° C.	52·5
32	7·05	175	54
40	7·6	180	54
50	9·1	185	52·5
61	11·1	180	60·5
70	12	170	72·5
80	11·8	160	87
90	12·3	138	93·5
101	12	126	78
110	13·6	110	52
120	18·1	100	37·3
130	24·6	89	24·7
140	30·5	59	7·15
150	39·7	12	4
160	47·3		

Da bei weiterer Erhitzung der Widerstand des Zylinders gesunken wäre, stand zu erwarten, daß bei Abkühlung der Widerstand steigen würde, was auch tatsächlich eintrat. Doch zeigte sich ein negativer Temperaturkoeffizient (Verminderung

der Leitfähigkeit bei Abkühlung) nur bis 145° C. Dann leitete der Zylinder bis zur Zimmertemperatur wie ein Metall. Der spezifische Widerstand dieser Modifikation betrug bei 20° C. $1 \cdot 18 \times 10^5$ Ohmzentimeter, war also bedeutend geringer als bei allen bis jetzt in dieser Arbeit behandelten Modifikationen.

Wir haben nach dem Gesagten bei dem aus Schwefelkohlenstoff roten kristallisierten Selen eine Modifikation kennen gelernt, welche beim Erhitzen über 110° C. zur Bildung metallisch-kristallinischen Selens hinneigt. Um nun einerseits die Angabe von Siemens, daß starke Temperaturerniedrigung (—15° C.) ein positives Leitvermögen des kristallinischen Selens überhaupt zu zerstören vermag, auf ihre Richtigkeit zu prüfen, andrerseits um die Stabilität des hier vorliegenden kristallinischen Selens festzustellen, indem nach Ries starke Abkühlung nur dann wesentliche Änderung im Verhalten des Selens herbeiführen kann, wenn dasselbe nicht durch lange dauernde Erhitzung über 200° C. in die metallische Modifikation überführt worden ist, wurde der Versuchskörper auf sehr tiefe Temperatur gebracht. Er wurde zu diesem Zweck in ein Gemisch von Äther und Kohlensäureschnee gestellt. Die tiefste Temperatur betrug —63° C. Die Erwärmung auf höhere Temperaturen erfolgte wie immer im Thermostaten.

Das Verhalten des Selens bei diesen Temperaturen ist aus Tabelle 20, Fig. 13 ersichtlich.

Es zeigte sich zunächst zwischen —63° und +20° C. ein negativer Temperaturkoeffizient, von 20° C. aber bis 205° C. leitete das Präparat den elektrischen Strom wie ein Metall, der Temperaturkoeffizient war positiv. Bei der Temperatur von 205° C. trat neuerdings eine Widerstandsabnahme ein. Es lag demnach hier zum ersten Mal im Verlaufe meiner Untersuchungen ein Präparat vor, welches innerhalb so weiter Temperaturgrenzen (20° bis 205° C.) einen positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes zeigte.

Als die Temperatur von 205° C., bei welcher der Widerstand eine Abnahme zu zeigen begann, erreicht war, wurde nicht weiter erhitzt, sondern langsam abgekühlt. Dabei stieg der Widerstand an, und zwar bis zur Temperatur von 155° C.

Tabelle 20.

Fig. 13.

Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm
—62° C.	65·5	190° C.	45·7
—59·5	58·5	205	56
—57·5	43·8	200	61·5
—52	31·7	190	66·2
—46	26	180	79
—42	22·6	170	96
—35	19·8	160	111
—27	14·9	155	115
—16	10·3	155	122
— 5	8·0	160	127
0	7·35	165	132·5
+ 5	6·5	175	132·5
33	7·35	180	126
40	8·65	190	101
50	8·25	200	78
60	8·15	210	59·5
70	8·9	215	49·5
80	9·67	215	42
90	10·6	208	43·5
100	11·8	200	50·9
110	13·9	189	61
120	16·9	180	71·5
130	20	171	87
140	22	160	92·5
150	24	148	82·5
160	26·7	120	32
170	31·3	100	11·5
180	38·5	90	7·6

Es trat also beim Umkehrpunkte, der bei einer Temperatur von 205° C. sich gezeigt hatte, ein negativer Temperaturkoeffizient sowohl bei Erwärmung als auch bei Abkühlung ein. Von der Temperatur von 155° C. angefangen nahm der Widerstand bei weiterer Abkühlung nochmals ab. Es wurde der Thermostat

wieder erhitzt und vergrößerte sich bei der Erhitzung der Widerstand, so daß bei dem Umkehrpunkte von der Temperatur von 155° C. sowohl bei Abkühlung als auch bei Erwärmung

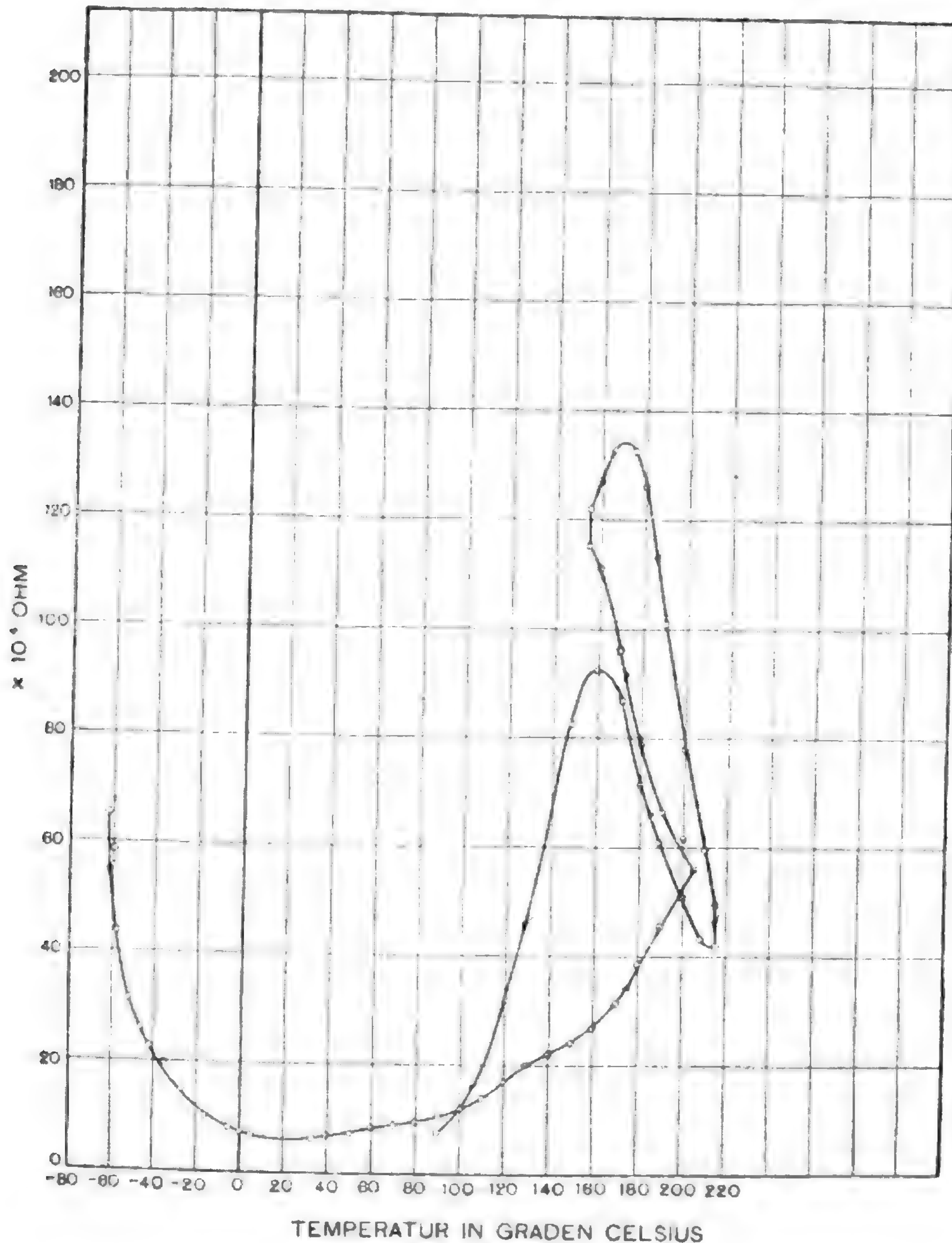


Fig. 13.

ein positiver Temperaturkoeffizient zu konstatieren ist. Bei weiterer Erhitzung begann bei 170° C. der Widerstand sich zu verkleinern und fiel immerwährend bis 215° C. Bei Abkühlung trat zunächst eine Vergrößerung des Widerstandes ein, bei

160° C. nahm die Leitfähigkeit zu, der Temperaturkoeffizient war positiv.

Wie aus dem vorliegenden Versuche hervorgeht, war die Abkühlung auf —63° C. nicht im stande, das Verhalten dieses Präparates wesentlich zu ändern. Es folgt daraus einerseits, daß das Gesetz von Siemens über die Aufhebung eines metallischen Verhaltens durch tiefe Temperaturen nicht allgemeine Gültigkeit hat, andrerseits diese neu gefundene Form, das aus Schwefelkohlenstoff rotkristallisierte, durch Erhitzen graukristallinisch gemachte Selen, jene Modifikation ist, welche typisch die Neigung hat, sich beim Erwärmen in metallisches Selen umzuwandeln.

Die zusammengefaßten Ergebnisse dieser Versuchsreihen sind demnach:

1. Das aus Schwefelkohlenstoff rotkristallisierte Selen ist bei gewöhnlicher Temperatur Nichtleiter der Elektrizität.

2. Dasselbe beginnt bei 110 bis 120° C. in die graukristallinische Form überzugehen.

3. Das aus Schwefelkohlenstoff kristallisierte Selen zeigt die Neigung, beim Erhitzen graukristallinisches Selen der metallisch leitenden Form zu bilden.

b) Rotes präzipitiertes Selen durch langes Stehenlassen in Schwefelkohlenstofflösung in rotes kristallinisches umgewandelt.

Rotes amorphes präzipitiertes Selen wurde nach Mitscherlich[1] mit Schwefelkohlenstoff übergossen und bei Zimmertemperatur unter öfterem Umschütteln 14 Tage stehen gelassen. Das anfänglich in der Flüssigkeit suspendierte Pulver hatte im Laufe dieser Zeit eine viel kompaktere Form angenommen und war zu Boden gesunken. Im Pulver zeigten sich glänzend rote Kristallblättchen, während die Farbe nicht wesentlich geändert war. Es scheint demnach die von Mitscherlich angegebene Umwandlung in rotkristallisiertes Selen bereits erfolgt gewesen zu sein. Das Pulver wurde nochmals in der Reibschale zerrieben, gewaschen, im Vakuum über Chlorcalcium getrocknet

[1] A. a. O.

und gepreßt. Beim Pressen zeigte es dasselbe Verhalten wie das aus Schwefelkohlenstoff kristallisierte Selen. Die Zylinder behielten die rote Farbe bei, hatten im Bruche blätteriges Gefüge, bröckelten leicht ab, und ich erhielt gewöhnlich nur einzelne Bruchstücke aus der Matrize.

Der gepreßte Zylinder zeigte bei 15° bis 20° C. gar keine Leitfähigkeit. Die Veränderung der elektrischen Leitfähigkeit beim Erwärmen und Abkühlen ist aus Tabelle 21, Fig. 14, Kurve I_1, I_2 zu ersehen.

Tabelle 21.

Fig. 14, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^4 Ohm
107° C.	63500	202° C.	12·5
111	7950	195	18·7
120	310	170	35·5
127	26·5	151	47·7
137	23·0	130	46·7
153	16·8	110	41·2
161	14·6	89	36
167	14·5	76	41·5
183	17·3	67	49·2
192	18·3	59	60
203	20	53	72
213	8·05	49	86

Das Verhalten ist dem aus Schwefelkohlenstoff rotkristallisierten Selen ähnlich, doch zeigt sich hier beim Abkühlen ein positiver Temperaturkoeffizient des Widerstandes nur innerhalb kleinerer Temperaturgrenzen. Es zeigt sich aus dem ganzen Verhalten bei Erwärmung, besonders dadurch, daß der Selenkörper graukristallinisch wurde, ohne dabei vollständig weich zu werden wie das amorphe Selen, deutlich, daß das Selen durch das Stehenlassen in Schwefelkohlenstoff eine molekulare Änderung erfahren hatte. Auch das Verhalten beim Pressen hatte gezeigt, daß hoher Druck nicht im stande war, dieses Selen in die schwarze amorphe überzuführen, wie es beim roten amorphen möglich gewesen war.

Da das Verhalten dieser Form beim Pressen und Erwärmen am meisten Ähnlichkeit mit dem aus Schwefelkohlenstoff rotkristallisierten Selen zeigt, so wird die Angabe Mitscherlich's,

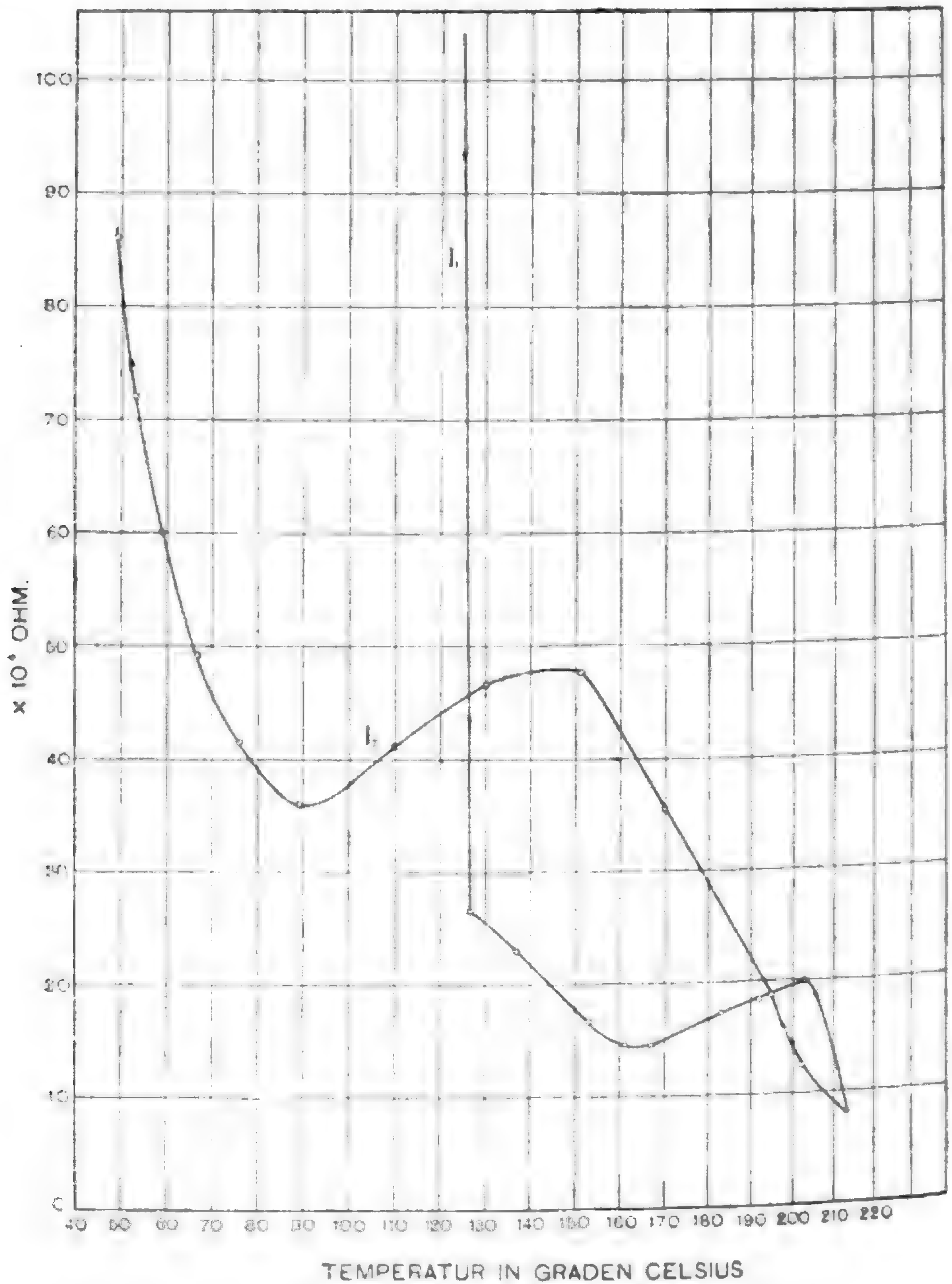


Fig. 14.

daß das rote amorphe Selen beim bloßen Stehen mit Schwefelkohlenstoff bei Zimmertemperatur allmählich ebenso kristallisierte wie beim siedenden Schwefelkohlenstoff, durch diese Versuche neuerdings bestätigt. Jedoch scheint diese Umwand-

lung nicht leicht komplet zu werden. Die Abweichungen, die sich im Verhalten des rotkristallisierten und der vorliegenden Form zeigen, sind wohl darauf zurückzuführen, daß innerhalb 14 Tagen eine vollständige Umwandlung des amorphen in kristallisiertes Selen nicht stattgefunden hatte, sondern eine Mischung von amorphem und rotkristallisiertem Selen vorlag.

Je nach dem Grade der Vollständigkeit dieses Umwandlungsprozesses zeigt das Verhalten größere oder geringere Ähnlichkeit mit dem aus Schwefelkohlenstoff rotkristallisierten Selen, insbesondere hängt der Temperaturbereich, innerhalb welchem ein positiver Temperaturkoeffizent eintrat, von der Menge des in der Mischung vorhanden gewesenen rotkristallisierten Selens ab.

D. Aus Kaliumselenid kristallisiertes Selen.

Läßt man eine wässerige Lösung von Kaliumselenid an der Luft stehen, so scheidet sich kristallinisches Selen in Form schwarzer, graphitisch glänzender Körner oder Blättchen aus. Diese wurden gewaschen, fein zerrieben, mit Schwefelkohlenstoff gekocht, um Spuren amorphen Selens zu entfernen und im Vakuum über Chlorcalcium getrocknet. Zerrieben gaben die Blättchen ein Pulver, welches sich fettig, ähnlich wie Graphit, anfühlte und an allen Gegenständen, mit denen es in Berührung kam, haften blieb. Das Pulver läßt sich gut pressen und waren die gepreßten Zylinder im Bruche muschelig, feinkörnig, von stahlgrauer Farbe, nahmen bei Bearbeitung mit der Feile Metallglanz an, hatten also dasselbe Aussehen wie die durch Erhitzen des amorphen Selens kristallinisch gemachten Modifikationen, mit denen es auch bisher (Mitscherlich, Petersen u. a.) für identisch gehalten wurde.[1] Doch zeigen die nachfolgenden Versuche, daß man es in Bezug auf sein elektrisches Verhalten dem durch Erwärmung gewonnenen graukristallinischen Selen nicht gleichstellen kann.

---

[1] Die Dichte des gepreßten Zylinders betrug 4·747 gegen $d = 4·79$ nach Saunders. Die Differenz dürfte durch eingeschlossene Hohlräume bedingt sein, durch das Pressen hatte also keine Vergrößerung der Dichte stattgefunden.

Zunächst wurde ein Zylinder in die Kontaktvorrichtung gespannt. Es zeigte sich, daß derselbe bei Zimmertemperatur kein Leitvermögen besaß, jedenfalls war der spezifische Widerstand größer als 10^{11} Ohmzentimeter, worin sich ein grundlegender Unterschied von den anderen graukristallinischen Modifikationen ausspricht. Als der Zylinder im Thermostaten erwärmt wurde (Tabelle 22, Fig. 15, Kurve I_1, I_2), begann er bei 70° C. den elektrischen Strom zu leiten; während sich jedoch beim amorphen Selen die Leitfähigkeit mit zunehmender Erwärmung sehr rasch vergrößerte, um dann wieder abzunehmen, nahm hier die Leitfähigkeit sehr langsam und stetig bis 215° C. zu, wobei jedoch der spezifische Widerstand noch immer einen sehr beträchtlichen Wert besaß.

Tabelle 22.

Fig. 15, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm
70° C.	12000	180° C.	9
80	6000	190	3·6
90	3000	200	1·4
100	1700	210	0·57
110	1000	210	0·48
120	330	195	0·7
130	330	180	1·2
140	128	110	38
145	125	100	63
150	90	89	100
155	60	75	160
160	41	65	200
165	29	58	250
172	17		

Als nun abgekühlt wurde, stieg der Widerstand sofort, blieb jedoch immer unter den derselben Temperatur entsprechenden Werten bei Erwärmung. Es hatte demnach das aus Kaliumselenid kristallisierte Selen durch Erwärmung seinen spezifischen Widerstand verkleinert.

Als das Präparat am nächstfolgenden Tage neuerdings in derselben Weise untersucht wurde (Tabelle 23, Fig. 15, Kurve II_1, II_2), zeigte sich bei Zimmertemperatur (20° C.) ein zwar äußerst hoher, jedoch meßbarer Wert des Widerstandes. Bei Erwärmung fiel derselbe ständig bis 215° C., um bei darauffolgender Abkühlung wieder zu steigen, ohne jedoch nur annähernd so hohe Werte zu erreichen wie bei Erwärmung. Es hatte also durch das abermalige Erhitzen eine neuerliche Verbesserung der Leitfähigkeit stattgefunden.

Tabelle 23.

Fig. 15, Kurve II_1 und II_2.

Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm
20° C.	9000	145° C.	20
30	1000	150	15
40	1000	155	11
50	900	160	9
60	900	165	6·8
70	650	170	5
81	440	175	3·7
90	330	180	3
100	220	185	2·2
105	170	190	1·6
110	130	195	1·2
115	105	200	0·9
120	80	210	0·5
125	60	215	0·3
130	46	200	0·64
135	35	62	16
140	26		

Da dieses Verhalten nicht unähnlich dem aus dem geschmolzenen Zustande kristallisierten Selen ist, wollte ich versuchen, ob, wie bei diesem, auch bei dem aus Kaliumselenid kristallisierten Selen durch langdauerndes Erhitzen über 200° C. ein metallisches Leitvermögen eintreten könne. Es wurde

darum ein Zylinder in die Kontaktvorrichtung gespannt, im Thermostaten langsam auf 210° C. erhitzt und 5 Stunden lang mit einer Schwankung von ± 3° C. auf dieser Temperatur

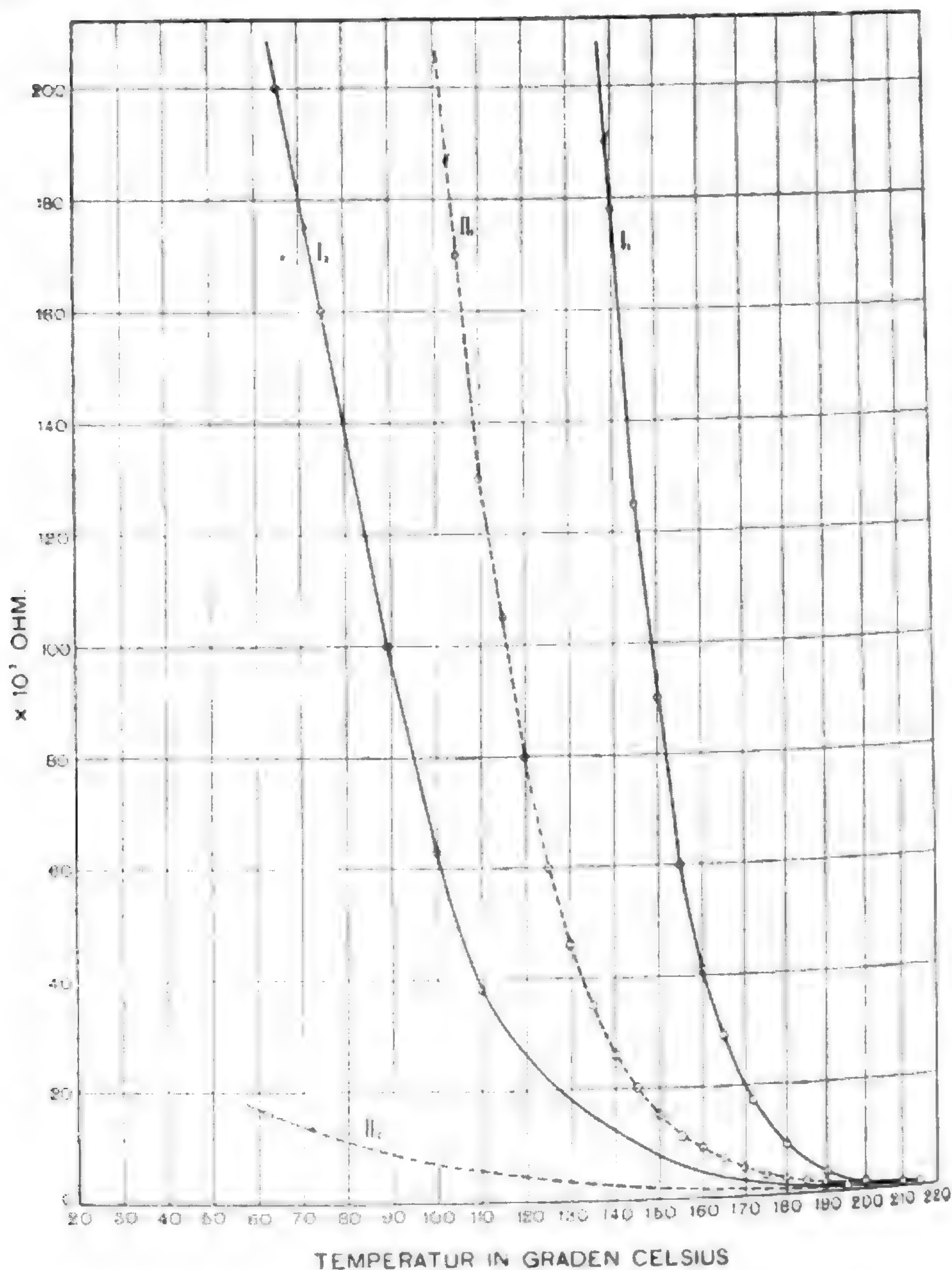


Fig. 15.

erhalten (Tabelle 24, Fig. 16, Kurve I_1, I_2). Der Widerstand sank bis 215° C. und hatte dort den Wert $2 \cdot 9 \times 10^6$ Ohm, begann nach etwa 5 Minuten langsam zu steigen und hatte nach 5 Stunden den Wert $5 \cdot 4 \times 10^6$ Ohm erreicht, war also nahezu

um das doppelte gestiegen. Bei darauffolgender Abkühlung vergrößerte sich der Widerstand bis zur Temperatur 160° C. (negativer Temperaturkoeffizient) und nahm von diesem Punkt an ab (positiver Temperaturkoeffizient).

Nach 3 Tagen wurde der Zylinder neuerdings untersucht (Tabelle 25, Fig. 16, Kurve II_1, II_2).

Tabelle 24.

Fig. 16, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm
115° C.	15300
120	12200
130	6100
140	3200
150	1790
160	970
170	508
180	255
185	169
190	113
195	78
200	50·8
210	6·5
215	2·9
215	5·4
210	5·6
205	6·1
200	6·7
190	8·0
180	9·3
170	10·4
160	10·9
150	9·85
140	7·9
130	5·96
120	4·3
100	2·47
90	2·03
80	1·75
70	1·65
42	0·95

Tabelle 25.

Fig. 16, Kurve II_1 und II_2.

Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm
20° C.	33·5
37	33
40	32·7
50	30·9
65	24·4
70	22·2
80	17·8
91	15·6
100	14·5
110	13·9
120	13·4
130	13·5
140	14·2
150	15·3
160	17·3
175	21·5
180	22·5
190	23·1
200	27·7
210	26
215	21·5
208	23·3
205	25·1
178	47·2
165	59·8
160	60·2
155	56·3
139	44·5
130	35·2
110	19·8
97	14·2
80	10·3

Bei Zimmertemperatur war der Widerstand bedeutend höher als am Ende des letzten Versuches, es hatte also das Selen in der Zwischenzeit eine Umbildung erfahren. Ein positiver Temperaturkoeffizient zeigte sich erst von 120° C. an und blieb von da bis zur Temperatur 210° C., dann nahm der Widerstand ab. Es hatte sich also die Grenze des positiven Leitvermögens nach höherer Temperatur hin verschoben.

Bei Abkühlung stieg der Widerstand an, und zwar über die denselben Temperaturen entsprechenden Werte bei Erwärmung bis 160° C., dort trat ein positiver Temperaturkoeffizient ein, und sank der Widerstand bei weiterer Abkühlung unter die der gleichen Temperatur bei Erwärmung entsprechenden Werte.

Tabelle 26.

Fig. 16, Kurve III_1 und III_2.

Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm
20° C.	41·5	200° C.	32·4
34	38	213	30·0
40	36·5	210	31
50	34·6	200	38·1
60	32	195	43·7
70	28·6	179	66
80	25·5	170	80
90	22·9	159	93·7
100	21·4	150	96·9
110	20·8	140	91
120	21·0	127	76
130	22·0	120	68
140	22·9	110	56·5
150	24·1	100	46·5
160	26·2	89	39·1
170	29	73	31·4
180	32	60	27·3
190	33	50	26·7

Die früher glänzend schwarze Oberfläche zeigte ein mattgraues Aussehen, der Bruch war unverändert. Es hatten also

sehr wahrscheinlich molekulare Umwandlungen stattgefunden. Um festzustellen, ob die Resultate nicht etwa nur an einem Versuchskörper zutreffen oder ob dieses Verhalten regelmäßig

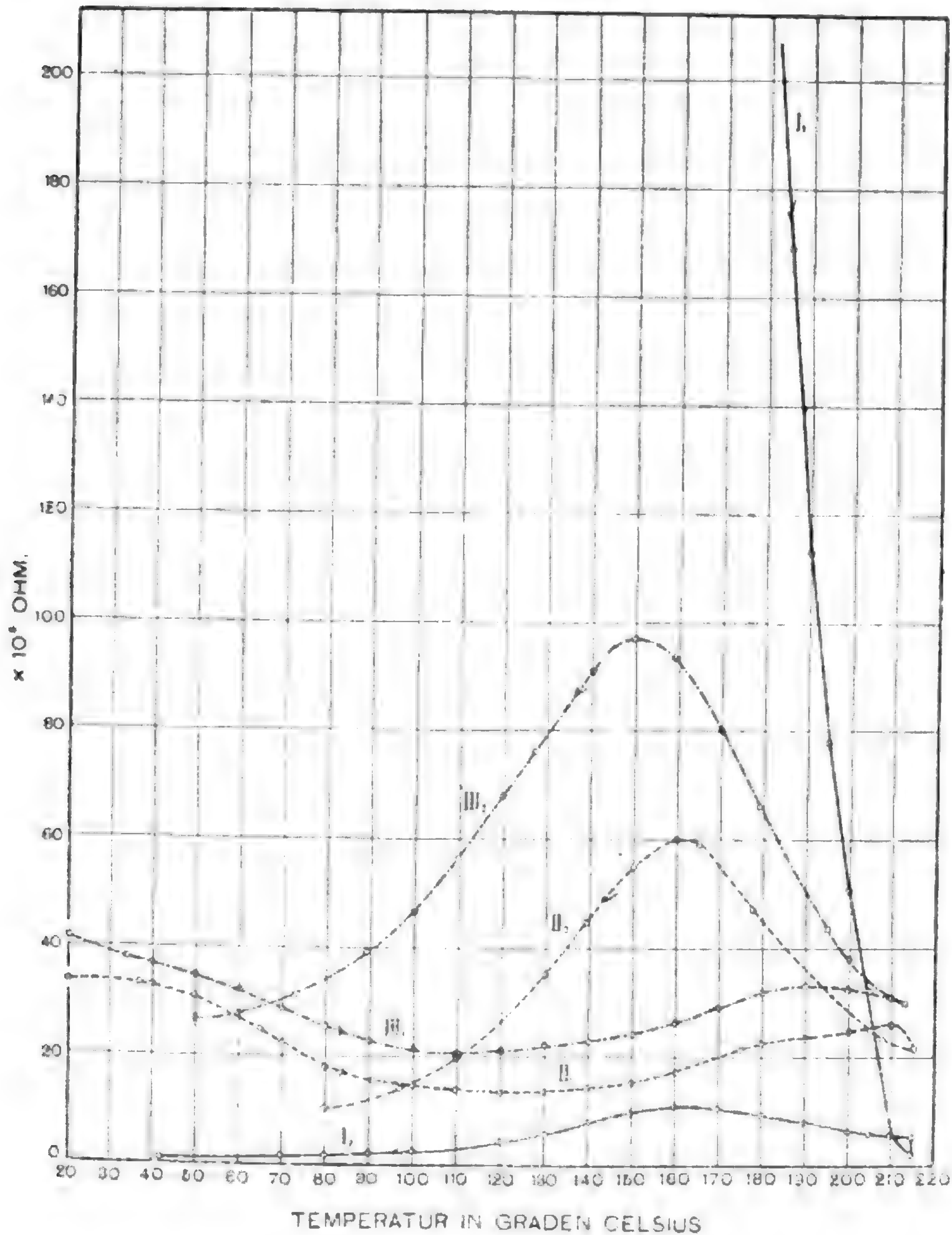


Fig. 16.

sei, wurde ein anderer Zylinder 6 Stunden auf 210° C. erhitzt und gleichzeitig eine Quantität desselben Materials in pulverförmigem Zustande. Nach erfolgter langsamer Abkühlung zeigte sich, daß der Zylinder dieselben Veränderungen erlitten hatte

wie der früher erwähnte. Das Pulver, welches vorher schwarz gewesen war, hatte eine hellgraue Farbe angenommen und war etwas zusammengesintert, ohne jedoch Spuren eingetretenen Schmelzens zu zeigen und ließ sich leicht wieder zerreiben. Der Zylinder wurde nach 2 Tagen untersucht (Tabelle 26, Fig. 16, Kurve III_1, III_2). Er zeigte ein vollkommen analoges Verhalten wie der zuerst untersuchte Zylinder, nur waren die Umkehrpunkte bei Erwärmung sowohl als auch bei Abkühlung etwas gegen die früheren verschoben. Das in Pulverform auf 210° C. erhitzte kristallinische Selen wurde nach einem Monat in Zylinderform gepreßt und untersucht (Tabelle 27, Fig. 17, Kurve I_1, I_2); das Produkt hatte offenbar starke Rückbildung erlitten. Ein positiver Temperaturkoeffizient trat hier nur zwischen 100° und 140° C. ein. Bei Abkühlung war der Umkehrpunkt bei 95° C.

Tabelle 27.

Fig. 17, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^6 Ohm
24° C.	67·5	210° C.	2·38
30	63·5	200	2·83
40	48·4	190	3·7
50	36·8	180	4·6
60	28·3	170	6
70	21·2	160	7·95
80	16·2	150	10·8
92	12·6	140	14·0
100	11·6	130	18·8
110	12·6	120	24
120	14·8	110	28·5
130	18	100	30·6
140	18·6	90	30·3
150	16·5	80	29·4
163	13·2	70	26·9
170	11·6	60	22·7
180	9·1	50	17·7
190	6·35	32	9·35
200	3·98		

Das aus Kaliumselenid kristallisierte Selen repräsentiert nach den angeführten Untersuchungen eine graukristallinische Modifikation des Selens, welche den elektrischen Strom nicht

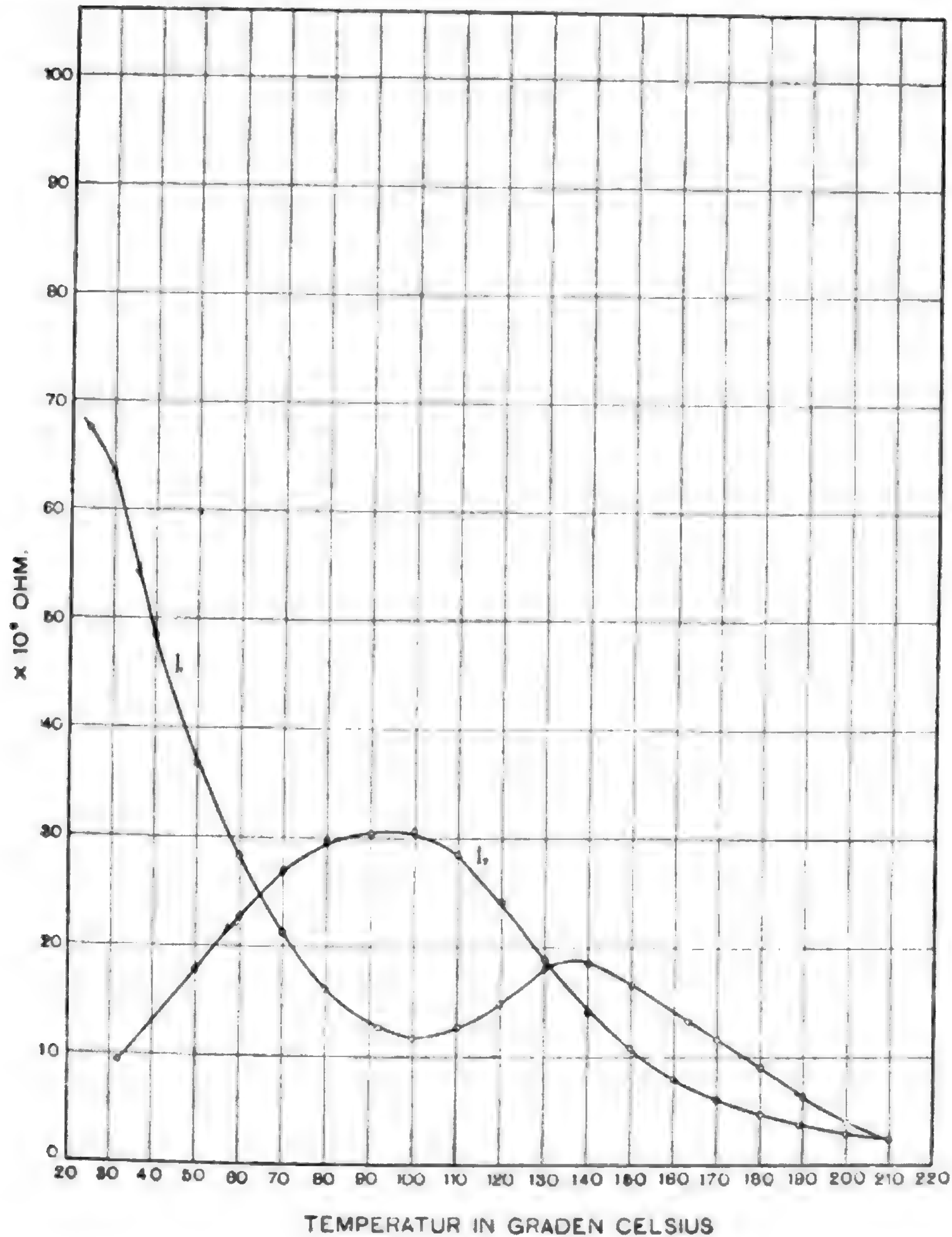


Fig. 17.

leitet, jedoch bei langdauernder Erhitzung auf hohe Temperaturen (205° bis 215° C.) ein Verhalten zeigt, welches diese Modifikation identisch mit anderen durch Erhitzen des amorphen Selens hergestellten kristallinischen Modifikationen erscheinen

läßt. Doch vollzieht sich die Umwandlung in den leitenden Zustand viel langsamer als beim amorphen und rotkristallisierten Selen. Es ist eine sehr lange dauernde Erhitzung auf Temperaturen von 210° C. notwendig, um das Auftreten eines positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes zu bewirken.

Man ist nach diesen Ergebnissen gezwungen, diese auf chemischem Wege hergestellte graukristallinische Modifikation des Selens als eigene, von den übrigen graukristallinischen Modifikationen, die durch Erwärmungsprozesse erzeugt werden, verschieden allotrope Form des Selens zu bezeichnen.

E. Selen, durch längeres Stehenlassen in Chinolin kristallinisch gemacht.

Chemisch reines, rotes, präzipitiertes Selen wurde (nach Saunders' Angaben) mit einer entsprechenden Menge Chinolin übergossen und bei zirka 20° bis 25° C.[1] 14 Tage lang unter häufigem Umschütteln, öfterem Reiben in einer Reibschale und Zurückgießen in einen verschließbaren Glaskolben stehen gelassen. Es nahm während dieser Zeit eine dunkle, braunrote Farbe an. Das Pulver wurde auf das sorgfältigste gewaschen, im Vakuum über Chlorcalcium getrocknet und gepreßt. Beim Pressen verhielt es sich in mancher Beziehung ähnlich dem roten amorphen präzipitierten Selen, es verringerte sein Volumen beträchtlich, die Zylinder hatten große Festigkeit, waren vollkommen homogen, die braunrote Farbe war verschwunden, doch war der Bruch nicht schwarz, glasig, wie beim amorphen Selen, sondern hatte eine hellgraue Farbe, war sehr feinkörnig, von stahlartigem Aussehen, nahm bei Bearbeitung mit der Feile Metallglanz an, unterschied sich überhaupt äußerlich in nichts von den graukristallinischen Modifikationen. Man kann demnach annehmen, daß das Chinolin das rote amorphe Selen in graukristallinisches wenigstens zum Teil umwandelt. Die rote Farbe des Materials in Pulverform ist kein Grund zur gegenteiligen Ansicht, da schon Saunders fand, daß alle graukristallinischen Selenmodifikationen, selbst das aus Kaliumselenid

---

[1] Bei Temperaturen unter 10° C. geht der Umwandlungsprozeß des roten amorphen Selens in das schwarze Produkt äußerst langsam vor sich.

hergestellte graukristallinische Selen, bei genügend feiner Zerteilung eine ins Rote spielende Farbe zeigen. Ich fand diese Tatsache bestätigt, da ich immer, um plane Kontaktflächen zu erhalten, die Begrenzungsflächen der Versuchszylinder auf einer mattierten Glastafel planschleifen mußte, wobei der Strich aller graukristallinischen Modifikationen dieselbe rote Farbe hatte. Es kamen drei Zylinder aus diesem Material zur Untersuchung. Dieselben zeigten ein von allen anderen bisher untersuchten Formen des Selens abweichendes Verhalten. Zunächst war der spezifische Widerstand geringer als bei den anderen auf chemischem Wege hergestellten kristallinischen Modifikationen. Der spezifische Widerstand bei 20° C. betrug $6 \cdot 8 \times 10^8$ Ohmzentimeter, während das aus Kaliumselenid grau kristallisierte Selen oder das aus Schwefelkohlenstoff rot kristallisierte Selen den elektrischen Strom nicht geleitet hatten. Auch zeigte das Präparat im Gegensatze zu den eben erwähnten deutliche Lichtempfindlichkeit. Bei Erwärmung war der relative Verlauf der Widerstandsveränderung (Tabelle 28, 29, 30, Fig. 18, Kurve I, II, III) nahezu gleich, der Widerstand nahm zunächst mit zunehmender Erwärmung ab, und zwar langsam stetig wie bei allen bereits in den kristallinischen Zustand überführten Modifikationen, während beim amorphen Selen der Widerstand sehr rasch auf einen tiefen Wert sinkt, sodann zeigte sich in engen Grenzen ein Anwachsen des Widerstandes, dann wieder Abnahme bis 215° C.

Tabelle 28.

Fig. 18, Kurve I.

Temperatur	Widerstand 10^8 Ohm	Temperatur	Widerstand 10^8 Ohm
35° C.	35	140° C.	4·13
40	28·6	150	2·13
57	13·7	160	0·97
87	5·5	170	0·47
100	4·87	180	0·19
110	5·85	190	0·13
120	6·85	200	0·09
130	5·65	210	0·06

Tabelle 29.

Fig. 18, Kurve II.

Temperatur	Widerstand 10^8 Ohm
16° C.	70
20	63
25	50·5
30	39·6
35	31·5
40	27·4
50	21
55	18
60	15·4
65	12·6
70	10·2
75	8·3
80	6·7
85	5·4
90	4·7
95	4·15
100	3·85
110	3·8
120	4·09
125	4·3
130	4·25
135	4·0
140	3·59
145	3·02
150	2·45
155	1·94
160	1·54
170	0·9
180	0·45
190	0·19
200	0·10
210	0·07

Tabelle 30.

Fig. 18, Kurve III.

Temperatur	Widerstand 10^8 Ohm
13° C.	1200
22	66·5
30	48
40	27·3
50	17·1
60	11·1
70	7·7
80	5·85
90	5·9
101	5·9
110	5·65
120	5·11
130	3·9
140	2·7
150	1·69
160	1·05
174	0·5
180	0·35
190	0·184
200	0·1
210	0·07

Die Grenzen dieses positiven Leitvermögens lagen bei den drei Versuchszylindern zwischen 100° bis 120° C., 105° bis 125° C. und 80° bis 95° C., also in allen Fällen bei jener Tem-

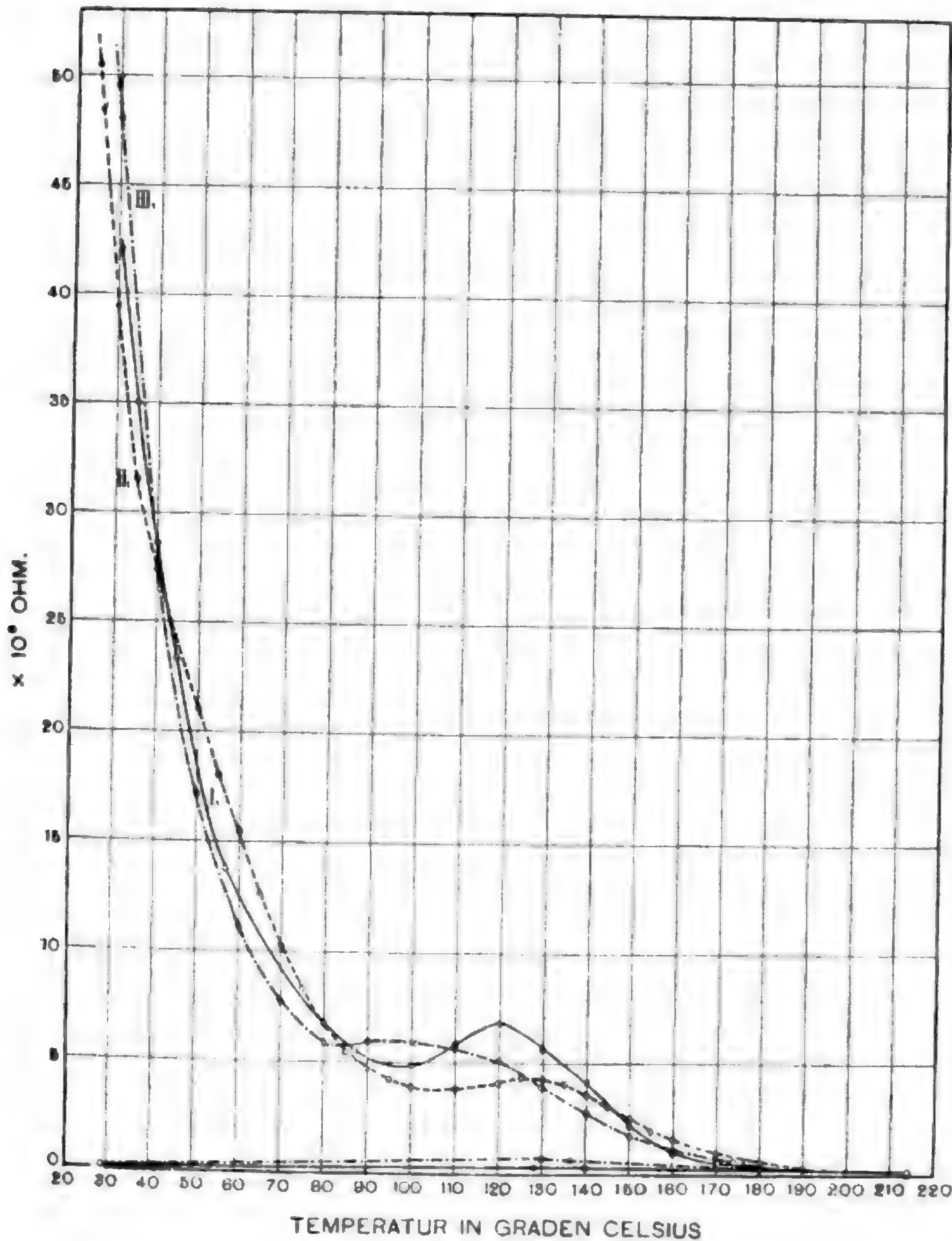


Fig. 18.

peratur, bei der die Umwandlung des amorphen oder des rotkristallisierten Selens in graukristallinisches beginnt. Es wurde nur kurze Zeit auf 210° C. erhitzt und sodann langsam abgekühlt (Tabelle 31, 32, 33, Fig. 19, Kurve I_2, II_2, III_2).

Tabelle 31.

Fig. 19, Kurve I_2.

Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm
160° C.	97
170	47
180	19
190	13
200	9
210	6
210	5
200	5·2
189	7
180	9·15
170	12·85
160	17·3
150	21·7
140	21·4
130	16·4
120	10·5
110	6·15
100	3·5
90	2·03
80	1·16
70	0·71
36	0·34
18	0·13

Tabelle 32.

Fig. 19, Kurve II_2.

Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm
170° C.	90
175	65
180	45
185	30
190	19·4
195	13·7
200	10·5
210	7·15
210	5
200	5·15
190	6·35
180	8·5
170	11·9
160	17·5
150	22
140	24·1
130	20·9
120	13·4
110	8·2
100	4·8
90	2·67
80	1·66
60	0·62
37·5	0·13

Tabelle 33.

Fig. 19, Kurve III_2.

Temperatur	Widerstand 10^7 Ohm
160° C.	105
174	50
180	35
190	18·4
200	10
210	7·85
200	9·6
190	11·7
170	24
160	32·4
150	43·4
140° C.	56
130	65
120	59
110	44·7
100	26
90	15
76	5·7
60	1·46
40	0·37
18	0·17

Der relative Verlauf der Kurven bei Abkühlung war ebenfalls bei allen drei untersuchten Zylindern einander ähnlich, nur zeigten die absoluten Werte der Widerstände bei Kurve III

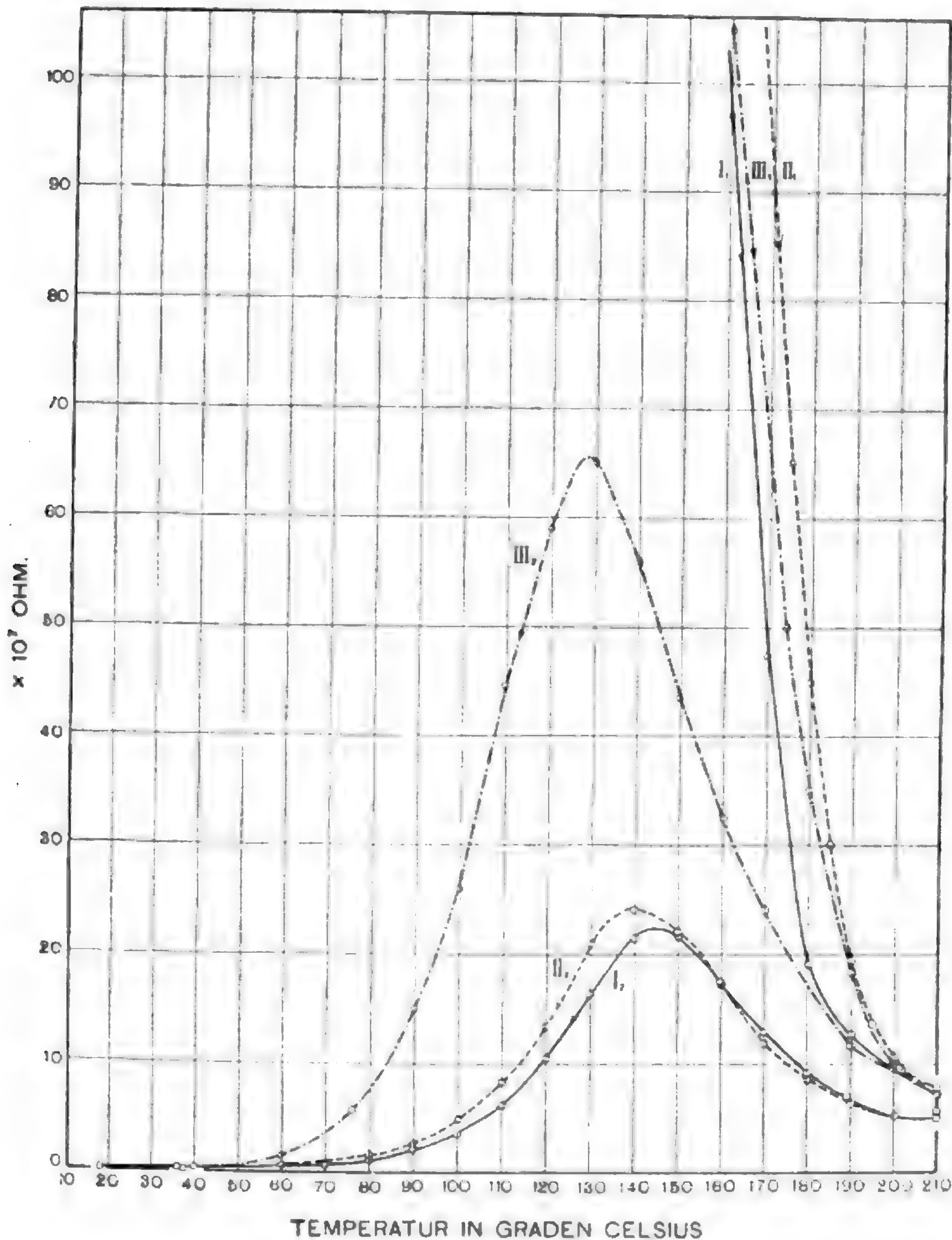


Fig. 19.

starke Abweichungen von den beiden anderen; trotz der kurz dauernden Erhitzung über 200° C. zeigt sich ein positiver Temperaturkoeffizient von 140° C., beziehungsweise 130° C. angefangen.

Der spezifische Widerstand war nach dem Erhitzen auf $1 \cdot 84 \times 10^5$ Ohmzentimeter gesunken. Eine starke Deformation der Zylinder war nicht eingetreten. Vergleicht man das Verhalten bei Erwärmung und Abkühlung mit dem Verhalten anderer Modifikationen, so zeigt es im Hauptverlaufe der Kurven die größte Ähnlichkeit mit dem aus Schwefelkohlenstoff rotkristallisiertem Selen, indem es wie letzteres schon bei kurzer Erhitzung über 200° C. innerhalb weiter Grenzen einen positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes zeigt. Es unterscheidet sich jedoch diese Modifikation von allen anderen dadurch, daß sie die einzige ist, welche, ohne erhitzt worden zu sein, sowohl den elektrischen Strom leitet, als auch Lichtempfindlichkeit zeigt.

Man kann demnach das Ergebnis in folgende Punkte zusammenfassen:

1. Das längere Stehen des roten präzipitativen Selens in Chinolin wirkt auf das Selen wie ein Erhitzungsprozeß, indem es dadurch zum Leiter des elektrischen Stromes und lichtempfindlich wird.

2. Die auf diese Weise erzeugte Modifikation zeigt ebenso wie das aus Schwefelkohlenstoff kristallisierte, ohne sehr lange erwärmt worden zu sein, einen positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes.

IV. Die Lichtempfindlichkeit der allotropen Selenmodifikationen in Abhängigkeit von der Temperatur.[1]

A. Graukristallinisches Selen durch Erhitzen des amorphen, glasigen Selens erzeugt.

1. Chemisch reines Selen wurde geschmolzen, auf 195° C. abgekühlt und 5 Stunden lang auf dieser Temperatur im Luftbad erhalten und sehr langsam erkalten gelassen. Nach Verlauf dieser Zeit war das Selen vollkommen kristallinisch geworden.

[1] Die Art der Versuchsanordnung ist bereits früher beschrieben worden, die Belichtung erfolgte in allen Fällen, wo nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist, durch zwei Glühlampen von 35 HK. in 10 *cm* Entfernung.

Es wurde in der Reibschale zu unfühlbarem Pulver zerrieben und im Thermostaten 6 Stunden auf 210° C. erhitzt. Das Pulver zeigte sich nach diesem Prozesse zu einer festen Masse zusammengesintert, so daß es neuerlich zerrieben werden mußte. Es wurde zu einem Zylinder gepreßt, dieser in die Kontaktvorrichtung gespannt, wobei er mittels zweier Glühlampen in der bereits beschriebenen Weise belichtet werden konnte. Die Vorrichtung wurde in den Thermostaten gestellt und erwärmt. Die Änderung des Widerstandes bei Erwärmung ist auf Fig. 8, Kurve I_1, I_2 ersichtlich gemacht worden. Wie man sieht, war der Temperaturkoeffizient während der Erwärmung durchwegs negativ. Bei Belichtung zeigte sich zunächst, daß der Widerstand langsam stetig abnahm, so lange belichtet wurde. Es war also dieser Modifikation das nach Siemens dem »nichtmetallischen« Selen typische Verhalten eigen und entspricht dies auch dem bei Erwärmung beobachteten Verhalten des Widerstandes, indem der Temperaturkoeffizient negativ war. Dieses Verhalten lichtempfindlichen Selens nenne ich im weiteren Verlaufe dieser Arbeit »Lichtempfindlichkeit I. Art«. Da die Größe des Ausschlages, d. h. die Widerstandsverminderung von der Länge der Belichtungszeit abhängt, wurde der Ausschlag immer nach derselben Zeit innerhalb einer Versuchsreihe, in diesem Fall einer Minute, abgelesen und nahm ich als Maß der Lichtempfindlichkeit die Verkleinerung des Dunkelwiderstandes in Prozenten desselben:

$$\frac{\text{Dunkelwiderstand} - \text{Belichtungswiderstand}}{\text{Dunkelwiderstand}} \times 100.$$

Bei Erwärmung (Tabelle 34, Fig. 20, Kurve I_1, I_2, I_3) nahm die Lichtempfindlichkeit stetig ab bis 200° C. und verschwand bei dieser Temperatur.

Es wurde nun langsam abgekühlt, die Lichtempfindlichkeit begann sofort zu steigen, nahm jedoch von 190° C. an ab und erreichte bei 150° C. den Wert 0. Als jetzt weiter abgekühlt wurde, zeigte sich bei Belichtung eine Widerstandsvergrößerung. Bei 100° C. änderte sich diese Erscheinung dahin, daß zunächst ein schwacher, eine Widerstandsabnahme

anzeigender Galvanometerausschlag eintrat, unmittelbar darauf aber der Widerstand zunahm und über den Dunkelwiderstand bei weiterer Dauer der Belichtung anstieg. Es wurde darum der erste Ausschlag und der Ausschlag nach einer Minute notiert. Kurve I_3 stellt den dem ersten Ausschlag entsprechenden Widerstand vor, I_2 den Widerstand nach einer Minute. Bei 80° C. war der Widerstand nach einer Minute Belichtungsdauer gleich dem Dunkelwiderstande, bei weiterer Abkühlung zeigte sich nach einer Minute Belichtungsdauer der Widerstand kleiner als der Dunkelwiderstand. Es war demnach die bisher nur von Kalischer beobachtete Erscheinung der Vergrößerung des Widerstandes bei Belichtung allmählich in jene Erscheinung übergegangen, welche nach Siemens beim metallisch leitenden Selen Regel ist, nämlich momentane starke Widerstandsabnahme bei Belichtung mit darauffolgender langsamer Zunahme desselben, welche Erscheinung auch von Hesehus und anderen Forschern regelmäßig beobachtet wurde. Ich will dieses Verhalten kurz mit »Lichtempfindlichkeit II. Art« bezeichnen.

Es zeigt sich demnach, daß das von Kalischer nur in wenigen Fällen beobachtete, bisher als außerordentliche Erscheinung zu bezeichnende Verhalten mit der nach Siemens jedem metallisch leitenden Selenpräparate typischen Erscheinung bei Belichtung identisch und nur durch die Größe der Widerstandszunahme bei längerer Belichtung unterschieden ist. Da nun die vorliegende Modifikation wohl bei Abkühlung Lichtempfindlichkeit der II. Art aufwies, jedoch, wie aus Fig. 8, Kurve I_1, I_2 ersichtlich, keinen positiven Temperaturkoeffizienten besaß, was auch in der Mehrzahl der in folgendem angeführten Versuche der Fall war, so geht daraus hervor, daß die Lichtempfindlichkeit der II. Art nicht, wie Siemens und Hesehus[1] annahmen, in dem metallischen Verhalten des Selens ihren Grund haben kann, sondern daß die Ursache für dieses Verhalten eine andere sein müsse.

---

[1] Hesehus, Exner's Repert. d. Phys., Bd. 20, 1884, p. 565 und 631; ferner: Physik. Zeitschr., Bd. 7, 1906, p. 163.

Tabelle 34.

Fig. 20, Kurve I_1, I_2 und I_3.

Temperatur	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes		
	Erhitzung	Abkühlung	
		Widerstand nach dem ersten Ausschlag	Widerstand nach 60 Sekunden
30° C.	29·8		
40	23·7	55·5	32·5
50	21·4	39·6	15·9
60	20·8	23·8	7·8
70	17·5	14·8	2·6
80	16·5	8	0
90	21·0	5·4	0
100	17·6	2·25	—3
110	10·1	—55	
120	8·65	— 5·56	
130	11·5	— 5·9	
140	15·2	— 2·78	
150	11·1	0	
160	9·45	4·55	
170	9·4	4·45	
180	7·5	9·4	
190	3·45	9·25	
200	0	0	
210	0	0	

2. Rotes amorphes präzipitiertes Selen, welches 9 Stunden in Wasser bei 100° C. gekocht worden war (es wird hiebei schwarz, siehe oben), wurde gleichzeitig bei Untersuchung über das Verhalten des Widerstandes bei Erhitzung und Abkühlung (Fig. 9), auf seine Lichtempfindlichkeit untersucht (Tabelle 35, Fig. 20, Kurve II_1, II_2, II_3).

Auch hier zeigte sich die Lichtempfindlichkeit I. Art. Die Belichtungsdauer betrug 10 Sekunden. Bei steigender Temperatur nahm die Lichtempfindlichkeit ab und sank bei 200° C. auf 0. Zwischen 70° und 130° C. blieb die Lichtempfindlichkeit

nahezu konstant, ja es scheint bei 70° C. ein Minimum und eine darauffolgende Vergrößerung der Leitfähigkeit einzutreten, so daß es den Anschein hat, es hätte bei 70° C. eine molekulare Umlagerung stattgefunden, welche die Lichtempfindlichkeit vergrößert. Bei Abkühlung konnte zunächst gar keine Lichtempfindlichkeit beobachtet werden. Erst bei 100° C. wurde dieselbe wahrnehmbar, und war dieselbe II. Art, doch trat der Rückgang des Widerstandes sehr schwach ein, so daß der Unterschied zwischen erstem Ausschlag und dem Ausschlag nach 10 Sekunden in der graphischen Darstellung nicht zum Ausdrucke kam. Nichtdestoweniger haben wir hier wieder den Fall einer Lichtempfindlichkeit der zweiten Art bei durchaus negativem Temperaturkoeffizienten.

Tabelle 35.

Fig. 20, Kurve II_1, II_2 und II_3.

Temperatur	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes	
	Erhitzung	Abkühlung
20° C.	33·7	—
30	24·8	—
40	16·7	24·9
50	14·6	13·1
60	9·85	8·45
70	9·2	7·35
80	10·2	
90	12·1	7·11
100	11·1	5·9
110	10	—
120	9·8	—
130	11	—
140	7·29	—
150	5	—
160	6·6	—
170	4·9	—
180	3·3	—
190	3·45	—
200	0	—
210	0	—

3. Ein etwas abweichendes Verhalten zeigte ein Selenpräparat, welches durch einstündiges Kochen von rotem präzipitierten Selen in destilliertem Wasser bei 100° C. erhalten wurde, wobei es schwarz geworden war (Tabelle 36, Fig. 20, Kurve III_1, III_2, III_3).

Tabelle 36.

Fig. 20, Kurve III_1, III_2 und III_3.

	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes		
		Abkühlung	
Temperatur	Erhitzung	Widerstand nach dem ersten Ausschlag	Widerstand nach 10 Sekunden
20° C.	32·3	42·3	+23·1
30	23·4	31·6	— 5·25
40	19·6	—	—13·7
50	15·3	26	—11·7
60	16·7	14·4	—20·5
70	19·1	6·75	—39
80	8·55		
90	10	—5·5	—30
100	10·5	— 2·26	
110	13·3	—15·2	
120	15·7	— 8·8	
130	19	— 3·52	
140	28·6	+ 2·86	
150	27·6	7·35	
160	21·8	7·95	
170	21·7	11·4	
180	19·7	7·85	
190	17·2	12·4	
200	8·3	14·8	
210	0	4·75	

Bei Erwärmung hatte sich zwischen 115° und 175° C. ein positiver Temperaturkoeffizient gezeigt, bei Abkühlung zeigte sich das metallische Leitvermögen von 125° C. angefangen.

Trotzdem nun diese Modifikation bei Erwärmung in gewissen Grenzen einen metallischen Charakter zeigte, war die Lichtempfindung doch von der ersten Art, somit die Annahme von

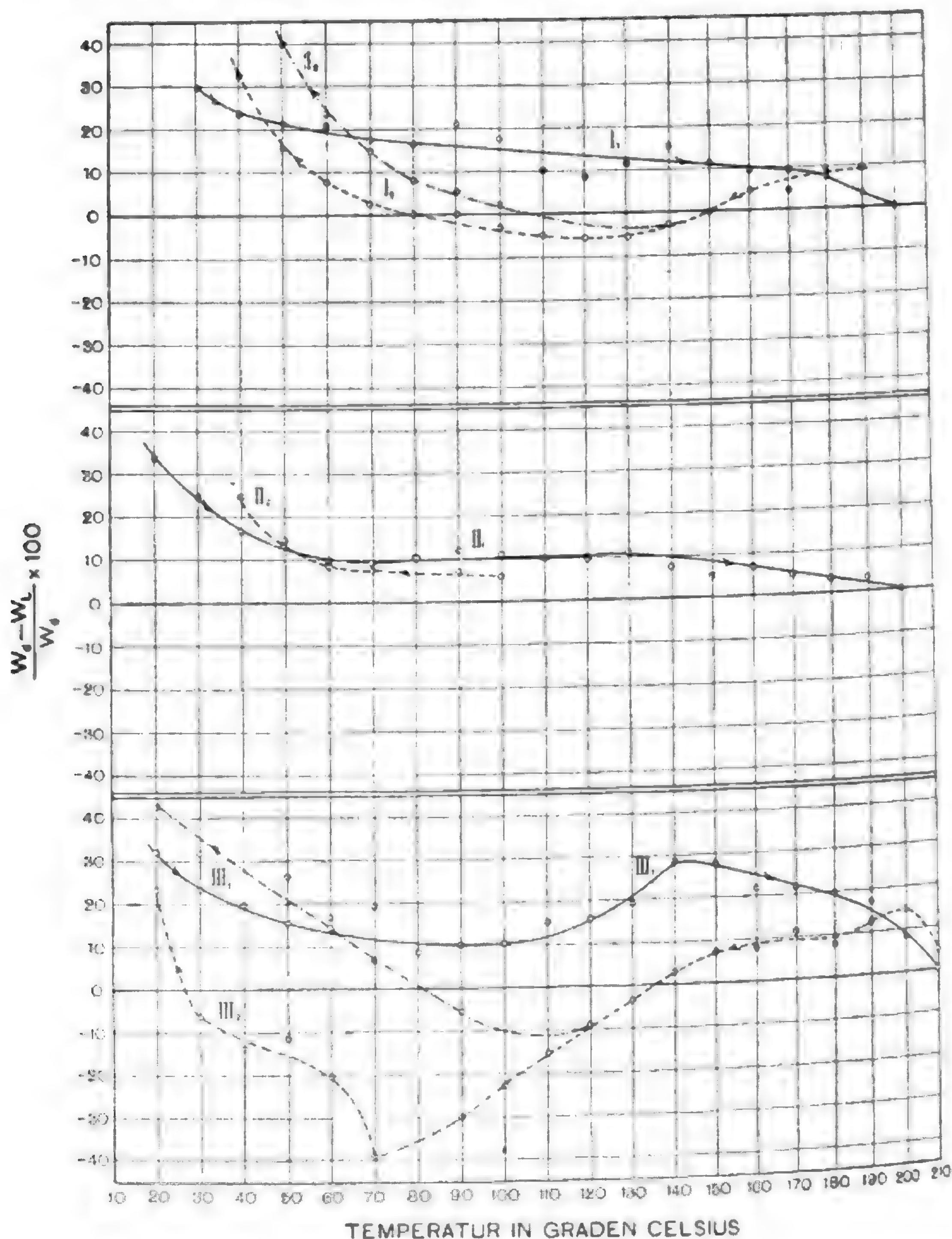


Fig. 20.

Siemens, daß metallisches Leitvermögen und Lichtempfindlichkeit II. Art aneinander gebunden seien, eine weitere Widerlegung erfährt. Die Dauer der Belichtung betrug 10 Sekunden. Der Verlauf der Lichtempfindlichkeit bei Erwärmung zeigt die

interessante Tatsache, daß bis 90° C. die Lichtempfindlichkeit sinkt, dann wieder ansteigt und von 140° bis 210° C. stetig sinkt. Bei 210° C. ist die Lichtempfindlichkeit verschwunden. Es ist also offenbar bei 90° C. eine molekulare Umwandlung eingetreten, welche die Lichtempfindlichkeit vergrößert, wie dies auch bei dem vorigen Präparate der Fall war, wo jedoch das neuerliche Ansteigen der Lichtempfindlichkeit nicht so scharf ausgeprägt war.

Dies dürfte darin seine Erklärung haben, daß durch neunstündiges Kochen jedenfalls eine weitergehende Umwandlung des amorphen in kristallinisches Selen stattgefunden hatte als im zweiten Fall, in welchem das amorphe Selen nur eine Stunde gekocht worden war und noch größere Mengen amorphen Selens enthalten haben mußte. Bei Abkühlung zeigte sich hier wieder ein Ansteigen der Lichtempfindlichkeit bis 200° C. und von da an Abnahme bis 135° C., wo dieselbe gänzlich verschwindet und von der ersten Art in die zweite Art übergeht. Bei dieser Modifikation trat die stärkste bisher beobachtete Widerstandsvergrößerung bei Belichtung ein, indem diese negative Lichtempfindlichkeit bei 70° C. den Wert von —40% erreichte, von da ab verkleinerte sich dieselbe und wurde bei 25° C. wieder positiv (Fig. 20, Kurve III_2). Die nach dem ersten Galvanometerausschlage bestimmte Widerstandsverminderung (Kurve III_3) nahm rasch zu, bei 60° C. ging bereits die Lichtempfindlichkeit über die vor Erhitzung bestandene hinaus.

Eine Zelle, welche nach dem Verfahren Berndt's aus Kohlenfäden hergestellt war, wurde mit chemisch reinem, geschmolzenen Selen bestrichen, rasch erkalten gelassen und 4 Stunden im Thermostaten auf 210° C. (± 2° C.) erhitzt. Dieselbe wurde nach 2 Monaten untersucht. Die Belichtung erfolgte durch eine Glühlampe von 35 HK. in der Entfernung von 20 *cm*, so daß die Lichtintensität 800 bis 900 MK. betrug. Dieselbe zeigte Lichtempfindlichkeit II. Art, und es wurde nur der erste Ausschlag abgelesen. Bei Erwärmung (Tabelle 37, Fig. 22, Kurve I_1, I_2) sank die Lichtempfindlichkeit beständig und näherte sich bei 200° C. dem Werte 0. Bei Abkühlung verschwand die Empfindlichkeit zunächst bei 200° C. vollständig und stieg von diesem Punkt an, wobei der Unterschied von dem

Werte bei Erwärmung nicht beträchtlich war, von 80° C. an war die Lichtempfindlichkeit größer als vor der Erwärmung. Auch bei dieser Zelle war durchwegs bei Erwärmung sowohl wie auch bei Abkühlung ein negativer Temperaturkoeffizient des Widerstandes vorhanden, es trifft also auch hier die Voraussetzung von Siemens für eine Lichtempfindlichkeit II. Art nicht ein.

Tabelle 37.

Fig. 22, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes	Temperatur	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes
15° C.	94	210° C.	1·21
20	76·1	200	0
60	64	180	1·8
70	59	170	4·4
80	54·9	150	8·75
90	48	140	13·1
100	42·2	130	17·2
110	35	120	24
120	28	110	30·2
130	21·7	100	38·6
140	16·6	90	47·5
150	12·5	80	57·2
160	9·12	70	66·4
170	6·8	60	72
180	4·55	46	85
190	3·65	36	88
200	2·4	22·6	91

Kurz zusammengefaßt ist der Einfluß der Erwärmung auf die Lichtempfindlichkeit der durch Erhitzen des amorphen Selens kristallinisch gemachten Selenmodifikationen folgender:

1. Die Lichtempfindlichkeit des Selens nimmt bei Erwärmung ab und verschwindet in der Nähe des Schmelzpunktes (zirka 200° C.) gänzlich.

2. Die Lichtempfindlichkeit zeigt bei Erwärmung eine stetige Abnahme, wenn die Modifikation nicht eingreifenden, molekularen Umwandlungen durch Erhitzung unterliegt, diese äußern sich durch Unregelmäßigkeiten im Verlaufe der Kurve.

3. Erhitzung über 200° C. bewirkt in allen Fällen bei darauffolgender Abkühlung Lichtempfindlichkeit II. Art, gleichgültig, ob das Präparat einen positiven oder negativen Temperaturkoeffizienten besitzt.

4. Erhitzung über 200° C. bewirkt in vielen Fällen bei darauffolgender Abkühlung eine Vergrößerung des Widerstandes bei Belichtung innerhalb weiter oder enger Temperaturgrenzen.

5. In allen Fällen wird durch Erhitzung und darauffolgende Abkühlung die Lichtempfindlichkeit erhöht.

B. Kristallinisches »hartes« Selen.

Die Untersuchung der Lichtempfindlichkeit dieser Modifikation bietet aus dem Grunde besonderes Interesse, da die Angabe Ruhmer's, daß diese Modifikation nur für starke Lichtwirkung empfindlich sei, während die »weiche« bei schwachen Lichteindrücken größere Empfindlichkeit zeige, den Versuchen von Siemens über Lichtempfindlichkeit I. und II. Art gegenüberstand und es nach genauem Studium der Eigenschaften der genannten Modifikation möglich war, diese Angabe in Einklang zu bringen.

Wie ich nun bereits durch die früheren Versuche nachgewiesen habe, stellt die »harte« Modifikation Ruhmer's nichts anderes als das »nichtmetallische Selen, Modifikation I« nach Siemens dar, da es einen negativen Temperaturkoeffizienten besitzt, während das »weiche« Selen Ruhmer's, welches durch dauerndes Erhitzen des amorphen auf 200° C. entsteht, mit der »metallischen Modifikation II« nach Siemens identisch ist, d. h. einen positiven Temperaturkoeffizienten besitzt. Es war demnach zu erwarten, daß das »harte« Selen Lichtempfindlichkeit I. Art besitzen werde. Das war auch bei meinen Versuchen tatsächlich der Fall.

Es wurde gleichzeitig der Widerstand bei Erwärmung (Fig. 10) und die Lichtempfindlichkeit untersucht (Tabelle 38,

Fig. 21, Kurve I_1, I_2). Die Dauer der Belichtung betrug 20 Sekunden. Bei Erwärmung nahm die Lichtempfindlichkeit gegen 200° C. ab, um dort ganz zu verschwinden; bei 80° C. zeigte sich in der Kurve eine Unregelmäßigkeit, welche auf stattgefundene molekulare Umlagerungen schließen läßt.

Bei Abkühlung trat bereits bei 185° C. negative Lichtempfindlichkeit ein (Lichtempfindlichkeit II. Art), obwohl während des ganzen Verlaufes der Abkühlung ein positiver Temperaturkoeffizient nicht vorhanden war.

Tabelle 38.

Fig. 21, Kurve I_1 und I_2.

Temperatur	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes	
	Erhitzung	Abkühlung
15° C.	43·5	—
21	37·5	—
30	27	(34°) 17
40	26	12·8
50	20·8	4·15
60	17·8	+ 1·98
70	12·7	— 3·25
80	4·15	— 8·35
90	9·65	—12·75
100	10·1	—
110	7·36	— 9·45
120	6·81	— 8·8
130	7·05	— 6·3
140	4·9	— 4·65
150	1·78	— 3·2
160	4	— 3
170	2·8	— 2·6
180	1·3	0
190	2	0·56
200	0	5
210	0	—

Ein zweiter, aus demselben kristallinisch »harten« Selen hergestellter Zylinder zeigte ein analoges Verhalten (Tabelle 39, Fig. 21, Kurve II_1, II_2). Die Dauer der Belichtung betrug eine Minute. Die Lichtempfindlichkeit war I. Art. Die dazugehörige Widerstandskurve ist auf Fig. 11, Kurve I_1, I_2 ersichtlich. Auch hier tritt in der Kurve der Lichtempfindlichkeit eine Unregelmäßigkeit ein, und zwar bei 70° C., von da ab nimmt die Empfindlichkeit stetig ab und verschwindet bei 180° C. gänzlich.

Tabelle 39.

Fig. 21, Kurve II_1 und II_2.

Temperatur	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes	
	Erhitzung	Abkühlung
10° C.	48·9	—
20	43·2	—
30	37	—
40	30·6	—
50	24·1	+ 3·8
60	19·5	— 2·46
70	18·7	— 6·55
80	20·75	— 7·7
90	20·5	— 8·1
100	20	— 9
110	17·4	—10·7
120	15	—10·2
130	13·8	— 8·2
140	8·8	—
150	16·2	—
160	6·7	+ 1·67
170	7·5	3
180	0	5·45
190	0	6
200	0	7·3
210	0	0

Bei Abkühlung tritt bei 155° C. Lichtempfindlichkeit II. Art ein und ist nach einer Minute Belichtungsdauer der Widerstand größer als der Dunkelwiderstand. Von 55° C. an wird die Lichtempfindlichkeit positiv, bleibt aber unter der vor Erwärmung vorhanden gewesenen zurück.

Derselbe Zylinder wurde am nächsten Tage neuerdings auf das Verhalten des Widerstandes im Dunkeln sowohl als auch bei Belichtung untersucht.

Tabelle 40.

Fig. 21, Kurve III_1, III_2 und III_3.

	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes		
		Abkühlung	
Temperatur	Erhitzung	Widerstand nach dem ersten Ausschlag	Widerstand nach 10 Sekunden
20° C.	48	31·7	0
30	33·3	22	—2·44
40	27·5	12·8	—
50	23·8	8·15	—5·5
60	19·8	7·7	—6·15
70	15·6	—	—6·31
80	5·2	3·22	—5·35
90	5·2	2·8	—3·4
100	1·55	—	—3·18
110	0·55	1·77	
120	1·69	1·93	
130	3·6	3	
140	—	2·2	
150	—	0	
160	5·95	0·71	
170	6·6	3·1	
180	9·85	3·76	
190	12·5	4·4	
200	7·75	3·85	
210	0	0	

Die Dauer der Belichtung betrug 20 Sekunden. Der Temperaturkoeffizient war negativ (Fig. 11, Kurve II_1, II_2). Das Verhalten bei Belichtung war ein etwas von den übrigen

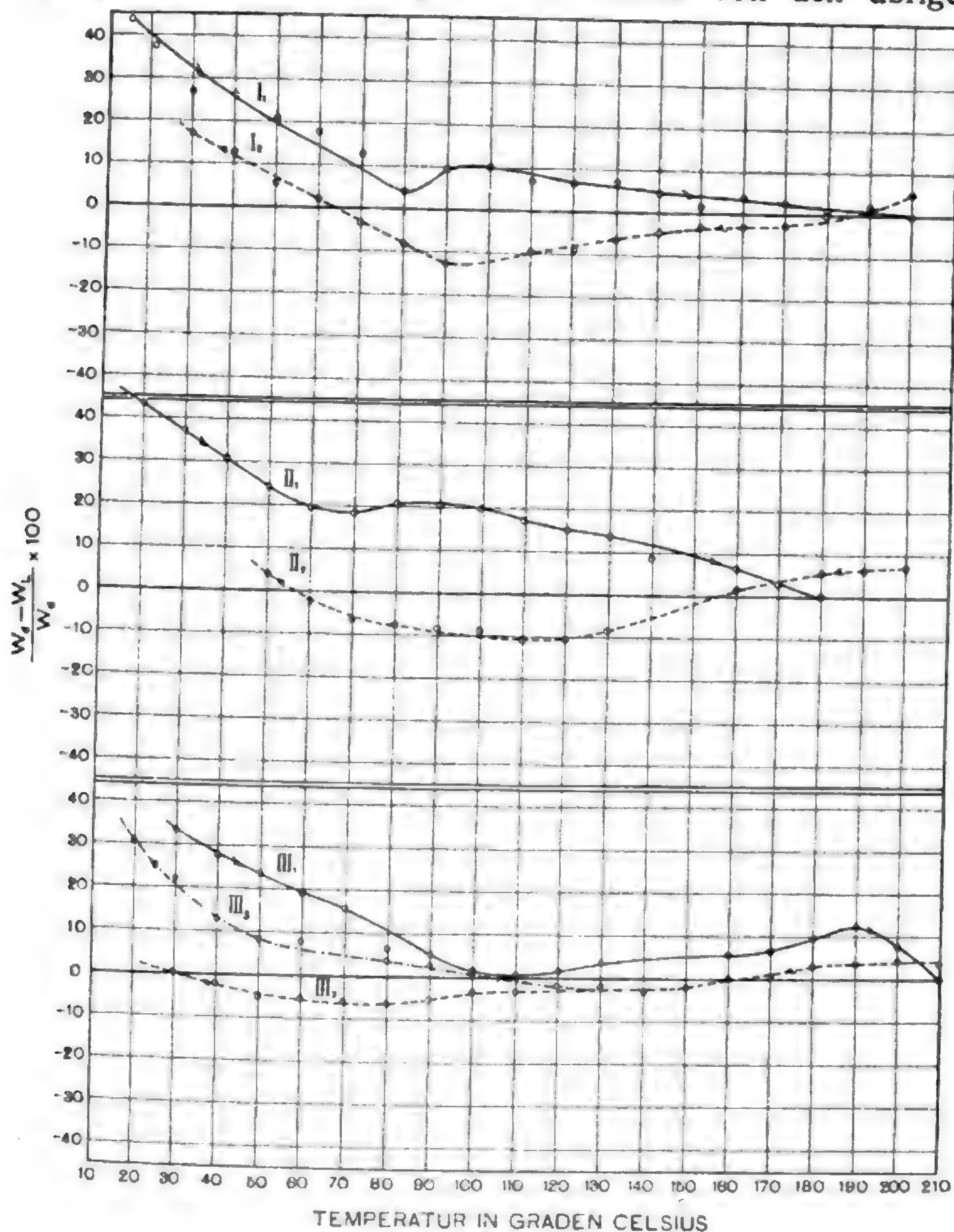


Fig. 21.

abweichendes (Tabelle 40, Fig. 21, Kurve III_1, III_2, III_3). Zunächst war die am Ende des letzten Versuches vorhandene Lichtempfindlichkeit II. Art verschwunden und eine I. Art an ihre Stelle getreten. Dieselbe nahm bis 110° C. stetig ab, stieg jedoch von da an bis zur Temperatur von 190° C., wo sie ein Maximum

wurde, fiel dann rasch und war bei 210° C. gänzlich verschwunden.

Bei Abkühlung fiel die Empfindlichkeit bis 160° C., wo sie den Wert 0 erreichte und in die Lichtempfindlichkeit II. Art überging, wobei gleichzeitig der Widerstand bei Belichtung sich vergrößerte. Von 130° C. an konnte im ersten Momente der Belichtung eine momentane Widerstandsverminderung beobachtet werden, welche gleichfalls eingezeichnet wurde (Fig. 21, Kurve III_3), während III_2 den Widerstand nach 20 Sekunden Belichtungsdauer angibt. Aus den jeweiligen Differenzen der Kurven III_2 und III_3 sieht man, um wie viel der Widerstand innerhalb der 20 Sekunden zunahm. Die Unregelmäßigkeit der Kurve der Lichtempfindlichkeit bei Erwärmung läßt uns darauf schließen, daß bei 110° C. eine eingreifende molekulare Umwandlung stattgefunden hat, wodurch die Lichtempfindlichkeit zunahm. Der charakteristische Verlauf der Kurve zeigt keine bemerkenswerten Unterschiede gegenüber dem Verhalten der anderen von mir untersuchten kristallinischen Formen.

Die harte Modifikation wurde auch in Form einer Zelle untersucht, dieselbe bestand aus einem Schiefertäfelchen, auf welchem zwei 0·05 *mm* dicke Kupferdrähte in Form einer doppelgängigen Schraube gewickelt wurden. Die Drähte wurden auf einer Seite mit chemisch reinem, geschmolzenen Selen bestrichen und das Selen unter beständigem Streichen mit einem Glasstab erkalten gelassen, wodurch es zu kristallinischem, hartem Selen erstarrte. Die Belichtung erfolgte zuerst durch das weiße Licht einer Glühlampe von 35 HK. Lichtstärke in 20 *cm* Entfernung, so daß die Lichtintensität 800 bis 900 MK. betrug, und wurde der Versuch unter Vorhalten eines roten und später eines grünen Glases wiederholt. Die farbigen Gläser stammten von Schmidt & Haensch in Berlin und waren aus jenem Glase, welches für Photometrie mit farbigen Gläsern Verwendung findet. Das rote Glas ließ die Strahlen im Infrarot von ungefähr $\lambda = 2000$ bis ins Orangegelb $\lambda = 580$ Milliontelmillimeter, während das grüne Glas Gelb bis Blaugrün von zirka $\lambda = 550$ bis etwa $\lambda = 490$ durchließ.

Das Verhalten der Zelle gegenüber den verschiedenen Farben bei Temperaturerhöhung zeigt die Tabelle 41, Fig. 22,

Kurve II_1, II_2, II_3, während bei weißem und rotem Lichte die Abnahme der Lichtempfindlichkeit bei Erwärmung einen annähernd gleichen Verlauf zeigt, ist bei der Bestrahlung mit grünem Lichte nicht nur der absolute Wert der Empfindlichkeit bedeutend geringer, sondern sinkt die Empfindlichkeit bei steigenden Temperaturen viel schneller als im früheren Falle. Wir sehen jedoch, daß auch die Lichtempfindlichkeit gegen farbiges Licht bei 200° C. sich der 0 nähert.

Tabelle 41.

Fig. 22, Kurve II_1, II_2 und II_3.

Temperatur	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes — Farbe des Lichtes		
	weiß	rot	grün
11° C.	—	95	—
12	—	—	61·1
15	99	—	—
20	97·2	—	46·5
30	96·1	87·5	36·8
40	94·5	83·6	32·1
50	90·5	78	37·7
60	86·5	73	17·5
70	80·7	66·5	13·7
80	75·5	59·5	10·3
90	69·5	52·5	9·1
100	61·1	44·5	5·7
110	53·8	36·5	5·9
120	48·0	29	4·06
130	36·6	23	1·63
140	28	18·6	2·6
150	—	14·6	1·85
160	15·4	11·45	3·4
170	13·2	9·55	1·12
180	11·9	8·8	1·72
190	11·1	7·1	0·87
200	6·95	6·8	1·09
210	5·9	5·7	1·01

Diese über das Verhalten des »harten« Selens gefundenen Resultate lassen sich kurz in folgendem zusammenfassen:

1. Die Lichtempfindlichkeit des »harten« Selens zeigt in Abhängigkeit von der Temperatur dasselbe Verhalten wie die anderen graukristallinischen Modifikationen.

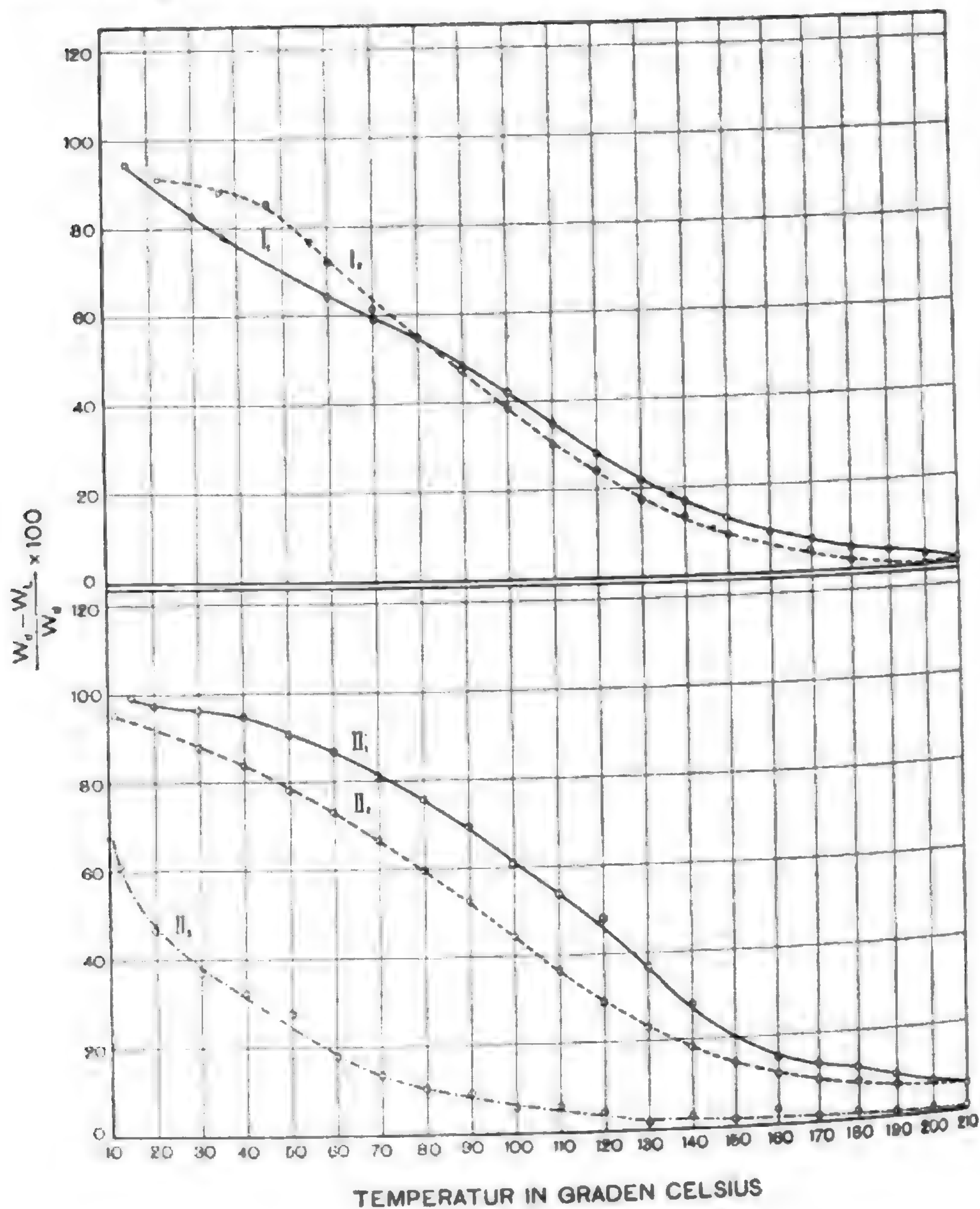


Fig. 22.

2. Die Lichtempfindlichkeit für Lichtstrahlen aller Wellenlängen nimmt bei Temperaturerhöhung ab und verschwindet in der Nähe des Schmelzpunktes bei 200° C. gänzlich, doch ist der relative Verlauf der Abnahme für Strahlen verschiedener

Wellenlänge im roten und grünen Teile des Spektrums verschieden.

C. Aus Kaliumselenid kristallisiertes Selen.

Aus Kaliumselenid kristallisiertes Selen war bisher noch niemals auf seine Lichtempfindlichkeit untersucht worden. Ich preßte es in Pulverform zu Zylindern und studierte gleichzeitig das Verhalten des Widerstandes bei Erwärmung und Belichtung (Tabelle 42, Fig. 23, Kurve I_1, I_2, I_3).

Tabelle 42.

Fig. 23, Kurve I_1, I_2 und I_3.

<table>
<tr><th rowspan="3">Temperatur</th><th colspan="3">Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Erhitzung</th><th colspan="2">Abkühlung</th></tr>
<tr><th>Widerstand nach dem ersten Ausschlag</th><th>Widerstand nach 60 Sekunden</th></tr>
<tr><td>40° C.</td><td>—</td><td>+11·7</td><td>—39·5</td></tr>
<tr><td>50</td><td>—</td><td>—10</td><td>—50</td></tr>
<tr><td>60</td><td>—</td><td>—17·4</td><td>—41</td></tr>
<tr><td>70</td><td>—</td><td colspan="2">—27·5</td></tr>
<tr><td>80</td><td>—</td><td colspan="2">—26·6</td></tr>
<tr><td>90</td><td>33·3</td><td colspan="2">—26</td></tr>
<tr><td>100</td><td>22·5</td><td colspan="2">—23·6</td></tr>
<tr><td>110</td><td>17·4</td><td colspan="2">—14·3</td></tr>
<tr><td>120</td><td>16·7</td><td colspan="2">— 4·2</td></tr>
<tr><td>130</td><td>12·1</td><td colspan="2">— 2·6</td></tr>
<tr><td>140</td><td>—</td><td colspan="2">— 2·68</td></tr>
<tr><td>150</td><td>—</td><td colspan="2">— 2·57</td></tr>
<tr><td>160</td><td>—</td><td colspan="2">— 1·57</td></tr>
<tr><td>170</td><td>—</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>180</td><td>—</td><td colspan="2">2·7</td></tr>
<tr><td>190</td><td>11·55</td><td colspan="2">4·3</td></tr>
<tr><td>200</td><td>—</td><td colspan="2">8·65</td></tr>
<tr><td>210</td><td>17·8</td><td colspan="2">—</td></tr>
</table>

Bei gewöhnlicher Temperatur war keine Spur von Lichtempfindlichkeit bemerkbar, worin sich ein neuerlicher Unterschied

dieser Modifikation von den anderen graukristallinischen zeigt. Das Verhalten des Widerstandes bei Erwärmung war dasselbe wie in den bereits untersuchten Fällen. Bei 90° C. zeigte sich der Beginn der Lichtempfindlichkeit. Die Dauer der Belichtung betrug eine Minute. Diese Lichtempfindlichkeit, welche erster Art war, nahm bis 166° C. ab, wo sie gänzlich verschwand, bei weiterer Erwärmung nahm sie wieder zu und stieg bis 210° C. an. Bei Abkühlung verschwand die Lichtempfindlichkeit bei 170° C. gänzlich und ging in die zweite Art über, d. h. es trat eine Widerstandsvergrößerung bei Belichtung ein. Von 70° C. angefangen war im ersten Momente der Belichtung eine Widerstandsabnahme zu beobachten (Kurve I_3), doch stieg während einer Minute Belichtungsdauer der Widerstand hoch über den Dunkelwiderstand an. Von 50° C. angefangen begann diese negative Lichtempfindlichkeit sich zu vermindern. Das Verhalten dieser Modifikation zeigt demnach keinen wesentlichen Unterschied von den bisher untersuchten.

Es wurde sodann die Lichtempfindlichkeit eines Versuchskörpers untersucht, dessen Verhalten bei Erwärmung in Fig. 17 ersichtlich ist. Aus Kaliumselenid kristallisiertes Selen war in pulverförmigem Zustande 5 Stunden auf 210° C. erhitzt und nach Abkühlung gepreßt worden. Die Belichtungsdauer betrug 20 Sekunden. Die Lichtempfindlichkeit nahm bei Erwärmung ziemlich gleichmäßig bis 210° C. ab (Tabelle 43, Fig. 23, Kurve II_1, II_2, II_3) und verschwand bei dieser Temperatur gänzlich. Bei Abkühlung ging die Lichtempfindlichkeit bei 120° C. auf 0 zurück und trat dann im entgegengesetzten Sinn auf, d. h. nach 20 Sekunden Belichtungsdauer hatte sich der Widerstand über den Dunkelwiderstand vergrößert, während der erste Ausschlag des Galvanometers eine Widerstandsabnahme anzeigte.

Die diesem ersten Ausschlag entsprechenden Werte des Widerstandes sind in Kurve II_3 eingetragen, während der Widerstand nach 20 Sekunden Belichtungsdauer aus Kurve II_2 zu ersehen ist.

Man sieht demnach, daß auch dieser Versuch ein ähnliches Resultat gibt, wie die mit den anderen graukristallinischen Modifikationen angestellten.

Tabelle 43.

Fig. 23, Kurve II_1, II_2 und II_3.

<table>
<tr><th rowspan="3">Temperatur</th><th colspan="3">Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Erhitzung</th><th colspan="2">Abkühlung</th></tr>
<tr><th>Widerstand nach dem ersten Ausschlag</th><th>Widerstand nach 20 Sekunden</th></tr>
<tr><td>30° C.</td><td>32·4</td><td>28</td><td>24</td></tr>
<tr><td>40</td><td>26·1</td><td>25·4</td><td>13·5</td></tr>
<tr><td>50</td><td>22·8</td><td>14·2</td><td>2·82</td></tr>
<tr><td>60</td><td>20·5</td><td>4·9</td><td>— 6·21</td></tr>
<tr><td>70</td><td>—</td><td>2·99</td><td>— 6·7</td></tr>
<tr><td>80</td><td>16</td><td>—</td><td>— 6·1</td></tr>
<tr><td>90</td><td>10·8</td><td>1·32</td><td>— 5·25</td></tr>
<tr><td>100</td><td>10·3</td><td>—</td><td>— 1·98</td></tr>
<tr><td>110</td><td>11·8</td><td>—</td><td>1·05</td></tr>
<tr><td>120</td><td>11·5</td><td colspan="2">3·75</td></tr>
<tr><td>130</td><td>9</td><td colspan="2">—</td></tr>
<tr><td>140</td><td>7·55</td><td colspan="2">—</td></tr>
<tr><td>150</td><td>10·4</td><td colspan="2">—</td></tr>
<tr><td>160</td><td>8·7</td><td colspan="2">4·5</td></tr>
<tr><td>170</td><td>7·0</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>180</td><td>7·85</td><td colspan="2">—</td></tr>
<tr><td>190</td><td>6·25</td><td colspan="2">8·8</td></tr>
<tr><td>200</td><td>1·05</td><td colspan="2">10·7</td></tr>
<tr><td>210</td><td>0</td><td colspan="2">0</td></tr>
</table>

D. Selen durch längeres Stehenlassen in Chinolin kristallinisch gemacht.

Es wurde schon erwähnt, daß dieses Präparat das einzige auf chemischem Wege hergestellte ist, welches bei gewöhnlicher Temperatur sowohl Leitfähigkeit als auch Lichtempfindlichkeit zeigt. Das Verhalten eines solchen Zylinders bei Belichtung wurde gleichzeitig mit der Widerstandsänderung bei Erwärmung bestimmt. Die Widerstandskurve ist auf Fig. 17 und 18, Kurve II_1, II_2 ersichtlich. Das Verhalten der Licht-

empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Temperatur zeigt Tabelle 44, Fig. 23, Kurve III_1, III_2, III_3; die Empfindlichkeit, welche erster Art war, sank mit zunehmender Temperatur stetig, war bei 110° C. sehr gering, stieg von da an bis 130° C. und nahm von hier an wieder ab, um bei 210° C. ganz zu verschwinden. Bei Abkühlung stieg die Empfindlichkeit bis 180° C., sank von da ab und ging von 155° C. in die Lichtempfindlichkeit II. Art über, wobei zunächst Widerstandsvergrößerung bei Belichtung eintritt. Diese negative Lichtempfindlichkeit wurde bei 180° C. ein Maximum, sank von da ab, wurde von 60° C. an positiv und stieg bereits bei 55° C. über die vor Erhitzung vorhanden gewesene hinaus.

Es zeigt somit dieses Präparat ein analoges Verhalten wie die bereits früher untersuchten graukristallinischen Selenmodifikationen.

Tabelle 44.

Fig. 23, Kurve III_1, III_2 und III_3.

Temperatur	Lichtempfindlichkeit in Prozenten des Dunkelwiderstandes	
	Erhitzung	Abkühlung
40° C.	1	33·3
50	18·5	—
60	10	—
70	10·5	—10
80	9·45	—24·1
90	—	—23·5
100	8·7	—23
110	2·41	—20·8
120	26·1	—18·2
130	17·8	—17·7
140	14·7	—13·2
150	14·8	— 5·55
160	—	4·65
170	—	7·95
180	8	8·75
190	0	—
200	0	—

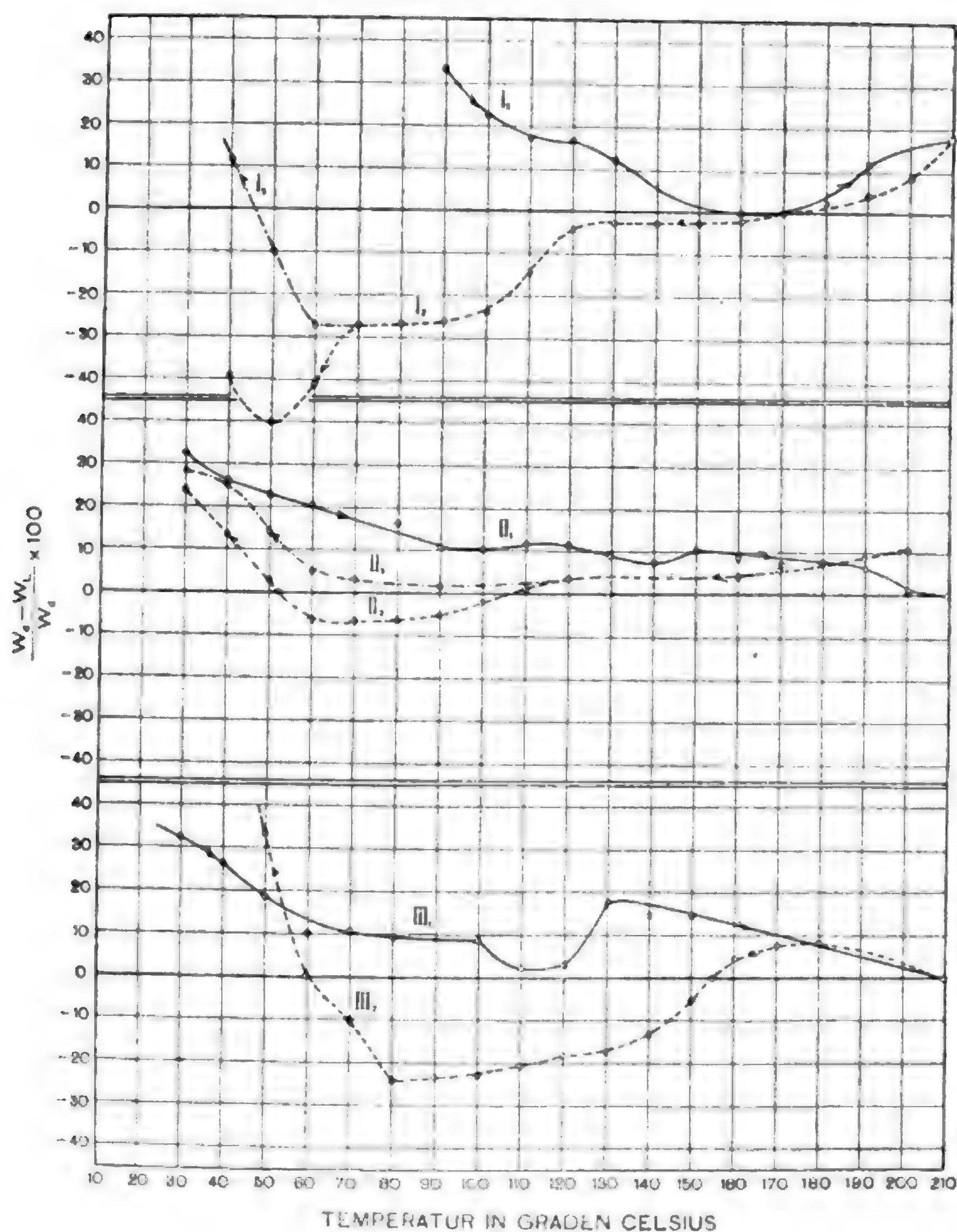


Fig. 23.

Theoretische Erörterung der Resultate.

Nachdem die Ansicht Bidwell's[1] und einiger anderer Forscher, daß Bildung von Metallseleniden die Ursache des merkwürdigen Verhaltens des Selens bei Erwärmung sei, durch

[1] A. a. O.

die Untersuchungen Berndt's,[1] Pfund's,[2] Marc's[3] und schließlich durch die vorliegende Arbeit endgültig als widerlegt gelten kann, bleibt zur Erklärung der in Frage stehenden Vorgänge in erster Linie die Annahme von W. Siemens[4] übrig, die, wie bereits in der Einleitung erwähnt, das graukristallinische Selen als feste Lösung von metallischem, gut leitenden (II) in nichtmetallischem, schlecht leitenden (I) erklärte. Es hat sich nun bei meiner Untersuchung des aus Kaliumselenid kristallisierten grauen Selens herausgestellt, daß diese Modifikation den elektrischen Strom gar nicht leitet, also eine dritte Form des grauen Selens vorstellen würde, welche erst durch Erhitzen leitend wird. Da jedoch die Siemens-Modifikation I als solche nicht bestimmt ist, sondern je nach der Herstellungsweise verschiedene spezifische Leitfähigkeit besitzt, so erschien die Annahme gerechtfertigt, daß die Modifikation I nicht eine besondere Form des grauen Selens, sondern eine Lösung von metallischem Selen in einer anderen graukristallinischen Selenform von sehr hohem elektrischen Leitwiderstande sei, wobei sich die geringe Leitfähigkeit der Modifikation I durch die geringe Menge des in Lösung befindlichen Selens II erklärt. Diese Modifikation von hohem Widerstande bezeichne ich weiterhin als Selen *A*, das metallische Selen (II) als *B*. Da wir nun die Form *A* durch Erhitzungsprozesse nie rein erhalten können, weil sich gleichzeitig immer Selen *B* bildet, so kann nur das aus Kaliumselenid auf chemischem Wege kalt hergestellte graue Selen die Form *A* in reinem Zustande vorstellen. Da diese den elektrischen Strom nicht leitet, so ist jedes Leitfähigkeit zeigende Selenpräparat eine Lösung von metallischem, gut leitenden Selen in einer nichtleitenden Selenmodifikation. Das metallische Selen *B* entsteht durch Erhitzen aus dem Selen *A* und bildet sich bei tiefen Temperaturen in die Form *A* zurück. Die Bildung von Selen *B* geht leicht vor sich, wenn Selen *A* im Momente des Entstehens erhitzt wird; schwieriger,

---

[1] A. a. O.

[2] A. a. O.

[3] A. a. O.

[4] A. a. O.

wenn man bereits fertiges Selen *A* auf hohe Temperaturen erwärmt. Darin ist die Erscheinung begründet, daß man nur bei direktem Erhitzen über 200° C. leicht metallisches Selen erhält, bei Unterbrechung des Erwärmungsprozesses weit langsamer. Die Verschiedenheit im elektrischen Verhalten hat ihre Ursache nur in der verschiedenen Menge gelösten metallischen Selens. Diese Menge bestimmt die Leitfähigkeit und das Auftreten eines positiven oder negativen Temperaturkoeffizienten. Da dieses Selen *B* sich wie ein Metall verhält, daher einen positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes besitzt, so wird das Selen, wenn es zum größeren Teil in Modifikation *B* umgebildet wurde, auch einen positiven Temperaturkoeffizienten zeigen. Ist jedoch ein kleiner Teil des Selens in *B* umgewandelt, so wird die Neubildung von Selen *B* im Verhältnisse zur bereits vorhandenen Menge rasch erfolgen, und wird die durch diese Neubildung leitenden Selens bewirkte Widerstandsverminderung größer sein als die Widerstandsvergrößerung des metallischen Selens bei dieser Temperaturerhöhung; es wird demnach das Präparat bei höheren Temperaturen besser leiten, d. h. einen negativen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes besitzen. Die Neubildung metallischen Selens erfolgt leichter, wenn bereits Moleküle metallischen Selens in Selen *A* enthalten sind und zeigt sich die erfolgte Umbildung dadurch, daß nach dem Erhitzen der Widerstand des Selens kleiner geworden ist und in vielen Fällen ein positiver Temperaturkoeffizient des Widerstandes eintritt. Enthält ein Präparat gar kein Selen *B* (aus Kaliumselenid kristallisiert), so ist lange Erhitzung über 200° C. nötig, um Bildung von Selen *B* in größerer Menge zu bewirken.

Auch die Frage der Lichtempfindlichkeit des Selens ist mit dieser Annahme einer Lösung von Selen *B* in Selen *A* erleichtert. Schon Siemens hatte gefunden, daß das »nichtmetallische« Selen eine geringere Lichtempfindlichkeit habe als das »metallische«. Diese Tatsache wurde durch Ruhmer bestätigt, welcher beobachtete, daß das »harte« Selen eine geringere absolute Empfindlichkeit besitze als das »weiche« Selen. Nun ist aber das »harte« Selen nach meinen Resultaten mit dem »nichtmetallischen« von Siemens identisch. Es war demnach

anzunehmen, daß die Lichtempfindlichkeit eines Präparates vom Gehalte an Selen *B* abhängig sei. Diese Annahme wurde bestätigt durch die Beobachtung, daß das aus Kaliumselenid kristallisierte Selen, welches gar kein Selen *B* enthielt, auch keine Lichtempfindlichkeit zeigte, dagegen zeigte das durch Chinolin umgewandelte Selen Lichtempfindlichkeit, da dieses Präparat, wie aus der elektrischen Leitfähigkeit hervorging, Selen *B* enthielt. Es ist also für die Lichtempfindlichkeit vorhergegangene Erhitzung nicht nötig. Aus diesen Beobachtungen folgt, daß nur das Selen *B* der Träger der Lichtempfindlichkeit sein kann. Eine weitere Bestätigung findet diese Annahme darin, daß jedes Präparat, welches erhitzt und wieder abgekühlt wurde, kleineren Widerstand und gleichzeitig vergrößerte Lichtempfindlichkeit aufwies, was nur auf Vermehrung des Selens *B* durch die Erhitzung zurückzuführen sein kann.

Die Wirkung des Lichtes dürfte, wie bereits Hesehus[1] annahm, in einer Ionisierung des Selens *B* bestehen, indem durch den Einfluß des Lichtes die Moleküle des Selens *B* dissoziiert werden und freie Ionen entstehen, welche die vergrößerte Leitfähigkeit bedingen. Dieser Ionisierungsprozeß scheint ein resonanzartiger Vorgang zu sein, da nicht alle Wellenlängen des Lichtes gleiche Wirkung haben, sondern das Maximum der Wirkung im Gebiete der größeren Wellenlängen liegt (zirka 700 μ). Auch die Temperatur ist von großem Einfluß, und zwar hört die ionisierende Wirkung des Lichtes in der Nähe des Schmelzpunktes (zirka 200° C.) vollständig auf, ist jedoch bei sehr tiefen Temperaturen (—185° C.) noch vorhanden, wie A. Pochettino[2] nachwies.

Es handelt sich nun um die Aufklärung der Erscheinungen, die ich als Lichtempfindlichkeit I. und II. Art bezeichnet habe.

Es mag hier vielleicht eine ähnliche Erscheinung zu Grunde liegen, wie man sie bei der Ozonisierung von Sauerstoff durch kurzwelliges Licht wahrgenommen hat, indem die Ozonisierung nur bis zu einem bestimmten Punkte vorschreitet, worauf die Bestrahlung eine desozonisierende Wirkung äußert

---

[1] Hesehus [1906] Phys. Zeitschr., Bd. 7, p. 163.

[2] A. a. O.

und ein Gleichgewichtszustand eintritt. Ebenso scheint beim Selen ein Sättigungszustand der Ionisierung zu bestehen, der von der Temperatur abhängig ist. Bei jenen Präparaten, welche wenig Selen *B* enthalten, dauert es lange Zeit, bis die Sättigung mit freien Ionen eintritt, der Widerstand wird langsam sinken, es ist dies die Lichtempfindlichkeit I. Art. Ist dagegen viel Selen *B* in Lösung, so wird sich die Lichtwirkung viel kräftiger äußern und der Sättigungszustand rasch eintreten. Nun beobachtet man aber bei beiden Arten der Lichtempfindlichkeit nach dem Eintritte des Widerstandsminimums, daß der Widerstand nicht stabil bleibt, sondern wieder zunimmt und es wurde von mir nachgewiesen, daß bei höheren Temperaturen diese Widerstandszunahme über den Dunkelwiderstand hinausreicht, so daß man von negativer Lichtempfindlichkeit sprechen kann. Diese Erfahrung mag ihre Ursache darin haben, daß das Licht ebenso wie eine Ionisierung vielleicht auch eine Polymerisation des Selens bewirkt, welche Annahme zur Erklärung der Widerstandsvermehrung des Selens herangezogen werden könnte.

Aus dem Gesagten ergibt sich auch die Anwendung des »harten« Selens für starke Lichteindrücke und des »weichen« für schwache. Beim »harten« Selen, welches wenig Selen *B* enthält, wird auch bei sehr kräftigen Lichteindrücken keine Sättigung mit Ionen eintreten und daher die Widerstandsverminderung der Stärke des Lichteindruckes proportional sein, dagegen werden schwache Lichteindrücke nur unmerkliche Ionisation, d. h. Widerstandsverminderung herbeiführen. Beim »weichen« Selen dagegen wird bei sehr starken Belichtungen sogleich Sättigung eintreten, daher die Widerstandsverminderung nicht dem Lichteindrucke proportional sein, während dies wohl bei schwacher Belichtung der Fall sein wird.

Es erübrigt noch, die von Siemens[1] und Hesehus[2] für die Lichtempfindlichkeit II. Art gegebenen Erklärungen mit Rücksicht auf die von mir gefundenen Versuchsresultate auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

---

[1] A. a. O.
[2] A. a. O.

Beide gingen von der Ansicht aus, daß die Lichtwirkung in einer raschen Neubildung metallischen Selens bestehe. Die Widerstandsvergrößerung nach eingetretenem Minimum erklärte Siemens damit, daß das metallische Selen das Licht stärker absorbiere als das nichtmetallische; dadurch wird bei längerer Belichtungsdauer das Licht vom Inneren des Selenkörpers abgeschnitten und es tritt Rückbildung in nichtmetallisches Selen ein.

Mit dieser Erklärung läßt sich aber die von Kalischer und mir gefundene Widerstandsvermehrung bei Belichtung nicht vereinbaren, welche Erscheinung, wie ich nachgewiesen habe, mit der bei Lichtempfindlichkeit II. Art auftretenden Widerstandszunahme qualitativ gleich und nur quantitativ verschieden ist. Nach Siemens könnte höchstens eine Widerstandsvermehrung bis zum Dunkelwiderstande, nie aber darüber hinaus erfolgen.

Hesehus erklärt diese Widerstandszunahme mit einer durch Lichtabsorption bewirkten Temperaturerhöhung des Selens, welche sich erst nach längerer Zeit bemerkbar machen kann.

Diese Erklärung würde bedingen, daß nur jenes Selen diese Erscheinung zeige, welches durch Erwärmung den Widerstand vergrößert, d. h. einen positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes hat. Nun habe ich aber in einer großen Zahl von Versuchen nachgewiesen, daß diese Erscheinung auch bei Präparaten auftrat, welche durchwegs negativen Temperaturkoeffizienten haben, daher Erwärmung den Widerstand weiter vermindern müßte.

Es ist somit auch die von Hesehus gegebene Erklärung der Lichtempfindlichkeit II. Art unhaltbar.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Ergebnisse der vorliegenden Abhandlungen sind demnach kurz zusammengefaßt folgende:

1. Es wurde chemisch reines Selen verwendet und damit neuerdings die Unhaltbarkeit der Selenidtheorie nachgewiesen.

2. Wurde nachgewiesen, daß die beiden Formen des amorphen Selens identisch und nur durch den Aggregatzustand unterschieden sind.

3. Es gibt zwei Formen des graukristallinischen, in Schwefelkohlenstoff unlöslichen Selens:

   a) Selen *A* leitet den elektrischen Strom nicht;
   b) Selen *B* leitet den elektrischen Strom wie ein Metall.

4. Form *A* kann nur durch Kristallisation des Selens aus Kaliumselenid in reinem Zustande hergestellt werden. Form *B* entsteht aus ersterer durch Erhitzen oder auch auf chemischem Wege (Behandlung mit Chinolin).

5. Die durch Erhitzen des amorphen oder des Selens *A* erhaltenen Präparate stellen eine feste Lösung von Selen *B* in Selen *A* vor, das elektrische Verhalten wird durch die Menge von Selen *B* bestimmt.

6. Der Träger der Lichtempfindlichkeit ist nur Selen *B*.

7. Die Lichtwirkung dürfte in einer Ionisation des Selens *B* bestehen, welches bis zu einer Sättigung fortschreitet. Das Anwachsen des Widerstandes nach erfolgter Sättigung könnte vielleicht auf eine gleichzeitige Photopolymerisation zurückzuführen sein.

8. In der Nähe des Schmelzpunktes über 200° C. hört die Lichtempfindlichkeit des Selens gänzlich auf.

9. Es wurde die Unhaltbarkeit der von Siemens und Hesehus für die Lichtempfindlichkeit II. Art aufgestellten Erklärungen nachgewiesen.

Diese Arbeiten wurden am elektrotechnischen Institute der k. k. Technischen Hochschule ausgeführt und ich erfülle die angenehme Pflicht, dem Vorstande des Institutes, Herrn Oberbaurat Prof. Karl Hochenegg, sowie dem Vorstande der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt, Herrn Hofrat Prof. Dr. J. M. Eder, für die freundliche Förderung, die sie meiner Arbeit zu teil werden ließen, meinen verbindlichsten Dank auszudrücken.

Grundzüge einer Theorie der synoptischen Luftdruckveränderungen

von

Dr. **Felix M. Exner.**

(Mit 25 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1906.)

Die Veränderung der Luftdruckverteilung[1] über einem Gebiete der Erdoberfläche ist für den Wechsel der Witterung von großer Bedeutung; die Kenntnis derselben wäre notwendig, um Wetterprognosen mit annähernder Genauigkeit aufzustellen. Bedenkt man, daß die Veränderung der Luftdruckverteilung zu einem bestimmten Zeitpunkt und an einem bestimmten Orte ganz oder gewiß wesentlich von der nächsten Umgebung desselben abhängig ist, so erscheint es wahrscheinlich, daß ein Studium der Luftdruckveränderungen innerhalb sehr kurzer Zeitintervalle zur Kenntnis der Gesetze führt, nach welchen sie geschehen, nicht aber ein solches für längere Zeiträume, wie z. B. einen Tag. Die synoptischen Wetterkarten werden aber nur für alle 12 oder 24 Stunden gezeichnet und sind daher zu jenem Studium meist nicht geeignet. Die Faktoren von Einfluß, Luftdruck, Temperatur und Wind (von Feuchtigkeit abgesehen), verändern sich zu einem Zeitpunkt aus der eben vorliegenden Situation heraus und verändern bis zum nächsten Zeitpunkt diese Situation selbst; aus der so veränderten Situation wachsen wieder neue Veränderungen heraus u. s. w., so daß am Ende eines längeren Zeitraumes die Verteilung von Druck, Temperatur und Wind gar keine Ähnlichkeit mehr mit jener zu Anfang

[1] Vergl. die eben erschienene Abhandlung von Nils Ekholm »Die Luftdruckschwankungen und deren Beziehung zu der Temperatur der oberen Luftschichten« im Hann-Bande der Met. Zeitschr. (1906) und die daselbst zitierte Arbeit von Felix Klitzkowski in der Met. Zeitschr. (1890).

zu haben braucht, ja ins Gegenteil verkehrt sein kann. Es handelt sich mit einem Worte um eine Integration, deren Resultat sich vom Anfangszustand aus gar nicht übersehen läßt; und auch die Gesetze der Veränderungen können aus dem Integralwert nicht entnommen werden.

Erster Teil.

Am »Weather Bureau« in Washington wurden für einige Jahre die Aufzeichnungen selbstregistrierender Apparate von einer großen Zahl über die Vereinigten Staaten verteilter meteorologischer Beobachtungsstationen reduziert. Während eines Aufenthaltes in Washington im Juli 1904 hatte ich Gelegenheit, dieses Material kennen zu lernen, und erhielt die Erlaubnis, dasselbe zu benützen, wofür ich auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche. Das Areal, über welches die Vereinigten Staaten ihre Beobachtungsstationen ausgestreut haben, ist so viel größer als Europa, die Beobachtungen sind durch ihre Gleichzeitigkeit (alle nach der Zeit des 75. Meridians westl. Länge angestellt) und die Gleichartigkeit der Apparate so viel verwendbarer als die europäischen, daß es viel versprach, mittels der erwähnten Registrierungen Wetterkarten für kurze Zeitintervalle zu dem obgenannten Zwecke zu zeichnen.

Die in Betracht kommenden Stationen sind alle mit Barograph, Thermograph und Anemograph ausgestattet, die reduzierten Werte von Druck, Temperatur, Windrichtung und -geschwindigkeit sind für jede Stunde gegeben. Ich schrieb diese registrierten Elemente eines ganzen Monates, des Jänner 1895, für jede vierte Stunde aus dem Archiv des Weather Bureau aus, und zwar für 44 Stationen, die über die Vereinigten Staaten verteilt sind. Die Stunden waren 4^h a., 8^h a., 12^h m., 4^h p., 8^h p., 12^h p.

Meine Meinung, die Herstellung von sechs Karten für 24 Stunden im Intervall von je 4 Stunden würde genügen, wurde während der Bearbeitung dieses Materials dahin geändert, daß es wohl vorteilhafter gewesen wäre, noch kürzere Intervalle zu nehmen, etwa zweistündige; hierauf soll später noch aufmerksam gemacht werden.

An der meteorologischen Zentrale der Dominion von Canada, in Toronto, hatte ich später Gelegenheit, das erworbene Material noch durch Beobachtungen an vier canadischen Stationen, also im Norden der Vereinigten Staaten, zu erweitern. Diese Beobachtungen sind keinen Registrierungen entnommen, sondern Terminablesungen; sie fielen mitunter nicht auf die gewählten 6 Stunden, doch gab es niemals größere Zeitdifferenzen zwischen den Terminablesungen und den gewählten Zeiten als eine Stunde, so daß die Werte interpoliert werden konnten. An Sonntagen wurden in Canada keine Ablesungen gemacht.

In alphabetischer Reihe sind im folgenden die benützten Stationen in den Vereinigten Staaten und in Canada mit ihren Seehöhen in Metern mitgeteilt:

Abilene V. St.	533 *m*	Kansas V. St.	294 *m*
Albany V. St.	26	Key West V. St.	7
Alpena V. St.	186	Knoxville V. St.	299
Atlanta V. St.	345	Little Rock V. St.	92
Bismarck V. St.	512	Lynchburg V. St.	209
Buffalo V. St.	210	Marquette V. St.	224
Chicago V. St.	251	Montreal Can.	57
Columbus V. St.	251	Nantucket V. St.	4
Denver V. St.	1613	Nashville V. St.	166
Des Moines V. St.	265	New York V. St.	56
Detroit V. St.	221	Roseburg V. St.	159
Dodge V. St.	763	St. Louis V. St.	174
Duluth V. St.	200	St. Paul V. St.	259
Eastport V. St.	23	Salt Lake City V. St.	1324
El Paso V. St.	1148	San Diego V. St.	28
Esquimault Can.	9	San Francisco V. St.	47
Galveston V. St.	13	Santa Fé V. St.	2133
Halifax Can.	36	Savannah V. St.	30
Havre V. St.	755	Spokane V. St.	588
Helena V. St.	1252	Vicksburg V. St.	77
Huron V. St.	399	Washington D. C., V. St.	34
Independence V. St.	1188	Wilmington V. St.	24
Indianopolis V. St.	233	Winnipeg Can.	232
Jacksonville V. St.	13	Yuma V. St.	43

Die Ausschreibungen, welche wegen ihres Umfanges hier nicht mitgeteilt werden können, betrafen den Luftdruck in englischen Zollen, die Temperatur in Fahrenheitgraden, die Windrichtung und die Windgeschwindigkeit in englischen Meilen pro Stunde. Der Luftdruck von den Stationen der Vereinigten Staaten mußte erst aufs Meeresniveau reduziert werden; hiezu benützte ich zum großen Teile die Reduktionstafeln, welche für diesen Zweck in Washington selbst im Gebrauch sind; einiges wurde auch erst in Wien an der k. k. Zentralanstalt mit den Tafeln für die österreichischen Stationen reduziert. Doch wurden die Reduktionen für die hochgelegenen Stationen Nordamerikas, insbesondere für Denver, El Paso, Helena, Independence, Salt Lake City und Santa Fé (sämtlich über 1000 *m*) durchwegs mit den amerikanischen Tafeln ausgeführt. welche auf die Temperaturverteilung über Plateaus oder Höhenrücken, auf welchen diese Stationen liegen, besondere Rücksicht nehmen.

Um den Zusammenhang zwischen Luftdruck, Temperatur und Wind zu studieren, zeichnete ich synoptische Karten für Luftdruck und Temperatur; zur Reduktion der letzteren aufs Meeresniveau wurde durchwegs eine Temperaturabnahme von 0·5° C. pro Hektometer benützt. Dieser Vorgang gab nur für die Station Denver mitunter unwahrscheinliche Werte; es scheint dortselbst Föhn aufzutreten.

Nebst den Karten für Druck und Temperatur konstruierte ich noch solche für die Winde, und zwar für die Stärke der West- und Nordkomponente. Hiezu mußten die beobachteten Intensitäten trigonometrisch in ihre Komponenten zerlegt werden. Es ließen sich mit diesen allerdings auf einer Karte Linien gleicher Stärke der West-, beziehungsweise Nordkomponente ziehen, doch war der Verlauf derselben oft recht kompliziert, offenbar infolge des Einflusses der Erdoberfläche, und sie wurden daher in dieser Untersuchung nicht verwendet.

Weiters schien es vorteilhaft, den Einfluß der täglichen Erwärmung der Atmosphäre durch die Sonne, soweit dies möglich, zu eliminieren. Zu dem Zwecke wurden aus den Beobachtungen von Luftdruck und Temperatur für den ganzen Monat die Monatsmittel für die Termine gebildet, aus ihnen der tägliche Gang abgeleitet und die Einzelwerte mit dem Betrage desselben korri-

giert. Dies wurde bei den Windbeobachtungen wegen des geringen täglichen Ganges unterlassen. Beim Luftdruck war der Einfluß auch nicht groß, mehrere Hundertel englischer Zoll, betrug aber bei der Temperatur mehrere Grade; er konnte jedoch niemals ganz eliminiert werden, da die Mittel gemeinsam aus heiteren und trüben Tagen entnommen werden mußten und folglich die heiteren Tage wohl zu wenig, die trüben zu stark korrigiert worden sind; Registrierungen der Bewölkung fehlten.

Erst mittels der Werte, aus denen der tägliche Gang möglichst eliminiert war, wurden nun synoptische Druck- und Temperaturkarten für jede vierte Stunde gezeichnet.

Es ist nichts neues, daß bei nördlichen Luftströmungen und abnehmender Temperatur auf der nördlichen Halbkugel der Luftdruck steigt wie an der Rückseite von Depressionen, hingegen bei südlichen Strömungen und zunehmender Temperatur der Luftdruck sinkt wie an der Vorderseite derselben; daß durch diese ungleichen Temperaturänderungen die Bewegung[1] der Depressionen in wesentlich westöstlicher Richtung entsteht, liegt sehr nahe. Derselbe Gedanke läßt sich auf die Hochdruckgebiete anwenden, bei welchen an der Vorderseite der nördliche Wind das Barometer zum Steigen, auf der Rückseite der südliche dasselbe zum Fallen bringt, und hiedurch ebenfalls eine scheinbare Verschiebung des ganzen Hochdruckgebietes nach Osten hervorgerufen wird. Auch sind plötzliche Luftdrucksteigerungen, sogenannte Druckstufen, durch das Eindringen kalter Luftmassen unter wärmere erklärt worden. Doch liegt meines Wissens kein abschließendes Urteil darüber vor, ob jene einfachen Annahmen quantitativ richtige, d. h. durch die Beobachtung bestätigte Resultate ergeben. Auch genügt es in keiner Weise, stets die Bewegung der Depressionen und Maxima zu verfolgen, deren Rolle für die Witterung meist sehr überschätzt wird, sondern es ist notwendig, die Bewegung der übrigen

---

[1] W. van Bebber hat mehrere allgemein gehaltene Sätze über den Einfluß der Druck- und Temperaturverteilung auf die Bewegung der Depressionen aufgestellt, die rein empirisch aus dem europäischen Beobachtungsmaterial abgeleitet wurden. Siehe Met. Zeitschr. 1891, p. 361.

Isobarenformen, aller der unzählig vielen Zwischentypen, zu kennen oder doch die Gesetze zu bestimmen, nach welchen sie geschehen.

In der vorliegenden Arbeit ist nun versucht, diese Gesetzmäßigkeiten aufzustellen und an der Hand des amerikanischen Beobachtungsmaterials zu prüfen. Dieselben praktisch auszuwerten, bleibt eine weitere Aufgabe, die hier noch nicht zu lösen unternommen wurde; doch soll der Weg angedeutet werden, auf welchem man sich vielleicht der Lösung nähern dürfte.

I.

Natürlich mußten die Voraussetzungen der Rechnung sehr einfach angenommen werden. Die oben angedeutete Beziehung zwischen Luftdruck- und Temperaturveränderung läßt sich leicht durch eine Gleichung ausdrücken. Bezeichnet p den Druck an der Erdoberfläche, p_1 denselben in einer Höhe H über dem Erdboden, T die absolute Mitteltemperatur der Luftschichte von der Höhe H, so ist nach der barometrischen Höhenformel

$$p = p_1 e^{\frac{gH}{RT}}, \qquad (1)$$

wo g die Schwerebeschleunigung, R die Gaskonstante der Luft und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Nimmt man nun an, in der Höhe H sei der Luftdruck p_1 konstant, indem die unperiodischen Schwankungen desselben in diese Höhe nicht mehr hinaufreichen, so erhält man durch partielle Differentiation der Gleichung (1) nach der Zeit

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{pgH}{RT^2}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (2)$$

da H sich mit der Zeit nicht verändert. $\frac{\partial p}{\partial t}$ bedeutet die Änderung des Druckes an einem bestimmten Ort in der Zeiteinheit; dieselbe ist proportional der Änderung der Mitteltemperatur daselbst, hat aber das entgegengesetzte Vorzeichen.

Wie groß H angenommen werden muß, damit man im Durchschnitt den Druck in dieser Höhe konstant setzen dürfe, versuchte ich nunmehr aus den Beobachtungen abzuleiten. Allerdings besteht da die Schwierigkeit, daß die Mitteltemperatur nicht gegeben ist, sondern nur die Temperatur an der Erdoberfläche. Nur soweit diese mit der Mitteltemperatur denselben Gang hat, kann daher von den Temperaturbeobachtungen an der Erdoberfläche für die vorliegende Frage Gebrauch gemacht werden.

Zur Prüfung dieser Frage wurde die Gleichung (2) demnach angewendet auf die Druck- und Temperaturveränderungen nach den amerikanischen Beobachtungen für 4 Stunden als Zeiteinheit. Dazu wurden von mehreren Stationen die beiden Schwankungen für jedes vierstündige Intervall des ganzen Monats gebildet. Die mangelhafte Korrektion der Temperatur für den täglichen Gang, die oben schon berührt wurde, bewirkte natürlich an manchen Terminen, z. B. von 8^h a. bis 12^h m., daß die korrigierte Temperatur an heiteren Tagen oft eine kleine Zunahme zeigte, obwohl der Druck gestiegen war; diese Erwägung sowie die Leichtigkeit, mit der die Temperaturbeobachtungen Fehler der Ablesung, der Aufzeichnung, der Reduktion aufs Meeresniveau u. s. w. haben konnten, veranlaßte mich, nur solche Temperaturschwankungen in Betracht zu ziehen, welche mindestens 3° Fahrenheit betrugen. Analog wurden von den Luftdruckschwankungen nur solche verwendet, die innerhalb 4 Stunden nicht geringer als 0·1 Zoll waren, um von Fehlern der Korrektion des täglichen Ganges, der Reduktion aufs Meeresniveau etc. möglichst unabhängig zu sein.

Hiefür benützte ich die Beobachtungen der Stationen Bismarck, Buffalo, Halifax, San Francisco und Vicksburg. Die Fälle, bei welchen gleichzeitig während des Monates Jänner 1895 während 4 Stunden Temperaturänderungen von mindestens 3° F. und Luftdruckänderungen von mindestens 0·1 Zoll auftraten, sind im folgenden zusammengestellt. Unter Δp ist die Druck-, unter ΔT die Temperaturänderung verstanden; erstere ist in Hundertel Zoll angegeben.

Tabelle I.

Datum	Zeit	Δp	ΔT	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$	Datum	Zeit	Δp	ΔT	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$	Datum	Zeit	Δp	ΔT	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$
Bismarck														
1.	8 a. bis 12	—11	6	—2	1.	12 bis 4 p.	—10	7	—1	4.	8 a. bis 12	—15	4	— 4
4.	12 » 4 p.	—23	5	—5	4.	12 » 4 p.	—23	5	—5	6.	12 p. » 4 a.	22	— 6	— 4
7.	4 » 8 a.	27	— 5	—5	7.	8 a. » 12	21	— 6	—4	7.	12 » 4 p.	17	— 4	— 4
7.	12 p. » 4 a.	—12	8	—2	8.	4 » 8 a.	—11	6	—2	8.	8 a. » 12	—10	6	— 2
8.	12 » 4 p.	—12	6	—2	10.	4 » 8 p.	18	— 8	—2	10.	8 » 12 p.	11	— 5	— 2
8.	12 p. » 4 a.	25	—16	—2	12.	8 » 12 p.	—15	4	—4	13.	8 a. » 12	—15	4	— 4
13.	12 » 4 p.	—10	6	—2	15.	12 » 4 p.	12	— 4	—3	16.	4 » 8 a.	12	— 3	— 4
17.	8 a. » 12	—10	13	—1	18.	8 a. » 12	12	— 6	—2	22.	4 » 8 p.	10	— 5	— 2
25.	4 » 8 p.	—11	6	—2	27.	8 » 12 p.	—10	— 3	+3	28.	4 » 8 a.	—18	15	— 1
28.	8 a. » 12	—26	5	—5	28.	4 » 8 p.	17	—11	—2	28.	8 » 12 p.	10	— 6	— 2
29.	12 p. » 4 a.	—10	7	—1	31.	4 » 8 a.	26	— 8	—3	31.	8 a. » 12	30	—11	— 3
31.	12 » 4 p.	11	— 8	—1										
Buffalo														
4.	4 bis 8 a.	19	— 6	—3	4.	12 bis 4 p.	10	— 3	—3	5.	8 a. bis 12	—17	5	— 3
5.	12 » 4 p.	—12	3	—4	5.	4 » 8 p.	—15	3	—5	5.	12 p. » 4 a.	—13	5	— 3
6.	4 » 8 a.	—10	11	—1	7.	12 » 4 p.	15	— 5	—3	8.	12 » 4 p.	12	— 7	— 2
10.	8 a. » 12	—20	4	—5	10.	4 » 8 p.	—19	6	—3	12.	8 a. » 12	—13	7	— 2

13.	8 a. bis 12	—16	— 6	+3	13.	8 bis 12 p.	12	5	+2	14.	12 bis 4 p.	10	5	+ 2
18.	8 a. » 12	—12	3	—4	19.	4 » 8 a.	21	— 3	—7	20.	8 a. » 12	—13	4	— 3
20.	8 » 12 p.	—10	7	—1	21.	4 » 8 a.	—15	5	—3	25.	8 » 12 p.	—38	4	—10
25.	12 p. » 4 a.	—18	7	—3	26.	12 » 4 p.	13	— 3	—4	26	8 » 12 p.	20	— 3	— 7
27.	4 » 8 a.	12	— 5	—2	28.	4 » 8 p.	—11	4	—3					
							Halifax							
1.	8 a. bis 12	—14	— 5	+3	1.	12 p. bis 4 a.	14	— 5	— 3	2.	4 bis 8 a.	14	— 4	— 4
2.	8 a. » 12	13	— 4	—3	4.	4 » 8 a.	—14	6	— 2	4.	12 p. » 4 a.	11	— 7	— 2
5.	8 a. » 12	12	— 8	—2	6.	8 » 12 p.	—15	8	— 2	10.	12 p. » 4 a.	—13	7	— 2
11.	4 » 8 a.	—21	6	—4	11.	12 » 4 p.	—12	10	— 1	14.	4 » 8 a.	11	— 4	— 3
14.	8 a. » 12	11	— 5	—2	15.	4 » 8 a.	—12	3	— 4	22.	4 » 8 a.	—13	8	— 2
21.	12 p. » 4 a.	11	— 4	—3	25.	12 » 4 p.	11	— 3	— 4	26.	8 a. » 12	—16	5	— 3
26.	12 » 4 p.	—33	7	—5	26.	4 » 8 p.	—38	9	— 4	26.	8 » 12 p.	—12	6	— 2
26.	12 p. » 4 a.	11	— 7	—2										
							San Francisco							
4.	4 bis 8 a.	—11	6	—2										
							Vicksburg							
1.	12 p. bis 4 a.	—10	3	—3	12.	4 bis 8 a.	13	—14	—1	21.	4 bis 8 p.	13	— 7	— 2
25.	12 » 4 p.	10	— 4	—3	25.	4 » 8 p.	18	— 5	—3	25.	8 » 12 p.	12	— 8	— 2
25.	12 p. » 4 a.	13	— 3	—4	26.	4 » 8 a.	10	— 4	—3	27.	12 p. » 4 a.	—14	3	— 5
28.	8 a. » 12	—10	— 5	+2										

Die fünf Stationen sind in verschiedenen Teilen Nordamerikas gelegen. In der Kolonne $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ der vorhergehenden Tabelle ist das Verhältnis der Druckschwankung in Hundertel Zoll zur Temperaturschwankung in Graden Fahrenheit angegeben. Wie man sieht, ist es in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle negativ, derart, daß positivem Δp negatives ΔT und umgekehrt entspricht.

Die Häufigkeit des positiven oder negativen $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ ist aus den ersten zwei Kolonnen der nachstehenden kleinen Tabelle zu ersehen.

	Anzahl der Fälle, wo		Mittel für negatives $\frac{\Delta p}{\Delta T}$
	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$ negativ	$\frac{\Delta p}{\Delta T}$ positiv	
Bismarck	33	1	−2·7
Buffalo	23	3	−3·7
Halifax	21	1	−2·8
San Francisco	1	0	−2·0
Vicksburg	9	1	−2·9
Zusammen	87	6	−3·0

Unter 93 Fällen ist also die Größe $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ 87 mal, d. h. in 93% aller Fälle negativ, so daß die Temperatur der Erdoberfläche an diesen Stationen recht gut mit der Mitteltemperatur der Luftsäule parallel geht, für welche die Gleichung (2) in Betracht kommt. Es scheint dies aber für die westliche Küste Nordamerikas, wie Esquimault, weniger gut zuzutreffen, da dortselbst häufige Druckänderungen ohne erhebliche Temperaturschwankungen auftreten; der Grund dafür ist nicht klar.

In der dritten Kolonne der obigen kleinen Tabelle sind die Mittel des Bruches $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ für die Werte, wo er negativ ist,

gebildet; sie weichen in der Größe nicht stark voneinander ab. Nimmt man sie als gleichwertig an und bildet für alle 87 Fälle der fünf Stationen das Mittel des Bruches, so ergibt sich —3·0 oder, wenn der Druck in ganzen Zollen, die Temperatur wieder in Fahrenheitgraden angegeben wird, $\frac{\Delta p}{\Delta T} = -0 \cdot 03$. Diese Zahl kann nicht als eine wirkliche Konstante aufgefaßt werden, sondern soll nur Vorzeichen und ungefähre Größe jenes Verhältnisses ausdrücken.

Auch sei noch speziell darauf verwiesen, daß aus den Beobachtungen nicht hervorgeht, daß jeder Druckschwankung eine umgekehrte Temperaturschwankung an der Erdoberfläche wirklich entspricht; es sind genug Fälle vorhanden, wo der Druck um 0·1 Zoll fällt und die Temperatur sehr wenig (weniger als 3° F.) zunimmt oder auch ein wenig abnimmt. Es darf daher nicht als erfahrungsmäßig bewiesen angesehen werden, daß jeder Druckschwankung eine bestimmte Temperaturschwankung am Boden entspricht, sondern es soll nur gesagt sein, daß bei gleichzeitigem Auftreten der beiden Schwankungen dieselben fast immer in dem angegebenen Verhältnis stehen. Trifft dies zu, so ist dann weiter anzunehmen, daß das ΔT an der Erdoberfläche auch dem ΔT der mittleren Temperatur der Luftsäule entspricht und folglich verwendbar ist, um den Koeffizienten der rechten Seite der Gleichung (2) zu berechnen.

Und hiefür allein soll diese Beziehung auch benützt werden. Die Gültigkeit der Gleichung (2) ist nicht anzuzweifeln, solange die barometrische Höhenformel gilt, also bei Abwesenheit vertikaler Beschleunigung. Es handelt sich nur darum, zu bestimmen, wie groß die Höhe H angenommen werden muß, in der sich der Luftdruck p_1 bei den betrachteten Schwankungen, wie sie die täglichen Wetterkarten von einem Tage zum nächsten uns vorführen, nicht mehr ändert, und hiezu dient uns die Größe —0·03.

Aus Gleichung (2) erhalten wir nämlich $\frac{pgH}{RT^2} = 0 \cdot 03$ und $H = \frac{0 \cdot 03 R . T^2}{pg}$. Hier wäre p in Zoll, T in Fahrenheitgraden einzusetzen. Die Gaskonstante $R = 29 \cdot 3 g$ setzt p in absoluten Einheiten und T in Celsiusgraden voraus; wir haben

demnach, um alles auf absolute Einheiten und Celsiusgrade zu beziehen, statt 0·03 zu setzen $\frac{0 \cdot 03 . 10333 . 10}{30 . 5 \cdot 56}$, da 10333 Dyn 30 Zoll und 5·56° Celsius (Differenz) 10° Fahrenheit entsprechen. H hängt nun allerdings vom jeweiligen p und T ab; doch wollen wir, da es sich nur um die Größenordnung des H handelt, p zum Normaldruck 10333 und T zu 260° absoluter Temperatur annehmen. Es ergibt sich dann:

$$H = \frac{0 \cdot 03 . 29 \cdot 3 . 260^2 . 10333 . 10}{10333 . 30 . 5 \cdot 56} = 3560 \, m,$$

d. h. die Temperaturschwankung bei bestimmter beobachteter Druckänderung an der Erdoberfläche reicht durchschnittlich bis in eine Höhe von zirka $3^1/_2$ *km*; die Luftsäule über dieser ist an den Druckschwankungen am Boden im allgemeinen nicht mehr beteiligt. Diese Größe H wird natürlich variabel sein nach Druck und Temperatur, also nach der Lage des Ortes, dann nach der Jahreszeit und wird in Wirklichkeit auch sonst erheblichen Schwankungen unterliegen, wie die Erfahrung gezeigt hat; es sollte hier nur ein Mittelwert festgestellt werden, über dessen Verwendbarkeit das Folgende zu entscheiden haben wird. Bei höheren Gebirgen kann die Rechnung keine Gültigkeit haben.

Wir haben nach dem Gesagten uns vorzustellen, daß über einem Teile der Erdoberfläche eine Fläche gleichen Luftdruckes p_1 die Luft in eine obere und untere Schichte trennt, von welchen die untere der Sitz der atmosphärischen Störungen ist, wie sie die synoptischen Karten zeigen, die obere aber durch dieselben nicht wesentlich berührt wird, sondern in einem ziemlich stationären Zustande sich befindet und nur langsamen Änderungen nach dem Wechsel der Jahreszeiten unterliegt. Der Druck p_1 ist nach dieser Definition als unabhängig von Zeit und Ort anzusehen, während die Höhe H für kurze Zeiträume — und wir beschränken uns hier auf solche, sehen also von den Änderungen während des Jahres ganz ab — konstant, aber eine Funktion des Ortes ist, über welchem die Luftsäule steht.

II.

Die Voraussetzungen für die Bewegung der Luftschichte von der Höhe H, die im folgenden benützt werden, sind: 1. adiabatische Bewegung[1] (hiezu wurde der tägliche Gang eliminiert), 2. gleichgerichtete Bewegung in allen Schichten einer Luftsäule bis zur Höhe H, 3. Abwesenheit von Reibungskräften, 4. Vernachlässigung der horizontalen Beschleunigung, 5. die Erdoberfläche als Ebene angenommen, 6. keine vertikale Bewegung.

Eine Gerade in der West—Ostrichtung sei die Abszissenachse, x sei positiv gegen Osten, senkrecht dazu sei y positiv gegen Süden; dann sind die Geschwindigkeiten eines Luftteilchens in der X- und Y-Richtung, u und v, folgendermaßen gegeben:

$$u = \frac{1}{\lambda \rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3}$$

$$v = -\frac{1}{\lambda \rho} \frac{\partial p}{\partial y} \tag{4}$$

mit Berücksichtigung der Voraussetzungen 3, 4 und 5. Hier ist λ die ablenkende Kraft der Erdrotation ($= 2\omega \sin \varphi$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, φ die geographische Breite ist), ρ die Dichte, welche mit Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen der Mitteltemperatur der Luftsäule und der Oberflächentemperatur, hier $\frac{p}{RT}$, gleichgesetzt wird (p Druck an der Erdoberfläche, T Mitteltemperatur). Diese Gleichungen sprechen eine Bewegung der Luft parallel zu den Isobaren aus, was, wenn auch am Erdboden unwahr, die ungefähre Strömungsrichtung der ganzen Luftsäule H sein möge.

Die Gleichung für die einem Gase zugeführte Wärme dQ (I. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie) kann geschrieben werden:

$$dQ = c_p dT - \frac{ART}{p} dp. \tag{5}$$

[1] Diese Annahme ergibt sich aus der Tatsache, daß Winde, die aus kalten Gebieten kommen, im allgemeinen kalt, aus warmen aber warm sind.

(c_p, spezifische Wärme bei konstantem Druck, für Luft $= 0 \cdot 2375$, A Wärmeäquivalent $= \frac{1}{424\,g}$.)

Für den adiabatischen Zustand ergibt dies

$$\frac{c_p}{AR}\,\frac{1}{T}\,\frac{dT}{dt} = \frac{1}{p}\,\frac{dp}{dt}$$

oder, wenn $\frac{c_p}{AR} = \varkappa$:

$$\frac{\varkappa}{T}\,\frac{dT}{dt} = \frac{1}{p}\,\frac{dp}{dt} \tag{6}$$

für die Zeiteinheit.

Das vollständige Differential nach der Zeit wird in die partiellen zerlegt und man erhält:

$$\frac{\varkappa}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

da nach der sechsten Voraussetzung die vertikale Bewegung Null ist.

Aus Gleichung (3) und (4) ergibt sich ferner:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\lambda\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) \text{ und } u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

mithin:

$$\frac{\varkappa}{T}\,\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\varkappa R}{\lambda p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x}\,\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{1}{p}\,\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Ich setze nunmehr für $\frac{\partial T}{\partial t}$ den Wert aus Gleichung (2) ein und erhalte, wenn wieder $c_p = \varkappa . AR$ eingeführt wird,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{gHc_p}{(c_pT + AgH)\lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Diese Gleichung ermöglicht eine Berechnung der zeitlichen Druckänderung an einem Orte der Erdoberfläche aus den horizontalen Druck- und Temperaturgradienten, und zwar in ziemlich einfacher Weise.

Dabei ist freilich vorausgesetzt, daß die Gradienten der Mitteltemperatur $\frac{\partial T}{\partial x}$ und $\frac{\partial T}{\partial y}$ dieselben sind wie die an der Erdoberfläche beobachteten und durch die Isothermen ausgedrückten.

Der Klammerausdruck in Gleichung (7) läßt sich noch folgendermaßen umformen: Es seien in Fig. I die mit p und p' bezeichneten Geraden zwei Isobaren mit den Druckwerten p und p', die Geraden T und T' zwei Isothermen mit diesen

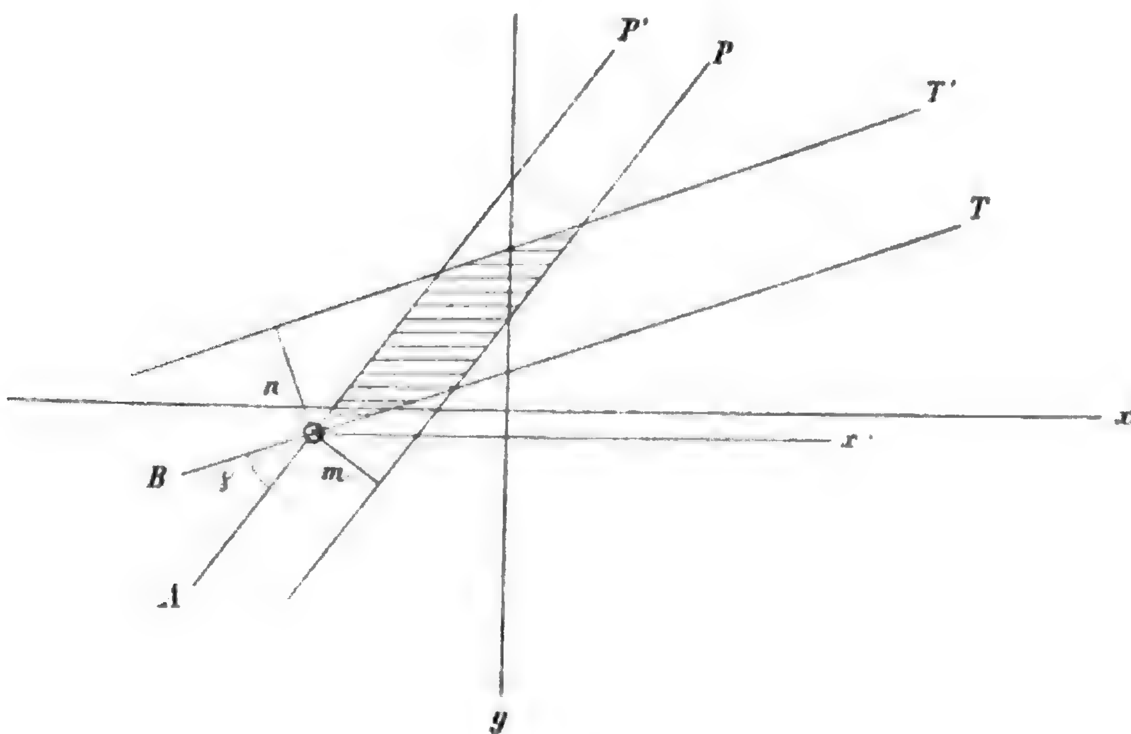


Fig. I.

Temperaturen; die Druckdifferenz $p - p' = \delta p$ sei positiv, ebenso die Temperaturdifferenz $T - T' = \delta T$. Der Flächeninhalt, welchen die beiden Isobaren und Isothermen miteinander einschließen, möge f sein (schraffiert gezeichnet).

Ist der senkrechte Abstand der Isobaren voneinander m, der der Isothermen voneinander n, so ist $\delta p = \frac{\partial p}{\partial m} m$, $\delta T = \frac{\partial T}{\partial n} n$; der Winkel, den m und n einschließen, sei ferner γ, dann ist $f = \frac{mn}{\sin \gamma}$, wie sich ergibt, wenn die Grundlinie mit der Höhe multipliziert wird.

Im Punkte O werde eine Parallele zur X-Achse (X') gezogen und es sei der Winkel $AOX' = \alpha_1$, $BOX' = \alpha_2$, dann ist:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial m} \sin \alpha_1, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial m} \cos \alpha_1,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial n} \sin \alpha_2, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial n} \cos \alpha_2$$

und, weil $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial m}\frac{\partial T}{\partial n} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\partial p}{\partial m}\frac{\partial T}{\partial n} \sin \gamma.$$

Wird für $\sin \gamma$ der Wert $\frac{mn}{f}$ eingeführt und

$$m = \frac{\delta p}{\frac{\partial p}{\partial m}}, \quad n = \frac{\delta T}{\frac{\partial T}{\partial n}}$$

gesetzt, so ergibt sich schließlich:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\delta p . \delta T}{f}, \tag{8}$$

und Gleichung (7) nimmt die Gestalt an:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{g H c_p}{(c_p T + AgH)\lambda} \frac{\delta p \, \delta T}{f}, \tag{9}$$

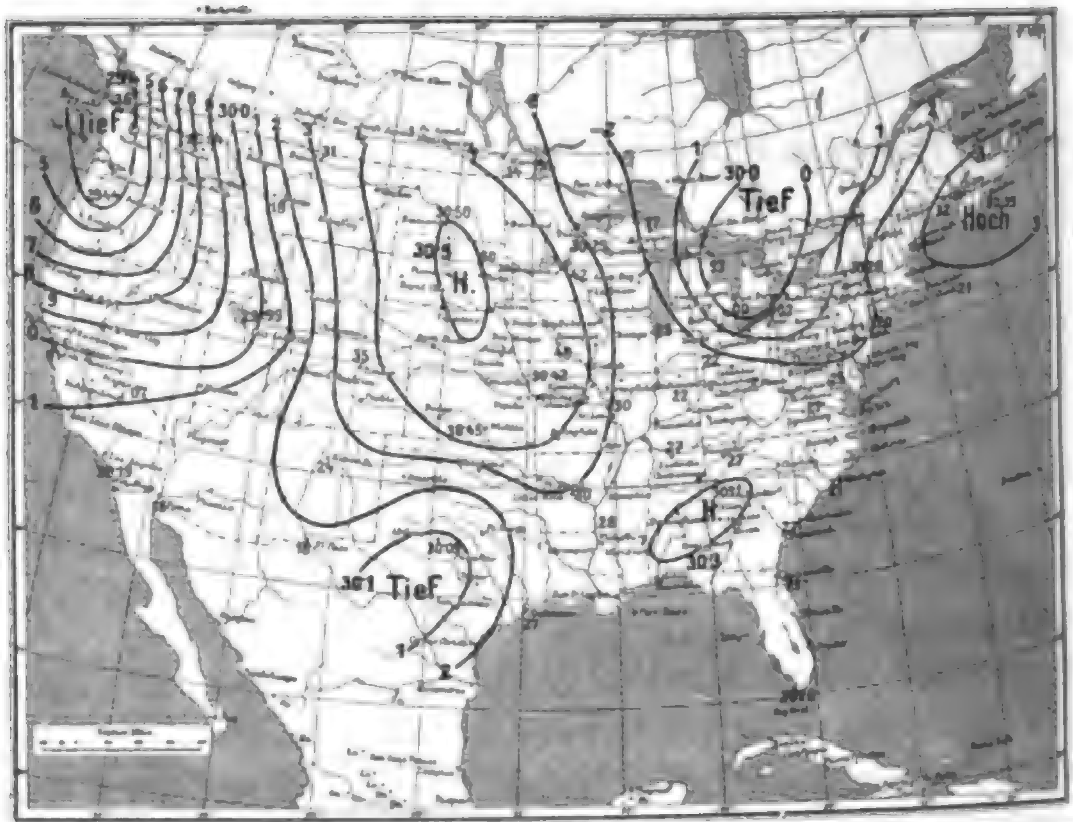
d. h. die Änderung des Luftdruckes mit der Zeit an einem Orte der Erdoberfläche ist verkehrt proportional dem Flächeninhalt, den zwei benachbarte Isobaren und zwei benachbarte Isothermen daselbst begrenzen. Ich muß noch bemerken, daß f eine Größe ist, die positiv und negativ sein kann. In dem in Fig. I gezeichneten Beispiel ist f positiv, da $\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} > \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$ ist; dort sind alle vier Gradienten positiv angenommen, da $p' < p$, $T' < T$. Denkt man sich das Koordinatensystem so gedreht, daß die Isobaren

parallel zur Y-Achse sind, so ist $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ und $f = \frac{\delta p \, \delta T}{\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}}$; ist noch $\frac{\partial p}{\partial x}$ positiv, so sind für die Isothermen zwei Fälle möglich: der, daß $\frac{\partial T}{\partial y}$ positiv, und der, daß es negativ ist. Der erste trifft zu, wenn T südlicher als T' liegt, also während sich die Isothermen von einer zur Y-Achse parallelen Lage mit Kälte im Osten gegen den Uhrzeiger um 180° drehen, bis die kalte Seite im Westen liegt, der zweite, während diese Drehung um weitere 180° fortgesetzt wird, wo dann die Kälte von Westen über Süden nach Osten wandert. Je nach der relativen Lage zu den Isobaren sind hienach die Vorzeichen der Fläche f zu bestimmen. Einfacher läßt sich dies aber ausführen, wenn man sich die Luftbewegung parallel zur Isobare und auf der nördlichen Hemisphäre mit dem hohen Drucke zur rechten Hand, also in Fig. I Südwestwind, vorstellt und nachsieht, ob die Luft aus wärmeren in kältere Regionen strömt oder umgekehrt; im ersten Falle ist f positiv (Fig. I), also $\frac{\partial p}{\partial t}$ negativ, im zweiten f negativ, so daß der Druck steigt.

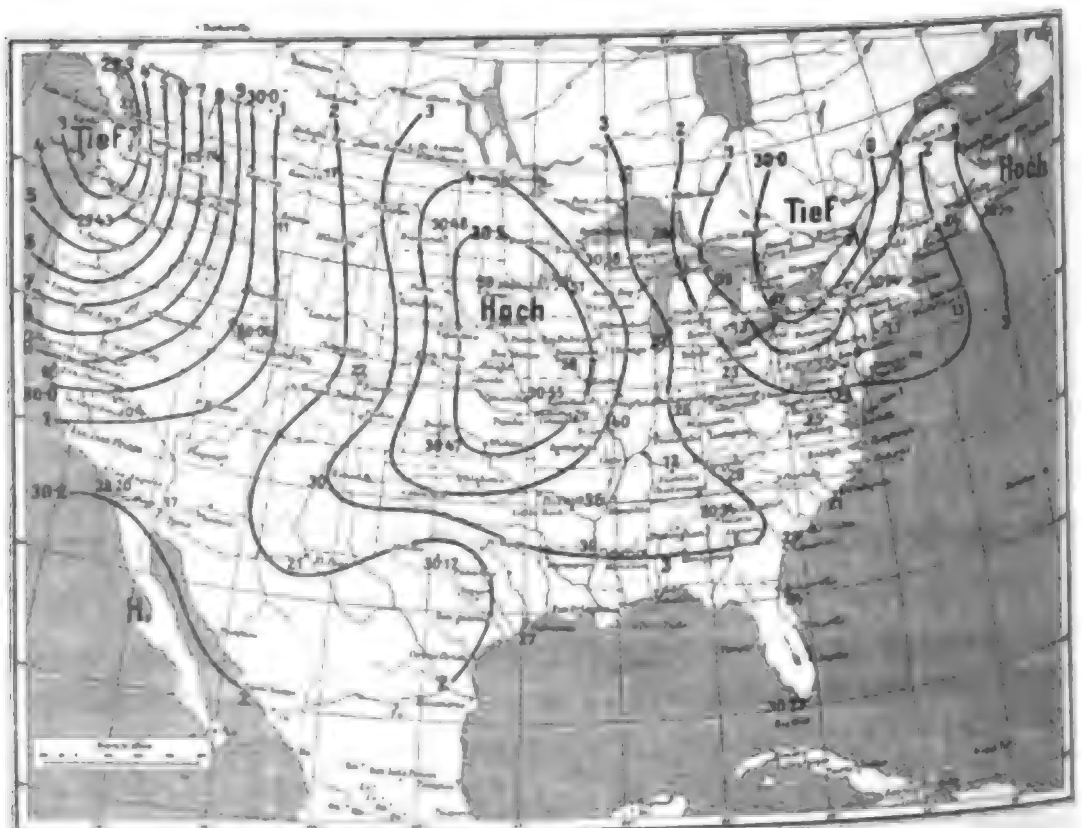
Es handelt sich nun darum, nach der Gleichung (9) das $\frac{\partial p}{\partial t}$ zu berechnen und das Ergebnis bezüglich Vorzeichen und Größe mit den Beobachtungen zu vergleichen.

In den Karten 1 und 2 sind die Druckverhältnisse vom 3. Jänner, 8^h p. und 12^h p. für Nordamerika in englischen Zoll gegeben, in den Karten 3 und 4 von denselben Zeiten die Temperaturverteilungen an der Erdoberfläche, aufs Meeresniveau reduziert, und zwar in absoluter Temperatur nach Fahrenheitgraden. Diese ist durch Addition von 460° F. zur gegebenen Fahrenheittemperatur gebildet.

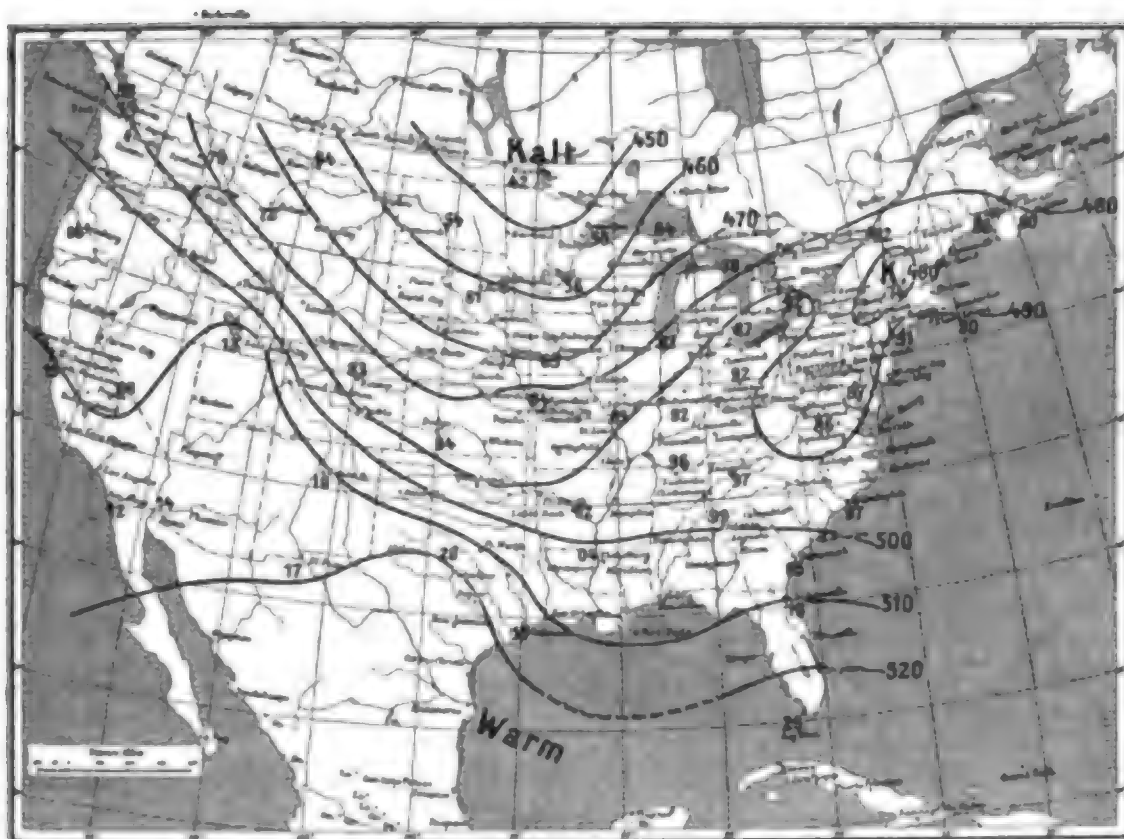
Ein praktisches Mittel zur Beurteilung der eintretenden Druckänderung nach Gleichung (9) ist es, die Temperaturkarte und die Druckkarte von derselben Zeit übereinander zu legen und gegen das Licht zu halten; man sieht dann sofort die von



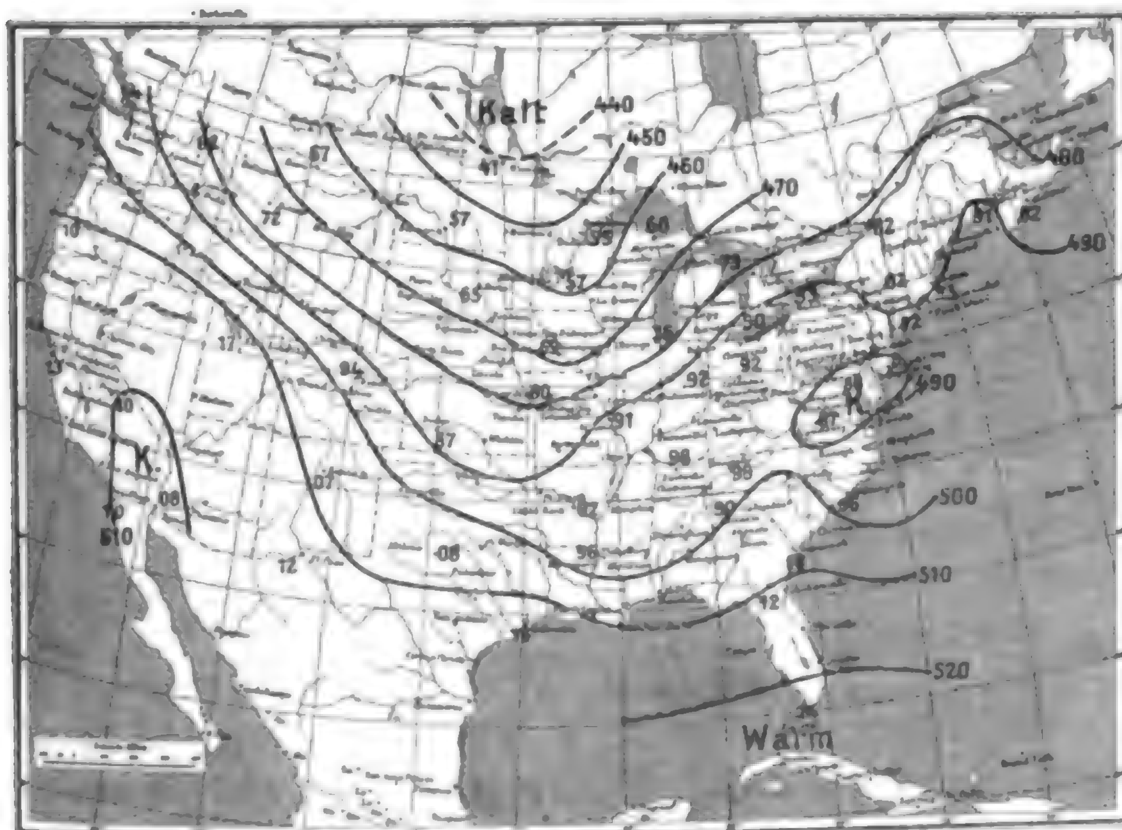
Karte 1. p am 3. Jänner, 8^h p.



Karte 2. p am 3. Jänner, 12^h p.



Karte 3. *T* am 3. Jänner, 8ʰ p.



Karte 4. *T* am 3. Jänner, 12ʰ p.

zwei Isobaren und zwei Isothermen eingeschlossenen Flächen, kann sich zu dem Verlauf der Isobaren leicht die Luftströmungen parallel zu diesen hinzudenken und beurteilen, ob die Fläche f an einer Stelle Steigen oder Fallen des Barometers bedeutet. Je kleiner f ist, um so mehr soll der Luftdruck sodann steigen, beziehungsweise fallen. Noch bequemer ist es, die Isothermen oder Isobaren auf Pauspapier zu kopieren und dieses auf die andere Karte aufzulegen.

Da $\frac{\partial p}{\partial t}$ der Differenz δp der Druckwerte zweier benachbarter Isobaren proportional ist, welche zwei Seiten der Fläche bilden, so ist in dem Falle, daß eine stark gekrümmte Isobare mit zwei Isothermen eine Fläche einschließt, keine Druckänderung zu erwarten, denn dann ist $\delta p = 0$. Dies liegt z. B. um 8^h p. für die Fläche, die von der ellipsenförmigen Isobare 30·5 und den Isothermen 460 und 470 gebildet wird, vor.

Aus den übereinandergelegten Karten sieht man ohneweiters, daß der Druck im Westen der großen Antizyklone fallen, im Osten derselben steigen soll. Dies wird im allgemeinen auch durch die Beobachtung bestätigt. Für Salt Lake City stimmt es nicht. Doch muß bei diesen Vergleichen sofort bemerkt werden, daß eine Differentialgleichung ja nicht ohneweiters auf einen Zeitraum von 4 Stunden angewendet werden darf. Etwas südwestlich von dieser Stadt sieht man, daß kältere Luft in ein wärmeres Gebiet strömt; dort soll demnach der Druck steigen; im Laufe der Zeit — in vier Stunden — kann sich dieses Steigen sehr wohl bis Salt Lake City fortgepflanzt haben. Man tut darum gut, die Differentialgleichung (9) zunächst nur dort anzuwenden, wo für 4 Stunden keine Änderung im Zeichen der Fläche, nur in der Größe zu erwarten steht, vermeidet also die Anwendung bei komplizierterem Verlauf der Isobaren und erhält dann zum größten Teile richtige Vorzeichen des $\frac{\partial p}{\partial t}$.

Ich habe diese zunächst qualitative Prüfung auf eine große Zahl von Isobaren- und Isothermenkarten angewendet und zum größten Teile Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung gefunden. In der Nähe der Grenzen der Karte ist

natürlich weniger zu erwarten, ebenso sind gewiß Fälle vorhanden, bei welchen Beobachtung und Rechnung nicht harmonieren, wie z. B. in der Nähe der Gebirge im westlichen Teile Amerikas; doch kommt es hier nicht auf die genaue Voraussage jeder Druckänderung an, sondern auf die prinzipielle Frage nach den Gesetzen, gemäß welchen die Schwankungen zumeist und ohne Störung durch die Erdoberfläche geschehen. Wegen der Unmöglichkeit, die ganze Serie von Karten hier zu reproduzieren, muß ein weiterer Nachweis des Ergebnisses dieser qualitativen Prüfung hier unterbleiben.

Es soll nun zunächst die Größenordnung der berechneten Druckschwankung nach Gleichung (9) mit den Beobachtungen verglichen werden. Der Faktor $\frac{gHc_p}{(c_p T+AgH)\lambda}$ ist nicht konstant, doch setze ich hier für H, T und λ Werte ein, die im Mittel den natürlichen Verhältnissen im Winter und in 40° nördl. Breite, ungefähr der Mitte Nordamerikas, entsprechen. Da die Isobaren auf den reproduzierten Wetterkarten von Zehntel zu Zehntel Zoll gezogen sind, so ist $\delta p = 0 \cdot 1$ Zoll; $\frac{\partial p}{\partial t}$ ergibt sich dann auch in Zoll. Die Isothermen, von 10 zu 10° F. gezogen, ergeben $\delta T = 10°$ F. oder, wenn T in Celsiusgraden ausgedrückt wird, was wegen c_p praktischer ist, $\delta T = 5 \cdot 56$°C. Nimmt man nun — einigermaßen beliebig — $T = 260°$ (die Mitteltemperatur), $H = 3500\,m$ an und setzt $\omega = 7 \cdot 3 . 10^{-5}$, folglich $\lambda = 9 \cdot 3 . 10^{-5}$ (für 40° Breite), so ergibt sich

$$\frac{c_p g H}{(AgH+c_p T)\lambda} = \frac{0 \cdot 2375 . 10 . 3500}{9 \cdot 3 . 10^{-5}\left(\frac{3500}{424}+0 \cdot 2375 . 260\right)} = 1 \cdot 28 . 10^6$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -1 \cdot 28 . 10^6 \frac{0 \cdot 1 . 5 \cdot 56}{f} = -\frac{7 \cdot 11 . 10^5}{f}.$$

Ich habe den Flächeninhalt, den Isobaren und Isothermen miteinander auf den übereinandergelegten Karten einschließen, gemessen, und zwar mittels eines Planimeters, das die Flächen in Zehntel Quadratzentimetern ablesen ließ. Die Karten, mit denen ich arbeitete, waren gegen die hier reproduzierten dreimal linear

größer. Es müssen natürlich die in Quadratzentimetern gemessenen Flächen auf die wirkliche Größe der Erdoberflächenstücke reduziert werden. Die Länge von fünf Äquatorgraden betrug bei meinen Arbeitskarten $2 \cdot 8\,cm$, so daß die Fläche f_g, welche mit dem Planimeter in $^1/_{10}\,cm^2$ gemessen wurde, den Wert hat

$$f_g = \frac{f . 2 \cdot 8^2 . 10}{555^2 . 10^6}.$$

Da die Druckänderung dem f verkehrt proportional ist, wurde zur Bestimmung derselben gleich der reziproke Wert von f gebildet, und zwar, um Dezimalen zu vermeiden, mit 100 multipliziert, so daß $\varphi_g = \frac{100}{f_g}$ die aus den Karten gewonnene Größe ist, der die Druckänderung proportional sein soll. Setzt man dieselbe in die obige Gleichung für $\frac{\partial p}{\partial t}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -7 \cdot 11 . 10^5 \frac{10 . 2 \cdot 8^2 . \varphi_g}{555^2 . 10^6 . 100} = -1 \cdot 8 . 10^{-6} \varphi_g. \qquad (10)$$

Dieser Ausdruck stellt die Druckänderung in einer Sekunde vor. Wenn man die Differentialgleichung auf 4 Stunden anwenden will, so setzt das voraus, daß die eingeschlossene Fläche stets gleich bleibt; das wird aber offenbar nur unter ganz besonderen Bedingungen der Fall sein. Eine Genauigkeit ist also nicht zu erwarten, wenn wir diese Gleichung auf ein vierstündiges Intervall ausdehnen. Doch versuchte ich es zum Vergleich der Rechnung mit der Wirklichkeit. Zu dem Zwecke ist die rechte Seite der Gleichung (10) mit dem Faktor 4.3600 zu multiplizieren und, wenn das $\frac{\partial p}{\partial t}$ für 4 Stunden $\left(\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{4\,St.}\right)$ in $^1/_{100}$ Zoll erhalten werden soll, noch mit 100.

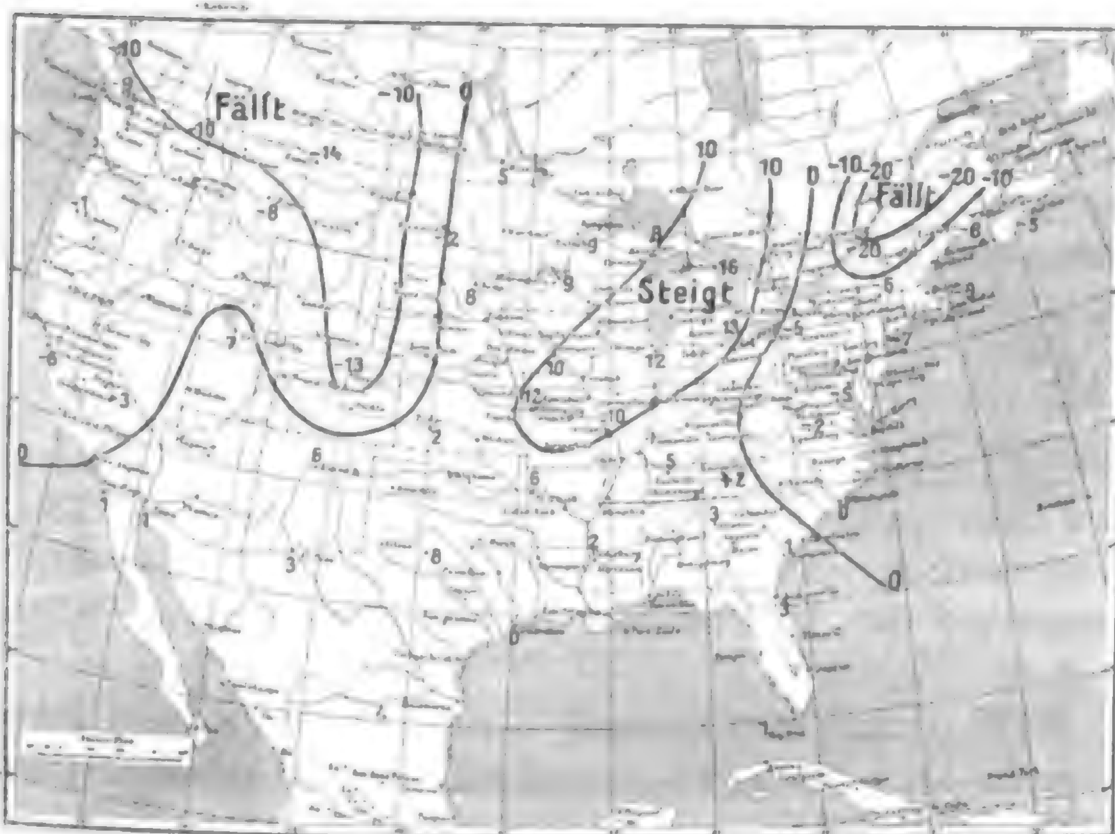
Dann ergibt sich

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{4\,St.,\ ^1/_{100}\,Z.} = -2 \cdot 2\, \varphi_g. \qquad (11)$$

Die zu erwartende Druckänderung ist also von der Größenordnung des hundertfachen reziproken Wertes der ausgemessenen Fläche in Zehntel Quadratzentimeter, d. i. des φ_g.



Karte 5. $\frac{\partial p}{\partial t}$ am 3. Jänner, 8^h p., aus Isobaren und Isothermen berechnet.



Karte 6. $\frac{\partial p}{\partial t}$ 3. Jänner, 8^h p. bis 3. Jänner, 12^h p., tatsächlich beobachtet.

Auf Karte 5 findet man die Ergebnisse der Gleichung (11) auf die Isobaren- und Isothermenkarte vom 3. Jänner 8^h p. angewendet. Die Linien gleicher Luftdruckschwankung sind von 10 zu 10 Hundertel Zoll gezeichnet. Da an allen Orten, wo die Isothermen oder Isobaren weit voneinander liegen, sowie in der Nähe der Kartengrenzen eine abgegrenzte Fläche nicht gebildet wird, können die φ_g dort auch nicht bestimmt werden; darum enthält die Karte 5 so spärliche Daten zur Zeichnung der Kurven. In Karte 6 sind die tatsächlich während der 4 Stunden von 8 bis 12^h p. beobachteten Druckschwankungen in ähnlicher Weise eingetragen. Ein kurzer Überblick zeigt die Übereinstimmung in der Verteilung der Steig- und Fallgebiete. Die Nullkurven haben ungefähr dieselbe Lage; genauer gesagt, sind sie auf Karte 6 etwas mehr im Osten. Das Steiggebiet der Kurve mit der Bezeichnung 10 umschließt in beiden Karten ungefähr die gleichen Flächenräume, ist aber auf Karte 6 auch östlicher gelegen. Hingegen ist der berechnete Druckanstieg innerhalb dieses Gebietes bedeutend größer als in Wirklichkeit; derselbe wäre da im Maximum 50, in Wirklichkeit nur 16 (Alpena). Ähnlich verhält es sich im westlichen Fallgebiete. Es ist dies nicht zu verwundern: wo der Druck sich um 8^h p. am stärksten ändert, zwischen den nordamerikanischen Seen, wird dieses Maximum der Änderung gewiß nicht durch alle 4 Stunden anhalten, sondern sich während dieser Zeit örtlich verschieben. Daher ist es ein unrichtiger Vorgang, das Maximum der Druckänderung der Zeit proportional zu setzen und darum gelangt man zu diesen extremen Werten. Wo die $\frac{\partial p}{\partial t}$ während der 4 Stunden keinen so großen Schwankungen unterliegen, scheint die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ganz befriedigend, wenn man bedenkt, daß unrichtige Grundlagen ebensogut das Tausendfache des beobachteten Wertes hätten ergeben können.

Die östliche Verschiebung der Kurven auf Karte 6 gegen jene auf Karte 5 hängt natürlich auch mit der Anwendung der Differentialgleichung auf einen längeren Zeitraum zusammen. Dieser Übelstand wird vorhanden sein, solange die Differential-

gleichung nicht integriert ist, doch läßt sich da trotzdem eine Verbesserung anbringen.

III.

Aus den Gleichungen (2) und (9) ergibt sich:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c_p R T^2}{p\lambda(c_p T + AgH)} \frac{\delta p \delta T}{f}. \tag{12}$$

Die Änderung der Temperatur läßt sich demnach auf dieselbe Weise wie die des Druckes mit Hilfe der Flächen f berechnen. Es ist nun klar, daß zu einer bestimmten Zeit sowohl Druck als Temperatur der Veränderung unterliegen und mit dem Drucke auch die Windrichtung und -stärke. Folglich wird der Klammerausdruck in Gleichung (7) $\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}$ sich nicht nur infolge des $\frac{\partial p}{\partial t}$, sondern auch des $\frac{\partial T}{\partial t}$ fortwährend verändern; nicht nur die Druck-, sondern auch die Temperaturgradienten sind von der Zeit abhängig. Ein Überblick über die nach einem endlichen Zeitintervall zu erwartenden Druckänderungen wird daher noch schwerer zu erhalten sein, als wenn die Änderung aus der Druckverteilung allein abgeschätzt werden sollte. Es läßt sich dies leichter formulieren, wenn wir den zweiten Differentialquotienten zu Hilfe nehmen. Man kann ja daran denken, die Gleichung (7) auf ein recht kurzes, aber endliches Zeitintervall Δt anzuwenden, die $\frac{\partial p}{\partial t}$ für dieses also zu berechnen und sie zu der anfänglichen Druckverteilung zu addieren, um die zur Zeit Δt herrschende zu erhalten; dann kann man analog die neue Temperaturverteilung zur Zeit Δt berechnen, auf diese beiden wieder die Gleichung (7) anwenden, um die Verteilung der beiden Elemente zur Zeit $2\Delta t$ zu bestimmen, und dies so lange fortsetzen, bis man zum gewünschten Zeitpunkte $n\Delta t$ gelangt ist. Dieses Verfahren wäre äußerst mühevoll, könnte aber zum Ziele führen. Ein anderes ist das folgende:

Es sei p' der Druck nach Verlauf der Zeit dt, p'' derselbe nach der Zeit $2dt$, dann ist

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial t} dt, \quad p'' = p' + \frac{\partial p'}{\partial t} dt$$

oder

$$p'' = p + 2\frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dt^2.$$

Zur Berechnung von p'' handelt es sich also noch darum, $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ zu bilden. Aus der Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{gHc_p}{(c_p T + AgH)\lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

findet man, wenn der Faktor vor dem Klammerausdruck zur Vereinfachung konstant angenommen und mit M bezeichnet wird:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -M\left(\frac{\partial \frac{\partial p}{\partial x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\partial p}{\partial y}}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial y}}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial x}}{\partial t}\right).$$

Bezeichnen wir den Klammerausdruck der Gleichung (7) mit ∇, schreiben also $\frac{\partial p}{\partial t} = -M\nabla$, so wird

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -M\left[-M\frac{\partial \nabla}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + M\frac{\partial \nabla}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial t}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial t}}{\partial y}\right].$$

Die ersten beiden Glieder des Ausdruckes sind ganz analog gebaut dem Ausdruck von $\frac{\partial p}{\partial t}$ selbst, mit dem Unterschiede, daß ein anderer Faktor $(-M^2)$ an die Stelle von M getreten ist und statt des Druckes p der Ausdruck ∇ vorkommt. Die beiden letzten Glieder könnten durch Gleichung (12) in analoger Weise ausgedrückt werden. Wenn es möglich ist, statt T eine Größe einzuführen, die von der Zeit unabhängig ist, so würden die beiden letzten Glieder verschwinden und die Gleichung für $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ wäre, wie gesagt, der für $\frac{\partial p}{\partial t}$ ganz analog.

Eine solche Möglichkeit ist nun vorhanden, und zwar indem man statt T die in der Gleichung (1) eingeführte Höhe H wählt, in welcher sich der Luftdruck mit der Zeit nicht mehr ändert. H ist von der Zeit unabhängig, aber variabel mit den Koordinaten x und y. Wir differenzieren die Gleichung (1) nach x und y partiell und erhalten:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{pg}{RT^2}\left(T\frac{\partial H}{\partial x} - H\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{pg}{RT^2}\left(T\frac{\partial H}{\partial y} - H\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

und, wenn wir die erste Gleichung mit $\frac{\partial p}{\partial y}$, die zweite mit $\frac{\partial p}{\partial x}$ multiplizieren, addieren und umformen:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{T}{H}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right) \qquad (13)$$

und mithin sogleich:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{c_p g T}{(AgH + c_p T)\lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}\right). \qquad (14)$$

Auf die obige Bemerkung zurückkommend, erhält man also auf diese Weise, da $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ist, einen Ausdruck für $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$, der jenem für $\frac{\partial p}{\partial t}$ ganz analog gebaut ist; man braucht nur statt des Druckes p den Wert $\nabla' = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}$ einzusetzen. Dieser Ausdruck ist wieder verkehrt proportional dem Flächeninhalt, den die Isobaren mit Linien gleicher Höhe, in welcher der konstante Druck p_1 herrscht, einschließen. Diese Linien sind mit der Zeit nicht veränderlich. Haben wir eine Karte für ∇' entworfen, so geben uns die Flächen, welche von den Linien gleicher Höhe und gleicher ∇' gebildet werden, ein Maß für $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. Offenbar kann man dies fortsetzen und $\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}$ auf analoge Weise, stets dieselben H-Linien benützend, bilden.

Doch müssen wir uns nun über die Berechnung und den Verlauf der H-Linien selbst orientieren.

Nach Gleichung (1) hängt H, die Höhe, in welcher der Luftdruck sich mit der Zeit nur ganz wenig und kontinuierlich im Verlauf der Jahreszeiten ändert, von p, p_1 und T ab. Der Luftdruck an der Erdoberfläche ist durch Beobachtung für jeden Ort gegeben, der Druck p_1 wird für alle Orte gleich gesetzt; somit fehlt uns nur T zur Berechnung von H aus der Gleichung (1). Die Mitteltemperatur der Luftsäule zu einer bestimmten Zeit ist nicht bekannt. Ich habe daher, da H für einen längeren Zeitraum konstant sein soll, zur Berechnung dieser Größe nicht die Einzelbeobachtungen, sondern die Monatsmittel hergenommen und für die Mitteltemperatur der Luftschichte im Monatsmittel einen Wert benützt, der sich aus linearer Temperaturabnahme nach der Höhe vom Erdboden aus ergab. Sei δ die Temperaturabnahme bei einer Erhebung um 1 m, T_0 die absolute Temperatur an der Erdoberfläche, so erhält die barometrische Höhengleichung die Form:

$$p = p_1 \left(\frac{T_0}{T_0 - \delta H}\right)^{\frac{g}{R\delta}} \tag{15}$$

oder

$$H = \frac{T_0}{\delta}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{R\delta}{g}}\right]. \tag{16}$$

Nach Gleichung (16) wurden die Höhen nun berechnet, indem für p_1 ein konstanter Wert, für T_0 das Monatsmittel der Temperatur, für p das des Luftdruckes der betreffenden Station eingesetzt wurde.

Auf das anfängliche, aus gleichzeitigen Druck- und Temperaturschwankungen abgeleitete Resultat zurückgreifend, nach welchem H der Größenordnung nach 3500 m betragen soll, wurde zunächst $p_1 = 492$ mm gesetzt, ein Druck, der ungefähr dieser Höhe entspricht. Da aber jenes Resultat auch aus der Anwendung einer Differentialgleichung auf einen längeren Zeitraum (4 Stunden) abgeleitet war, schien es wahrscheinlich, daß H in Wirklichkeit größer ist als 3500 m. Ich berechnete daher auch die Höhen H für eine Größenordnung derselben von 5000 m, d. i. $p_1 = 409$ mm, und schließlich noch für zirka 10.000 m oder $p_1 = 217$ mm. Der wahrscheinlichste dieser drei Werte scheint mir der zweite, $p_1 = 409$ mm.

Die aus den 31 Jännertagen mit täglich sechs Terminbeobachtungen gebildeten Mittelwerte p und T_0, die zur Verwendung kamen, sind mit den berechneten Höhen H_1 (492 *mm*), H_2 (409 *mm*) und H_3 (217 *mm*) in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Es wurde durchwegs eine Temperaturabnahme von 0·5° C. pro Hektometer, also $\delta = 5.10^{-3}$ angenommen, was im Monatsmittel wohl keine allzu großen Fehler hervorgebracht hat (die Station Denver ausgenommen).

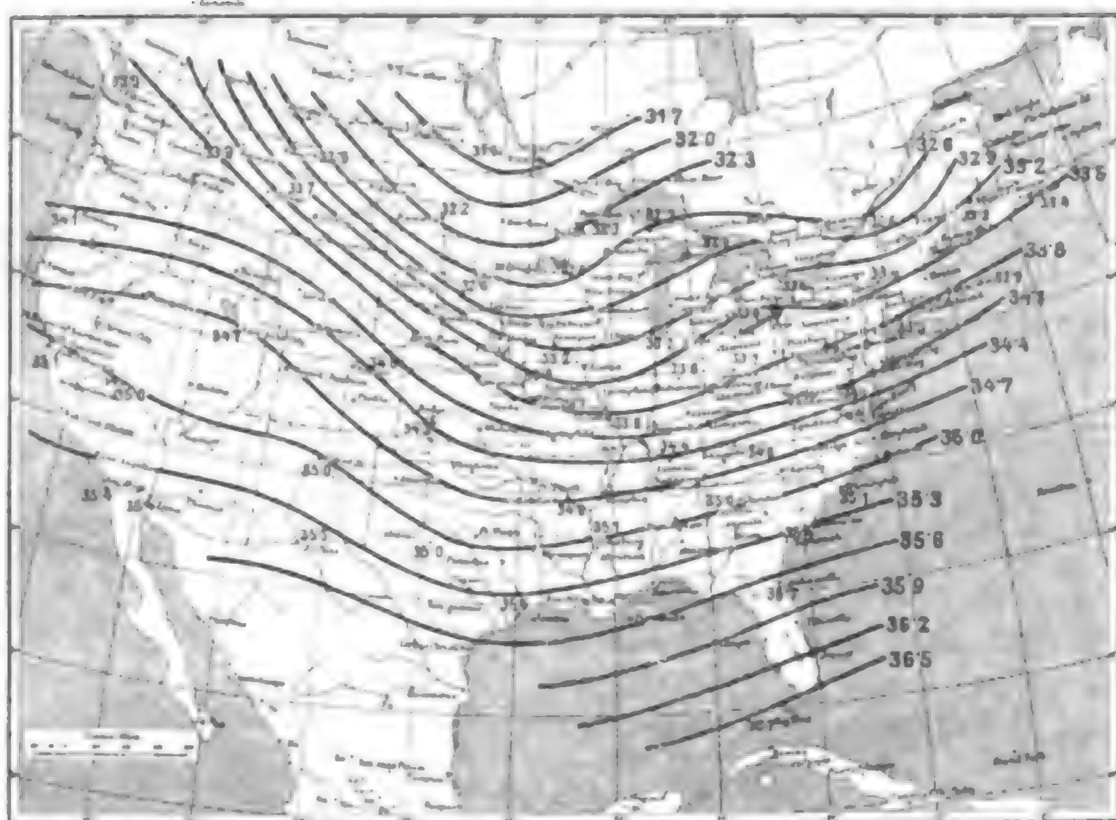
Tabelle III.

Station	p in Millimeter	T_0 in Celsiusgraden abs.	H_1	H_2	H_3
			in Hektometer		
Abilene	763·9	280·8	35·0	49·1	100·0
Albany	63·5	68·1	33·4	46·8	95·5
Alpena	60·0	66·3	32·9	46·2	94·3
Atlanta	65·0	79·5	35·0	49·0	99·6
Bismarck	64·8	57·4	32·2	45·1	91·7
Buffalo	61·7	69·5	33·4	46·9	95·7
Chicago	63·7	66·5	33·2	46·6	94·9
Columbus	64·5	69·9	33·7	47·2	96·2
Denver	62·2	78·8	34·6	48·6	99·2
Des Moines	64·7	65·7	33·2	46·5	94·8
Detroit	62·3	70·3	33·6	47·1	95·1
Dodge	65·0	73·7	34·3	48·0	97·5
Duluth	61·1	60·9	32·3	45·3	92·6
Eastport	61·1	68·8	33·3	46·7	95·5
El Paso	62·2	85·5	35·5	49·7	101·6
Esquimault	58·5	76·0	33·9	47·7	97·7
Galveston	63·2	84·9	35·4	49·7	101·4
Halifax	60·9	70·1	33·4	46·9	96·0
Havre	65·0	60·1	32·6	45·6	92·7
Helena	63·6	70·8	33·7	47·3	96·5
Huron	65·1	60·1	32·6	45·6	92·7
Independence	62·4	82·1	35·0	49·2	100·2
Indianopolis	63·5	69·5	33·6	47·1	96·0
Jacksonville	64·7	85·8	35·7	50·0	101·8
Kansas	65·9	69·8	33·8	47·4	96·4
Key West	64·4	93·6	36·7	51·4	104·6
Knoxville	65·0	76·7	34·6	48·5	98·6

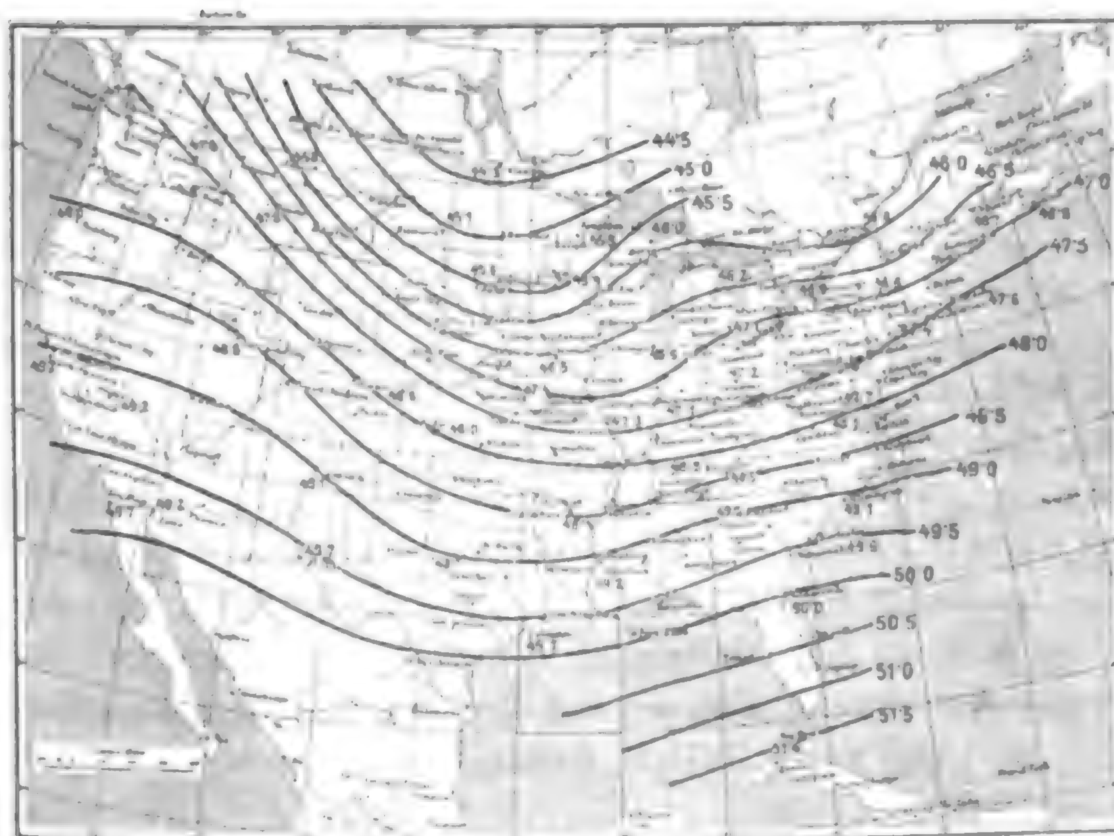
Station	p in Millimeter	T_0 in Celsiusgraden abs.	H_1	H_2	H_3
			in Hektometer		
Little Rock	764·5	276·5	34·6	48·4	98·5
Lynchburg	64·1	75·4	34·4	48·1	98·2
Marquette	60·9	64·7	32·7	46·0	94·0
Montreal	61·2	63·6	32·6	45·8	93·7
Nantucket	62·2	73·1	33·9	47·6	97·1
Nashville	64·1	75·8	34·4	48·2	98·1
New York	63·2	71·6	33·8	47·4	96·7
Roseburg	59·0	77·5	34·1	48·0	98·4
St. Louis	64·6	70·4	33·8	47·3	96·5
St. Paul	63·8	59·9	32·4	45·4	92·6
Salt Lake City	63·8	77·8	34·7	48·6	98·9
San Diego	63·1	84·5	35·4	49·7	101·3
San Francisco	62·5	82·2	35·1	49·2	100·4
Santa Fé	63·3	81·2	35·0	49·1	100·1
Savannah	64·9	83·1	35·4	49·6	101·0
Spokane	61·8	73·2	33·9	47·5	97·1
Vicksburg	64·2	81·5	35·1	49·2	100·2
Washington	63·9	72·9	34·1	47·7	97·2
Wilmington	64·4	80·4	35·1	49·1	99·9
Winnipeg	65·9	52·2	31·6	44·3	90·0
Yuma	62·6	85·3	35·4	49·8	101·5

Auf den Karten 7, 8 und 9 sind die Werte von H_1, H_2 und H_3 eingetragen und Linien gleicher Höhe H gezeichnet, auf Karte 7 mit einer Differenz der Kurvenkonstante von 0·3, auf Karte 8 von 0·5, auf Karte 9 von 1·0 Hektometer.

Diese H-Linien zeigen auf allen drei Karten einen ähnlichen Verlauf; die Westseite und einiges weniger die Ostseite des Kontinentes sind durch große H-Werte, der zentrale Teil Nordamerikas durch kleine H-Werte charakterisiert, was der winterlichen Temperaturverteilung entspricht; es hat ja die Temperatur in Gleichung (16) den Haupteinfluß. Im allgemeinen nimmt natürlich H gegen Norden stark ab.



Karte 7. H_1-Linien für $p_1 = 492$ *mm*.

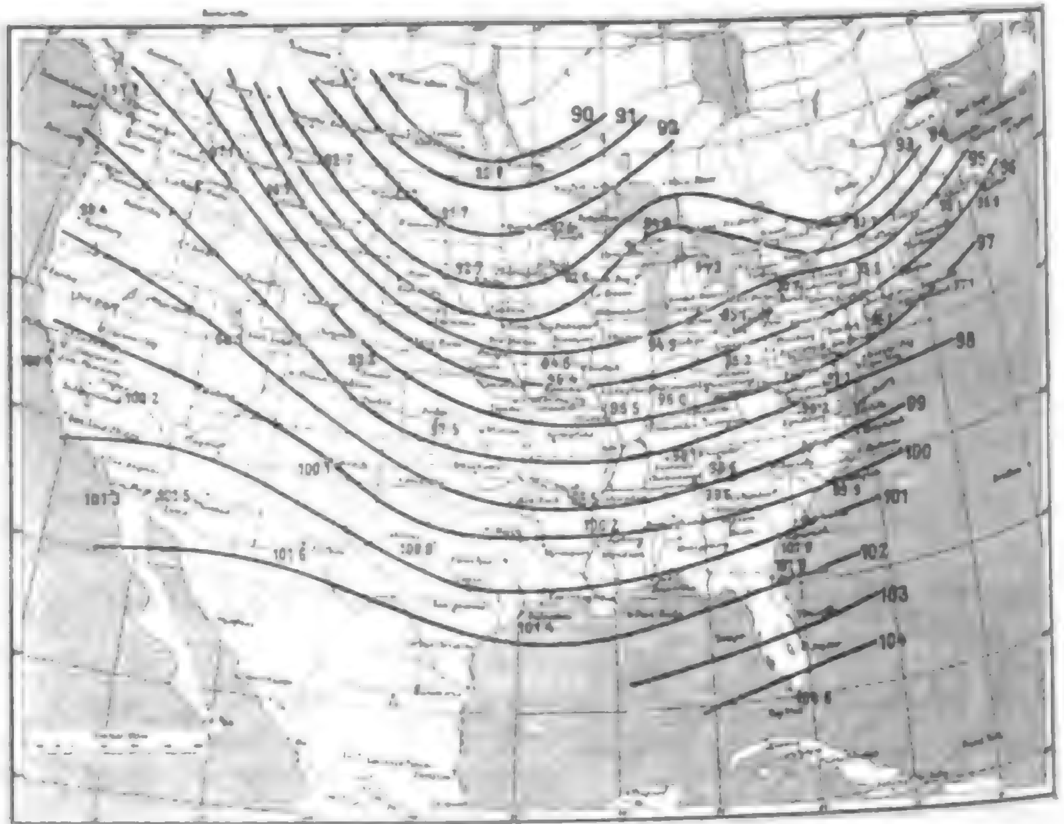


Karte 8. H_2-Linien für $p_2 = 409$ *mm*.

Gleichung (14) läßt sich, analog zu Gleichung (9), auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{c_p g T}{(c_p T + A g H)\lambda} \frac{\delta p . \delta H}{f'}. \tag{17}$$

Hier ist unter f' der Flächeninhalt verstanden, den, wenn man die Isobarenkarte und die H-Karte übereinanderlegt, zwei



Karte 9. H_3-Linien für $p_1 = 217$ *mm*.

benachbarte Isobaren mit zwei benachbarten H-Linien einschließen; δH ist die Wertdifferenz zweier benachbarter H-Linien; also wäre bei Benützung von Karte 7 $\delta H = 30\, m$, bei Karte 8 $\delta H = 50\, m$, bei Karte 9 $\delta H = 100\, m$ zu setzen.

Im übrigen ist die Anwendung von Gleichung (17) dieselbe wie die von Gleichung (9). Setzen wir wie bei dem obigen Beispiel für Druck- und Temperaturkarte $H = 3500\, m$, $T = 260°$ und $\lambda = 9 \cdot 3 . 10^{-5}$, ferner $\delta p = 0 \cdot 1$ Zoll, $\delta H = 30\, m$, so ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -9 \cdot 5 . 10^{4} \frac{\delta p\, \delta H}{f'};$$

und da f', analog der früheren Auswertung wieder gleich ist $\frac{555^2 . 10^6 . 100}{10 . 2 \cdot 8^2 \varphi'_g}$, so wird

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -7 \cdot 25 . 10^{-7} \varphi'_g, \qquad (18)$$

wo φ'_g sich auf Isobaren- und Höhenkarte bezieht.

Berechnen wir nun $\frac{\partial p}{\partial t}$ wieder für 4 Stunden und in $^1/_{100}$ Zoll, so finden wir schließlich

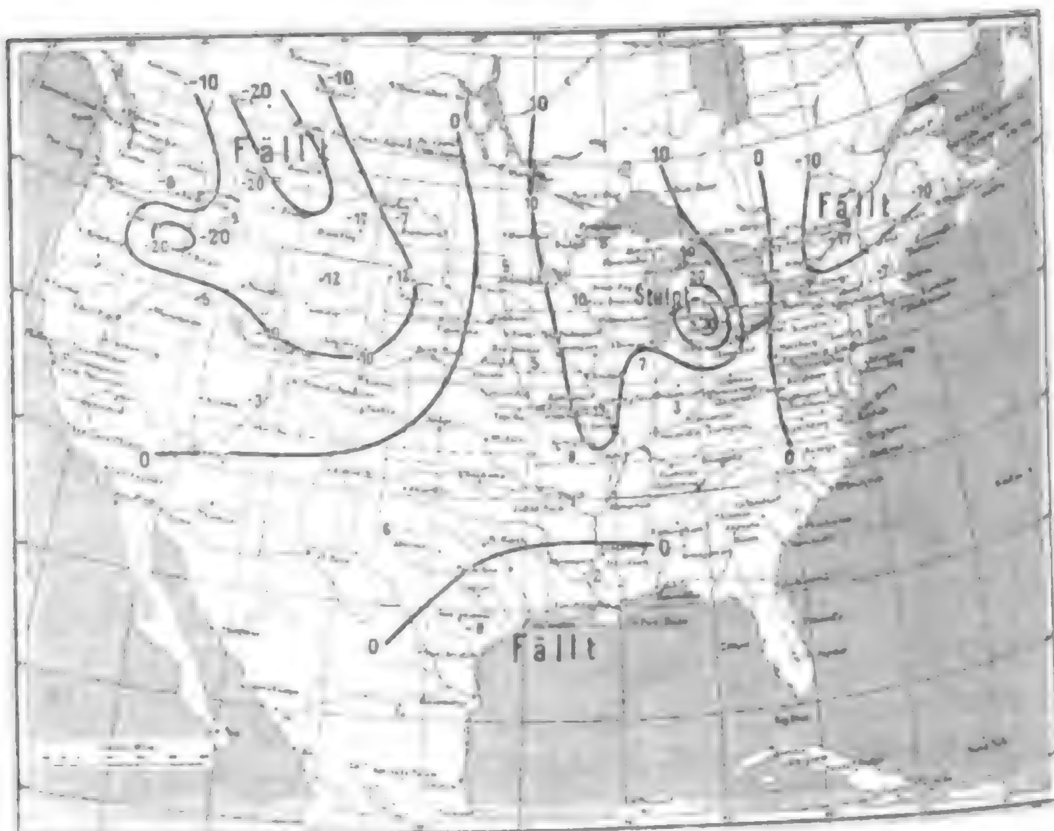
$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{4 \text{ St.}, \, ^1/_{100} \text{ Z.}} = -1 \cdot 04 \, \varphi'_g. \qquad (19)$$

Ich habe analog dem früheren Vorgange die Karte für H_1 auf Pauspapier übertragen, auf die Isobarenkarte vom 3. Jänner, 8^h p. aufgelegt und mit dem Planimeter die Flächenstücke, welche von den Isobaren und H-Linien gebildet werden, bestimmt, daraus φ'_g berechnet und die Werte $\frac{\partial p}{\partial t}$ nach Gleichung (19) auf einer Karte eingetragen. Durch Ziehen der Kurven gleicher Druckänderung ergibt sich so die Karte 10. Ein Vergleich mit den beobachteten Änderungen auf Karte 6 und den mittels der Isothermen berechneten auf Karte 5 zeigt, daß die neue Berechnung zumindest ebenso gute Resultate liefert wie die mittels der Isothermen ausgeführte. Tatsächlich hat der Verlauf der Kurven auf Karte 10 sogar mehr Ähnlichkeit mit jenen der Karte 6. Insbesondere sind keine so extremen Werte der Druckschwankungen mehr vorhanden; die größte berechnete Änderung ist 0·3 Zoll gegen 0·5 von früher.

Die Verwendung der innerhalb eines Monates als unveränderlich angenommenen H-Linien scheint somit gerechtfertigt; es läßt sich aussprechen, daß die Druckänderung an der Erdoberfläche dem Flächeninhalt verkehrt proportional ist, den zwei benachbarte Isobaren mit zwei benachbarten H-Linien einschließen. Die Benützung dieser Höhenlinien erleichtert aber die ganze Sache ungemein, da wir jetzt statt zweier Variabeln nur

mehr eine haben, nämlich den Druck, und die Temperatur vollständig aus der Rechnung ausgeschaltet wird.

Daß die Karte 10 besser mit 6 übereinstimmt als die Karte 5 hat wohl darin seinen Grund, daß die Anwendung unserer Differentialgleichung auf einen längeren Zeitraum weniger Fehler mit sich bringt, wenn nur eine Größe, der Druck, sich während dieser Zeit ändert, nicht auch die zweite Größe.



Karte 10. $\frac{\partial p}{\partial t}$ am 3. Jänner, 8h p., aus Isobaren und H_1-Linien berechnet.

Auch noch aus einem anderen Grunde wird man auf diese Weise zu besseren Resultaten kommen als mit Benützung der Isothermenkarten; die ganze Rechnung setzte nämlich adiabatische Zustandsänderung voraus und diese wird durch die Mitteltemperatur der Luftsäule und die Größe H viel besser ausgedrückt werden als durch die an der Erdoberfläche beobachtete Temperatur, die in den Isothermenkarten zur Verwendung kam.

Besondere Bequemlichkeit bietet die Verwendung der H-Linien, wenn man, wie schon oben angedeutet, die Änderung

der Luftdruckverteilung während eines längeren Zeitraumes durch Übereinanderlegen der Änderungen in kürzeren Zeiten stufenweise aufbauen will; man legt der Arbeit dann stets dieselbe H-Karte zu Grunde und sieht von der Temperaturänderung ganz ab.

Die Bildung des zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ zur Bestimmung von p'' (siehe p. 1196) ist nun auch sehr einfach; schreibt man die Gleichung (17) in der Form:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha \frac{\delta p \, \delta H}{f'} = -\alpha \delta p . \delta H \varphi'$$

und betrachtet zur Vereinfachung den Faktor α als konstant, so findet man, da

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \alpha^2 \, \delta p \, \delta H \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right);$$

der Klammerausdruck ist wieder einer Fläche f_1' verkehrt proportional: $\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \frac{\delta \varphi' \, \delta H}{f_1'}$, wo $\delta \varphi'$ die Differenz der Kurvenwerte auf einer Karte bedeutet, auf der statt der $\frac{\partial p}{\partial t}$ die φ' selbst eingetragen wurden, und f_1' die Fläche ist, die von zwei benachbarten φ'-Linien und den H-Linien eingeschlossen wird; somit wird:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\alpha^2 \delta p (\delta H)^2 \delta \varphi'}{f_1'}. \tag{20}$$

f_1' hat wieder positives oder negatives Vorzeichen, was sich aus der obigen Gleichung leicht bestimmen läßt; wird nämlich das Koordinatensystem so gedreht, daß $\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0$ ist (an einer Stelle), die φ'-Linien also zur Y-Achse parallel gehen (von Nord nach Süd) und ist $\frac{\partial H}{\partial y}$ positiv, was gleichfalls durch

Wahl des Koordinatensystems gemacht werden kann, so ist f_1' positiv zu nehmen, wenn $\frac{\partial \varphi'}{\partial x}$ positiv ist oder auch, bei Benützung der Karte für $\frac{\partial p}{\partial t}$, wenn die Druckänderung $\frac{\partial p}{\partial t}$ nach der positiven X-Achse zu abnimmt; dann wird folglich auch $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ positiv sein, der Druck mit der Zeit weiter zunehmen. Betrachten wir Karte 10, so bedeutet dies z. B.: zwischen dem Fallgebiet im Westen Amerikas und dem Steiggebiet in der Gegend der großen Seen ist auf der Linie $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ die Änderung des $\frac{\partial p}{\partial t}$ nach der positiven X-Achse zu positiv, folglich $\frac{\partial \varphi'}{\partial x}$ negativ und, da $\frac{\partial H}{\partial y}$ positiv ist, $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ negativ; d. h. es wird zwischen diesen beiden Gebieten im zweiten Zeitintervall der Druck fallen, nachdem er im ersten Intervall im Westen der Nullinie bereits gefallen, im Osten derselben aber gestiegen ist. Das Steig- und Fallgebiet wird sich somit weiter gegen Osten bewegen.

Man kann sich diese ganze Überlegung ersparen, wenn man sich vorstellt, daß um die Steiggebiete die Luft in antizyklonaler, um die Fallgebiete in zyklonaler Richtung strömt. Wird die Luft bei dieser Bewegung in ein Gebiet kommen, wo H kleiner ist, so wird $\frac{\partial p^2}{\partial t^2}$ negativ, wird sie in ein solches Gebiet kommen, wo H größer ist, so wird $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ positiv sein. Man kann also die zeitliche Änderung des $\frac{\partial p}{\partial t}$ ebenso beurteilen, wie die Änderung des p selbst, indem man statt der Gebiete hohen Druckes die Steiggebiete, statt jener tiefen Druckes die Fallgebiete setzt. Auf diese Weise scheint es möglich, ohne eine neue Karte zu konstruieren, eine Korrektion für die Ungenauigkeit der Berechnung der Karte von $\frac{\partial p}{\partial t}$ für einen endlichen Zeitraum vorzunehmen, da ein Steigen oder Fallen als rasch

vorübergehend, das andere als mit der Zeit noch zunehmend sich herausstellen wird.

Es ist in dieser Arbeit nicht versucht worden, den angegebenen Weg wirklich zu gehen, da die erforderlichen Arbeiten zu groß sein würden und es sich vorläufig nur um die Prinzipe handelt, nach denen eventuell eine praktische Lösung des Problems in Angriff genommen werden kann.

Natürlich läßt sich die Änderung der Mitteltemperatur analog zu Gleichung (12) auch mittels der Fläche f', welche von Isobaren und H-Linien gebildet wird, ausdrücken; man erhält:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c_p R T^3}{p H \lambda (c_p T + AgH)} \frac{\delta p \, \delta H}{f'}. \tag{21}$$

Die hier benützte Größenordnung für H (3500 m) ist wohl weniger wahrscheinlich, als wenn wir $H = 5000\,m$ im Durchschnitt setzen, uns also der Karte 8 bedienen. Die Zahlenauswertung für diesen Fall soll hier für die Gleichung (17) noch durchgeführt werden. Berechnet man für die gleiche geographische Breite und (der Einfachheit halber) für dieselbe Mitteltemperatur von 260° wie früher — der Einfluß einiger Grade kommt in dem Faktor der Gleichung (17) nicht stark in Betracht, solange es sich uns nur um die Größenordnungen handelt — den Faktor $\frac{c_p g T}{(c_p T + AgH)\lambda}$, so erhält man 9.10^4. Da $\delta p = 0{\cdot}1$, δH aber hier 50 m ist und f' wie früher in den durch Ausmessung auf der Karte ermittelten Wert φ'_g umgewandelt wird, so ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -1{\cdot}1 \, . \, 10^{-6} \varphi''_g, \tag{22}$$

wo φ''_g aus der Isobarenkarte und der Karte für H_2 ermittelt wird. Für 4 Stunden ergibt dies die Druckänderung in Hundertel Zoll:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{4\,\text{St.},\ ^1/_{100}\,\text{Z.}} = -1{\cdot}6\,\varphi''_g. \tag{23}$$

Da der Verlauf der Kurven H_1 und H_2 auf den Karten 7 und 8 ungefähr derselbe und nur ihr Abstand voneinander auf der letzteren etwas größer ist, mithin φ''_g etwas kleiner als φ'_g sein wird, werden die Berechnungen mit Gleichung (23) ziemlich dieselben Ergebnisse liefern wie jene mit Gleichung (19), nur werden die Druckänderungen etwas größer ausfallen. Von einer Reproduktion der Karte für $\frac{\partial p}{\partial t}$ analog jener mit H_1 berechneten (10) ist darum hier abgesehen worden; ebenso von einer Berechnung für H_3, die Höhe von 10.000 *m*, welche natürlich noch größere Druckschwankungen, aber, wie man aus der Ähnlichkeit der Karte 9 mit den beiden vorhergehenden entnimmt, qualitativ dasselbe erwarten läßt.

Wie schon oben betont wurde, scheint mir der mittlere Wert H_2 der wahrscheinlichste und soll auch später noch verwendet werden.

IV.

Es war ein ungenaues Vorgehen, die Gleichung für die zugeführte Wärme [Gleichung (5)] ohneweiters auf die ganze Luftsäule von der Höhe H anzuwenden, da sie doch nur für die Masseneinheit des Gases gilt und in der Luftsäule Druck und Temperatur variabel sind. Darum gebe ich im folgenden noch eine genauere Berechnung der Druckänderung mit der Zeit aus Druck- und Temperaturgradienten und bin hiebei allerdings genötigt, eine Annahme über die Temperaturänderung mit der Höhe einzuführen.

Ich mache dieselbe Voraussetzung, wie sie oben für die Monatsmittel schon gemacht wurde, nämlich die einer nach der Höhe linearen Temperaturabnahme δ, wonach die barometrische Höhenformel folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 - \delta h}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\delta}} = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\delta}}. \qquad (24)$$

Hier bedeutet: p, T Luftdruck und Temperatur in der Höhe h; p_0, T_0 Luftdruck und Temperatur an der Erdoberfläche; $\frac{g}{R\delta} = \beta$ hat dieselbe Bedeutung wie bisher. Wir schreiben

Gleichung (5) in der Form $\frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{A}{\rho} \frac{dp}{dt}$; für die ganze Luftsäule von $h = 0$ bis $h = H$ wird dann:

$$\int_0^H \frac{dQ}{dt} \rho\, dh = c_p \int_0^H \frac{dT}{dt} \rho\, dh - A \int_0^H \frac{dp}{dt} dh.$$

Im Falle der adiabatischen Bewegung der Luftsäule als Ganzes wird die linke Seite dieser Gleichung Null und wir erhalten, wenn $\rho = \frac{p}{RT}$,

$$\frac{c_p}{AR} \int_0^H \frac{p}{T} \frac{dT}{dt} dh = \int_0^H \frac{dp}{dt} dh.$$

Aus Gleichung (24) ergibt sich, wenn $\frac{dh}{dt} = 0$, also keine vertikale Bewegung vorhanden ist, durch Differentiation nach der Zeit: $\frac{dp}{dt} = \frac{dp_0}{dt} \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta + \frac{p_0 \delta \beta h}{T_0^2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\beta-1} \frac{dT_0}{dt}$; es ist nämlich $\frac{dT}{dt} = \frac{dT_0}{dt}$. Setzen wir diese Werte für $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dT}{dt}$ in die obige Gleichung ein, indem wir auch noch p durch Gleichung (24) ausdrücken, so erhalten wir:

$$\frac{c_p}{AR} \int_0^H p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta \frac{\frac{dT_0}{dt}}{T} dh = \int_0^H \frac{dp_0}{dt} \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta dh +$$
$$+ \int_0^H \frac{p_0 \delta \beta h}{T_0^2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\beta-1} \frac{dT_0}{dt} dh.$$

Es sei $\frac{c_p}{AR} = \varkappa$; p_0, T_0 und $\frac{dT_0}{dt}$ ist natürlich von h unabhängig, folglich wird:

$$\frac{\varkappa p_0 \frac{dT_0}{dt}}{T_0^\beta} \int_0^H T^{\beta-1} dh = \frac{dp_0}{dt} \frac{1}{T_0^\beta} \int_0^H T^\beta dh +$$
$$+ \frac{p_0 \delta . \beta \frac{dT_0}{dt}}{T_0^{\beta+1}} \int_0^H T^{\beta-1} . h\, dh$$

79*

und

$$\int_0^H T^{\beta-1}\,dh = -\frac{1}{\delta}\int_0^H T^{\beta-1}\,dT = \\ = -\frac{1}{\delta}\left|\frac{T^\beta}{\beta}\right|_0^H = \frac{T_0^\beta - T_H^\beta}{\beta\delta}$$

$$\int_0^H T^\beta\,dh = -\frac{1}{\delta}\int_0^H T^\beta\,dT = \\ = -\frac{1}{\delta}\left|\frac{T^{\beta+1}}{\beta+1}\right|_0^H = \frac{T_0^{\beta+1} - T_H^{\beta+1}}{\delta(\beta+1)};$$

hier ist für $h = H$ $T = T_H$ gesetzt.

Ferner ist:

$$\int_0^H T^{\beta-1}h\,dh = \frac{1}{\delta^2}\int_0^H T^\beta dT - \frac{T_0}{\delta^2}\int_0^H T^{\beta-1}dT = \\ = -\frac{T_0^{\beta+1} - T_H^{\beta+1}}{\delta^2(\beta+1)} + \frac{T_0(T_0^\beta - T_H^\beta)}{\delta^2\beta}$$

und folglich die obige Gleichung:

$$\frac{\varkappa p_0 \frac{dT_0}{dt}}{T_0^\beta}\;\frac{T_0^\beta - T_H^\beta}{\beta} = \frac{dp_0}{dt}\;\frac{1}{T_0^\beta}\;\frac{T_0^{\beta+1} - T_H^{\beta+1}}{\beta+1} + \\ + \frac{p_0\beta\frac{dT_0}{dt}}{T_0^\beta}\;\frac{T_0^\beta - T_H^\beta}{\beta} - \frac{p_0\beta\frac{dT_0}{dt}}{T_0^{\beta+1}}\;\frac{T_0^{\beta+1} - T_H^{\beta+1}}{\beta+1}.$$

Ich setze nun

$$\frac{p_H}{p_0} = \left(\frac{T_H}{T_0}\right)^\beta = \mu, \quad \frac{T_H}{T_0} = \tau;$$

dann wird nach einiger Umformung:

$$\frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dt}(1-\mu\tau) = \\ = \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dt}\left[\frac{\varkappa}{\beta}(1-\mu)(1+\beta) - 1 + \mu + \mu\beta - \beta\mu\tau\right]. \quad (25)$$

Gleichung (24) wird für die Höhe H: $p_H = p_0\left(\frac{T_0 - \delta H}{T_0}\right)^\beta$.
Wie bei der früheren Rechnung setzen wir auch hier wieder voraus, daß p_H in der Höhe H konstant sei, also weder von der Zeit noch den Koordinaten abhänge. Dann folgt durch Differentiation dieser Gleichung nach der Zeit:

$$\frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dt} = \frac{1}{H}\frac{dH}{dt} - \frac{\tau T_0}{\beta\delta H}\frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dt}.$$

Bezeichnen wir den Ausdruck in den eckigen Klammern der rechten Seite in Gleichung (25) mit A, so wird die letztere mit Benützung der eben abgeleiteten Beziehung:

$$\frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dt}[(1-\mu\tau)\beta(1-\tau)+\tau A] = \frac{\beta(1-\tau)}{H}A\frac{dH}{dt}.$$

H ist von der Zeit als unabhängig anzunehmen, daher

$$\frac{dH}{dt} = u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y};$$

auch ist

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{\partial p_0}{\partial t} + u\frac{\partial p_0}{\partial x} + v\frac{\partial p_0}{\partial y}.$$

Wie früher sei $u = \frac{1}{\rho\lambda}\frac{\partial p_0}{\partial y}$, $v = -\frac{1}{\rho\lambda}\frac{\partial p_0}{\partial x}$. Wir nehmen u und v an der Erdoberfläche an und setzen daher $\rho = \frac{p_0}{RT_0}$; dann wird:

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{RT_0}{\lambda p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right).$$

Setzen wir diese Werte noch in die obenstehende Gleichung ein, so erhalten wir schließlich:

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\frac{\beta(1-\tau)RT_0 A\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right)}{\lambda H[(1-\mu\tau)\beta(1-\tau)+\tau A]}. \qquad (26)$$

Diese Gleichung ist vollkommen analog der Gleichung (14); nur der Faktor ist verschieden und hier komplizierter.

Die Auswertung des Faktors in Gleichung (26) soll hier zum Vergleich mit der einfacheren Rechnung für die Höhe $H_2 = 5000\,m$ durchgeführt werden. Wir setzen zu diesem Zwecke $p_0 = 760\,mm$, $T_0 = 270°$, $\delta = 5.10^{-3}$, $R = 290$, $\beta = 6\cdot9$, $T_H = 245$, $\tau = 0\cdot91$, $\mu = \tau^{\beta} = 0\cdot51$ und λ wie früher für 40° Breite und es ergibt sich:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -8\cdot8.10^4\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right). \tag{27}$$

Für den Faktor in dieser Gleichung fanden wir oben nach der einfacheren Rechnung den Wert 9.10^4. Man erhält folglich mit Hilfe dieser umständlicheren Methode wesentlich dasselbe wie früher.

Die Annahme, es sei keine vertikale Bewegung vorhanden, ist eigentlich unhaltbar, da die Luftsäule, wenn ihre Höhe geringer werden soll, notwendig eine absteigende Bewegung haben muß.

Bei der Strömung der Luft gegen Norden wird nun im allgemeinen H kleiner, also ist die absteigende Bewegung in Betracht zu ziehen, bei der Strömung nach Süden, wo H durchschnittlich größer wird, die aufsteigende. Es ist nicht schwer, die vertikale Geschwindigkeit $\frac{dh}{dt}$, die in der Rechnung bisher vernachlässigt wurde, zu berücksichtigen. Ich nehme dazu an, daß die Luft an der Erdoberfläche keine vertikale Bewegung, die in der Höhe H die größte in dieser Luftsäule, $\frac{dH}{dt}$, hat. Für eine Schichte in der Höhe h wird dann sein:

$$\frac{dh}{dt}:\frac{dH}{dt} = h:H \quad \text{oder} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{h}{H}\left(\frac{\partial H}{\partial x}u + \frac{\partial H}{\partial y}v\right). \tag{28}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung gelingt es leicht, die bisherige Rechnung so umzugestalten, daß die vertikale Komponente berücksichtigt wird: die Wärmegleichung bleibt zunächst ungeändert, ebenso Gleichung (24); deren Ableitung nach der Zeit wird aber, da $\frac{dT}{dt} \gtrless \frac{dT_0}{dt}$, vielmehr jetzt $= \frac{dT_0}{dt} - \delta\frac{dh}{dt}$ geworden ist, die folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dp_0}{dt}\frac{p}{p_0}+\frac{\beta\delta ph}{TT_0}\left[\frac{dT_0}{dt}+\frac{RT_0^2}{H\lambda p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right)\right].$$

Setzt man diese Werte für $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dT}{dt}$ in die Wärmegleichung ein, berücksichtigt dann die Geschwindigkeiten u und v in der früheren Weise, so erhält man:

$$\frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dt}=-\frac{\tau T_0}{\beta\delta H}\frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dt}-\frac{T_0 R}{H\lambda p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right).$$

Wird nun $\frac{dT_0}{dt}$ aus der Höhenformel für $h=H$ mit $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ ausgerechnet, in diese Gleichung eingesetzt, so erhält man nach etwas mühsamer Umrechnung das Folgende:

$$\frac{\partial p_0}{\partial t}=-\frac{(1-\mu\tau)(1-\tau)\beta^2\varkappa RT_0}{\lambda H[\varkappa\tau(1-\mu)(1+\beta)+\beta^2(1-\mu\tau)-\tau(1-\mu)\beta(\beta+1)]}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right). \quad (29)$$

Diese Formel kann in ganz gleicher Weise wie die frühere ausgewertet werden. Benützen wir dieselben Annahmen über die Konstanten, so ergibt sich für $H_3=5000\,m$ (im Durchschnitt):

$$\frac{\partial p_0}{dt}=-9\cdot 4.10^4\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right). \quad (30)$$

Wie man sieht, ist der Faktor der rechten Seite von jenem der Gleichung (27) der Größenordnung nach nicht verschieden; man kann somit die vertikale Bewegung tatsächlich vernachlässigen.

Die ganze Rechnung wurde hier für Luftströmungen über einer Ebene durchgeführt. Es wäre eigentlich erforderlich, dieselbe auch mit Berücksichtigung der Erdkrümmung zu machen; das wurde in dieser Arbeit nicht getan. Doch läßt sich der Einfluß der Erdkrümmung wenigstens qualitativ ungefähr vorstellen; gemäß der Kontinuitätsgleichung würde sich die Luftsäule bei ihrer Bewegung nach Norden verengern und mithin verdichten, bei der Bewegung nach Süden erweitern und

verdünnen müssen. Dies würde eine Schwächung der Druckabnahme bei südlichen Winden und der Druckzunahme bei nördlichen Winden hervorrufen, die Druckschwankungen würden allgemein dadurch verkleinert werden.

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß die Vernachlässigung der Reibung bei der ganzen Rechnung doch, wenigstens für die Druckverteilung in der untersten Luftschichte, von einigem Einfluß sein wird. Die Gleichungen, die abgeleitet wurden, gelten natürlich nur für eine Ebene, die ganz frei von Störungen, wie Gebirgen, ist. Durch solche Störungen werden aber gewiß viele »ausfüllende« Bewegungen an der Erdoberfläche verursacht, da die Luft mit einer Komponente in der Richtung des Gradienten strömt. Die hier gegebenen Ausdrücke für die Luftdruckänderung haben also solche ausfüllende Bewegungen nicht berücksichtigt und man mag bei der detaillierten Konstruktion einer Isobarenkarte auf dem angedeuteten Wege finden, daß die Druckdifferenzen sich zu lange erhalten. Freilich sind in der ganzen Rechnung so viele Voraussetzungen gemacht, daß auf Übereinstimmung in Details überhaupt nicht gehofft werden darf. Sollte man versuchen, diese Theorie auszubauen, so wäre wohl zunächst die Annahme von der gleichen Richtung der Bewegung in allen Punkten einer vertikalen Säule fallen zu lassen und hiezu für jede Höhe eine Strömung einzuführen, die dem dort herrschenden Gradienten entspricht. Eine derartige Rechnung dürfte keine Schwierigkeiten machen, solange lineare Temperaturabnahme angenommen wird.

Zweiter Teil.

Im folgenden habe ich den Versuch gemacht, die Differentialgleichung (14) für einige einfache Annahmen zu integrieren. Diese Rechnungen machen durchaus nicht den Anspruch, der praktischen Seite der Vorherbestimmung des Luftdrucks zu dienen, sondern sind bloß von der theoretischen Seite dieser Frage aus zu betrachten.

Es handelte sich mir hauptsächlich darum, herauszufinden, ob die an der Erdoberfläche beobachteten synoptischen Luft-

druckgebilde, zyklonale, antizyklonale und Zwischengebiete, ohne Rücksicht auf Ähnlichkeiten mit ganz bestimmten Fällen aus den in Gleichung (14) enthaltenen Prinzipien erklärt werden können, also aus dem Zusammenwirken des Luftdrucks und der Mitteltemperatur der Luftsäule mit der dem Gradienten entsprechenden Luftströmung, oder ob hiezu die sogenannten Reibungswirkungen an der Erdoberfläche, eventuell — wie man glaubte — die Niederschläge mit ihren Wärmewirkungen unerläßlich sind; kurz, ob Faktoren dabei mitspielen, die in dieser Theorie nicht in Betracht gezogen wurden. In zweiter Linie war zu entscheiden, ob das Spiel von Luftdruck, Mitteltemperatur und Wind nach Gleichung (14) zu quantitativ möglichen und wahrscheinlichen Resultaten führt oder ob etwa ganz andere Größenordnungen in den berechneten Luftdruckgebilden zu Tage kommen, als sie beobachtet werden. Bei Betrachtung der H-Karten (7, 8, 9) lag nämlich der Gedanke nahe, daß der Verlauf der H-Linien oder auch der Mitteltemperaturlinien über Wasser und Land den Anlaß gibt zur Entstehung der eigentümlichen Druckgebilde, die man beobachtet. Im Winter ist ja der Kontinent kalt, das Meer warm; vom Meere lagen nun allerdings keine korrespondierenden Beobachtungen vor, doch zeigten die Karten für H genug, um zu sehen, wie im Zentrum des Kontinents die H-Linien am tiefsten nach Süden ausbiegen und sich gegen die Küste zu stark nach Norden wenden. Es ist nur natürlich, anzunehmen, daß eine Fortsetzung der H-Linien über den Stillen Ozean im Westen, den Atlantischen im Osten gezeigt hätte, wie die Mitteltemperatur draußen am Meere ein Maximum erreicht, um gegen das Zentrum des nächsten Kontinents wieder abzufallen, freilich im Westen und Osten Amerikas in sehr verschiedener Weise. Auf solche Einzelheiten, wie die letztere, konnte jedoch keine Rücksicht genommen werden.

Es handelte sich also um Integration der partiellen Differentialgleichung (14) unter einfachen Voraussetzungen. Diese Gleichung lautete:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{c_p g T}{(AgH + c_p T)\lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

In der ganzen weiteren Rechnung wurde der Faktor

$$\frac{c_p g T}{(AgH+c_p T)\lambda} = q$$

konstant angenommen und nach den vorigen Rechnungen für $H_2 = 5000\,m$ $q = 9.10^4$ gesetzt. Die Differentialgleichung kann dann geschrieben werden:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + q\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} - q\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \qquad (31)$$

$\frac{\partial H}{\partial x}$ und $\frac{\partial H}{\partial y}$ sind als Funktionen der Koordinaten x und y in diese Gleichung einzusetzen je nach den Annahmen, die über den Verlauf der H-Linien gemacht werden.

Die Methode der Integration dieser partiellen Differentialgleichung ist die folgende:[1] Wir setzen

$$q\frac{\partial H}{\partial y} = f_1(x, y), \qquad -q\frac{\partial H}{\partial x} = f_2(x, y)$$

also

$$\frac{\partial p}{\partial t} + f_1\frac{\partial p}{\partial x} + f_2\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{dx}\partial x + \frac{\partial p}{\partial y}dy = dp,$$

da p ganz allgemein eine Funktion von x, y und t ist, also $p = F(x, y, t)$.

Es läßt sich dann die partielle Differentialgleichung durch das folgende System von simultanen totalen ersetzen:

$$\frac{dp}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2}$$

oder

$$dp = 0, \quad dx = f_1 dt, \quad dy = f_2 dt, \quad f_2 dx = f_1 dy; \qquad (32)$$

[1] Siehe z. B. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, II. Bd., II. Hälfte, p. 259.

eine der drei letzten Gleichungen ist überzählig. Bezeichnet man mit ξ, η, ζ die drei Integrale dieser Gleichungen 32, aufgelöst nach den Integrationskonstanten, also $\xi = C_1$, $\eta = C_2$, $\zeta = C_3$, so ist die Gleichung

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{33}$$

die Lösung der partiellen Differentialgleichung. Φ ist eine willkürliche Funktion, die durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen ist, und zwar in dieser Weise: für $t = 0$ sei $p = p_0 = F(x, y)$. Diese Funktion F muß gegeben sein. Dann werden ξ, η, ζ Funktionen von x und y allein: $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$, $\zeta = \varphi_3(x, y)$; aus diesen Gleichungen wird p, x und y berechnet und aus der Anfangsbedingung eliminiert, so daß sich eine Funktion $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$ ergibt, welche, für Φ eingesetzt, die gestellte Bedingung als Integral der Differentialgleichung und auch die Anfangsbedingung erfüllt. Aus der ersten der Gleichungen (32) ersieht man sogleich, daß stets $\xi = p$ ist. Nun berechnet man p aus der Gleichung $\Psi = 0$ und erhält die Funktion $p = f(x, y, t)$, welche eben gesucht wird.

Erstes Beispiel.

Ich gehe von dem einfachsten Falle aus, nämlich dem, daß die H-Linien parallel zur X-Achse als Gerade verlaufen und somit kein ungleicher Einfluß von Wasser und Land vorhanden ist, sondern nur die allgemeine Temperaturabnahme vom Äquator zum Pol. Die H-Linien mögen gleiche Abstände voneinander haben, so daß also $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial y} = c$, wo c eine positive Konstante ist. Dann wird $f_1 = qc$, $f_2 = 0$ und somit:

$$\xi = p = C_1, \quad \eta = x - qct = C_2, \quad \zeta = y = C_3,$$

folglich:

$$\Phi(p, x - qct, y) = 0. \tag{34}$$

Im einfachsten Falle, wenn zu Anfang der Zeit die Isobaren parallel zur X-Achse laufen würden mit tiefem Druck im Norden, wäre $p_0 = \vartheta y + M$ zu setzen; man erhält dann, da p

von x unabhängig ist, auch nach der Zeit t die gleiche Druckverteilung.

Es sei weiter zu Anfang der Druck eine Funktion von x^2+y^2, mithin des Radius, wie es bei kreisförmigen Isobaren in Antizyklonen oder Zyklonen der Fall ist, also $p_0 = f(x^2+y^2)$; für die Zeit 0 ist $\xi = p_0$, $\eta = x$, $\zeta = y$; eliminieren wir p_0, x, y aus obiger Gleichung, so ergibt sich $\xi = f(\eta^2+\zeta^2)$ und durch Einsetzen der Werte ξ, η, ζ nach Gleichung (34):

$$p = f[(x-qct)^2+y^2].$$

Die Isobaren, welche ursprünglich um das Zentrum $x = 0$, $y = 0$ als Kreise lagen, haben sich also nach der Zeit t verlagert. Ein bestimmter Druck p_1 liegt jetzt allerdings wieder auf einem Kreise; doch hat sich der Mittelpunkt des Kreises um die Strecke qct in der positiven X-Achse verschoben. Da dieser Weg in der Zeit t zurückgelegt wurde, so ist die Geschwindigkeit der Verschiebung qc.

Wir können die Bewegung der Isobaren etwas allgemeiner auch auf folgende Weise berechnen: die Gleichung einer Isobare ist

$$p = F(x, y, t) = \text{const.} \quad \text{oder} \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Hier drückt $\frac{dx}{dt}$ die X-Komponente, $\frac{dy}{dt}$ die Y-Komponente der Geschwindigkeit aus, mit der ein Punkt einer Isobare wandert. Nennen wir n die Normale zur Isobare, so ist

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}$$

der totale Gradient; ferner sei

$$\frac{dn}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

die totale Geschwindigkeit, mit der ein Punkt der Isobare sich bewegt; dann wird offenbar

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

sein. In dieser Gleichung liegt die Festsetzung einer willkürlichen Variation der Isobare mit der Zeit; es wird nämlich angenommen, daß ein Punkt der Kurve sich stets senkrecht zur Tangente an jener Stelle bewegt, was wohl das einfachste ist; doch ließen sich auch andere Arten der Variation zu Grunde legen.

Aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}\ \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

folgt nach kurzer Rechnung:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial t}\,\frac{\partial p}{\partial x}}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial t}\,\frac{\partial p}{\partial y}}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}. \tag{35}$$

Diese Ausdrücke für die Komponenten der Geschwindigkeit eines Isobarenpunktes können leicht auf die obige Gleichung

$$p = f[(x - qct)^2 + y^2]$$

angewendet werden. Man findet z. B. für

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 : \frac{dx}{dt} = qc, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Bei zur X-Achse parallelem Lauf der H-Linien bewegt sich also eine kreisförmige Isobare mit der Geschwindigkeit qc in der Richtung der positiven X-Achse, d. i. von Westen nach Osten.

Die Geschwindigkeit für eine plausible Annahme des c ist leicht berechnet. Nachdem wir die Größe q für 5000 *m* ($q = 9.10^4$) zu verwenden beabsichtigen, entnehmen wir aus der Karte 8 für jenen Teil, wo die H-Linien ungefähr parallel zur X-Achse laufen, den Abstand zweier benachbarter zu rund 1 *cm*;[1] die Differenz ihrer Kurvenwerte aber beträgt 60 *m*. Nun

[1] im Maßstab meiner Arbeitskarten, die linear dreimal so groß als die hier reproduzierten sind.

ist $\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\delta H}{m}$, wenn m den Abstand der H-Linien voneinander bedeutet; m ist in Metern nach dem oft benützten Umrechnungsfaktor $\frac{555.10^3}{2\cdot 8}$, $\delta H = 50$, folglich

$$q\frac{\partial H}{\partial y} = qc = 23\ m/\text{Sek.}$$

Dies entspricht einer Geschwindigkeit von 83 *km* pro Stunde, ein Wert, der wohl zu groß ist, aber nach der Größenordnung nicht schlecht mit der Erfahrung übereinstimmt.

Der Inhalt der Gleichung (34) läßt sich schließlich noch allgemeiner ausdrücken. Aus dieser Gleichung folgt nämlich $p = F(x - qct, y)$ und, wenn wieder $x - qct = \eta$, $y = \zeta$,

auch $$\frac{dx}{dt} = \frac{qc\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{qc\frac{\partial p}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial p}{\partial \zeta}}{\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right)^2};$$

wenn $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2$, so ist die Verschiebung einer Isobare in der X-Richtung, d. h. der Abstand der zweiten Lage von der ersten Lage der Isobare in einer Parallelen zur X-Achse

$\frac{dX}{dt} = \frac{\left(\frac{dn}{dt}\right)^2}{\frac{dx}{dt}}$ (nämlich $\frac{dn}{dt}$ dividiert durch den Kosinus des Winkels, welchen die Normale n mit der X-Achse einschließt). Bildet man aus den obigen Größen $\frac{dn}{dt}$ und dann $\frac{dX}{dt}$, so folgt $\frac{dX}{dt} = qc$, d. h. bei parallelem westöstlichen Verlauf der H-Linien und dem Gefälle $\frac{\partial H}{\partial y} = c$ verschiebt sich jede beliebige Luftdruckverteilung, ohne sich zu verändern, mit der Geschwindigkeit qc parallel zur X-Achse von Westen nach Osten. Die allgemeine Westostbewegung der Luftdruckgebilde auf den Wetterkarten ist hiedurch erklärt.

Zweites Beispiel.

Betrachten wir die Karten für H, so können wir die H-Linien in erster Annäherung als Kreisbogen auffassen, welche um einen Mittelpunkt im Norden des Gebietes von Nordamerika, das auf den Karten dargestellt ist, gezogen sind. Sei der Anfangspunkt unseres Koordinatensystems ungefähr bei 40° nördl. Breite und 90° westl. Länge gelegen, so sei a der Abstand des Kreismittelpunktes vom genannten Anfangspunkt auf der negativen Y-Achse. Die H-Linien mögen in gleichem Abstande verlaufen, derart, daß, wenn r der Radius der Kreisbögen ist, $\frac{\partial H}{\partial r} = c$, wo c eine positive Konstante ist. Es ist nun $r^2 = x^2 + (a+y)^2$ und folglich

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{cx}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{c(a+y)}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}.$$

Unsere Differentialgleichung lautet also:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{qc(a+y)}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{qcx}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Die Gleichungen (32), welche für die Differentialgleichung gesetzt werden, sind dann:

$$dp = 0, \quad dx = \frac{qc(a+y)}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}\, dt,$$

$$-\frac{qcx\,dx}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}} = \frac{qc(a+y)\,dy}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}.$$

Es folgt weiter $p = C_1 = \xi$, $\sqrt{x^2+(a+y)^2} = C_2 = \eta$; aus dieser Gleichung und der zweiten obigen folgt durch Elimination von y:

$$dt = \frac{C_2\, dx}{qc\sqrt{C_2^2 - x^2}}$$

und durch Integration

$$t = \frac{C_2}{cq} \arc \sin \frac{x}{C_2} + C_3,$$

also: $\arc\sin\frac{x}{C_2}-\frac{qct}{C_2}=C_3=\zeta$; setzt man für C_2 hier wieder den obigen Wurzelausdruck ein, so ist schließlich:

$$\xi=p,\quad \eta=\sqrt{x^2+(a+y)^2},$$

$$\zeta=\arc\sin\frac{x}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}-\frac{qct}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}$$

und $\Phi(\xi,\eta,\zeta)=0$ eine Lösung unserer Differentialgleichung, ebenso $p=F(\eta,\zeta)$. Nun wollen wir wieder als Anfangsbedingung für $t=0$ $p_0=\vartheta y+M$ annehmen; es soll also der Druck nach Norden linear abnehmen und von x unabhängig sein. M ist der Druckwert zu Anfang für den Koordinatenanfangspunkt, ϑ die Zunahme desselben nach Süden zu.

Zur Zeit $t=0$ ist dann:

$$\xi=p,\quad \eta=\sqrt{x^2+(a+y)^2},\quad \zeta=\arc\sin\frac{x}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}};$$

eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen y, so ergibt sich $\zeta=\arc\sin\frac{x}{\eta}$ und durch Elimination von x hieraus $y=-a+\eta\cos\zeta$, folglich $p=M-\vartheta a+\vartheta\eta\cos\zeta$ oder

$$p=M-\vartheta a+\vartheta\sqrt{x^2+(a+y)^2}\cos\left(\arc\sin\frac{x}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{qct}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}\right).$$

Löst man nun noch den Kosinus dieser Differenz in seine Bestandteile auf, so wird der Druck folgende Funktion von x, y, t:

$$p=M-\vartheta a+\vartheta x\sin\frac{qct}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}+$$
$$+\vartheta(a+y)\cos\frac{qct}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}}. \tag{36}$$

Diese Gleichung genügt sowohl der ursprünglichen Differentialgleichung als der gestellten Anfangsbedingung, ist somit die gesuchte Lösung.

Durch Zusammenziehen des Sinus- und Kosinusgliedes kann man sie in eine für die Rechnung bequemere Form bringen:

$$p = M - a\vartheta + \vartheta\sqrt{x^2+(a+y)^2}\sin\left(\frac{qct}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{arc\,tg}\frac{a+y}{x}\right). \qquad (37)$$

So erscheint der Druck als eine periodische Funktion der Zeit, die aber für verschiedene Koordinaten verschiedene Schwingungsdauer hat. Die letztere ist nämlich

$$\tau = \frac{2\pi}{qc}\sqrt{x^2+(a+y)^2},$$

wird also um so größer, je weiter wir uns vom Mittelpunkt der Kreisbögen H entfernen. Wir wollen die Periodendauer τ für den Anfangspunkt des Koordinatensystems berechnen, d. i. für $x = y = 0$. Aus der Karte 8 für H_2 läßt sich a, der Abstand des Kreismittelpunktes der H-Linien von jenem Punkte, zu ungefähr $12\,cm$[1] entnehmen; freilich ist das etwas willkürlich, da die wirklichen H-Linien keine Kreisbögen sind. Es wird $\tau = \frac{2\pi}{qc}a$; für q und c setzen wir dieselben Werte wie früher $\left(q = 9.10^4, \quad c = \frac{50.2 \cdot 8}{555.10^3}\right)$. a ist natürlich auch im Maßstabe der Erdoberfläche in Meter auszudrücken, also

$$a = 12.\frac{555.10^3}{2 \cdot 8}.$$

Dann ergibt sich $\tau = 64 \cdot 10^4$ Sekunden oder $\tau = 7 \cdot 4$ Tage.

Es wird also am Orte $x = y = 0$ nach $7 \cdot 4$ Tagen stets der gleiche Luftdruck wiederkehren. Dieses Resultat ist jedenfalls der Größenordnung nach kein unwahrscheinliches. Wäre die Theorie unbrauchbar, so hätte sich für τ ebensogut ein Zeitraum von 1 Sekunde wie von 1000 Jahren ergeben können. Da, wie gesagt, die Periodendauer für verschiedene Punkte verschieden ist, so wird nach $7 \cdot 4$ Tagen trotzdem nicht auf

[1] Im Maßstab meiner Arbeitskarten.

dem ganzen Teile der Erdoberfläche die Drucksituation die frühere geworden sein; vielmehr wird dieselbe sich fortwährend weiter ändern. Um einen Überblick über die nach Gleichung (37) sich ergebenden Luftdruckverteilungen zu bekommen, insbesondere um zu sehen, ob diese irgend welche Ähnlichkeit mit den Erscheinungen der Wirklichkeit haben, hauptsächlich was die entstehenden Gradienten betrifft, habe ich die Druckverteilungen für einige aufeinanderfolgende Tage berechnet. Dies geschah für ein Gebiet, welches von $x = -9\,cm$ bis $x = 9\,cm$ und von $y = -6\,cm$ bis $y = 9\,cm$ reichte, und zwar von 3 zu 3 cm.[1] x und y sind hier in gleichen Einheiten ausgedrückt wie $a = 12\,cm$. Gleichung (37) wurde geschrieben:

$$\Pi = \frac{p-M+a\vartheta}{\vartheta} = \sqrt{x^2+(a+y)^2}\sin\left(\frac{qct}{\sqrt{x^2+(a+y)^2}} + \right.$$
$$\left. +\operatorname{arc\,tg}\frac{a+y}{x}\right).$$

Von der Zeit Null an gerechnet wurde die Isobarenkarte für $t = 1, 2, 3$ und 4 Tage ermittelt. Die Größen Π sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben; die Rechnung ist ziemlich einfach, wenn die von der Zeit unabhängigen Ausdrücke der Gleichung einmal gefunden sind und für jedes t wieder benützt werden; x und y müssen natürlich aus Zentimetern auch in Meter des wirklichen Maßstabes der Erdoberfläche übergeführt werden wie a, doch ist Π in dieser Tabelle noch in Zentimetern gegeben; dieser Umrechnungsfaktor ist noch nicht verwendet.

Π_{cm}	$y = -6$	-3	0	3	6	9
Erster Tag						
$x = -9$.....	− 3·6	− 0·2	3·6	7·7	11·3	15·2
−6.....	− 3·3	0·3	4·5	8·6	12·7	15·9
−3.....	− 2·5	1·8	6·0	10·0	13·7	17·4
0.....	− 0·6	4·0	8·0	11·7	15·3	18·5
3.....	3·5	7·0	10·4	13·6	16·9	20·2
6.....	7·9	10·1	12·9	15·6	18·6	21·3
9.....	10·8	12·7	15·0	17·5	20·1	22·8

[1] Im Maßstab meiner Arbeitskarten.

Π_{cm}	$y = -6$	−3	0	3	6	9
Zweiter Tag						
$x = -9$.....	−10·3	− 9·1	− 6·2	− 2·1	2·0	6·4
−6.....	− 8·5	− 8·4	− 5·2	− 1·1	3·6	7·8
−3.....	− 6·3	− 7·3	− 3·6	0·8	5·7	9·6
0.....	− 5·8	− 5·6	− 1·2	3·3	7·9	12·0
3.....	− 5·5	− 2·3	2·3	6·4	10·8	14·4
6.....	− 0·2	3·1	7·0	10·3	13·9	17·4
9.....	6·8	8·7	11·6	14·3	17·5	20·0
Dritter Tag						
$x = -9$.....	− 8·6	−12·7	−13·4	−11·2	− 7·8	− 3·6
−6.....	− 3·1	−10·4	−12·2	−10·3	− 6·3	− 2·2
−3.....	1·8	− 8·9	−11·1	− 8·7	− 4·4	0·0
0.....	2·0	− 8·7	− 9·8	− 6·6	− 1·8	2·5
3.....	− 4·1	− 9·2	− 7·3	− 3·3	1·3	5·9
6.....	− 7·9	− 6·5	− 2·8	1·1	5·5	9·5
9.....	− 2·8	− 0·4	2·9	6·5	7·2.	13·7
Vierter Tag						
$x = -9$.....	0·0	− 8·6	−14·7	−16·8	−15·9	−12·9
−6.....	6·2	− 3·9	−12·8	−15·6	−14·6	−11·5
−3.....	6·5	− 1·4	−11·7	−14·6	−13·0	− 9·6
0.....	5·5	− 2·0	−11·6	−13·5	−11·2	− 7·1
3.....	4·9	− 6·5	−12·3	−11·8	− 8·2	− 4·0
6.....	− 5·7	−10·8	−11·0	− 8·6	− 4·6	0·0
9.....	−10·0	− 9·3	− 6·8	− 3·2	0·6	4·3

Aus Π_{cm} ist p leicht zu finden. Nehmen wir an, die anfängliche Druckabnahme vom 30. bis zum 50. Breitenkreise betrage 10 *mm* und M, der Druck für $y = 0$ und $t = 0$, sei 750 *mm*: $\vartheta = \frac{\partial p}{\partial y}$ ist dann $4 \cdot 5 . 10^{-6}$ in Millimetern Hg pro Meter und $p = 750 - 10 \cdot 6 + \Pi_{cm} \cdot \frac{555 . 10^3}{2 \cdot 8} \cdot 4 \cdot 5 . 10^{-6}$ in Millimetern oder ungefähr $p = 740 + 0 \cdot 9 \, \Pi_{cm}$.

Da die Annahmen nicht ohne Willkür sind, kann man zur Vereinfachung statt $0 \cdot 9 \Pi_{cm}$ einfach Π_{cm} selbst schreiben, so daß also die in obiger Tabelle enthaltenen Größen nichts anderes als die Abweichungen des Luftdruckes vom Mittelwert 740 in Millimeter bedeuten. Ich habe nun in den Karten[1] 11, 12, 13 und 14 die berechnete Luftdruckverteilung für die ersten 4 Tage eingetragen und mit Addition von 740 Isobaren gezogen. Für $t = 0$ ergibt sich aus den gewählten Konstanten der Druck für:

$y = -6$	-3	0	3	6	$9\,cm$
$p = 747 \cdot 3$	$748 \cdot 6$	$750 \cdot 0$	$751 \cdot 4$	$752 \cdot 7$	$754 \cdot 1\,mm.$

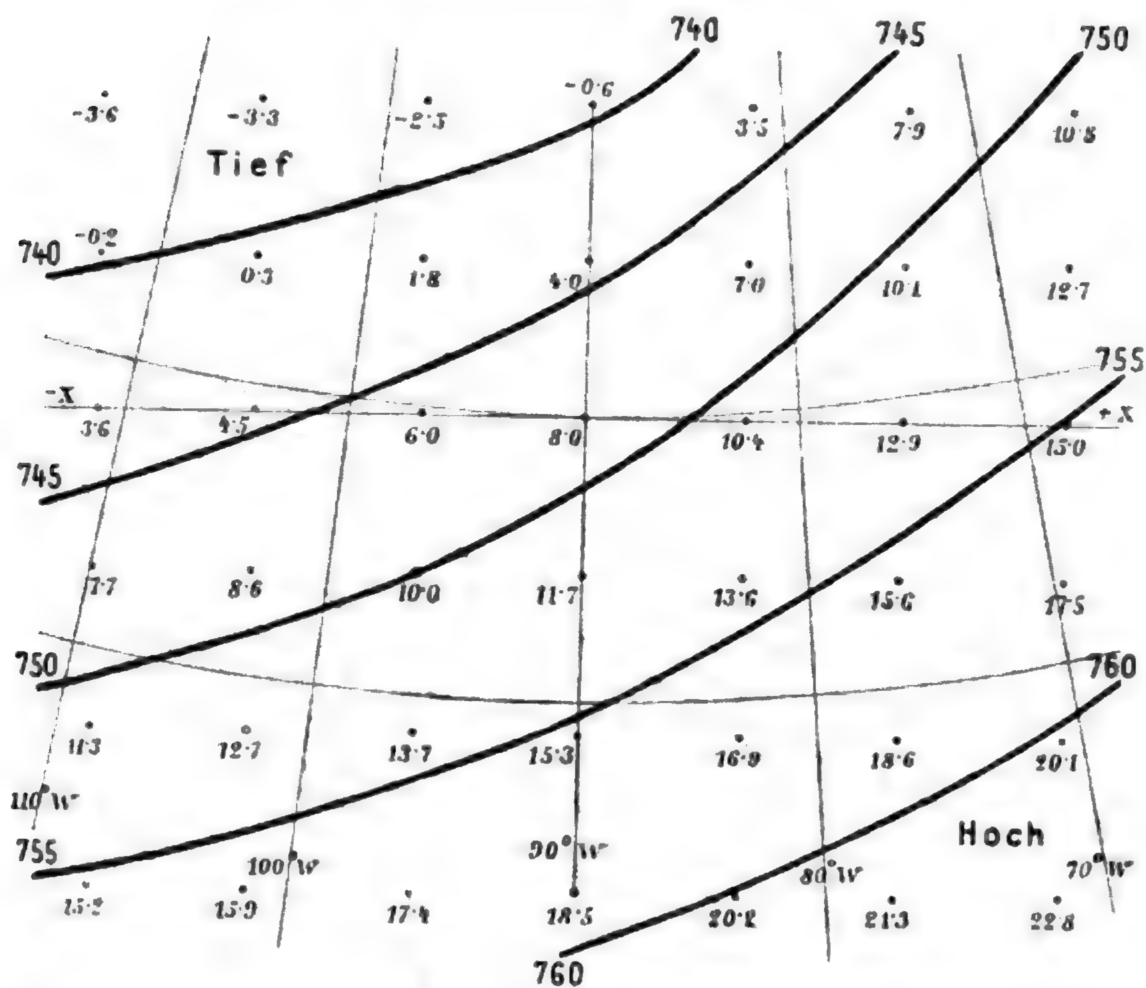
Aus dieser Anfangssituation heraus, von deren kartographischer Wiedergabe abgesehen wurde, entwickeln sich demnach jene in den vier Karten dargestellten. Sie machen einen wenig gewohnten Eindruck, wenn man sie mit dem Bilde vergleicht, das man von Wetterkarten im allgemeinen hat. Es entwickeln sich ziemlich starke Gradienten, aber keine von gerade unmöglicher Größe. Man hätte die Karten auf beliebig lange Zeit hinaus rechnen können, doch sind die 4 Tage schon eher ein zu großer Zeitraum für die gemachten Voraussetzungen. Es ist ja vorausgesetzt, daß die H-Linien Kreise sind, und so würde H, je weiter man gegen Westen, über den Kontinent hinaus, geht, immer größer werden. Nun kommen wohl bei der Berechnung für einen längeren Zeitraum schon die Verhältnisse in sehr großen Distanzen in Betracht, woraus, wenn für diese falsche Annahmen gemacht sind, hervorgeht, daß wir nicht berechtigt sind, die Betrachtungen auf solche Zeiträume auszudehnen.

Immerhin ist es wohl möglich, daß solche Rechnungen von Wert sein werden, wenn man bedenkt, daß eine vollkommen korrekte Integration für die tatsächlich bestehenden Verhältnisse nie möglich sein wird und man stets ideale einfachere Fälle zur Beurteilung der wirklichen wird heranziehen müssen.

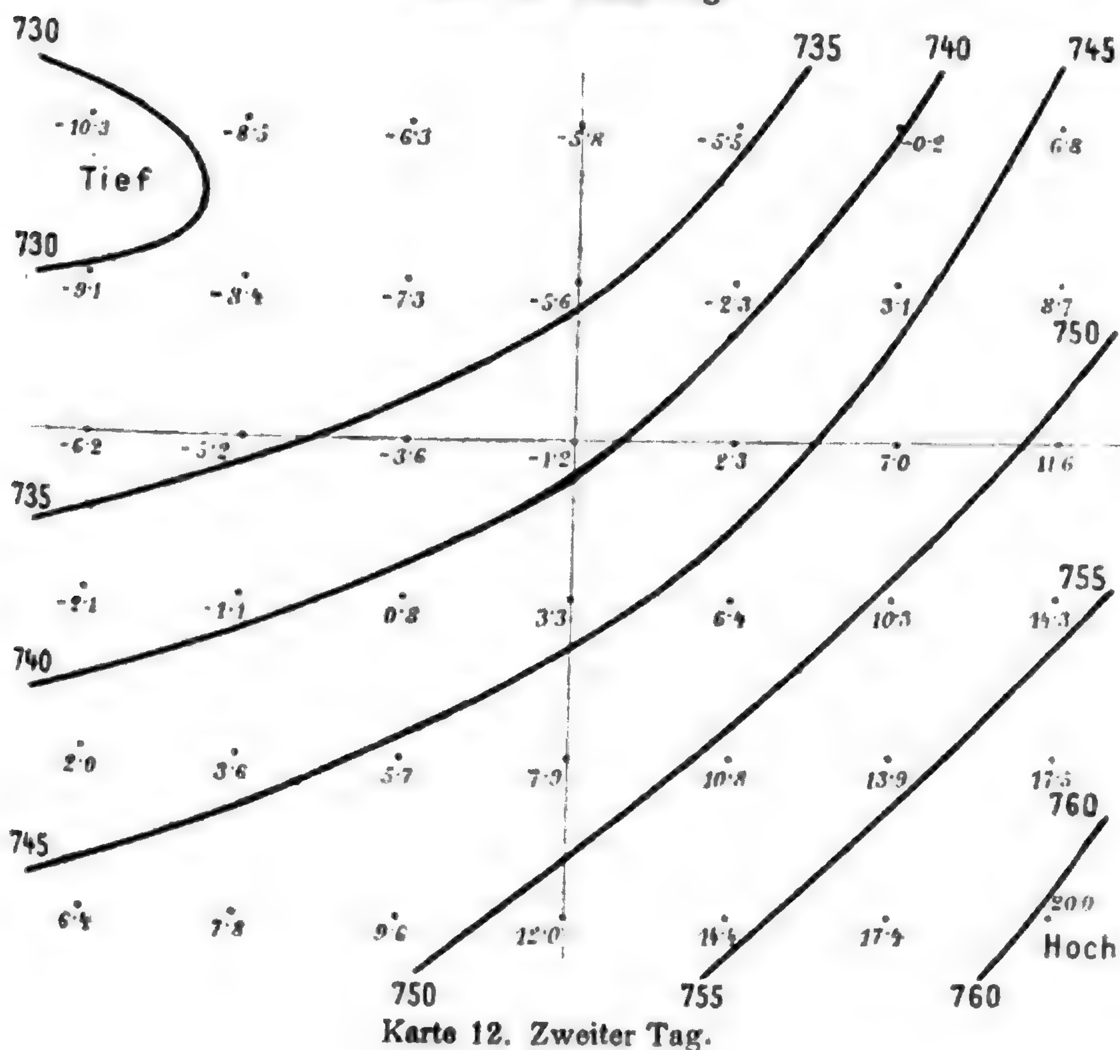
Drittes Beispiel.

Ich habe noch eine Annahme über den Verlauf der H-Linien gemacht, mittels welcher ich versuchte, den Unter-

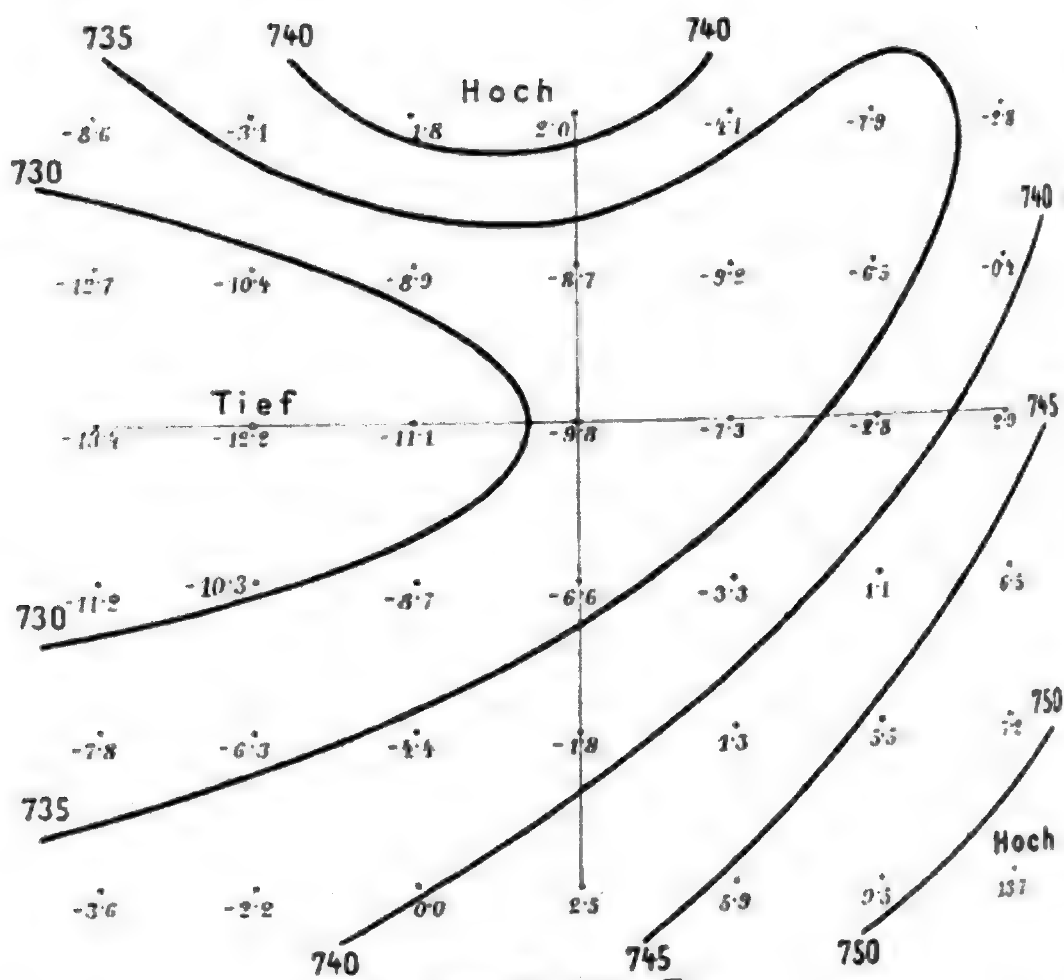
[1] Dieselben sind im gleichen Maßstabe wie Karte 1 gezeichnet.



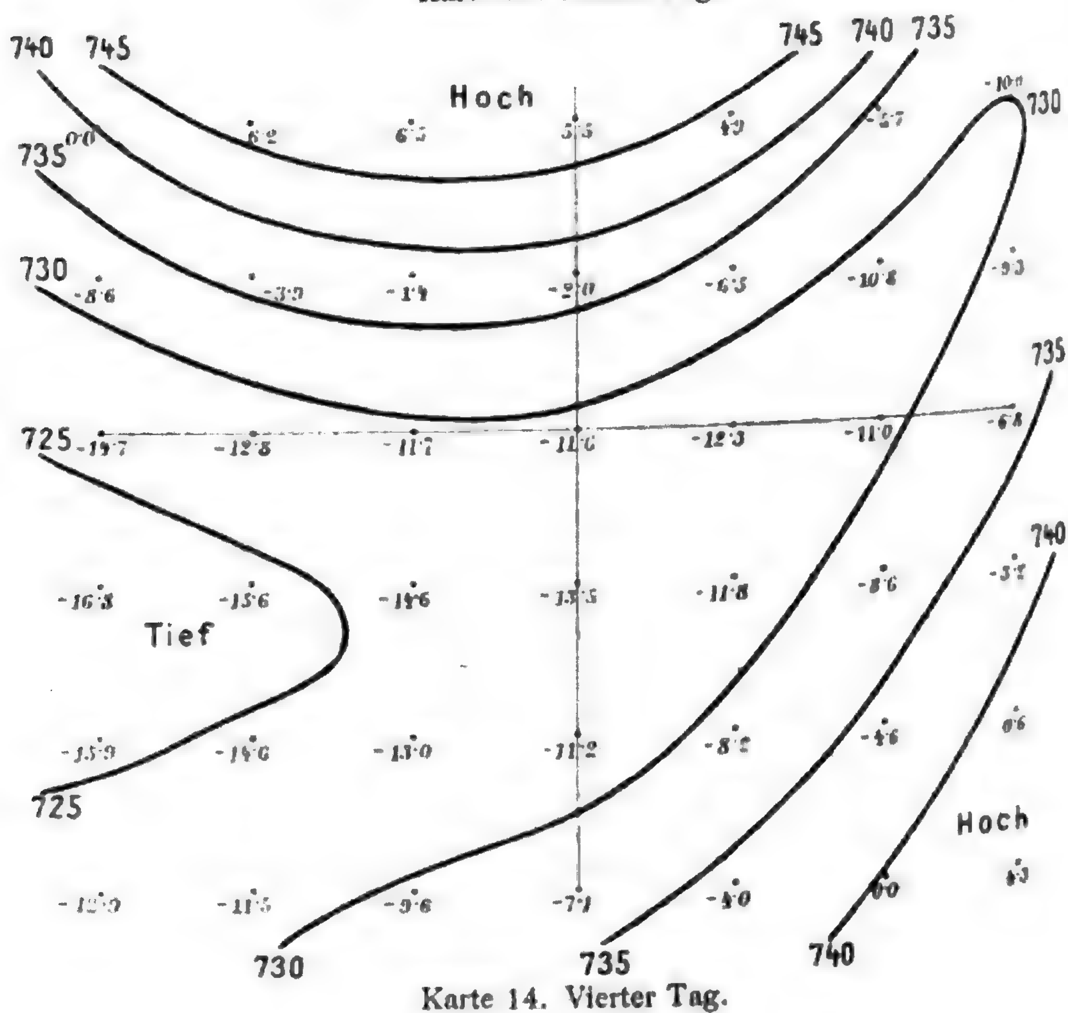
Karte 11. Erster Tag.



Karte 12. Zweiter Tag.



Karte 13. Dritter Tag.



Karte 14. Vierter Tag.

schied zwischen Meer und Kontinent in die Rechnung einzuführen. Es war dies die Annahme, daß die H-Linien Sinuslinien sind, welche ihre Minima in der Mittellinie des Landes, ihre Maxima in der Mittellinie des Ozeans haben. Diese Mittellinien sollen von Norden nach Süden verlaufen, so daß für den amerikanischen Kontinent die H-Linien der Karte 8 nicht wie früher als Kreisbogen, sondern als halbe Sinuswellen aufgefaßt werden, deren zweite Hälfte im Westen über dem Stillen Ozean liegt. Dabei mußte ich allerdings auf eine Kenntnis der H-Linien in diesem Gebiete verzichten und als Länge der Welle über dem Wasser dieselbe wie über dem Kontinent annehmen, nämlich ungefähr die Breite von Nordamerika.

Diese Rechnung bot auch Aussicht, die schon oben berührte Frage zu beurteilen, ob die Entstehung der Depressionen aus der Temperaturverteilung über Land und Meer zu erklären sei oder andere Ursachen habe.

Es liege der Anfangspunkt des Koordinatensystems an jener Stelle des nordamerikanischen Kontinentes unter 55° Breite, wo die H-Linien am tiefsten nach Süden ausgebogen sind (90° westl. Länge); die Höhe H möge nach Norden zu konstant abnehmen, also $\frac{\partial H}{\partial y} = c$ sein. Der angenommene Verlauf der H-Linien für das Gebiet des Kontinentes ist in Fig. II aufgezeichnet. Es sei λ die Wellenlänge der Sinusschwingung, D die halbe Amplitude derselben. Jene H-Linie, die symmetrisch zur X-Achse liegt (H_1), hat dann die Gleichung $y_1 = D.\cos\frac{2\pi x_1}{\lambda}$. Sei der Abstand der in Fig. II mit H bezeichneten Kurve von der H_1-Kurve L, so ist die Gleichung dieser offenbar $y+L = D\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$. Nun ist $\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{H_1-H}{L} = c$ oder $L = \frac{H_1-H}{c}$, folglich die allgemeine Gleichung einer solchen Sinuslinie

$$y + \frac{H_1-H}{c} = D\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$$

und

$$H = H_1 + yc - cD\cos\frac{2\pi x}{\lambda},$$

somit

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{2\pi c D}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Zur Bequemlichkeit werde $\frac{2\pi D}{\lambda} = A$, $\frac{2\pi x}{\lambda} = z$ gesetzt, also $\frac{\partial H}{\partial x} = cA \sin z$.

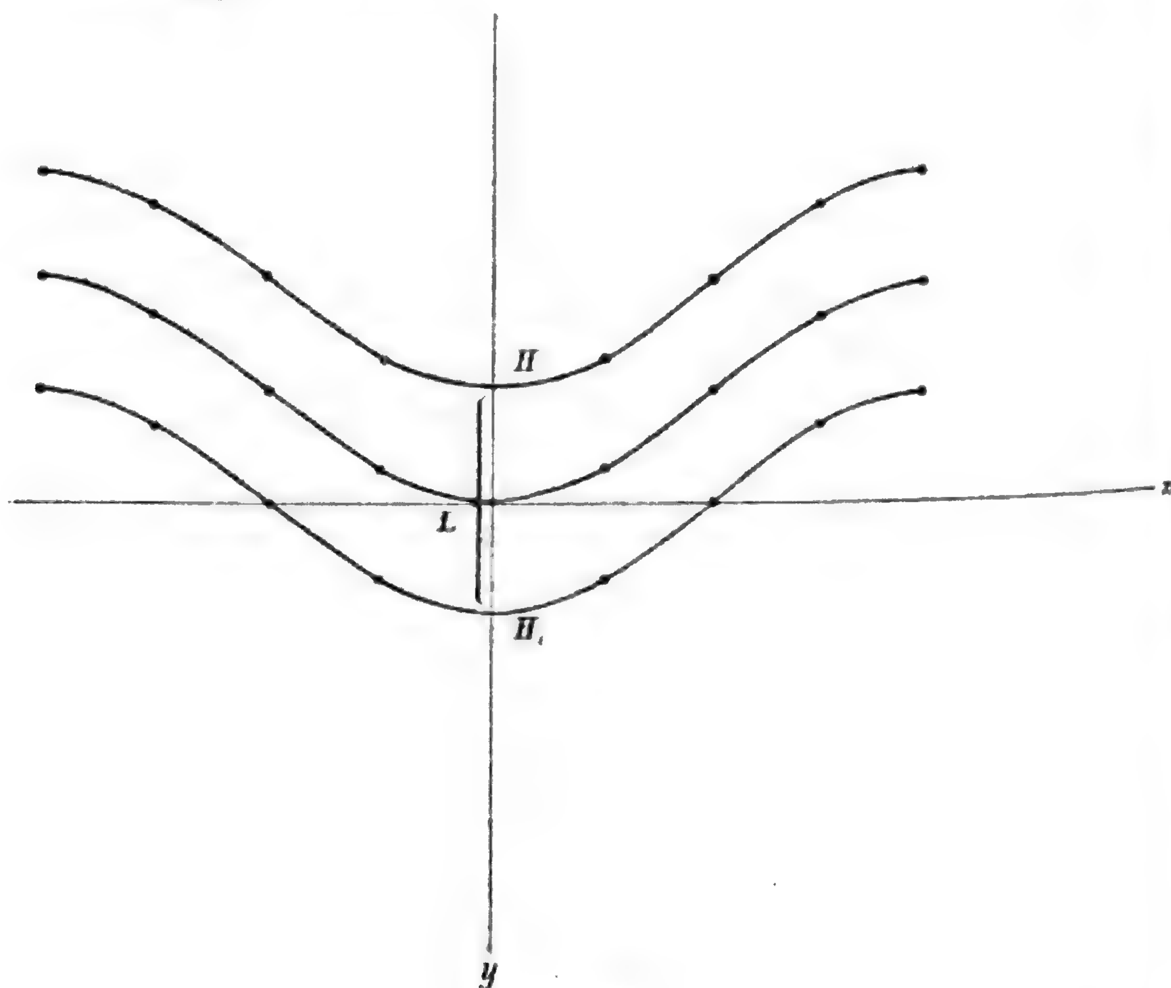


Fig. II.

Gleichung (14) lautet dann, wenn der Faktor wieder q genannt wird:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + qc\frac{\partial p}{\partial x} - qcA \sin z \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Wir integrieren nun nach derselben Methode wie früher. Die Gleichungen (32) lauten hier:

$$dp = 0 = d\xi, \quad cA \sin z\, dx + c\, dy = 0 = d\eta,$$
$$dx - qc\, dt = 0 = d\zeta$$

oder

$$\xi = p = C_1, \quad \eta = cy - cD\cos z = C_2, \quad \zeta = x - qct = C_3$$

und somit

$$p = F\left[c\left(y - D\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right), x - qct\right] = F(\eta, \zeta).$$

Wir wollen nun wie beim Beispiel vorher wieder annehmen, daß zu Anfang der Zeit die Isobaren zur X-Achse parallel verlaufen und $p_0 = M + \vartheta y$ sei; dann wird für $t = 0 : \xi = p$, $\eta = cy - cD\cos z$, $\zeta = x$ und durch Elimination von p, x und y aus dieser Gleichung

$$\xi = M + \vartheta\left(\frac{\eta}{c} + D\cos\frac{2\pi\zeta}{\lambda}\right).$$

Folglich wird schließlich sein:

$$p = M + \vartheta y - \vartheta D\left[\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \cos\frac{2\pi(x - qct)}{\lambda}\right]. \quad (38)$$

Diese Formel erfüllt die Differentialgleichung wie die Anfangsbedingung, ist also unsere Lösung.

Der Luftdruck stellt sich somit als eine periodische Funktion der Zeit dar. Die Schwingungsdauer ist $\tau = \frac{\lambda}{qc}$; wie man sieht, ist sie konstant und nicht wie früher von den Koordinaten abhängig.

Um uns über ihre Größenordnung zu orientieren, wollen wir die Wellenlänge ungefähr als das Doppelte der Breite des nordamerikanischen Festlandes annehmen und $\lambda = 50\ cm$ (nach dem Maßstab meiner Arbeitskarten) setzen; c sei wie früher nach dem Maßstab dieser Karten $\frac{50 . 2 \cdot 8}{555 . 10^3}$, q sei $9 . 10^4$; dann erhalten wir:

$$\tau = \frac{555^2 . 10^6}{2 \cdot 8^2 . 9 . 10^4} = 436.500 \text{ Sekunden} = 5 \cdot 05 \text{ Tage}.$$

Wegen der gewissen Willkürlichkeit in den Annahmen wollen wir τ einfach gleich 5 Tage setzen und kommen also zum Resultat, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Luftdruckverteilung zu Anfang der Zeit nach 5 Tagen wiederkehren wird. Diese Periode hat große Wahrscheinlichkeit für sich, was die Größenordnung anlangt.

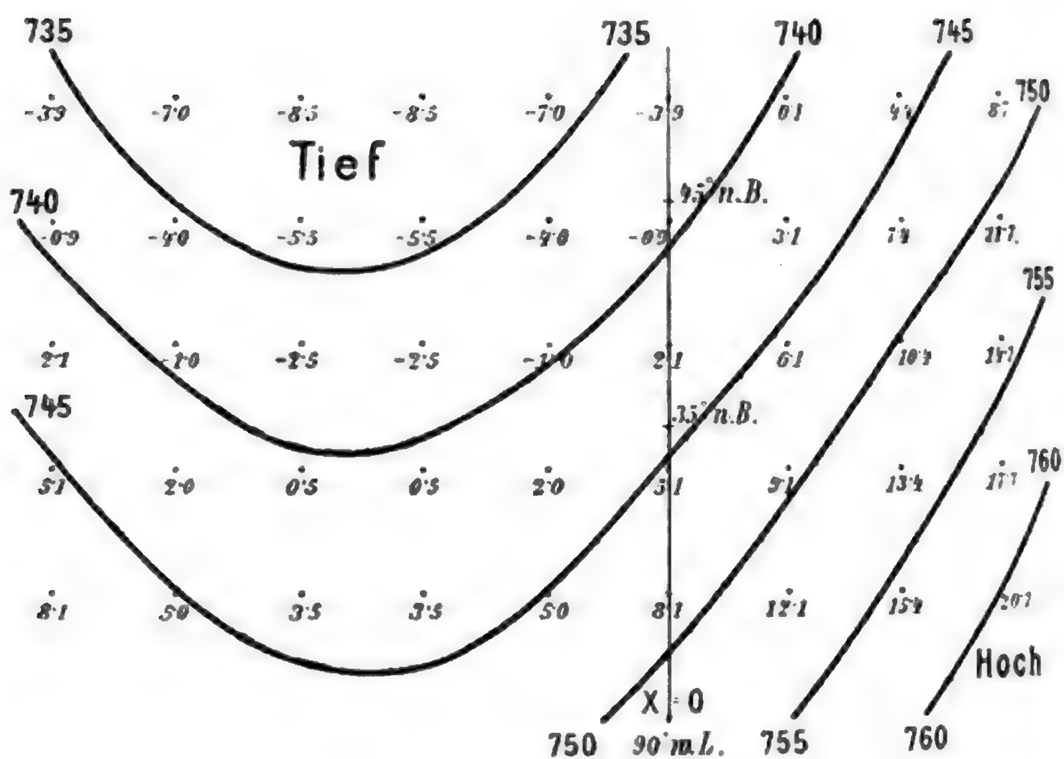
Ich habe nun nach Gleichung (38) die Luftdruckverteilung für die Dauer der Periode von Tag zu Tag, und zwar für die Koordinaten $x = -15\ cm$ bis $x = 9$ und $y = 3$ bis $y = 15$ von 3 zu 3 cm (im Maßstabe der Arbeitskarten) ausgerechnet. Wie beim zweiten Beispiel wurde $\frac{p-M}{\vartheta} = \Pi$ zunächst in Zentimetern (Π_{cm}) nach der Formel ausgewertet:

$$\Pi = y - D\left[\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \cos 2\pi\frac{x-qct}{\lambda}\right].$$

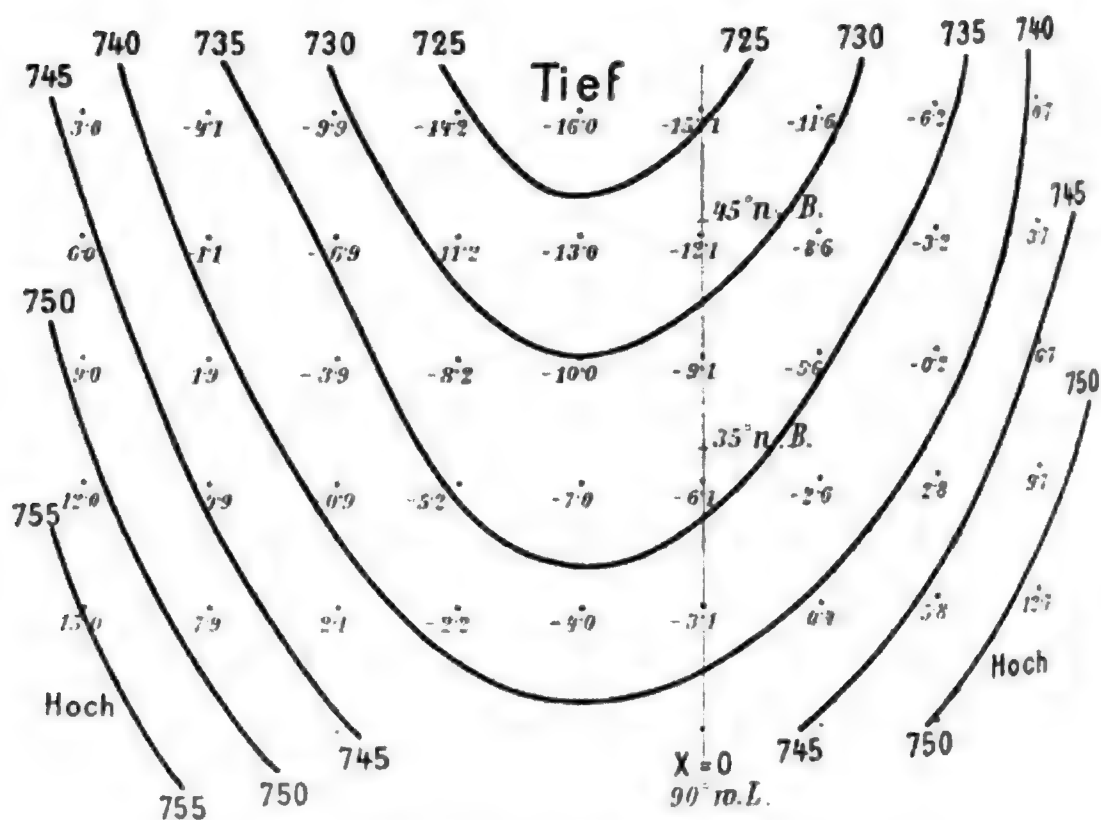
Die halbe Amplitude der Sinuslinien D wurde nach dem Verlauf der H-Kurven auf Karte 8 zu 10 cm angenommen. Die berechneten Größen Π_{cm} sind in nachstehender Tabelle angegeben.

	$y = 3$	6	9	12	15
Erster Tag					
$x = -15$	− 3·9	− 0·9	2·1	5·1	8·1
− 12	− 7·0	− 4·0	− 1·0	2·0	5·0
− 9	− 8·5	− 5·5	− 2·5	0·5	3·5
− 6	− 8·5	− 5·5	− 2·5	0·5	3·5
− 3	− 7·0	− 4·0	− 1·0	2·0	5·0
0	− 3·9	− 0·9	2·1	5·1	8·1
3	0·1	3·1	6·1	9·1	12·1
6	4·4	7·4	10·4	13·4	15·4
9	8·7	11·7	14·7	17·7	20·7

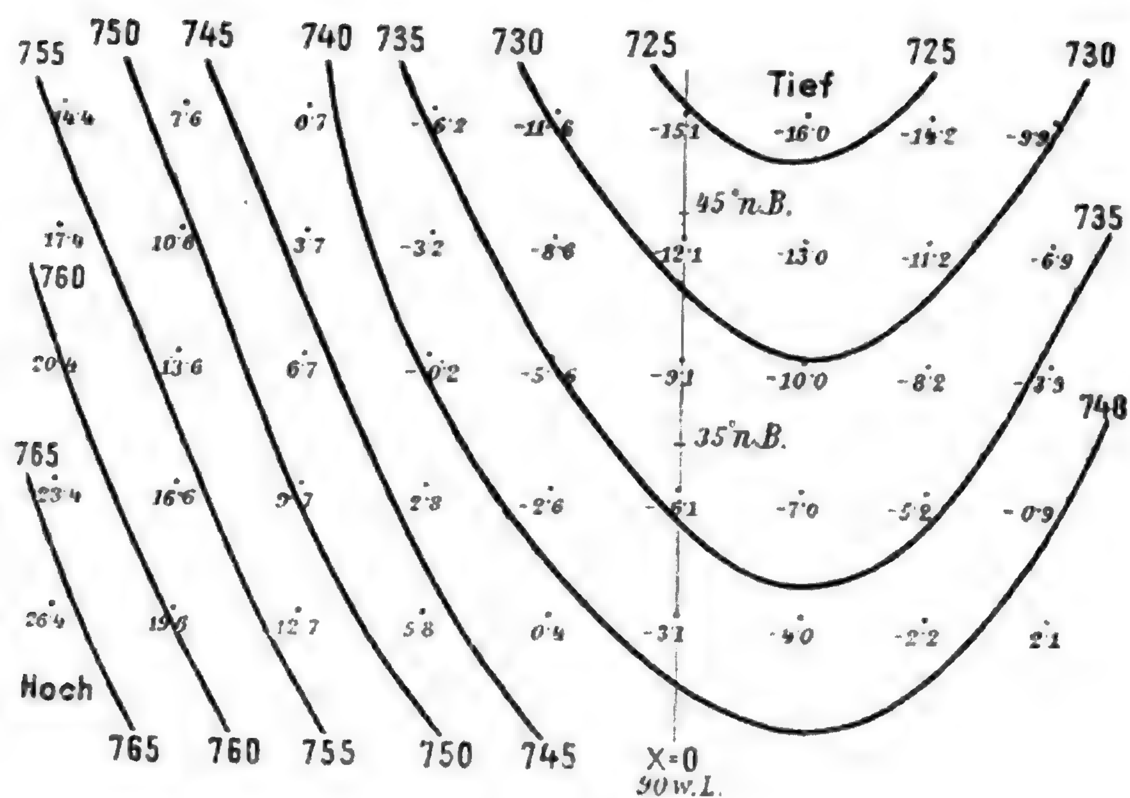
	$y=3$	6	9	12	15
Zweiter Tag					
$x=-15$.......	3·0	6·0	9·0	12·0	15·0
−12.......	− 4·1	− 1·1	1·9	4·9	7·9
− 9.......	− 9·9	− 6·9	− 3·9	− 0·9	2·1
− 6.......	−14·2	−11·2	− 8·2	− 5·2	− 2·2
− 3.......	−16·0	−13·0	−10·0	− 7·0	− 4·0
0.......	−15·1	−12·1	− 9·1	− 6·1	− 3·1
3.......	−11·6	− 8·6	− 5·6	− 2·6	0·4
6.......	− 6·2	− 3·2	− 0·2	2·8	5·8
9.......	0·7	3·7	6·7	9·7	12·7
Dritter Tag					
$x=-15$.......	+14·4	17·4	20·4	23·4	26·4
−12.......	+ 7·6	10·6	13·6	16·6	19·6
− 9.......	0·7	3·7	6·7	9·7	12·7
− 6.......	− 6·2	− 3·2	− 0·2	2·8	5·8
− 3.......	−11·6	− 8·6	− 5·6	− 2·6	0·4
0.......	−15·1	−12·1	− 9·1	− 6·1	− 3·1
3	−16·0	−13·0	−10·0	− 7·0	− 4·0
6.	−14·2	−11·2	− 8·2	− 5·2	− 2·2
9.......	− 9·9	− 6·9	− 3·9	− 0·9	2·1
Vierter Tag					
$x=-15$.......	14·4	17·4	20·4	23·4	26·4
−12.......	12·0	15·0	18·0	21·0	24·0
− 9.......	8·7	11·7	14·7	17·7	20·7
− 6.......	4·4	7·4	10·4	13·4	16·4
− 3.......	0·1	3·1	6·1	9·1	12·1
0.......	− 3·9	− 0·9	2·1	5·1	8·1
3.......	− 7·0	− 4·0	− 1·0	2·0	5·0
6.......	− 8·5	− 5·5	− 2·5	0·5	3·5
9.......	− 8·5	− 5·5	− 2·5	0·5	3·5



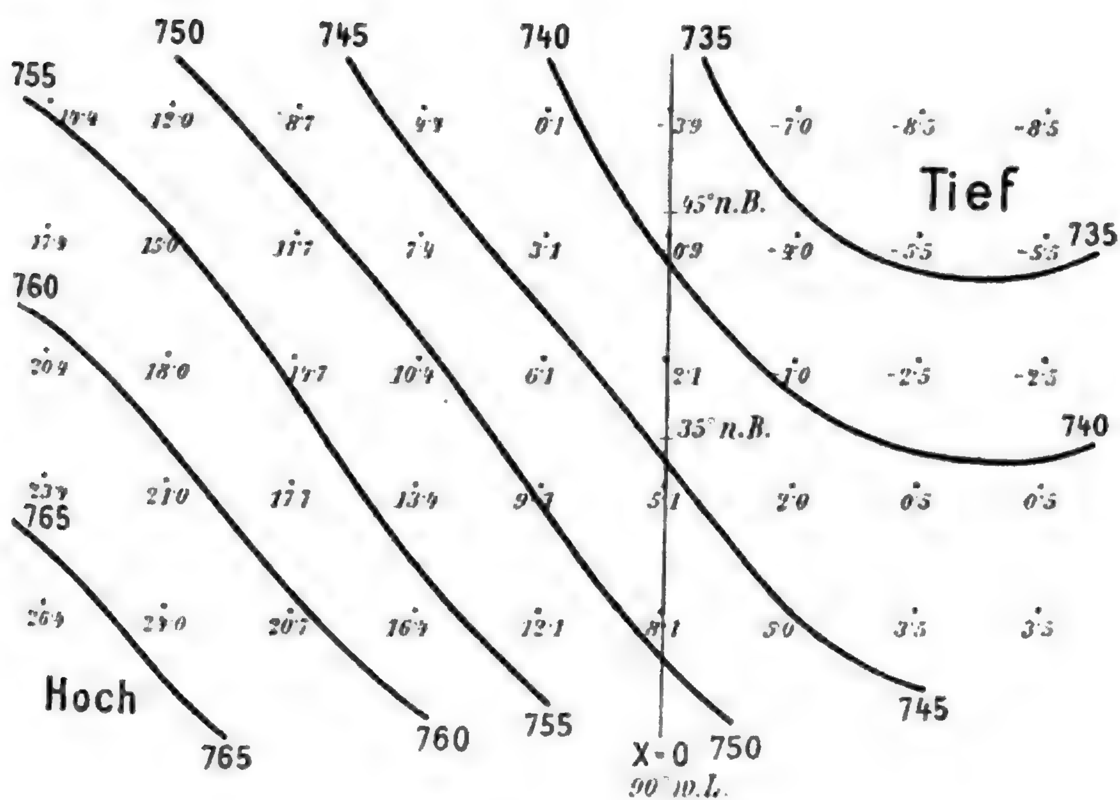
Karte 15. Erster Tag.



Karte 16. Zweiter Tag.



Karte 17. Dritter Tag.



Karte 18. Vierter Tag.

Es sei nun wie beim vorigen Beispiel $\vartheta = 4 \cdot 5 . 10^{-6}$, dann wird $\Pi . \vartheta$ wieder $0 \cdot 9\, \Pi_{cm}$, wofür wir wie früher kurz Π_{cm} setzen, so daß letztere Größe auch die Abweichung des Druckes vom Werte M in Millimetern repräsentiert. Sei M, der Druck zu Anfang der Zeit für $y = 0$, $740\, mm$ (in 55° nördl. Breite), so ist dann $p = 740\, mm + \Pi_{cm}$. Die Verteilung des Luftdruckes an vier der Anfangssituation folgenden Tagen ist auf den Karten[1] 15, 16, 17 und 18 durch Isobaren dargestellt. Die Anfangsverteilung ist dieselbe wie im zweiten Beispiel: die Isobaren sind Parallele zur X-Achse mit »Tief« im Norden. Hieraus entwickelt sich also im westlichen Teile des Kontinentes nach einem Tage ein Sack tiefen Druckes, der bis zum nächsten Tage nach Osten zieht und sich stark vertieft; am dritten Tage liegt er noch weiter östlich, aus Südwesten rückt sehr hoher Druck nach und am vierten Tage verflacht sich der Sack tiefen Druckes, indem er noch weiter nach Osten zieht. Der fünfte Tag gibt nach der Rechnung die Situation vom Anfange (Isobaren parallel zur X-Achse) genau wieder.

Der Verlauf der H-Linien in Sinuskurven, d. i. die Tatsache, daß der Kontinent im Winter kalt, das Meer warm ist, erzeugt also aus einer linearen Druckabnahme gegen Norden einen periodisch wiederkehrenden Sack tiefen Druckes, welcher bei der hier gewählten Breite Amerikas im Laufe von 5 Tagen über den Kontinent von Westen nach Osten hinwegzieht. Dieser Sack hat den tiefsten Druck im mittleren Teile des Kontinentes, wo die Größe H den kleinsten Wert hat.

Die Karten 15 bis 18 entsprechen nicht den gewohnten Wetterkarten, da keine geschlossenen Isobaren auftreten. Dies ist aber nicht zu verwundern, da wir in der Rechnung von den sogenannten Reibungskräften abgesehen haben und dadurch alle »ausfüllenden« Bewegungen an der Erdoberfläche eliminiert haben. Gehen wir von einer tatsächlich beobachteten Luftdruckverteilung an der Erdoberfläche zu der in einiger Höhe darüber lagernden über, so werden die unten geschlossenen Isobaren

[1] Dieselben sind im gleichen Maßstab wie Karte 1 gezeichnet.

bald in der Höhe nach Norden offene und das Bild einer geschlossenen Depression an der Erdoberfläche ist in einiger Höhe über der Erde gar nicht wesentlich von dem verschieden, welches uns die berechneten Karten 15 bis 18 zeigen; wir können daher das Ergebnis der Rechnung ohneweiters dahin deuten, daß nicht nur die Bildung eines Sackes von tiefem Drucke, sondern jenes Gebildes, das man Depression zu nennen pflegt, bewiesen wurde, wobei wir uns unter »Depression« einen Sack tiefen Druckes in der Höhe vorstellen, dessen Isobaren sich durch die Reibungskräfte an der Erdoberfläche daselbst schließen können.

Aus den Karten 15 bis 18 konnte ich die Geschwindigkeit der von Nord nach Süd gerichteten Medianebene des Tiefdrucksackes zu ungefähr 5 *cm* im Maßstab meiner Arbeitskarten[1] pro Tag entnehmen, obwohl sie eigentlich nicht konstant ist. Durch Umrechnung auf die Größenverhältnisse der Erde $\left(1\,cm = \frac{555}{2\cdot 8}\cdot 10^3\,m\right)$ ergibt sich daraus eine Geschwindigkeit von zirka 40 *km* pro Stunde.

Die tatsächlich beobachtete mittlere Geschwindigkeit der Minima in den Vereinigten Staaten beträgt nach J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, p. 502, im Jänner 49·9 *km* pro Stunde im Mittel. Die Größenordnung der berechneten Geschwindigkeit, mit der sich der Sack tiefen Druckes bewegt, ist also sehr befriedigend.

Ich möchte noch wegen der berechneten Periode von 5 Tagen auf eine kurze Angabe in Hann's Lehrbuch der Meteorologie die Aufmerksamkeit lenken. Auf p. 504 ist für 10 Jahre die Anzahl der Barometerminima in Nordamerika zu 637 angegeben; hievon entfallen 31$^0/_0$ auf den Winter, also 197·5, im Jahre mithin 19·75 und in einem Wintermonat zirka ein Drittel von diesen, also 6·6. Aus der berechneten Periode von 5 Tagen würde sich eine Häufigkeit derselben von 6 im Monat ergeben, was also sehr gut zu stimmen scheint. Im Laufe des Monats Jänner 1895 treten auf den Karten des amerikanischen Wetterbureaus von 8^h früh an 7 Tagen Depressionen im Gebiet

---

[1] Dreimal so groß als die hier reproduzierten.

der großen Seen auf, wie man sich leicht überzeugen kann, und zwar am 1., 6., 11., 14., 21., 26. und 29., also ungefähr alle 5 Tage.

Freilich soll diesen Übereinstimmungen nicht mehr Bedeutung zugeschrieben werden, als daß sie die Theorie im allgemeinen und die Annahmen über den Einfluß der Breite des Kontinentes und der Höhenabnahme $\left(\frac{\partial H}{\partial y} = c\right)$ nach Norden im besonderen zu bestätigen scheinen. Genau sind die vorgeführten Berechnungen gewiß nicht.

Viertes Beispiel.

Ich habe mit den angenommenen Sinuslinien für die Verteilung von H wie im vorigen Beispiel schließlich noch ein solches gerechnet, welches zeigen soll, daß es durchaus keine mathematischen Schwierigkeiten hat, statt der einfachen Anfangsbedingung von der linearen Druckabnahme nach Norden eine kompliziertere einzuführen, wofern der Druck nur mathematisch als Funktion der Koordinaten gegeben ist. Da wir bei dem früheren Beispiel sahen, daß aus der Anfangsbedingung keine gewöhnliche Depression mit geschlossenen Isobaren abzuleiten sei, so habe ich eine solche nunmehr gleich zu Anfang angenommen, um ihre Veränderung mit der Zeit zu verfolgen. Hiebei war es nötig, damit der Druck nicht mit zunehmender Entfernung von derselben stets wachse, auch Antizyklonen einzuführen, neben welchen neuerdings Depressionen lagern. Es gelingt leicht, eine derartige Funktion für p_0 zu finden, wenn man den Druck gleichfalls als Sinusfunktion von x auffaßt, aber die Amplitude derselben nach Norden und Süden abnehmen läßt. Zu dem Zwecke denkt man sich die X-Achse so gelegt, daß sie durch das Zentrum der Depression sowie der Antizyklone rechts und links von dieser geht, und setzt dann

$$p_0 = M - \frac{a}{b^2 + y^2} \cos \frac{2\pi x}{\mu}. \tag{39}$$

M sei eine Konstante, die leicht zu bestimmen ist. Der Druck nimmt nach Norden und Süden in gleicher Weise ab;

a und b sind gleichfalls anzunehmen; p_0, die Anfangsverteilung des Druckes, wird dargestellt durch eine Aufeinanderfolge von Zyklonen und Antizyklonen, deren Zentra sämtlich auf der X-Achse liegen. Der Abstand zweier Zyklonenzentra voneinander ist μ, die Wellenlänge des Kosinusgliedes. Im Anfangspunkt des Koordinatensystems liegt zur Zeit 0 das Zentrum einer Depression. Um eine Luftdruckverteilung p_0 zu erhalten, welche, wenn auch sehr schematisch, doch in den Gradienten ungefähr der Erfahrung entspricht, habe ich $a = 400$, $b^2 = 25$ gesetzt. $\frac{a}{b^2}$ soll dann in Millimetern Quecksilber ausgedrückt sein; es ist die halbe Amplitude der Schwingung (16 *mm*). Die Druckdifferenz zwischen den Zentren des Hochdruck- und Tiefdruckgebietes beträgt 32 *mm*. M sei 760 *mm*; μ werde derart gewählt, daß auf dem Kontinent von Nordamerika eine Depression in der Mitte, beiderseits flankiert von den Ausläufern zweier Hochdruckgebiete, Platz findet, d. h. μ habe die Dimension der Breite Nordamerikas. Da sich die weitere Rechnung bedeutend vereinfachen ließ, wenn λ als ein Vielfaches von μ angenommen wurde, so setzte ich, da die Wellenlänge der H-Sinuslinien ja ungefähr als das Doppelte der Breite Nordamerikas angenommen war, $\mu = \frac{\lambda}{2} = 25\,cm$ im Maßstab meiner Karten. Mittels dieser Konstanten wurde die Anfangsverteilung des Luftdruckes berechnet und ist zusammen mit den auf sie folgenden Drucksituationen weiter unten in der Tabelle und den Karten gegeben.

Die im dritten Beispiel berechnete Integration unserer Differentialgleichung (14) ist auch hier verwendbar, da der Verlauf der H-Linien derselbe geblieben ist; demnach ist

$$p = F\left[c\left(y - D\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right),\ x - qct\right] = F(\eta, \zeta).$$

Benützen wir die Anfangsbedingung (39) in der bisher stets geübten Weise, so erhalten wir aus obiger Gleichung nach kurzer Rechnung:

$$p = M - \frac{a}{b^2 + \left(y - D\cos\frac{2\pi x}{\lambda} + D\cos\frac{2\pi(x-qct)}{\lambda}\right)^2} \cdot$$

$$\cdot \cos\frac{2\pi(x-qct)}{\mu}. \qquad (40)$$

Dieser Ausdruck für p erfüllt die Differentialgleichung wie die Anfangsbedingung, ist also die gesuchte Lösung. Gleichung (40) enthält zwei Perioden der Zeit, deren Schwingungsdauer $\frac{\lambda}{qc}$ und $\frac{\mu}{qc}$ ist. Es ist klar, daß p somit auch hier eine periodische Funktion der Zeit ist. Die Schwingungsdauer derselben wird am kleinsten sein, wenn λ ein Vielfaches von μ ist, so daß in der Zeit $\frac{\lambda}{qc}$ eine ganze Zahl der Perioden $\frac{\mu}{qc}$ enthalten ist. Wir setzten schon oben $\lambda = 2\mu$, erhalten mithin als Periodendauer des ganzen Ausdruckes p $\tau = \frac{\lambda}{qc}$, eine Größe, die wir schon im früheren Beispiel zu 5 Tagen berechnet haben; also auch hier soll nach 5 Tagen die Anfangssituation (39) wiederkehren.

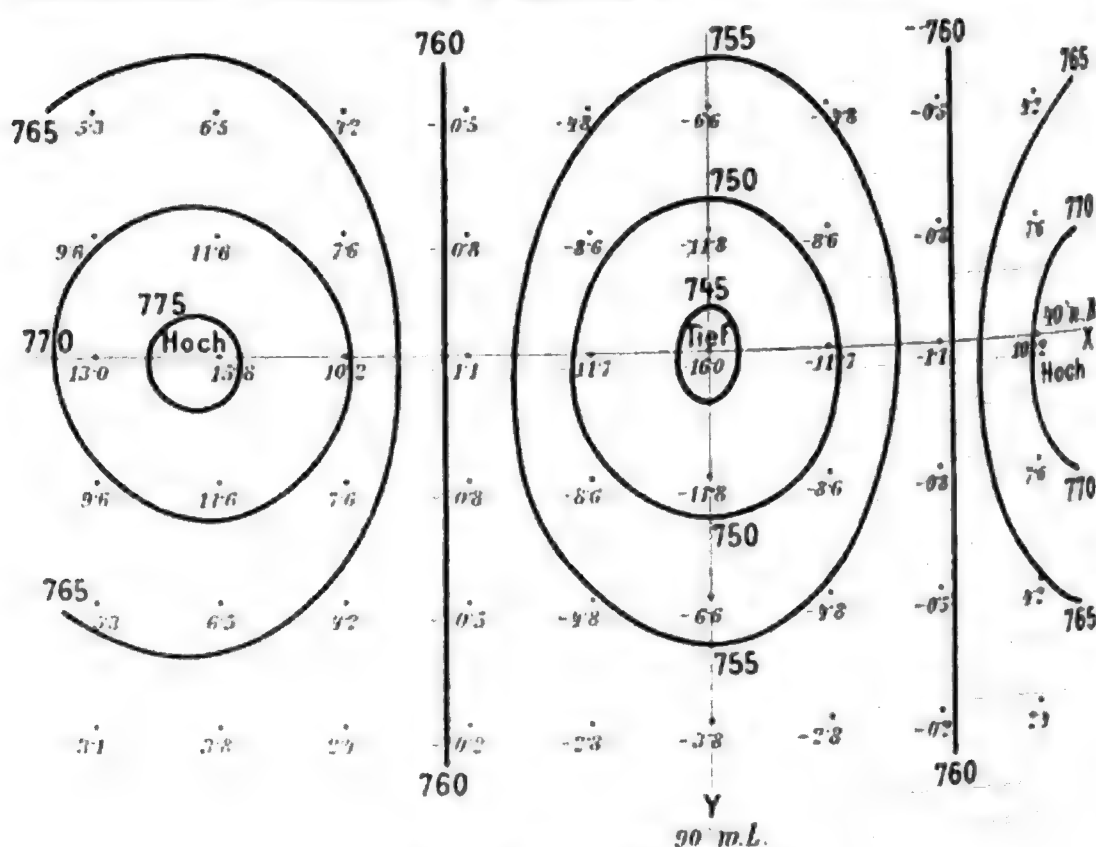
Die Zahlenauswertung der Gleichung (40) ist eine recht langwierige Arbeit; die Größe $D\left(\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \cos\frac{2\pi(x-qct)}{\lambda}\right)$ kann vom früheren Beispiel her benützt werden. Der Koordinatenanfangspunkt liege bei 40° nördl. Breite und 90° westl. Länge, die Auswertung geschah wieder von 3 zu 3 *cm* in der Arbeitskarte, und zwar von $x = -15$ bis $x = 9$ und von $y = -6$ bis $y = 9$.

Die Größen $p - M$ aus Gleichung (40) sind in der nachstehenden Tabelle für die obigen Punkte in Millimetern (Luftdruck) angegeben; sie sind die negativen Abweichungen vom Werte $M = 760$ *mm*.

	$p-M$								
	$x=-15$	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9
					Anfangsverteilung.				
$y=-6$	5·3	6·5	4·2	− 0·5	− 4·8	− 6·6	− 4·8	− 0·5	4·2
−3	9·6	11·6	7·6	− 0·8	− 8·6	−11·8	− 8·6	− 0·8	7·6
0	13·0	15·8	10·2	− 1·1	−11·7	−16·0	−11·7	− 1·1	10·2
3	9·6	11·6	7·6	− 0·8	− 8·6	−11·8	− 8·6	− 0·8	7·6
6	5·3	6·5	4·2	− 0·5	− 4·8	− 6·6	− 4·8	− 0·5	4·2
9	3·1	3·8	2·4	− 0·2	− 2·8	− 3·8	− 2·8	− 0·2	2·4
					Erster Tag.				
$y=-6$	2·1	1·0	0·1	− 0·8	− 1·4	− 1·7	− 0·6	4·6	15·5
−3	3·2	1·5	0·1	− 1·1	− 2·1	− 2·6	− 1·1	7·6	12·1
0	5·5	2·3	0·2	− 1·6	− 3·2	− 4·5	− 2·1	7·8	6·8
3	10·0	3·9	0·3	− 2·6	− 5·3	− 8·1	− 2·7	4·9	3·8
6	15·4	7·0	0·5	− 4·7	− 9·6	−12·5	− 1·9	2·7	2·3
9	13·8	11·1	0·9	− 8·3	−15·2	−11·2	− 1·1	1·6	2·7
					Zweiter Tag.				
$y=-6$	− 5·3	− 0·3	0·5	0·7	0·5	0·2	− 0·4	− 1·5	− 4·0
−3	− 9·6	− 0·5	0·7	0·9	0·7	0·3	− 0·5	− 2·1	− 7·0
0	−13·0	− 0·9	1·1	1·2	0·9	0·3	− 0·7	− 3·3	−12·4
3	− 9·6	− 1·6	1·7	1·6	1·2	0·5	− 1·1	− 5·9	−14·9
6	− 5·3	− 2·6	2·9	2·6	1·8	0·7	− 1·8	−10·6	− 9·6
9	− 3·1	− 2·3	5·3	4·2	2·8	1·1	− 3·1	−14·9	− 5·3
					Dritter Tag.				
$y=-6$	2·3	− 6·5	− 4·0	− 1·5	− 0·4	0·2	0·5	0·8	0·5
−3	1·3	− 6·3	− 7·0	− 2·1	− 0·5	0·3	0·7	0·9	0·7
0	0·8	− 3·8	−12·4	− 3·3	− 0·7	0·3	0·9	1·2	1·1
3	0·5	− 2·1	−14·9	− 5·9	− 1·1	0·5	1·2	1·6	1·7
6	0·4	− 1·3	− 9·6	−10·6	− 1·8	0·7	1·8	2·6	2·9
9	0·3	− 0·8	− 5·3	−14·9	− 3·1	1·1	2·8	4·2	5·3

	p—M								
	$x=-15$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9
Vierter Tag.									
$y=-6$	2·3	10·3	15·5	4·5	− 0·6	− 1·7	− 1·4	− 0·7	0·1
−3	1·3	5·5	12·1	7·6	− 1·1	− 2·6	− 2·1	− 1·0	0·1
0	0·8	3·2	6·8	7·8	− 2·0	− 4·5	− 3·2	− 1·6	0·1
3	0·5	2·0	3·7	5·0	− 2·7	− 8·1	− 5·4	− 2·7	0·2
6	0·4	1·4	2·3	2·7	− 1·9	−12·5	− 9·5	− 4·7	0·5
9	0·3	1·0	2·6	1·6	− 1·0	−11·1	−15·3	− 8·2	0·8

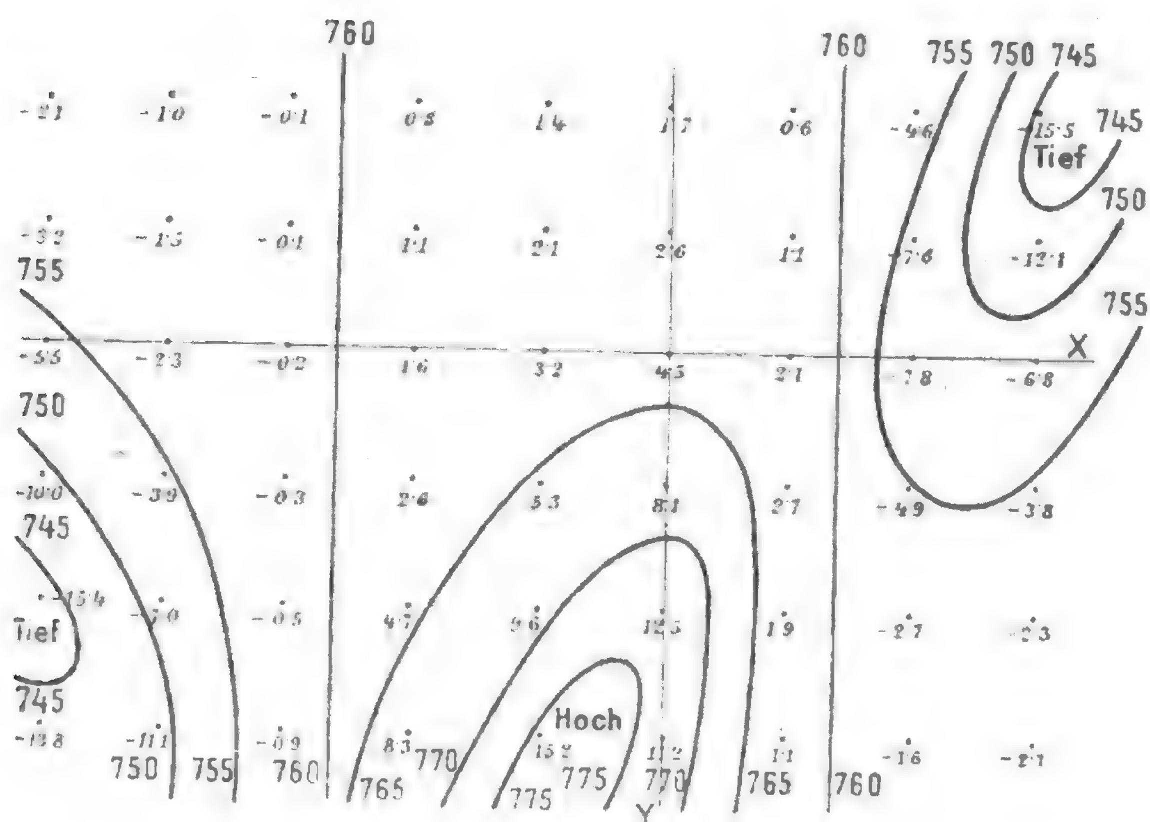
In den Karten[1] 19 bis 23 sind die Werte der Tabelle mit verkehrtem Vorzeichen eingetragen und Isobaren gezogen.



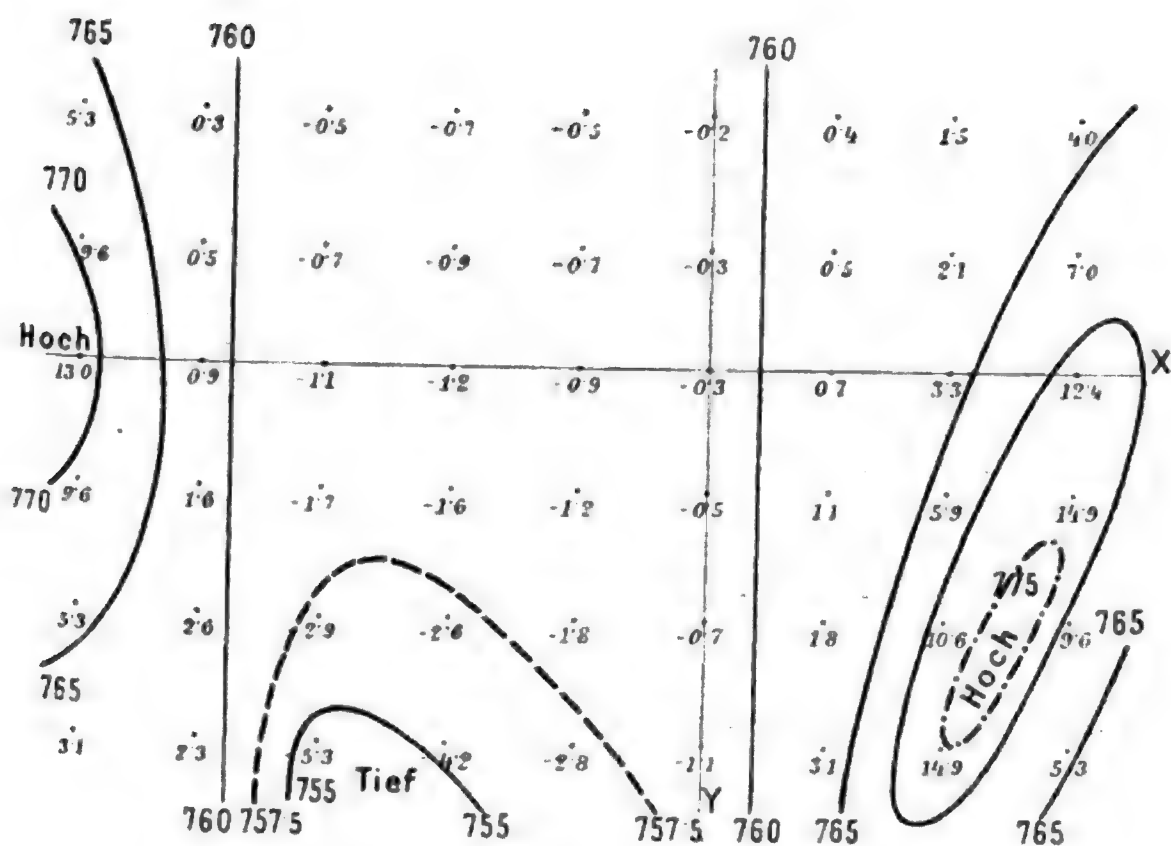
Karte 19. Anfangsverteilung.

Karte 19 repräsentiert die Anfangssituation, aus der sich die der folgenden vier Tage entwickeln. Die Hoch- und Tiefdruckgebiete bewegen sich, wie man sieht, rascher als im

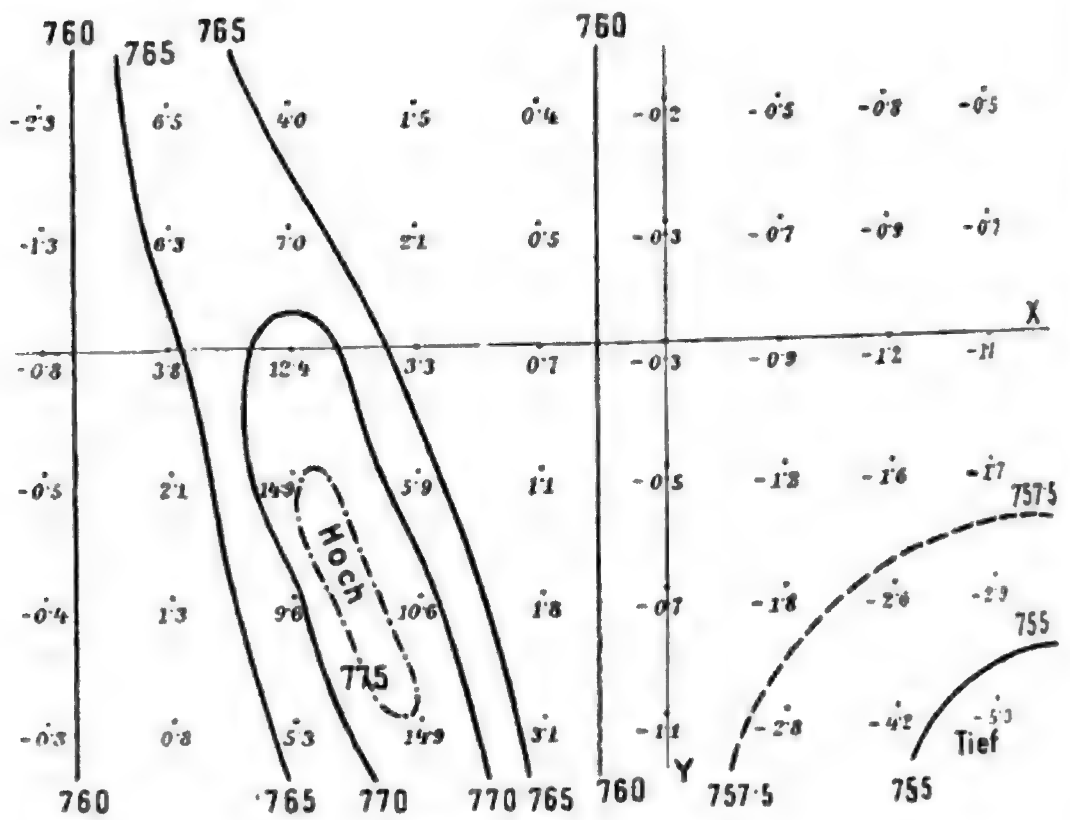
[1] Dieselben sind im gleichen Maßstabe wie Karte 1 gezeichnet.



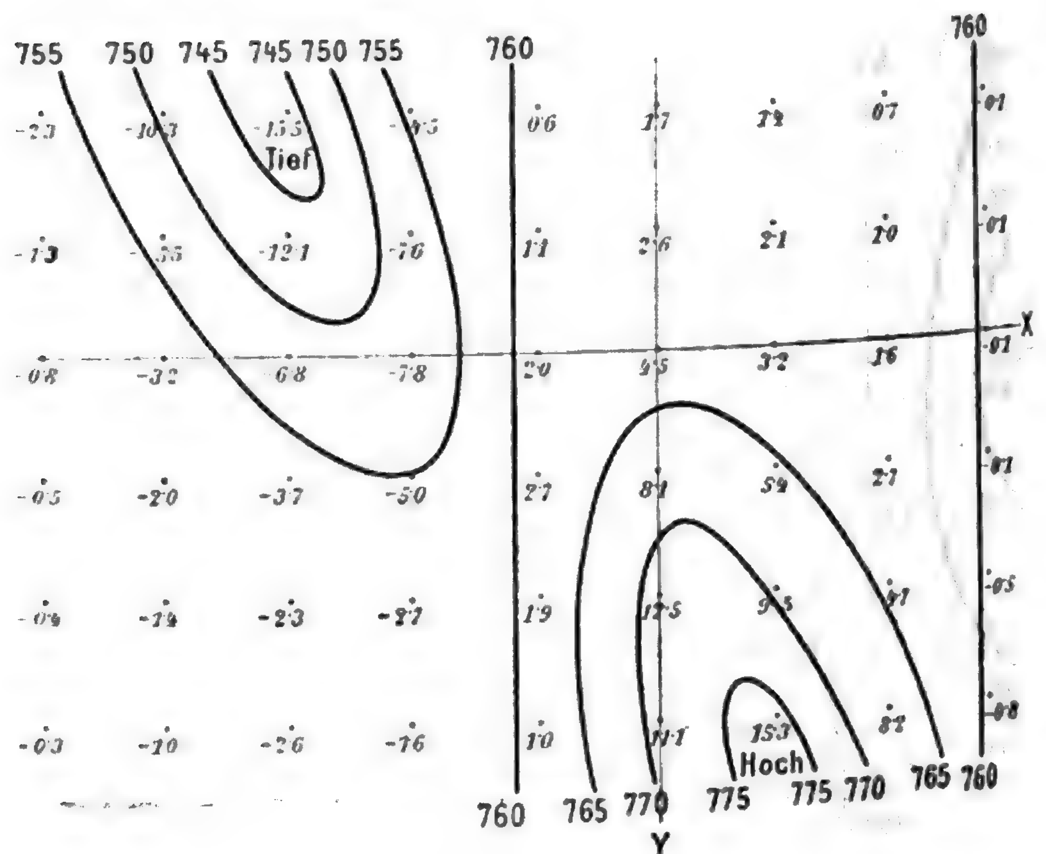
Karte 20. Erster Tag.



Karte 21. Zweiter Tag.



Karte 22. Dritter Tag.



Karte 23. Vierter Tag.

vorigen Beispiel, und zwar bewegen sich beide im westlichen Teile des Kontinentes aus Nordwesten gegen Südosten, im östlichen Teile aus Südwesten gegen Nordosten, wobei sie ihre Form verändern. Sie beschreiben also einen Bogen, der qualitativ mit dem Verlauf der H-Linien übereinstimmt. Dabei bleiben die 760-Linien parallel zur Y-Achse, wie in der Anfangssituation. Natürlich spielt die Annahme der Druckverteilung zu Anfang hier, auch was die Fortpflanzungsgeschwindigkeit anlangt, eine Hauptrolle. Dieses Beispiel wurde auch nur gegeben, um zu zeigen, wie sich selbst kompliziertere Anfangsverteilungen berechnen lassen. Wie wir sahen, hängt die Periode von der Distanz der Maxima und Minima voneinander ab. Bei der gewählten Distanz entwickelt sich aus der Situation von Karte 23 in einem Tage wieder die von Karte 19. Mit wachsendem positiven oder negativen y nimmt nach Gleichung (39) die Ungleichheit im Drucke der Anfangsverteilung fortwährend ab; auch dies entspricht nicht der Erfahrung und so kann dieses Beispiel nicht direkt zum Vergleich mit Beobachtungen verwendet werden. Interessanter würde sich das Ergebnis gestalten, wenn die Anfangsverteilungen vom dritten und vierten Beispiel superponiert würden, also Maxima und Minima bei gleichzeitiger Druckabnahme nach Norden. Doch ist dies hier nicht mehr berechnet worden.

Die nächste Aufgabe wäre wohl, den Verlauf der H-Linien über Nordamerika für andere Jahreszeiten und Monate zu berechnen, dieselben Betrachtungen auf diese anzuwenden und die Ergebnisse wieder mit den Beobachtungen zu vergleichen. Eine vorläufige Berechnung der H-Linien für den Monat Juli in Nordamerika ließ erkennen, daß diese Kurven ihren Krümmungsmittelpunkt im Süden der Vereinigten Staaten, nicht wie im Winter im Norden derselben haben und daß die Abstände der Kurven voneinander bedeutend größer, die Werte c also bedeutend kleiner sind als im Jänner. Mithin wird die Geschwindigkeit der Fortbewegung einer Depression oder Antizyklone um diese Zeit kleiner und überhaupt die Luftdruckveränderung an einem Orte im Sommer geringer sein, wie dies im allgemeinen ja auch die Erfahrung bestätigt.

Des weiteren wäre dann der Versuch zu machen, die allgemeinen Gleichungen auch auf Europa auzuwenden, indem für diesen Kontinent die H-Linien berechnet werden; daraus würden sich vielleicht interessante Folgerungen auf van Bebber's Zugstraßen der Depressionen ergeben u. s. w.

Diese Arbeiten sind aber so umfangreich, daß vorläufig von ihnen abgesehen werden mußte.

Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie, im Juni 1906.

Über das Verhalten der radioaktiven Uran- und Thoriumverbindungen im elektrischen Lichtbogen

von

Dr. **Friedrich Wächter.**

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1906.)

Die Herren Rutherford und Soddy[1] nehmen bekanntlich an, daß aktive Thorverbindungen ein Thorium-*X* fortdauernd und in konstanter Menge hervorbringen und daß Uranmetall kontinuierlich einen neuen Stoff — Uran-*X* — erzeugt. Das Thorium und Uran wären also chemische Elemente, die schon bei gewöhnlicher Temperatur eine Zersetzung erleiden.

Eine freiwillige Zersetzung chemischer Elemente bei gewöhnlicher Temperatur ist aber offenbar nur unter zwei Voraussetzungen möglich, und zwar: 1. müssen die Atome dieser Elemente, um zerfallen zu können, aus einer größeren Anzahl von Partikelchen (Elektronen oder Uratomen) bestehen und 2. müßten diese Partikelchen so locker aneinander hängen, daß schon jene lebendige Kraft, welche der Atomwärme bei gewöhnlicher Temperatur entspricht, dazu genügt, einzelne Elektronen aus dem Verbande des Elementatomes zu reißen.

Die erstere Annahme erscheint gewiß nicht unwahrscheinlich, sondern ist im Gegenteile die einzige Hypothese, welche eine einheitliche Auffassung des Begriffes »Atom« ermöglicht, wie ich das schon vor 28 Jahren in einer der Wiener Akademie

[1] Proceedings Chem. Soc., 18, p. 121.

vorgelegten Abhandlung[1] darzulegen bemüht war. In jener Arbeit erörterte ich ziemlich eingehend die Frage der Zerlegbarkeit der chemischen Elemente und gelangte hiebei zu der Schlußfolgerung: Wenn ein sogenanntes »Atom« des Wasserstoffes aus *n* kleineren Teilen oder Uratomen zusammengesetzt ist, so besteht ein Natriumatom aus 23.*n* Teilen, ein Eisenatom aus 56.*n* Teilen und ein Uranatom folglich aus 240.*n* Teilen.

Es hätte daher viele Wahrscheinlichkeit für sich, daß gerade Thorium und Uran — die beiden Elemente mit den höchsten Atomgewichten — am leichtesten zerlegbar wären.

Die zweite Voraussetzung, daß nämlich diese Zerlegung des Thoriums und Urans partiell schon bei gewöhnlicher Temperatur stattfinden sollte, ist allerdings höchst überraschend. Man kann aber nicht a priori sagen, daß sie unmöglich erscheine.

Bei meinen nachstehend erörterten Versuchen ging ich daher von folgender Voraussetzung aus: Findet tatsächlich — wie Rutherford und Soddy annehmen — schon bei gewöhnlicher Temperatur ein teilweiser Zerfall der Uran- und Thoriumatome statt, so muß derselbe unbedingt wesentlich erhöht werden, wenn man diese beiden chemischen Elemente im elektrischen Lichtbogen auf 3000 bis 4000° erhitzt. Zeigt sich aber hiebei keinerlei Zerfall, so findet auch bei gewöhnlicher Temperatur kein solcher statt oder zum mindesten wird diese Vermutung dann sehr unwahrscheinlich.

Es stellt sich daher als erste experimentell zu beantwortende Frage dar: Was für Beobachtungen ergeben sich, wenn man Uranoxyd, respektive Thoriumoxyd der Temperatur des elektrischen Lichtbogens aussetzt?

Die Antwort lautet: Uranoxyd vergast und wird überdestilliert, Thoriumoxyd ist hingegen die einzige chemische Substanz, welche im elektrischen Lichtbogen so gut wie gar

[1] Diese Sitzungsberichte, 1878, Maiheft.

nicht vergast und auch nur unter ganz besonderen Umständen zum wirklichen Schmelzen gebracht werden kann. Die Versuche mit Thoriumoxyd gestalten sich daher einfacher und führen rascher zu einem Resultate als jene mit Uranverbindungen.

Versuche mit Thoriumoxyd.

Um das Thoriumoxyd tatsächlich auf die Temperatur des elektrischen Lichtbogens bringen zu können, bediente ich mich folgender Methode:

Chemisch reines Thoriumoxyd wurde zunächst im Platintiegel über dem Bunsenbrenner ausgeglüht und von aller Feuchtigkeit befreit, dann in einer Achatreibschale sehr fein zerrieben und in einem Preßzeug aus Stahl unter der hydraulischen Presse zu kleinen runden Scheibchen von 16 *mm* Durchmesser und zirka 3 *mm* Dicke gepreßt. Ein solches Scheibchen wiegt dann 2 bis 3 *g*. Dasselbe wurde recht behutsam — denn es zerfällt sehr leicht — mit einer Tiegelzange gefaßt und zunächst in dem Gasgebläse längere Zeit auf helle Weißglut erhitzt.

Nun wurde eine einfache elektrische Bogenlampe mit vertikal stehenden Lichtkohlen in Tätigkeit gesetzt, und zwar mit Gleichstrom von 110 Volt und 20 bis 30 Ampères Stromstärke. Es empfiehlt sich, hiebei nicht eine automatisch regulierende, sondern eine von Hand aus zu bedienende Bogenlampe zu verwenden.

Zur Abblendung des Lichtes und der strahlenden Wärme stelle ich knapp vor die Lampe eine Holzwand, welche eine — mit dunklen Gläsern versehene — Öffnung hat. Mittels der Tiegelzange brachte ich das ausgeglühte Thoriumoxydscheibchen nun derart in den elektrischen Lichtbogen, daß das Scheibchen keine der beiden Kohlenelektroden berührt.

Indem man zunächst nur den Rand des Scheibchens in den Lichtbogen bringt, gelangt derselbe zu hellster Weißglut und es bildet sich am Rande ein helleuchtender kleiner Kreis. Sobald diese Erscheinung eintritt, schiebt man das Thoriumscheibchen weiter in den Lichtbogen hinein, wobei es — allerdings erst nach einigen vergeblichen Versuchen — gelingt,

den helleuchtenden Kreis von dem Rande nach der Mitte des Scheibchens zu bringen. Hat man das glücklich erreicht, so lasse man das Scheibchen 30 bis 60 Sekunden in dieser Lage und entferne dasselbe dann rasch aus dem Lichtbogen.

Nach dem Erkalten bemerkt man an dem Thoriumscheibchen folgendes: In der Mitte, wo sich der positive Krater gebildet hatte, ist eine glasartig geschmolzene Stelle von weißer Farbe, während der übrige Teil des Scheibchens gewöhnlich als strohgelber, nicht geschmolzener, sondern nur gesinterter Ring erscheint, vorausgesetzt, daß keine der beiden Lichtkohlen berührt wurde. Um dieses derart hochgradig erhitzte Thoriumscheibchen auf seine radioaktiven Eigenschaften zu untersuchen, benützte ich photographische Trockenplatten, und zwar in folgender Weise. Auf die photographische Platte wurde zunächst schwarzes, lichtdichtes Papier (auf die Gelatineschichte der Platte) gelegt und hierauf ein zirka 3 *cm* starkes Brett aus weichem Holz von dem gleichen Format wie die Platte (gewöhnlich 9 : 12 *cm*). In dem Brettchen waren mehrere kreisrunde Löcher von etwa $2^1/_2$ *cm* Durchmesser angebracht.

In eine dieser kreisrunden Durchlochungen wurde das im Lichtbogen geglühte Thoriumoxydscheibchen gelegt; in eine zweite Durchlochung ein in gleicher Weise durch Pressen erzeugtes Thoriumoxydscheibchen, welch letzteres jedoch nur bei 100° längere Zeit getrocknet und nicht bis zum Glühen erhitzt worden war. Die photographische Platte mit den aufgelegten Thoriumscheibchen wurde dann sorgfältig lichtdicht verpackt und zwei bis drei Tage deponiert.

Beim nachherigen Entwickeln der photographischen Platte zeigte sich nun folgende Erscheinung: Die nur auf 100° C. erwärmte Thoriumscheibe (Fig. 1) hatte sich als kreisrunder, homogener Lichtfleck abgebildet und ist von einem Lichtkreis umgeben, entsprechend der Größe des Ausschnittes im Holze. Die im elektrischen Lichtbogen geglühte Thoriumscheibe (Fig. 2) zeigt hingegen in der Mitte — dort wo sich der positive Lichtkrater gebildet hatte — eine dunkle Stelle. Rings um den Lichtkrater ist ein etwas hellerer Ring, während der übrige Rand des Scheibchens schwächer abgebildet ist. Im Gegensatze zu dem nur auf 100° erwärmten Thoriumoxyd ist das heftig geglühte

Oxyd von keinem Lichthof umgeben; der kreisrunde Holzausschnitt ist sonach hier nicht abgebildet.

Zur Erklärung dieser Erscheinungen könnte man vielleicht folgende Vermutung aussprechen: Da jene Stelle, an welcher sich der positive Lichtkrater auf der Thoriumscheibe gebildet hatte, keine Einwirkung auf die photographische Platte zeigt, so ist offenbar der radioaktiv wirkende Bestandteil von dieser Stelle — infolge der großen Hitze — abdestilliert. Ein Teil des Destillates mag sich in der umgebenden Luft verflüchtigt haben, ein anderer Teil des destillierbaren Stoffes scheint sich hingegen an den kälteren Partien der Thoriumscheibe — rings um den Krater — kondensiert zu haben. Dadurch würde sich die unverkennbar hellere Umsäumung des dunklen Fleckes erklären.

Schwieriger ist es, die Ursache zu erkennen, warum das nicht geglühte Thoriumscheibchen von einem Lichthof umgeben ist, das geglühte jedoch nicht. Es ist allerdings naheliegend, zu vermuten, daß dieser Lichthof durch Thoriumemanation hervorgerufen werde, welche Emanationsfähigkeit beim heftigen Glühen des Thoriumoxydes für einige Zeit verschwindet, wie schon E. Rutherford beobachtet hat. Da sich aber beim Überdestillieren des Uranoxydes dieselbe Erscheinung zeigt, so müßte man annehmen, daß auch Uranoxyd für gewöhnlich Emanation aussendet, was bisher nicht vorausgesetzt wird.

Aus dem Verhalten eines Thoriumscheibchens, auf welchem — wie in Fig. 2 — ein positiver Lichtkrater erzeugt wurde, läßt sich, wie ich glaube, folgende Schlußfolgerung ziehen: Nachdem das Thoriumoxyd durch heftiges Glühen nicht stärkere photographische Wirkung zeigt, sondern im Gegenteil um so schwächere, je höher es erhitzt wurde, so verwandelt sich dasselbe durch Steigerung der Temperatur offenbar nicht in radioaktiv wirkende Substanz, sondern diese Wirkung rührt vielmehr von einer fremden Beimischung her, welche sich durch entsprechend starke Erhitzung vom Thoriumoxyd abdestillieren läßt.

Um die Richtigkeit dieser Anschauung zu prüfen, versuchte ich es, verschiedene **nicht** radioaktive Oxyde, wie z. B. Magnesia, Kalk, Tonerde, Zirkonoxyd, ferner Berylliumoxyd, Ceroxyd, Dydimoxyd, Titanoxyd, Wolframoxyd und Molybdänoxyd, mit 2 bis 5% Uranoxyd zu vermengen, um dann auf gleiche Weise das Uranoxyd aus diesen Oxyden herauszudestillieren wie den radioaktiven Bestandteil aus dem Thoriumoxyd.

Mit Ausnahme von Magnesia und Kalk schmelzen jedoch alle andern vorgenannten Oxyde sehr rasch im Lichtbogen, sind daher hiefür nicht verwendbar. Magnesia und Kalk schmelzen zwar nicht, verdampfen aber, da bei diesen Substanzen der Siedepunkt tiefer liegt als der Schmelzpunkt. Calciumoxyd verdampft hiebei leichter als Uranoxyd, ist also schon aus diesem Grunde für den beabsichtigten Versuch nicht geeignet; Magnesia hat zwar höheren Siedepunkt, verdampft aber doch so relativ stark (bei Erzeugung grünen Lichtes), daß es offenbar aus diesem Grunde nicht möglich ist, auf einem zwischen den beiden Lichtkohlen gehaltenen Scheibchen aus Magnesia einen positiven Krater zu erhalten.

Ich versuchte nämlich, da alle übrigen Oxyde sich als ungeeignet erwiesen, auch dem Thoriumoxyd 2 bis 5% Uranoxyd beizumengen und aus demselben dann herauszudestillieren. Sobald aber ein destillierbarer Körper im Thorium in halbwegs größerer Menge enthalten ist, gelingt es nicht mehr, auf dem Thoriumoxyd einen positiven Krater zu erzeugen. Schon eine Beimengung von 1% Eisenoxyd oder ½% Chromoxyd verhindert dies.

Es mag hiebei bemerkt werden, daß die strohgelbe Farbe, welche das Thoriumoxyd beim heftigsten Glühen im elektrischen Lichtbogen annimmt, vermutlich von Eisendampf herrührt, welcher — als Verunreinigung — der Lichtkohle entstammend, sich in dem Thoriumscheibchen kondensiert. Denn einerseits bleiben die Thoriumscheibchen (aus dem gleichen Vorrat entnommen) öfters — trotz heftigstem Glühen — unverändert weiß, andrerseits erhält Thoriumoxyd bei geringem

Zusatz von Eisenoxyd dieselbe gelbe Farbe wie manchmal unbeabsichtigt im Lichtbogen.

Versuche mit Uranoxyd.

Stellt man auf gleiche Weise, wie beim Thoriumoxyd angegeben wurde, durch Pressen ein Scheibchen aus Uranoxyd her und bringt dasselbe mittels einer Tiegelzange in den elektrischen Lichtbogen, so zerbröckelt dasselbe gewöhnlich zu Staub und es gelingt nur sehr schwierig, das Uranoxyd zu einem Tropfen zu schmelzen.

Ein Teil des Uranoxydes verdampft hiebei und es soll nicht unerwähnt bleiben, daß der elektrische Lichtbogen zugleich ein merkwürdiges Flattern zeigt, welches mitunter sogar ein Erlöschen desselben zur Folge hat. Diese Erscheinung zeigt sich — wenigstens in so auffallender Weise — bei keinem andern der von mir untersuchten Metalloxyde. Nur Borsäure zeigt die gleiche Erscheinung, und zwar noch viel stärker, Kieselsäure hingegen nicht.

Das Erzeugen eines positiven Lichtkraters auf einem Uranoxydscheibchen erscheint also nicht ausführbar und ist mir überhaupt mit keinem andern Körper als Thoriumoxyd, und zwar nur ganz reinem Thoriumoxyd möglich gewesen.

Es entstand nun die Frage: Wie verhält sich im elektrischen Lichtbogen überdestilliertes Uranoxyd in radioaktiver Hinsicht? Zu dem Zwecke mußte zunächst eine tunlichst zweckmäßige Methode des Überdestillierens ermittelt werden, und zwar für kleine Quantitäten und relativ schwache elektrische Ströme, da ich nicht in der Lage war, wie Moisan mit Stromstärken von 1000 Ampères bei 110 Volt Klemmspannung zu experimentieren.

Zu den Vorversuchen verwendete ich meist Eisenoxyd oder Chromoxyd oder eine Mischung von beiden, um zu erfahren, wie man zwei gleichzeitig verdampfende Substanzen durch fraktionierte Destillation trennen könne. Um die Oxyde der schweren Metalle in bequemer Weise destillieren zu können, scheinen mir zweierlei Mittel geeignet zu sein. Entweder mengt man pulverisierter Lichtkohle 20 bis 50% des Metalloxydes bei und läßt sich hieraus Lichtkohlen herstellen oder — was ein-

facher ist — man stellt sich durch Pressen kleine Zylinder aus dem betreffenden Metalloxyd her und läßt die Lichtkohlen dann so ausbohren, daß man einen oder mehrere solche Zylinder in den Hohlraum des Kohlenstabes einschieben kann. Ich benützte hiezu aus Metalloxyden gepreßte Zylinder von 6 *mm* Durchmesser und 10 bis 15 *mm* Länge, welche ein Gewicht von 1 bis höchstens 2 *g* hatten. Diese Zylinder wurden in die positive Lichtkohle eingesetzt und zu deren Verdampfung ein Strom von 20 bis 30 Ampères bei 110 Volt Klemmspannung angewendet.

Unter diesen Umständen dauert es etwa 5 Minuten, bis 1 *g* Metalloxyd verdampft. In einer Sekunde verdampfen also nur zirka 0·003 *g* Oxyd. Dieser wenige Metalldampf gelangt sofort in große Quantitäten der umgebenden kälteren Luft. Es ist daher leicht erklärlich, daß der Metalldampf augenblicklich erstarrt, bevor er noch Zeit hat, bis an die einschließenden Gefäßwände zu gelangen. Es bildet sich sonach ungemein feiner Metallstaub, welcher sich als Rauch längere Zeit schwebend in der Luft erhält. Beim Destillieren von Chromoxyd dauert es daher ungefähr 30 bis 45 Minuten, bis sich so ziemlich sämtliches Oxyd zu Boden setzt; beim Eisenoxyd muß man 1 bis $1^1/_2$ Stunden zuwarten.

Wenn man daher gleichzeitig zwei Metalloxyde verdampft, so erscheint eine partielle Trennung derselben nur dadurch möglich, daß man die mit Metallstaub geschwängerte Luft etwa 30 Minuten in dem ersten Gefäße beläßt, dann in ein zweites Gefäß absaugt und dort abermals den restlichen Oxydstaub absetzen läßt.

Der Apparat, dessen ich mich zur Verdampfung der Metalloxyde bediente, war ein ungemein einfacher und ist in Fig. 3 skizziert.

Auf einem Grundbrett *(GG)* wurde eine große Tonzelle *(T)* aufgesetzt. Der Boden der Tonzelle wurde durchlocht, um die negative Lichtkohle einführen zu können. Diese Kohle war an einem glockenförmigen Metallkörper *(M)* mit hart angelötetem Messingrohr *(r)* befestigt. An dieses Messingrohr wurde — durch Gummischlauch — eine mit zwei Glasröhren versehene Glasflasche *G* angesetzt. Um einen halbwegs dichten Anschluß

des Metallkörpers *M* mit der Tonzelle zu erzielen, wurde letztere mit Asbestpapier *(AA)* umhüllt.

Zur Ausführung des Versuches wurde das kurze Rohr *(o)* der Glasflasche mit einer Wasserstrahlpumpe oder einem Aspirator verbunden und dann die beiden Lichtkohlen zur Berührung gebracht, in deren unterer, positiver, der Uranoxydzylinder eingesetzt war.

Beim Absaugen der Luft aus der Glasflasche *G* tritt sehr bald der schwere Metallrauch in die Flasche über und nach zirka 5 Minuten, wenn so ziemlich alles Uranoxyd verdampft ist, wird der elektrische Strom abgestellt. Man kann nun schon mit diesem Apparat zweierlei Destillate erhalten, nämlich einerseits das in der Tonzelle abgelagerte Uranoxyd, welches sich von den Wänden der Tonzelle mit einem Pinsel entfernen läßt, und jenen in der Glasflasche abgesetzten Oxydstaub. Um letzteren auf einfache Weise zu sammeln, ist es vorteilhaft, schon vor dem Beginne des Versuches in die Glasflasche so viel destilliertes Wasser einzufüllen, daß der Boden damit eben bedeckt wird.

Das sich absetzende Uranoxyd bleibt dann im Wasser suspendiert und kann auch von den feuchten Wänden leicht abgespült werden. Durch Abdampfen auf dem Wasserbad erhält man dann als Rückstand das übergesaugte Uranoxyd. Da nur sehr wenig Oxyd sich in der Glasflasche absetzt, muß man die Operation zwei- bis dreimal wiederholen, bevor man genug Substanz erhält, um daraus ein rundes Scheibchen von 6 *mm* Durchmesser und zirka 1 *mm* Dicke pressen zu können. Das derart gewonnene, aus überdestilliertem Uranoxyd gepreßte Scheibchen wurde dann — analog wie beim Thoriumoxyd — innerhalb einer Durchlochung eines Brettes über der photographischen Trockenplatte exponiert. Zum Vergleiche wurde ferner gewöhnliches, durch schwaches Glühen aus salpetersaurem Uranoxyd erhaltenes Oxyd, dann geschmolzenes Uranoxyd und endlich das an den Wänden der Tonzelle abgesetzte Uranoxyd gleichzeitig auf derselben photographischen Platte exponiert, und zwar 2 bis 3 Tage lang.

Wie die Figuren 4 bis 7 zeigen, bietet das schwach geglühte Oxyd (Fig. 4) und das geschmolzene Oxyd (Fig. 5) nahezu die-

selbe Erscheinung dar, bei dem innerhalb der Tonzelle sublimierten Uranoxyd (Fig. 6) ist jedoch der umgebende Lichthof wesentlich schwächer, bei dem in die Glasflasche übergeführten Uranoxyd (Fig. 7) fehlt der Lichthof vollständig und auch das Uranoxydscheibchen selbst zeigt schwächere Wirkung auf die photographische Platte als die drei übrigen Proben.

Die Einwirkung der hohen Temperatur des elektrischen Lichtbogens auf das Uranoxyd ist also analog wie beim Thoriumoxyd und äußert sich in der Weise, daß die Einwirkung auf die photographische Platte herabgesetzt und vermindert wird.

Diese Erscheinung weist darauf hin, daß die radioaktiven Eigenschaften des Uranoxyds von einer geringen Beimengung eines stark aktiven Körpers (des Radiums?) herrühren, daß hingegen auch bei der hohen Temperatur des elektrischen Lichtbogens keine Umwandlung des Urans in Uran-X oder in Radium bemerkbar ist, denn in diesem letzteren Falle müßte man ja Destillationsprodukte erhalten, die merklich aktiver und nicht weniger aktiv sind als das gewöhnliche Uranoxyd.

Es würde allerdings die Möglichkeit vorliegen, daß Uran beim Überdestillieren doch eine Zerlegung erleidet, und zwar direkt in nicht aktives Heliumgas zerfiele. Diese — allerdings nicht wahrscheinliche — Möglichkeit versuchte ich, durch Destillation von Uranoxyd in geschlossenem, mit trockener reiner Kohlensäure gefülltem Gefäße zu prüfen.

Erwägt man, daß die Zerlegung von 0·00036 g Uran in Helium bereits 1 cm^3 Heliumgas (bei 0° C. und 760 mm) ergeben würde, so erscheint es nicht von vorneherein unmöglich, auch recht geringe eventuelle Spaltung des Urans nachweisen zu können. Der Versuch ergab jedoch, daß die im Gefäß ursprünglich erhaltene Kohlensäure fast quantitativ zu Kohlenoxyd reduziert wird, welch letzteres dann durch salzsaures Kupferchlorür absorbiert werden kann, und vermochte ich kein Helium nachzuweisen.

Versuche mit schwachen Radiumpräparaten.

Die vorstehend erörterten Versuche lassen wohl deutlich erkennen, daß Thoriumoxyd und Uranoxyd durch sehr starkes Erhitzen in ihrer radioaktiven Wirkung erheblich geschwächt werden und keine Zunahme der Strahlungsfähigkeit zeigen, wie es der Fall sein müßte, wenn sich durch die hohe Temperatur größere Mengen von Uran und Thorium in das hypothetische Ur-*X*, respektive Th-*X* umwandeln würden.

Während nun die Abnahme der radioaktiven Wirkung gegenüber der photographischen Platte sich einfach damit erklären läßt, daß Uran und Thorium an sich nicht radioaktiv sind, sondern diese Eigenschaft nur einer geringen Beimengung von Radium verdanken, welches bei hoher Temperatur ganz oder teilweise abdestilliert, so bleibt es doch unerklärt, warum nach starker Erhitzung sich die Thoriumoxydscheibchen (Fig. 2 und 8) und Uranoxydscheibchen (Fig. 7) zwar abbilden, aber keinen Lichthof erzeugen wie schwach geglühte Scheibchen (Fig. 1, 4, 5 und 6).

Man könnte, wie schon erwähnt, diesen Lichthof der Einwirkung der »Emanation« zuschreiben; nun zeigt aber metallisches Uran (Fig. 9) auch einen solchen Lichthof, und zwar merkwürdigerweise schwächer als gleich lang exponiertes Uranoxyd (Fig. 10), obwohl das metallische Uran stärker und nicht schwächer strahlen sollte.

Ich legte mir daher die Frage vor: Rühren diese Lichthöfe, wie selbe in Fig. 1, 4, 5, 6 und 10 sichtbar sind, von Emanation her oder müssen dieselben auf eine andere Ursache zurückgeführt werden? Zur Beantwortung dieser Frage stellte ich nachstehende Versuche an.

W. J. Russell[1] teilt mit, daß sich Holzstücke auf einer photographischen Platte von selbst abbilden, wenn sie in Kontakt oder in kleinem Abstande über die Platte gebracht und in dieser Lage 0·5 bis 18 Stunden verbleiben. Da ich nun diese

---

[1] Proc. Roy. Soc., *74*, p. 131 bis 134 (1904). — Beiblätter, 1905, p. 684.

Lichthöfe innerhalb Holzausschnitten erhielt, wollte ich mich überzeugen, ob nicht etwa das Holz hiebei mitwirke.

Wie Fig. 11 ersehen läßt, ergibt ein frisch zugehobeltes Brett, welches mit einer kreisrunden Öffnung und einem seitlichen Einschnitte versehen wurde, in der Tat eine Abbildung der Konturen auf der photographischen Platte, wenn man das Brett unmittelbar auf die empfindliche Gelatineschicht auflegt.

Diese Wirkung hört aber vollständig auf, wenn man lichtdichtes, starkes Papier zwischen Platte und Brett legt, wie es bei dem Exponieren der Uran- und Thoriumscheibchen der Fall war.

Um auch einen eventuellen Einfluß von »Emanation« auszuschließen, machte ich ferner folgenden Versuch.

In ein 2 *cm* dickes Brettchen von dem Format der photographischen Platte wurden solche Ausschnitte gemacht, wie Fig. 12 entnehmen läßt. Der Ausschnitt *ab* diente zur Aufnahme eines kleinen, vollkommen luftdicht zugeschmolzenen Glasröhrchens, welches 1 *g* radiumhältiges Baryumsalz enthielt, das im Jahre 1900 von der Firma de Haën bezogen war. In Verbindung mit dem Ausschnitt *ab* standen zwei schlitzförmige Ausschnitte *bc* und *bd*; während aber *bc* geradlinig verlief, war im Schlitz *bd* bei *k* eine kreisförmige Erweiterung angebracht.

Wenn man nun voraussetzt, daß die sogenannte Radiumemanation durch Ausbreitung ponderabler Radiummoleküle in der Luft nach Art der Verbreitung von Moschus oder eines anderen Riechstoffes gebildet wird, so erscheint es ausgeschlossen, daß aus einem zugeschmolzenen Glasrohr »Emanation« entweicht.

Es erwähnt auch speziell K. Hofmann,[1] daß aktive Substanz, die sich in einem fest verschlossenen Glase befindet, keine induzierte Aktivität erzeugt. Dasselbe sagt Mme. Curie.[2]

Man muß also voraussetzen, daß aus einem zugeschmolzenen Glasrohre nur Radiumstrahlung, nicht aber Radiumemanation austritt, analog, wie aus einer Vakuumröhre nur

---

[1] Die radioaktiven Stoffe. Leipzig 1903, p. 32, 35 und 37.

[2] Die radioaktiven Substanzen. Deutsch von W. Kaufmann, 1904, p. 95.

Kathoden-, respektive Röntgenstrahlen, nicht aber Kathodenteilchen austreten.

Da nun die Radiumstrahlen sich geradlinig ausbreiten und weder reflektiert noch gebrochen werden, so müßte beim Auflegen des Brettchens, Fig. 12, auf eine photographische Platte ein in Glas eingeschmolzenes Radiumpräparat zwei geradlinige Streifen erzeugen, entsprechend den Ausschnitten *bc* und *bd*, und die kreisförmige Ausnehmung *k* dürfte sich nicht abbilden. Diese Voraussetzung trifft jedoch nicht zu und der Versuch zeigt das direkte Gegenteil.

Wie aus Fig. 13 zu entnehmen ist, bildet sich der kreisförmige Ausschnitt *k* so deutlich und kräftig ab, als wenn derselbe mit leuchtender »Emanation« erfüllt wäre.

Man könnte nun vielleicht glauben, daß man es hier mit einer Art Sekundärstrahlen zu tun habe. Diese Vermutung wird jedoch, meines Erachtens nach, durch Fig. 14 widerlegt. Es wäre wohl widersinnig, anzunehmen, die Strahlen des Radiums würden durch Ausschnitte im Holz veranlaßt werden, um die Ecke zu biegen und sich geradezu im Kreise zu drehen. Die Abbildung der krummlinigen Ausschnitte im Holz (*abc* und *defg* in Fig. 14) kann daher nicht durch Strahlung hervorgebracht sein, sondern nur dadurch, daß die in den Hohlräumen eingeschlossene Luft radioaktiv geworden war. Es erscheint mir dies als ein Beleg dafür, daß auch in Glas hermetisch eingeschmolzenes Radiumpräparat die das Glas umgebende äußere Luft induzieren kann, und zwar durch die das Glas durchdringenden und in die äußere Luft gelangenden β- und γ-Strahlen.

Die Lichthöfe, wie selbe in Fig. 1, 4, 5, 6, 9 und 10 sichtbar sind, rühren daher — meines Erachtens nach — nicht etwa von ausströmender »Emanation« her, sondern werden durch induzierte Aktivität der Luft — im Vereine mit direkter Strahlung — erzeugt.

Solche Körper, die durch starke Erhitzung ihre Radioaktivität großenteils eingebüßt haben, erzeugen daher schwächere oder gar keine Lichthöfe, bei gleich langer Exponierung, wie nicht geglühte Körper. Ich beabsichtige übrigens, für diese Anschauung weitere experimentelle Belege zu suchen.

Zum Schlusse fühle ich mich verpflichtet, Herrn Ludwig Haitinger, Direktor der Österreichischen Gasglühlicht-Aktiengesellschaft, welcher mir zu meinen Versuchen eine größere Partie chemisch reinen Thoriumoxyds zur Verfügung stellte, hier meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

...Schlusse fühle ich mich verpflichtet, Herrn
...r, Direktor der Österreichischen Gasglühlicht...
...t, welcher mir zu meinen Versuchen ...
...misch reinen Thoriumoxyds zur Verfügung...
...n verbindlichsten Dank auszusprechen.

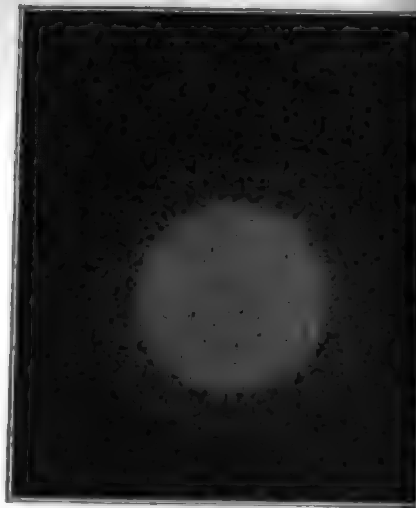


Fig. 1.

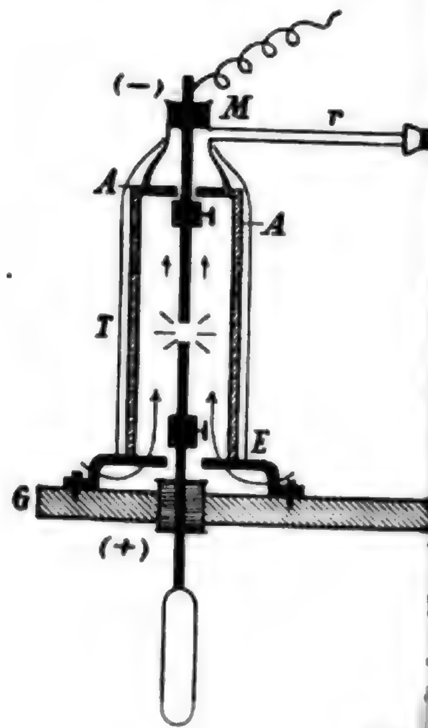


Fig.

Fig. 4.



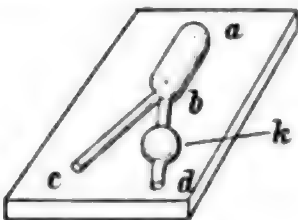


Fig. 12.

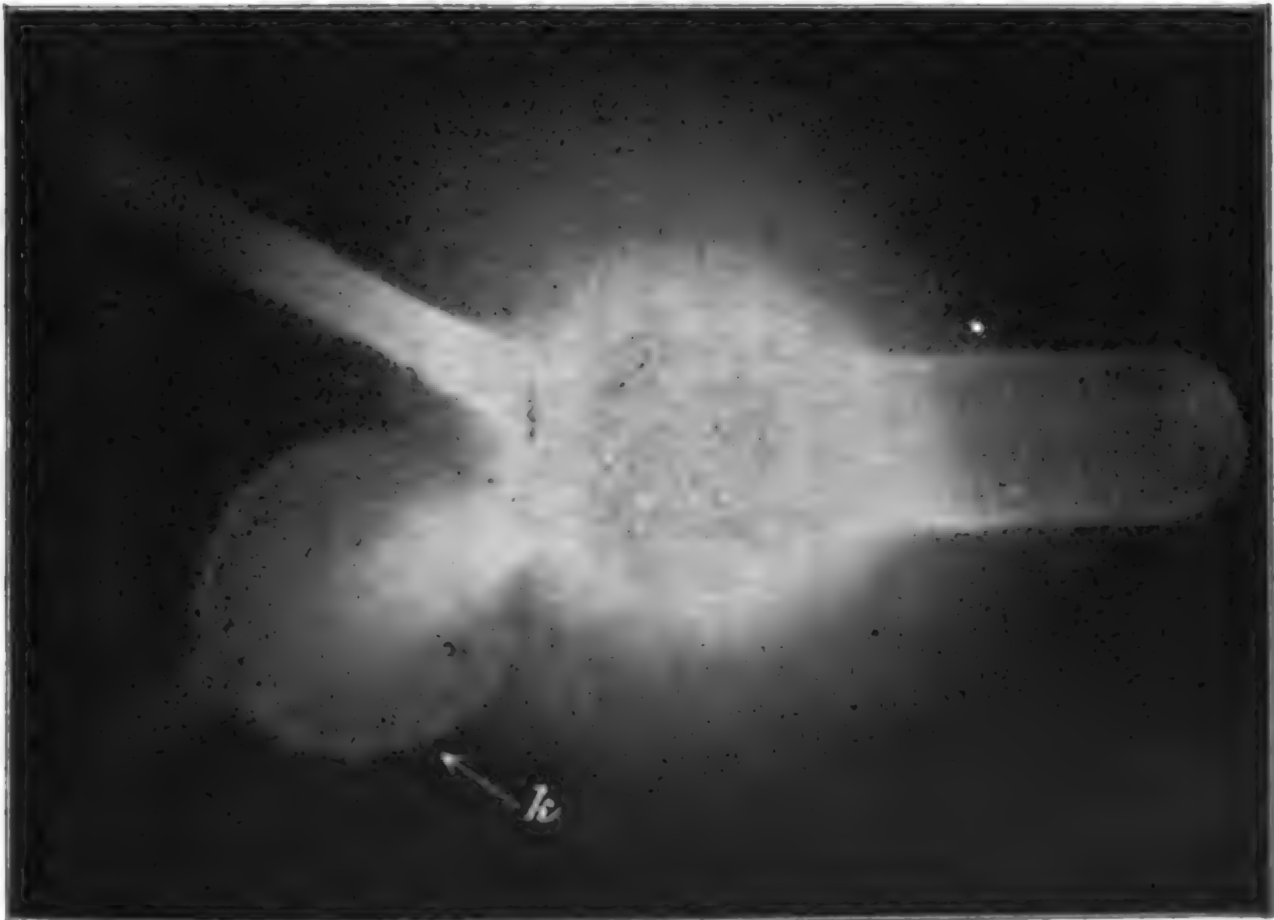


Fig. 13.



Fig. 14.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. VIII. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXV.

Luftelektrische Beobachtungen am Ossiachersee im Sommer 1906

von

Egon Ritter v. Schweidler.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Oktober 1906.)

Im Anschluß an die in den Sommern 1902 bis 1905 ausgeführten luftelektrischen Beobachtungen[1] wurden solche auch in den Sommermonaten dieses Jahres vorgenommen, und zwar *A.* Messungen der Zerstreuung zur Ermittlung des täglichen Ganges und des Zusammenhanges mit meteorologischen Faktoren, *B.* Messungen der elektrischen Leitfähigkeit der Luft im absoluten Maße mittels eines Gerdien'schen Apparats zu dem speziellen Zweck, eine Beziehung zwischen Zerstreuung und Leitfähigkeit aufzufinden.

Der Beobachtungsort ist wieder, wie in den Vorjahren, ein Seetal in den Alpen, diesmal das des Ossiachersees in Kärnten. Die Aufstellung der Apparate erfolgte auf einer großen, gedeckten Veranda im I. Stocke des Hauses, so daß sie vor der unmittelbaren Einwirkung des Erdfeldes geschützt waren.

---

[1] Schweidler, Diese Sitzungsber., Abt. IIa., Bd. 111, p. 1463 (1902); Bd. 112, p. 1501 (1903); Bd. 113, p. 1433 (1904); Bd. 114, p. 1705 (1905).

A. Zerstreuungsmessungen.

Die Methode ist die gleiche wie in den Vorjahren: Anwendung des Elster-Geitel'schen Apparats ohne Schutzzylinder; die angegebene Größe Z bezeichnet die Entladungsgeschwindigkeit in Volt pro 5 Minuten bei einem mittleren Potentiale des Zerstreuungskörpers von 200 Volt. Ebenso sind die Beobachtungstermine dieselben geblieben: $7^1/_2{}^h$, 9^h, 11^h, 15^h und nach Sonnenuntergang (zwischen $18^1/_2{}^h$ und $19^3/_4{}^h$); bloß der letzte der in den Vorjahren verwendeten Termine (zwischen 21^h und 22^h) fiel aus.

Die Resultate, die im Anhang *A* einzeln angeführt sind, ergeben für verschiedene Kategorien von Tagen die in Tabelle I zusammengestellten Mittelwerte (die Mittelwerte der Größe q sind nach der Formel

$$\frac{1}{n}\sum\frac{Z_-}{Z_+}$$

gebildet).

1. Gesamtmittel. Der Mittelwert von Z (48·9) liegt beträchtlich höher als in Mattsee (36, beziehungsweise 32) und Seewalchen (32). Möglicherweise hängt dies mit dem geologischen Charakter der Umgebung zusammen: der Ossiachersee liegt im Urgebirge, die erstgenannten Orte in der Sandstein-, respektive Kalkzone; die Meereshöhe der drei Orte ist nahezu dieselbe (zirka 500 *m*).

Bezüglich des täglichen Ganges von Z ergibt sich ein Ansteigen vom Morgen bis zum Mittag und Absinken bis abends; in den ersten Nachtstunden wurden an einzelnen Tagen ($n = 8$) Messungen vorgenommen, die in Übereinstimmung mit den Resultaten der Vorjahre und denen anderer Beobachter ein Wiederansteigen von Z ergeben. Es ist also die tägliche Periode der Zerstreuung wie an den meisten Orten eine doppelte: Maxima nachts und um Mittag, Minima um Sonnenaufgang und -untergang. Ebenso zeigt q einen der Zerstreuung parallel verlaufenden Gang.

Die in Seewalchen (1904) und in Mattsee (1903 und 1905) gefundene, sehr charakteristische Vormittagsdepression der Werte von Z und q fehlt hier. Es erscheint mir wahrscheinlich,

daß dies mit den Verhältnissen der Luftzirkulation zusammenhängt: der an den beiden genannten Orten stark ausgeprägte Wechsel von Tag- und Nachtwind (Tal- und Bergwind), von denen der erstere in den Vormittagsstunden kräftig einzusetzen pflegt, ist am Ossiachersee infolge seiner geschützten Lage sehr abgeschwächt; sehr schwache Winde oder Windstille herrschen hier vor.

2. Bewölkung. Klare Tage (Kategorie 2) zeigen weder im Absolutwerte noch im täglichen Gange von Z eine merkliche Abweichung vom Gesamtmittel. q ist etwas erniedrigt.

3. Gewittertage (Kategorie 3) ergeben wie in den Vorjahren eine merkliche Erhöhung der Zerstreuung in den Morgenstunden.

4. Die bekannte Beziehung zwischen Zerstreuung und Durchsichtigkeit der Luft kommt in den Mitteln der Kategorien 4 und 5 deutlich zum Ausdruck.

5. Luftdruckschwankung. Tage mit fallendem (Kategorie 6) und solche mit steigendem (Kategorie 7) Luftdruck haben ein mit dem Gesamtmitttel fast identisches Tagesmittel der Zerstreuung; nur in den Morgenwerten zeigt sich bei fallendem Luftdruck eine Erhöhung, bei steigendem eine Erniedrigung. Der Einfluß der Luftdruckschwankung ist also wenig ausgeprägt.

6. Barometerstand. Dasselbe gilt vom Barometerstande. Die Beobachtungstage, in drei gleich starke ($n = 20$) Gruppen geteilt, tiefem ($B \leqq 722$ *mm*), mittlerem ($B = 722$ bis 725 *mm*) und hohem ($B \geqq 725$ *mm*) Luftdruck entsprechend (Kategorien 8, 9 und 10), unterscheiden sich im Tagesmittel wenig; eine Erhöhung der Morgenwerte und Erniedrigung der Abendwerte tritt gerade bei mittlerem Barometerstand auf.

Unverkennbar ist aber eine Beeinflussung der Größe q durch den Barometerstand: es finden sich hohe Werte von q bei tiefem, kleine bei hohem Luftdrucke.

Tabelle 1.

Kategorie	$7^1/_2{}^h$	9^h	11^h	15^h	$18^1/_2{}^h$ bis 20^h	Tagesmittel
1. Gesamtmittel (60)	(32) 45·1 47·6 0·950 46·4	(34) 47·6 49·1 0·967 48·4	(46) 52·5 54·3 0·972 53·4	(50) 51·5 51·9 0·998 51·7	(38) 43·8 45·2 0·970 44·5	48·1 49·6 0·971 48·9
2. Klare Tage (21)	(11) 44·4 48·4 0·922 46·4	(13) 46·0 48·3 0·944 47·2	(18) 51·9 54·4 0·956 53·2	(20) 50·8 51·6 0·975 51·2	(17) 43·0 45·7 0·941 44·4	47·2 49·7 0·948 48·5
3. Gewittertage (18)	(10) 47·7 50·3 0·953 49·0	(12) 49·8 51·1 0·967 50·5	(16) 52·8 53·5 0·990 53·2	(14) 51·7 53·2 0·997 52·5	(10) 42·4 43·5 0·975 43·0	48·9 50·3 0·976 49·6

4. Tage mit reiner Fernsicht (13)	(6) 49·7 53·8 0·918 51·7	(8) 53·2 53·2 0·985 53·2	(13) 57·7 60·3 0·960 59·0	(10) 54·2 51·8 1·056 53·0	(8) 44·2 44·0 1·009 44·1	51·8 52·6 0·983 52·2
5. Tage mit trüber Fernsicht (13)	(10) 42·4 45·2 0·941 43·8	(10) 44·8 46·8 0·968 45·8	(13) 49·4 52·4 0·944 50·9	(12) 48·5 51·3 0·950 49·9	(10) 40·2 42·0 0·963 41·1	43·1 47·5 0·953 45·3
6. Tage mit fallendem Luftdrucke (17)	(8) 49·5 50·9 0·975 50·2	(12) 46·4 48·1 0·970 47·3	(13) 51·2 51·9 0·992 51·6	(15) 50·0 50·1 1·001 50·1	(9) 43·3 44·7 0·960 44·0	48·1 49·1 0·980 48·6
7. Tage mit steigendem Luftdrucke (12)	(6) 43·3 46·8 0·930 45·0	(6) 45·2 47·2 0·960 46·2	(11) 55·0 58·5 0·944 56·3	(7) 49·8 51·2 0·970 50·5	(8) 44·8 45·2 0·990 45·0	47·6 49·8 0·959 48·7

Kategorie	$7^{1}/_{2}^{h}$	9^{h}	11^{h}	15^{h}	$18^{1}/_{2}^{h}$ bis 20^{h}	Tagesmittel
8. Tage mit tiefem Luftdrucke (20)	(9) 44·1 44·2 1·014 44·1	(12) 47·4 47·8 0·978 47·6	(16) 50·8 51·3 0·996 51·1	(17) 52·4 51·7 1·025 52·0	(14) 46·6 45·5 1·029 46·0	48·3 48·1 1·008 48·2
9. Tage mit mittlerem Luft-drucke (20)	(10) 48·3 50·1 0·977 49·2	(13) 48·1 50·1 0·964 49·1	(15) 55·0 55·8 0·990 55·4	(17) 51·7 52·3 0·992 52·0	(11) 41·5 42·9 0·970 42·2	48·9 50·2 0·979 49·5
10. Tage mit hohem Luftdrucke (20)	(13) 43·3 47·0 0·910 45·2	(9) 47·1 49·4 0·957 48·2	(15) 51·8 55·8 0·930 53·8	(16) 50·4 51·7 0·977 51·0	(13) 42·7 47·2 0·906 45·0	47·1 50·2 0·936 48·7

B. Messungen der Leitfähigkeit.

Mittels eines Apparats zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der Luft im absoluten Maße, wie ihn H. Gerdien[1] beschrieben hat, wurden 60 Messungen ausgeführt, und zwar unmittelbar vor und nach Messungen der Zerstreuung. Die Resultate sind im Anhang *B* zusammengestellt. Die erste und zweite Kolumne enthalten Datum und Stunde der Messung, die dritte die Größe $A.10^3$, wobei A gegeben ist durch

$$A = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \quad \left(\frac{dV}{dt} \text{ in Volt pro Minute}\right)$$

und der Index (A_- und A_+) das Vorzeichen der Ladung angibt. Den Betrag der Leitfähigkeit in elektrostatischen Einheiten, der von den positiven, respektive negativen Ionen erzeugt wird, erhält man durch Multiplikation von A_-, respektive A_+ mit einer Apparatkonstanten, die im vorliegenden Falle den Wert $3 \cdot 33 . 10^{-3}$ hat. Die vierte Kolumne enthält die nahezu gleichzeitig beobachtete Zerstreuung Z, die fünfte den Quotienten $r = \frac{A.10^3}{Z}$.

Wenn die Angaben des Elster-Geitel'schen Apparats der Leitfähigkeit proportional sind, so muß der Quotient r einen konstanten Wert besitzen.

Es ergibt sich nun für r aus allen 60 Messungen ein Mittelwert von 1·362; der mittlere Fehler der Einzelmessung $\left(\text{nach der Formel } \varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n-1}}\right)$ ist 0·116, d. i. 8·5% des Mittelwertes.

Diese Fehlergröße ist schon an sich nicht sehr bedeutend im Verhältnisse zu der bei luftelektrischen Messungen erzielten Genauigkeit. Dabei ist aber noch zu berücksichtigen: erstens, daß dieser mittlere Fehler die Summe der Beobachtungsfehler bei beiden Messungsarten enthält, zweitens der Umstand, der noch mehr ins Gewicht fallen dürfte, daß es mir als einzelnem

[1] H. Gerdien, Göttinger Nachrichten, 1905, Heft 3; auch Physikal. Zeitschr., Bd. 6, p. 800 (1905).

Beobachter nicht möglich war, exakt gleichzeitig die Messungen mit beiden Apparaten auszuführen. Da in dem Zeitintervalle von zirka 5 Minuten, das durchschnittlich zwischen beiden liegt, merkliche Änderungen der beobachteten Größen eintreten können, sind wohl viele Abweichungen hierauf zurückzuführen.

Bei von Beobachtungsfehlern freien, exakt simultanen Messungen wäre der mittlere Fehler von r jedenfalls bedeutend reduziert. In erster Annäherung kann daher r als konstant betrachtet werden oder in anderen Worten:

Die Zerstreuung, mittels eines Elster-Geitel'schen Apparats, der ohne Schutzzylinder an einem gegen das Erdfeld geschützten Ort aufgestellt ist, gemessen, ist der Leitfähigkeit der Luft proportional.

Daß die Abweichungen der Einzelwerte von r zufälligen und nicht systematischen Charakters sind, wird auch bestätigt durch Gruppierung der Resultate nach Vorzeichen der Ladung und absoluter Größe der Zerstreuung. Gegenüber dem Gesamtmittel 1·362 ($n = 60$) erhält man

für positive Ladung...	$r = 1\cdot366$	($n = 30$),
» negative » ...	$r = 1\cdot358$	($n = 30$),
» $Z > 50\cdot0$	$r = 1\cdot357$	($n = 30$),
» $Z \leqq 50\cdot0$	$r = 1\cdot367$	($n = 30$).

Dieses so auf empirischem Wege gewonnene Gesetz von der Proportionalität zwischen Zerstreuung und Leitfähigkeit ist übrigens auf Grund der Untersuchungen H. Schering's[1] auch theoretisch vorauszusehen, wie bereits vom Verfasser früher[2] ausgeführt wurde.

Mit Hilfe des oben angegebenen Reduktionsfaktors 1·362 und der Apparatkonstante des Gerdien'schen Apparats $3\cdot33.10^{-3}$ berechnet sich aus der mittleren Zerstreuung $\overline{Z} = 48\cdot9$ der mittlere Wert der Leitfähigkeit in absoluten (elektrostatischen) Einheiten zu:

$$\lambda = \lambda_{+} + \lambda_{-} = 4\cdot44.10^{-4}\frac{1}{\sec}.$$

[1] H. Schering, Dissertation. Göttingen 1904.

[2] E. v. Schweidler, diese Sitzungsber., Bd. 114, p. 1718 (1905).

C. Zusammenfassung der Resultate.

1. Die Zerstreuung zeigt den normalen täglichen Gang: doppelte Periode mit Maximas in der Nacht und um Mittag, Minimas um Sonnenaufgang und Untergang.

Der Einfluß verschiedener meteorologischer Faktoren auf die Zerstreuung wird untersucht; die Abhängigkeit vom Barometerstand und von der Luftdruckschwankung ist wenig ausgeprägt.

2. Aus dem Vergleiche von Zerstreuungsmessungen und Messungen der Leitfähigkeit mit Gerdien's Apparat ergibt sich in erster Annäherung Proportionalität zwischen Zerstreuung und Leitfähigkeit — vorausgesetzt, daß die Zerstreuung mit dem Elster-Geitel'schen Apparat ohne Schutzzylinder an einem der Einwirkung des Erdfeldes entzogenem Orte bestimmt wird.

Anhang

Datum	Bewölkung	Fern-sicht	Wind	Barometer	Anmerkung
VII. 15.	bew., R.–klar	III	0	722·5	
16.	klar – 1/2bew.	III	0	722·5	
17.	klar	IV—II	0, E 1	726·5	
18.	klar – 1/2bew. –klar	IV—III	0, S 4, E 4	728—25·5	17h Gew.
19.	wechs. bew., R.	II	0, S 2, NW 3	725	14h Gew.
20.	klar – bew., R.	I	0	724—19·5	
21.	wechs. bew., R.	I	0, NE 3	722	7h, 14h Gew.
[22.]	bew., R. – klar	—	—	—	
23.	wechs. bew., R.	II	0	724	Nachm. Gew.
24.	wechs. bew.	III—II	0, E 2	722—20	Nachm. Gew.
25.	wechs. bew.	III	0	721—23·5	Nachm. Gew.
26.	bew. – 1/2bew., R.	V	0	724—21·5	

A.

$7^1/_2{}^h$	9^h	11^h	15^h	$18^1/_2{}^h$ bis 20^h
—	—	—	47·0 46·0 1·02	36·5 42·0 0·87
—	—	—	45·0 41·0 1·10	—
—	54·5 55·0 0·99	54·5 58·0 0·94	47·0 51·5 0·91	46·0 51·5 0·89
44·0 47·0 0·94	50·0 60·0 0·83	51·5 53·0 0·97	50·0 44·0 1·14	—
50·0 60·0 0·83	50·0 50·0 1·00	56·5 56·5 1·00	—	—
—	54·5 56·5 0·96	68·0 72·0 0·94	58·0 56·5 1·03	51·5 48·0 1·07
69·0 60·0 1·15	36·0 40·0 0·90	48·5 56·0 0·87	—	—
—	—	—	—	—
—	72·0 72·0 1·00	68·0 64·0 1·06	53·0 58·0 0·91	—
—	—	—	56·5 55·5 1·02	53·0 52·0 1·02
43·0 43·0 1·00	—	72·5 76·5 0·95	—	—
55·5 62·0 0·89	—	—	—	—

Datum	Bewölkung	Fernsicht	Wind	Barometer	Anmerkung
VII. 27.	klar – bew., R.	VI—II	0, S 4	720—18·5 —20	18h Gew.
28.	bew. – 1/4 bew.	IV	0	720·5	
29.	1/4 bew. – 3/4 bew. – 1/4 bew.	IV	E 2 — E 4	721	
30.	klar	VI—IV	0	722	
31.	klar	IV	0	724·5	18h Gewbild. 22h Wetterl.
VIII. 1.	klar – 1/2 bew. – klar	IV—II	0, E 4	727·5	14h Gew.
2.	wechs. bew.	II	0, E 1	728—26	14h Gewbild. 21h Wetterl.
3.	klar	III—IV	0	723·5	
4.	klar – bew., R.	IV—I	0, S 4	724—28	Nachm. Gew.
5.	1/2 bew.	II—III	0, E 1	729	
6.	klar – 3/4 bew. – klar	III	0, E 4	726·5—24	21h Wetterl.
7.	klar	III	0, E 2	724—21	
8.	1/4 bew.	III—VI	0, E 4	723	Abds. Trüb. VI 22h Gewbild.

$7^1/_2{}^h$	9^h	11^h	15^h	$18^1/_2{}^h$ bis 20^h
—	51·5 50·0 1·03	42·0 45·0 0·93	62·0 66·5 0·93	54·5 52·0 1·05
46·0 41·0 1·12	48·5 48·5 1·00	69·0 72·0 0·96	62·0 64·0 0·97	54·5 53·5 1·02
—	—	—	47·0 42·0 1·12	—
43·0 44·0 0·98	41·0 45·0 0·91	42·0 46·0 0·91	42·0 43·0 0·98	43·0 42·0 1·02
—	43·0 44·0 0·98	47·5 47·5 1·00	46·5 46·0 1·01	34·5 36·0 0·96
51·5 56·5 0·90	—	57·0 58·0 0·98	—	—
—	53·0 51·5 1·03	55·5 62·0 0·90	48·5 47·5 1·02	32·0 44·0 0·73
—	48·5 50·0 0·97	53·5 51·5 1·04	53·5 52·0 1·03	—
43·0 43·0 1·00	—	56·5 55·5 1·02	—	37·5 41·0 0·91
—	—	—	73·5 65·5 1·12	50·5 54·5 0·92
56·5 48·5 1·16	51·5 52·0 0·99	50·5 56·5 0·88	54·5 56·5 0·96	48·5 47·5 1·02
38·5 39·0 0·98	41·0 44·5 0·92	46·0 47·0 0·98	42·0 42·0 1·00	—
45·0 50·0 0·90	54·5 56·0 0·97	50·0 53·0 0·94	43·0 44·0 0·98	30·5 28·5 1·06

Datum	Bewölkung	Fern-sicht	Wind	Barometer	Anmerkung
VIII. 9.	wechs. bew.	VI—I	0, S, E	722·5—20	15h Gew.
10.	1/2 bew. – bew., R. – klar	II	0, E 3	720	Vorm. Gew.-bildung. Abd. Wetterl.
11.	bew. – klar	V—II	0	720—16·5 —18·5	20h Gew.
12.	klar	I	0, E 1	722	Morgennebel
13.	klar	II	0, E 1	724	
14.	klar	—	—	—	
15.	klar	III	E 3	722	
[16.]	bew., R.	—	0	725—21·5	Nachm. Gew.
17.	bew., R.	—	0	721·5—18	Vorm. und nachm. Gew.
18.	1/2 bew.	I—II	0	719	21h Wetterl.
19.	bew., R. – 1/2 bew.	II—III	0	721	4h Gew.
20.	1/2 bew., R. – klar	II—III	0, S 3, E 4	723—25	

$7^1/_2{}^h$	9^h	11^h	15^h	$18^1/_2{}^h$ bis 20^h
—	36·0 37·0 0·97	50·0 43·0 1·16	47·5 48·0 0·99	45·0 48·0 0·93
—	65·5 62·0 1·06	65·5 68·0 0·96	—	—
—	42·0 46·0 0·92	46·0 43·0 1·06	42·0 42·5 0·99	46·0 47·0 0·98
—	—	64·0 69·0 0·93	55·5 53·0 1·05	51·5 52·0 0·99
—	45·0 46·0 0·98	58·0 56·5 1·03	56·5 50·0 1·13	53·0 53·0 1·00
—	—	—	—	—
45·5 47·5 0·96	54·5 54·5 1·00	53·0 54·5 0·97	57·0 65·0 0·88	50·0 50·0 1·00
—	—	—	[31·0] [46·0] [0·67]	—
—	45·5 44·0 1·03	—	—	—
—	50·0 47·5 0·95	47·5 48·5 0·98	51·5 51·5 1·00	42·0 38·5 1·09
—	56·5 62·0 0·91	50·0 50·0 1·00	62·0 61·0 1·02	38·5 34·5 1·12
—	32·5 33·5 0·97	—	51·5 54·5 0·94	51·5 46·0 1·12

Datum	Bewölkung	Fern-sicht	Wind	Barometer	Anmerkung
VIII. 21.	wechs. bew., R.	III—VI	0, E 2	724·5—26	Nachm. Trübung (VI)
22.	klar	V—IV	0	727	
23.	klar	IV	0	725·5—23	Morgennebel
24.	wechs. bew.	IV—III	0, E 2	724	Nachm. Gew.
25.	klar – $^1/_4$bew.	IV	0	724·5 —21·5	
26.	bew. – $^1/_4$bew.	V—II	0, E 3	722—24·5	12h Gewitterbildung
27.	klar – bew., R.	IV—II	0, E 2	723—19 —21	
28.	klar	I	E 4, S 4, 0	726—29	
29.	klar	IV—III	0, E 2	729	
30.	klar	IV—III	0, E 2	729	
31.	klar	IV—II	0, E 2	729	
IX. 1.	klar	III	0, E 3	728	
2.	klar	IV	0, E 3	727	

$7\frac{1}{2}^h$	9^h	11^h	15^h	$18\frac{1}{2}^h$ bis 20^h
34·5 37·5 0·91	39·0 38·5 1·01	40·5 46·0 0·88	42·0 45·0 0·93	—
—	—	—	55·0 50·0 1·10	—
—	43·0 47·5 0·91	50·0 47·5 1·05	55·5 60·0 0·93	23·0 27·5 0·84
38·0 39·0 0·97	44·0 47·5 0·93	41·5 39·0 1·06	54·5 59·0 0·93	—
53·5 57·0 0·93	50·0 51·5 0·97	53·0 56·5 0·93	45·0 51·5 0·87	40·5 42·0 0·97
—	45·5 50·0 0·91	53·0 53·0 1·00	[69, 41] [69] —	61·0 60·0 1·02
—	41·5 36·5 1·13	34·0 32·5 1·05	36·5 35·5 1·03	[45·0] — —
50·0 60·0 0·83	—	60·0 70·5 0·85	44·0 47·5 0·93	37·5 41·0 0·91
40·0 42·5 0·94	44·0 43·5 1·01	45·0 49·5 0·91	38·5 41·0 0·94	41·0 46·0 0·89
—	41·0 46·0 0·89	43·0 46·0 0·93	39·0 41·0 0·95	41·0 39·5 1·04
37·0 39·5 0·95	42·5 48·5 0·88	42·5 48·5 0·88	48·0 50·5 0·95	38·0 44·0 0·85
—	50·0 51·5 0·97	—	55·5 57·0 0·97	43·0 51·5 0·83
38·5 51·5 0·75	—	48·5 50·5 0·96	53·0 62·0 0·85	49·0 60·0 0·82

Datum	Bewölkung	Fern-sicht	Wind	Barometer	Anmerkung
IX. 3.	klar	IV	0	726·5	
4.	klar	IV—III	0	727—25·5	
5.	klar – 3/4 bew., R.	IV—II	0	725	
6.	klar – 3/4 bew.	IV	0, SW 3	724—21·5 —23	
7.	bew. – klar	V—IV	0	723·5—26	
8.	klar	II—III	0	728—25·5	
9.	klar, w. bew., R.	IV—I	wechs.	725	12^h, 20^h: Gew.
10.	bew., R.	II	0, S 2, E 2	723—20	12^h, 21^h: Gew.
11.	bew., R. – 3/4 bew.	II	0	722	Sehr kühl, Neuschnee auf Bergen
12.	3/4 bew.	V—I	wechs.	719	Nachm. föhnig, starke Winde
13.	wechs. bew.	I	wechs.	719	
14.	wechs. bew.	III	0	718	
15.	bew. – klar	V—III	E 3	719—17·5	

$7^1/_2{}^h$	9^h	11^h	15^h	$18^1/_2{}^h$ bis 20^h
—	—	—	62·0 65·5 0·95	45·0 48·5 0·93
47·5 48·5 0·98	—	62·0 68·0 0·91	61·0 56·5 1·09	45·0 46·0 0·98
47·5 54·5 0·86	—	61·0 61·0 1·00	54·5 58·0 0·94	25·5 34·5 0·74
45·0 44·0 1·02	—	—	47·0 45·5 1·03	—
38·0 41·0 0·93	—	50·0 60·0 0·83	—	—
43·0 46·0 0·94	—	54·5 54·5 1·00	45·0 46·0 0·98	50·0 46·0 1·08
46·0 51·5 0·89	—	—	45·0 56·5 0·80	—
60·0 64·0 0·94	—	53·0 55·5 0·95	69·0 69·0 1·00	—
38·5 46·0 0·84	—	43·5 44·0 0·99	43·5 38·5 1·14	43·0 35·5 1·20
32·0 31·0 1·03	—	[39·0] [46·0 35·5] —	68·5 73·5 0·93	48·0 47·0 1·02
30·5 33·0 0·92	—	62·0 61·0 1·02	62·0 46·0 1·35	43·0 40·0 1·08
54·0 56·5 0·95	—	47·0 47·0 1·00	48·0 46·0 1·04	—
38·0 38·5 0·99	—	48·5 42·0 1·15	47·0 48·0 0·98	40·0 45·0 0·89

Anhang B.

Datum		Stunde	$A_{-} . 10^3$	Z_{-}	r_{-}
VII.	15.	16^h	67·0	47·0	1·42
	16.	16^h	64·5	45·0	1·43
	17.	10^h	81·5	54·5	1·49
	18.	15^h	68·0	50·0	1·36
	20.	10^h	89·5	54·5	1·64
	20.	14^h	86·0	58·0	1·48
	23.	10^h	93·5	70·0	1·34
	25.	11^h	108·5	72·5	1·50
	28.	11^h	82·0	69·0	1·19
	31.	11^h	68·0	47·5	1·43
VIII.	3.	11^h	71·5	53·5	1·33
	5.	15^h	89·0	73·5	1·21
	8.	15^h	55·5	43·0	1·30
	11.	11^h	54·5	46·0	1·18
	11.	15^h	57·5	39·0	1·47
	13.	11^h	74·5	58·0	1·28
	18.	$15^1/_2{}^h$	57·5	40·0	1·44
	20.	15^h	64·5	51·5	1·25
	25.	11^h	71·5	53·0	1·35
	27.	15^h	51·0	36·5	1·40
	29.	15^h	51·0	38·5	1·32
	30.	15^h	56·0	39·0	1·44
	31.	15^h	57·5	48·0	1·20

Datum	Stunde	$A_- . 10^3$	Z_-	r_-
IX. 3.	15h	82·0	62·0	1·32
4.	15h	78·0	61·0	1·28
5.	15h	80·0	54·5	1·47
8.	15h	64·5	45·0	1·43
12.	15h	85·5	68·0	1·26
14.	11h	57·5	47·0	1·22
14.	15h	63·0	48·0	1·31

Datum	Stunde	$A_+ . 10^3$	Z_+	r_+
VII. 15.	16h	67·0	46·0	1·45
16.	16h	65·0	41·0	1·58
17.	10h	68·0	58·0	1·17
20.	14h	93·0	56·5	1·64
23.	10h	89·0	68·0	1·31
28.	11h	93·0	72·0	1·29
30.	11h	64·5	46·0	1·40
31.	11h	57·5	47·5	1·21
VIII. 3.	11h	71·5	51·5	1·39
5.	15h	89·0	65·5	1·36
9.	15h	64·5	48·0	1·34
11.	15h	61·0	42·5	1·44
12.	15h	71·5	53·0	1·35
13.	15h	71·5	50·0	1·43
18.	15h	71·5	51·5	1·39

Datum		Stunde	$A_+ . 10^3$	Z_+	r_+
VIII.	21.	7^h	51·0	37·5	1·36
	24.	9^h	64·5	47·5	1·36
	25.	15^h	61·0	51·5	1·18
	27.	11^h	51·0	32·5	1·57
	27.	15^h	48·0	35·5	1·35
	28.	11^h	91·0	70·5	1·29
	29.	15^h	54·5	41·0	1·33
	30.	15^h	49·5	41·0	1·18
	31.	15^h	82·0	50·5	1·62
IX.	1.	15^h	74·5	55·5	1·34
	5.	15^h	80·0	58·0	1·38
	8.	15^h	61·0	46·0	1·33
	12.	11^h	54·5	41·0	1·33
	12.	15^h	89·0	73·5	1·21
	14.	$11^1/_2{}^h$	74·5	53·5	1·39

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVI.

Beobachtungen über Niederschlagselektrizität

von

Dr. E. Weiss.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Oktober 1906.)

Bisher wurden Beobachtungen über die Elektrizität der Niederschläge nur von Elster und Geitel[1] und von Gerdien[2] ausgeführt. Die von ihnen angewandte Methode war folgende: Die Niederschläge wurden in einer im Freien gut isoliert aufgestellten Blechschale aufgefangen, die durch einen Draht mit einem Elektrometer in Verbindung stand. Zum Schutze gegen die Influenzwirkungen der atmosphärischen Elektrizität war die Schale von einem oben offenen Blechzylinder umgeben, der mit der Erde in leitender Berührung stand. Auch der Zuleitungsdraht zum Elektrometer lief in einer geerdeten Blechröhre. Trotz vieler Vorsichtsmaßregeln war es nicht ausgeschlossen, daß Tropfen, die von der Schutzhülle absprangen, in die Schale gelangen und diese so mit einer der atmosphärischen entgegenbezeichneten Influenzelektrizität laden konnten. Diesen Fehler könnte man nun dadurch vermeiden, daß man die Schale nicht von vornherein mit dem Elektrometer in

[1] Met. Zeitschr., V, 95 (1888); diese Sitzungsber., XCIX, 421 (1890); Terr. Magn., IV, 15 (1899).

[2] Münch. Ber., XXXIII, II (1903); Phys. Zeitschr., IV, 837 (1903).

Verbindung setzt, sondern sie ohne Schutzhülle dem Regen aussetzt und nach einiger Zeit in einem vor dem Erdfeld geschützten Raum mit dem Elektrometer in Berührung bringt. In diesem Falle könnten aber die von der Schale abspritzenden Tropfen diese mit einer der Luftelektrizität gleich bezeichneten Influenzelektrizität laden. Um dies zu vermeiden, fing ich die Niederschläge nicht auf einer Schale, sondern auf einer gut isolierten Bürste auf. Ein Abspringen von Tropfen konnte ich an dieser nie bemerken. Ebenso wie Elster und Geitel und Gerdien beobachtete ich gleichzeitig den Gang der Luftelektrizität. Ferner verband ich mit den Beobachtungen eine Messung der Zahl und Größe der Tropfen, respektive der Flocken nach der von J. Wiesner[1] angegebenen Absorptionsmethode.

Die Beobachtungen stellte ich auf der Wiener Universitäts-sternwarte an, und zwar auf einer Terrasse, die gegen S und W vollkommen frei und gegen N und E von den Mauern des Gebäudes begrenzt ist. Der Punkt, wo der Kollektor und die Bürste aufgestellt wurden, ist von der nördlichen Begrenzungsmauer 7 *m* entfernt, von der östlichen 11 *m*. Es finden sich auch in der Nähe keine Bäume, die die Terrasse überragen. Die Möglichkeit, daß vom Dach oder von Bäumen abspringende Tropfen auf die Bürste gelangen könnten, ist also bei südlichen und westlichen Winden ganz ausgeschlossen und auch bei leichten nördlichen und östlichen Winden sehr unwahrscheinlich. Die Bürste, die zum Auffangen der Niederschläge diente, war durch Ebonit mit Natriumtrocknung isoliert. Die Borsten standen sehr dicht beisammen, der Durchmesser der oberen Fläche betrug 13 *cm*. Nach der Exposition, die zwischen $^1/_2$ und 5 Minuten variierte, wurde die Bürste unter einem Schirm in den an die Terrasse anschließenden Beobachtungsraum gebracht und dort mit einem Hankel'schen Elektroskop in Verbindung gesetzt. Die Empfindlichkeit desselben wurde so reguliert, daß einem mittleren Teilstrich ungefähr 1·3 Volt entsprach. Die Kapazität des Systems Hankel+Bürste wurde auf 23 *cm* bestimmt.

[1] Diese Sitzungsber., CIV, I, 1397 (1895).

Da die Kapazität bekannt ist, kann man die Elektrizitätsmenge, die der Niederschlag mit sich bringt, aus der Spannung berechnen. Die Niederschlagsmenge wurde nach der Wiesnerschen Absorptionsmethode gemessen: Ein mit Eosin und Federweiß eingeriebenes Filtrierpapier von immer gleicher Qualität (aus der Fabrik Max Dreverhoff, Dresden: Barytfiltrierpapier Nr. 311) wurde in einem Rahmen (entweder 400 oder 100 cm^2) einige Sekunden dem Regen ausgesetzt. Die Tropfen hinterlassen runde rote Flecken, aus deren Durchmesser nach der von Defant[1] angegebenen Methode und den von ihm berechneten Tabellen das Gewicht der Tropfen bestimmt wurde. Aus der Zahl der Tropfen kann man dann die Niederschlagsmenge rechnen. Bei Schneeflocken ist diese Methode allerdings ziemlich ungenau, da dieselben keine runden Flecken hinterlassen. Aber einen Anhaltspunkt über die Zahl und Größe der Flocken gibt sie doch.

Die Luftelektrizität wurde durch einen Tropfkollektor gesammelt, der ganz in der Nähe der Bürste stand. Vom Kollektor geht quer über die Terrasse ein Schlauch zu einer durch Paraffin isolierten Wasserflasche. In diese taucht der Draht, der zu einem Exner'schen Elektroskop führt. Der Kollektor ist an einem Stativ beweglich; vier Stellungen waren durch Marken bezeichnet; die Reduktion der Angaben einer Stellung auf die andere geschah durch Beobachtungen bei konstantem Potentialgefälle.

Die Beobachtungen wurden folgendermaßen ausgeführt. Unmittelbar vor der Exposition der Bürste wurde das Exnersche Elektroskop abgelesen und das Zeichen der Luftelektrizität bestimmt (durch Annäherung eines geriebenen Ebonitstabes). Darauf wurde die Bürste unter einem Schirm ins Freie getragen, in einem Stativ befestigt und dem Regen-, respektive Schneefall ausgesetzt. Dann wurde der Rahmen mit dem präparierten Filtrierpapier einige Sekunden exponiert. (Im Verlaufe des Regens wurden nur dann solche Blätter exponiert, wenn eine Änderung der Intensität oder der Tropfengröße bemerkt wurde.) Ehe die Bürste weggenommen wurde, wurde

[1] Diese Sitzungsber., CXIV, 585 (1905).

wieder die Luftelektrizität abgelesen und ihr Zeichen bestimmt. Die Bürste wurde unter einem Schirm in den Beobachtungsraum gebracht, mit dem Hankel'schen Elektroskop in Verbindung gesetzt und der Ausschlag abgelesen. Da die Exposition der Bürste, damit ein gut ablesbarer Ausschlag entstand, im Mittel 3 Minuten betrug, so konnten die Beobachtungen alle 4 bis 5 Minuten gemacht werden.

Der Tropfkollektor hat zwar andern Kollektoren gegenüber den Nachteil, daß er die mit ihm verbundenen Apparate nur langsam aufladet; da aber die Niederschlagsbeobachtungen nicht so rasch aufeinanderfolgen, so hat es auch keinen Zweck, alle geringen Schwankungen der Luftelektrizität zu beobachten, deren Gang nur zum Vergleiche dienen soll.

Meine Beobachtungen umfassen die Monate Jänner bis April 1906 und betreffen daher hauptsächlich Schneefälle und ruhige, schwache Regenfälle und einige Regenböen.

Bei den ersten Versuchen im Jänner und Anfang Februar beobachtete ich noch nicht den gleichzeitigen Gang des atmosphärischen Potentialgefälles; vom 15. Februar an geschah auch dies regelmäßig. Die bisher erhaltenen Resultate stimmen mit denen von Elster und Geitel und von Gerdien gut überein. Bei schwachen Niederschlagsfällen ist gewöhnlich auch die elektrische Tätigkeit gering; sowohl die Störungen des normalen Erdfeldes als auch die Niederschlagsladungen sind schwach. Die schon öfter beobachtete Tatsache, daß bei Schneefällen das Zeichen von Luft- und Niederschlagselektrizität dasselbe ist und auch der Gang beider gut übereinstimmt, konnte ich fast immer bemerken (Beobachtungen Nr. 6, 7, 8, 9, 15). Bei Regenfällen tritt das Umgekehrte öfter ein: das Zeichen ist gewöhnlich entgegengesetzt, der Gang der Niederschlagselektrizität ungefähr das Spiegelbild desjenigen der Luftelektrizität (Beobachtungen Nr. 11, 12, 13, 14, respektive Fig. 2; Ausnahme Beobachtung Nr. 10, Fig. 1). Häufig konnte ich bei einer Änderung im Charakter des Niederschlagsfalles (Änderung der Intensität des Falles oder der Tropfengröße oder der Windstärke) auch eine Änderung der elektrischen Faktoren beobachten (9, 26, 107, 172, 193). Der Schnee ist zwar vorwiegend positiv elektrisch, aber nicht ausschließlich;

es kommen auch starke negative Ladungen vor. Bei Regen ist das Vorzeichen sehr wechselnd; ein Überwiegen der negativen Ladungen, wie es besonders die Theorie der Luftelektrizität von Gerdien verlangt, konnte ich bisher, wahrscheinlich des spärlichen Beobachtungsmaterials halber, nicht bemerken. Aber fast immer fand ich eine schöne Übereinstimmung zwischen dem Gang der Niederschlags- und der Luftelektrizität. Sogar bei schnellen Änderungen tritt diese Übereinstimmung (Fig. 2), sei es durch parallelen, sei es durch entgegengesetzten Verlauf, ein. Die wenigen Ausnahmen davon betreffen eine sehr schwache elektrische Tätigkeit, wo auch die Angaben der Elektroskope bereits ungenau sind.

Gerdien stellt fest, daß die Elektrizitätsmengen, welche bei ruhigen Niederschlägen vom Charakter des Landregens mit den Niederschlägen herabkommen, Stromstärken bis zu $10^{-14} \frac{\text{Amp}}{cm^2}$ entsprechen, was mit meinen Beobachtungen gut übereinstimmt. Bei böigem Wetter fand ich Stromstärken bis zu $10^{-13} \frac{\text{Amp}}{cm^2}$. Die Ladung der Regentropfen ist sehr veränderlich; die Größenordnung beträgt 10^{-4} elektrostatischer Einheiten, die Spannung beträgt manchmal mehr als 10 Volt, ganz entsprechend der Schätzung von Elster und Geitel. Bei der Berechnung der letztgenannten Zahlen verfuhr ich so, daß ich mir Tropfengruppen bildete. Die Ausmessung der Flecke auf dem Filtrierpapier geschah in der von Defant angegebenen Weise mit Hilfe eines auf Pauspapier gezeichneten Winkels. Er wird so auf den Fleck des Tropfens gelegt, daß dieser die Schenkel des Winkels eben berührt. Bezeichnet man auf dem Winkel die Tropfengruppen, so geht die Ausmessung sehr rasch vor sich. Aus den so erhaltenen Tropfen denke ich mir mittlere Tropfen gebildet und darauf gleichmäßig die Elektrizitätsmenge verteilt. Größe der Tropfen, Ladung und Spannung variieren ungeheuer stark; am konstantesten ist noch, wenigstens bei Regenfällen, die Ladung der Gewichtseinheit. Diese ist pro Milligramm von der Größenordnung 10^{-3} elektrostatischer Einheiten.

Bei den nun folgenden Einzelbesprechungen ist in den Tabellen außer Nummer und Zeit der Beobachtung Nummer und Expositionszeit des präparierten Blattes Filtrierpapier angegeben, dann die Ladung und Expositionszeit der Bürste, ferner die Zahl der in 1 Sekunde auf eine Fläche von 400 cm^2 (größerer Rahmen) fallenden Tropfen, respektive Flocken und ihr mittleres Gewicht in Milligramm, dann die Niederschlagsmenge in Milligramm pro 100 cm^2 in 1 Sekunde, weiters die Ladung eines mittleren Tropfens in 10^{-4} elektrostatischen Einheiten und in Volt, dann die Ladung der Gewichtseinheit (1 *mg*) in 10^{-8} elektrostatischen Einheiten und schließlich die Stromstärke, welche der vom Niederschlage transportierten Elektrizitätsmenge entspricht, in $10^{-15} \frac{\text{Amp}}{cm^2}$.

In der Kolumne Luftelektrizität bedeuten die angegebenen Zahlen Volt; das sind jedoch nur relative Zahlen, auf die oberste Stellung des Kollektors reduziert. Das Zeichen ∞ bedeutet, daß die Blättchen des Elektroskopes anschlugen, das Zeichen ?, daß die Ablesung infolge der raschen Bewegung der Blättchen nicht möglich war.

Bei der graphischen Darstellung zeigt die obere Kurve den Gang der Niederschlagselektrizität; die Ordinate gibt die auf eine Expositionszeit von 3 Minuten reduzierte Ladung der Bürste an. Die untere Kurve stellt den Gang der Luftelektrizität dar; die Ordinaten sind dem atmosphärischen Potentialgefälle proportional, indem sie die Ladung des Exner'schen Elektroskopes, bezogen auf die höchste Stellung des Kollektors, angeben.

1. Schneefall bei Tauwetter.

22. Jänner 1906.

Nr.	Stunde	Blatt		Bürste		Flocken		Niederschlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp	
		Nr.	exp.	Ladung	in	Zahl	Größe		10^{-4}	Volt			
1	$2^h\ 45^m$ p.	1	20^s	+2·3	3^m	7	0·10	0·18	4·2	4·4	4·1	2·4	Schwach
2	" 00	2	20	+2·3	3	9	0·12	0·25	3·3	3·3	2·9	2·4	Etwas stärker
3	3 15	—	—	+5·5	2½	—	—	—	10·1	10·1	8·8	7·3	—

Feinkörniger Schnee, ganz schwacher Nordwestwind. Dauer ½ Stunde.

Der Schnee ist ausschließlich positiv und verhältnismäßig stark geladen. Der Verstärkung des Falles entspricht eine Zunahme der Ladung.

2. Ruhiger Schneefall.

26. Jänner 1906.

Nr.	Stunde	Blatt		Bürste		Flocken		Nieder-schlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	
		Nr.	exp.	Ladung	in	Zahl	Größe		10^{-4}	Volt			
4	$10^h 00^m$ a.	3	10^s	−5·8	3^m	4	1·00	1·1	16·5	8·0	1·7	6·0	Stark
5	10 20	—	—	+4·7	3	—	—	—	13·4	6·5	1·3	4·9	Stark
6	10 40	4	20	+6·2	3	1·5	1·00	0·35	11·1	5·4	1·1	6·4	Schwach

Großflockiger Schnee. Absolute Windstille. Dauer 40 Minuten.

Der Schnee ist anfangs negativ, dann positiv elektrisch. Die Flocken sind viel größer und führen mehr Elektrizität mit sich, aber die Ladung der Gewichtseinheit ist doch geringer als bei Nr. 1.

3. Schwacher Regen.

2. Februar 1906.

Nr.	Stunde	Blatt		Bürste		Tropfen		Niederschlag	Ladung eines Tropfens		Ladung 1 *mg*	Amp 10^{-15}	
		Nr.	exp.	Ladung Volt	in	Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
7	$3^h\,57^m$ p.	5	20^s	—5·1	3^m	3	0·26	0·19	21·3	16·1	8·2	5·3	Schwach
8	4 04	6	10	—5·1	3	8	0·24	0·46	8·4	6·5	3·5	5·3	Stark
9	4 10	7	10	+9·2	3	2	0·23	0·12	55·0	43·0	23·5	9·6	Plötzlich schwach
10	4 16	—	—	—1·0	2	—	—	—	9·0	7·1	3·9	1·5	Ganz schwach

Der Regen ist anfänglich negativ. Bei der plötzlichen Intensitätsänderung des Regens tritt ein Zeichenwechsel ein, die Tropfen sind nun positiv, und zwar viel stärker geladen als anfänglich. Zum Schlusse des Regens tritt wieder das negative Zeichen ein.

4. Dichter Schneefall.

4. Februar 1906.

Dauert bereits seit 2 Stunden. Vollkommene Windstille. Dauer der Beobachtung 2 Stunden.

Nr.	Stunde	Blatt		Bürste		Flocken		Niederschlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Amp 10^{-15}	
		Nr.	exp.	Ladung	in	Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
11	9h 58m a.	8	10s	+6·2	3m	18	0·06	0·29	4·3	5·2	0·7	6·4	Gleichmäßig andauernd schwach (Nr. 11–16)
12	10 04			+3·9	3				2·7	3·3	0·4	4·0	
13	10 09			+2·6	3				1·8	2·2	0·3	2·7	
14	10 14			+3·1	3				2·2	2·6	0·4	3·2	
15	10 20			+4·7	3				3·3	4·0	0·5	4·9	
16	10 25			—0·6	3				0·4	0·5	0·1	0·6	
17	10 30			+3·9	3				2·7	3·3	0·4	4·0	
18	10 35			+ ∞	3				?	?	?	?	
19	10 40			+1·2	3				0·8	1·0	0·1	1·2	

20	10 46	9	10	+3·9	3	16	0·05	0·20	3·0	3·9	5·9	4·0	
21	10 56			+2·3	3				1·8	2·3	3·5	2·4	
22	11 00			0·0	3				0·0	0·0	0·0	0·0	
23	11 05			+2·3	3				1·8	2·3	3·5	2·4	schwächer
24	11 10			—0·4	3				0·3	0·4	0·6	0·4	
25	11 15			+3·1	3				2·4	3·1	4·7	3·2	
Kurze Unterbrechung wegen Nachfüllens der Flasche													
26	11 28	10	5	—5·1	3	5	0·04	0·05	13·9	19·6	35·0	5·3	Windstöße aus SE
27	11 33			+2·3	3				6·7	9·4	17·0	2·4	
28	11 41			0·0	3				0·0	0·0	0·0	0·0	Ende des Schneefalles

Obwohl der Charakter und die Intensität des Schneefalles sich fast gar nicht änderten, traten starke Schwankungen der Niederschlagsladungen auf. Der Schnee war bis auf ein einziges Mal positiv geladen. Auffallend ist das Anwachsen der Ladungen bei Beginn des Windes; es wäre allerdings nicht ausgeschlossen, daß etliche vom Dache kommende Flocken die Ursache davon waren.

5. Schneefall.

4. Februar 1906.

Anfangs schwach, später stärker. Flockige Flocken. Vollkommen windstill. Beginn des Schneefalles 1^h^ 45^m^. Dauer der Beobachtung $1^1/_2$ Stunden.

Nr.	Stunde	Blatt		Bürste		Flocken		Niederschlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp	
		Nr.	exp.	Ladung	in	Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
29	1^h^ 59^m^ p.	11	5^s^	— 5·1	3^m^	32	0·10	0·75	2·2	2·3	2·3	5·3	Schwach
30	2 04			— 5·0	3				2·1	2·2	2·2	5·3	
31	2 09			— 5·1	3				2·2	2·3	2·3	5·3	
32	2 14			— 1·9	3				0·8	0·9	0·8	2·0	
33	2 23			+12·7	3				5·4	5·7	5·6	13·2	
34	2 29			+ 9·0	3				4·2	4·5	4·4	10·3	

35	2 34			+ 6·5	3				2·7	2·9	2·9	6·7	
36	2 39			+12·0	3				5·1	5·4	5·3	12·5	
37	2 44			+13·4	3				5·7	6·0	5·9	13·9	
38	2 49			— 2·7	3				1·2	1·2	1·2	2·8	
39	2 56	12	5	0·0	3	32	0·6	0·50	0·0	0·0	0·0	0·0	Noch schwächer
40	3 01			— 4·3	3				1·7	2·5	2·7	4·5	
41	3 08			— 4·3	3				1·7	2·5	2·7	4·5	
42	3 16			— 4·0	3				1·4	1·7	2·3	4·2	
43	3 21			— 1·0	3				0·39	0·5	0·6	1·0	
44	3 26			— 3·5	3				1·4	1·7	2·2	3·7	
45	3 31			— 1·9	3				0·7	0·9	1·2	2·0	Ende des Schneefalles

Obwohl der Charakter und die Intensität des Schneefalles sich fast gar nicht änderten, traten starke Schwankungen der Niederschlagsladungen auf. Der Schnee ist wechselnd positiv und negativ, doch sind die positiven Ladungen höher.

6. Schneefall.

5. Februar 1906.

Schwach. Kleine Flocken. Fast ganz windstill (NW).

Nr.	Stunde	Blatt		Bürste		Flocken		Nieder-schlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	Luft-elek-trizität	
		Nr.	exp.	Ladung	in	Zahl	Ge-wicht		10^{-4}	Volt				
46	$2^h 30^m$ p.	13	5^s	+4·7	3^m	41	0·07	0·77	1·42	1·6	1·9	4·9	+	
47	2 35			+4·7	3				1·42	1·6	1·9	4·9	+	
48	2 44			+4·7	3				1·42	1·6	1·9	4·9	+	
49	2 50			+4·7	3				1·42	1·6	1·9	4·9	+	
50	3 02			+5·2	3				1·57	1·8	2·1	5·4	+	
51	3 10			+4·7	3				1·42	1·6	1·9	4·9	+	
52	3 20			+5·0	3				1·50	1·7	2·0	5·2	+	Ende

Bei diesem vollkommen gleichmäßig andauernden Schneefall blieben auch die elektrischen Ladungen fast ganz konstant.

7. Schneefall.

15. Februar 1906.

Anfänglich stark, dann viel schwächer. Kleine flockige Flocken. Windstill.

Nr.	Stunde	Luft-elek-trizität	Blatt		Bürste		Luft-elek-trizität	Flocken		Nieder-schlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	m		Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
53	$2^h 29^m$ p.	+ 87	14	5^s	+3·1	3^m	+ 87	28	0·05	0·36	1·4	1·8	2·7	3·2	Stark
54	2 36	+ 65			+2·3	3	+ 65				1·3	1·7	2·6	2·4	
55	2 42	+ 65			+2·3	3	+ 65				1·3	1·7	2·6	2·4	
56	$3^h 21^m$ p.	+ 21	15	3^s	+3·9	3^m	+ 21	65	0·06	1·01	0·8	0·9	1·2	4·1	Stärker
57	3 28	+ 42			+4·7	3	+ 42				0·9	1·1	1·4	4·9	
58	3 40	+ 65			+4·4	3	+ 65				0·8	1·0	1·3	4·6	
59	3 46	+ 65			+3·6	3	+ 65				0·7	0·8	1·0	3·7	
60	3 52	+ 60			+5·5	3	+ 60				1·1	1·3	1·7	5·7	

Nr.	Stunde	Luft-elek-trizität	Blatt		Bürste		Luft-elek-trizität	Flocken		Nieder-schlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Ge-wicht		10^{-4}	Volt			
61	$4^h\,00^m$ p.	+ 60	15	3^s	+5·5	3^m	+ 60	65	0·06	1·01	1·1	1·3	1·7	5·7	
62	4 16	+ 87			+6·6	3	+ 87				1·3	1·5	2·0	6·8	
63	4 23	+121			+7·3	3	+121				1·4	1·7	2·2	7·6	
64	4 29	+143			+5·2	3	+143				1·0	1·2	1·6	5·4	
65	4 35	+104			+4·2	3	+104				0·8	1·0	1·3	4·4	
66	4 52	+104	16	5	+3·1	3	+104	34	0·07	0·55	1·2	1·4	1·8	3·2	**Viel schwächer**
67	5 03	+104			+6·0	3	+104				2·2	2·7	3·5	6·2	**Ende**

Auch diesmal blieben die Intensität des Schneefalles und die Ladung der Flocken fast konstant.

Der Schneefall hatte seit 1^h gedauert und setzte nach einer Unterbrechung von $^1/_2$ Stunde um $3^h\,20^m$ etwas stärker ein.

Der Gang der Luftelektrizität ist dem des Niederschlages ungefähr parallel. Das Maximum der Luftelektrizität tritt etwas später ein als das der Niederschlagselektrizität.

8. Schneefall.

19. Februar 1906.

Schwacher Fall seit $^1/_2$ Stunde, später Nebelreißen. Kleine Flocken. Dichter Nebel. Windstill.

Nr.	Stunde	Luft-elek-trizität	Blatt		Bürste		Luft-elek-trizität	Flocken		Nieder-schlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Ge-wicht		10^{-4}	Volt			
68	5h 44m p.	+198			+3·1	3m	+210				1·4	1·8	2·7	3·2	Der Schneefall wird immer schwächer, dafür starkes Nebelreißen (68–73)
69	5 49	+210	17	5*	+7·0	3	+220	28	0·05	0·36	3·1	4·0	6·0	7·3	
70	5 53	+225			+4·4	3	?				3·0	2·5	3·8	4·6	
71	5 58	+300			+4·7	3	+314				2·1	2·7	4·0	4·9	
72	6 02	+314	18	5	+3·9	3	+286				2·8	3·2	3·6	4·1	
73	6 07	+286			+3·9	3	+286				2·8	3·2	3·6	4·1	
74	6 12	+264			+3·9	3	+250				2·8	3·2	3·6	4·1	
75	6 16	+242			+3·1	3	+250				2·2	2·5	2·8	3·2	
76	6 20	+250	19	3	+2·3	3	+234	21	0·05	0·25	1·4	1·8	2·9	2·4	

Nr.	Stunde	Luft-elek-trizität	Blatt		Bürste		Luft-elek-trizität	Flocken		Nieder-schlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	m		Zahl	Ge-wicht		10^{-4}	Volt			
77	6h 25m p.	+234			+2·8	3m	+234				1·7	2·2	3·5	2·9	
78	6 30	+250			+0·8	3	+242				0·5	0·6	1·0	0·8	Schneefall hört auf
								Tropfen							
79	7h 06m p.	+156			+3·9	3m	+156				3·4	3·7	4·0	4·1	Nebelreißen
80	7 11	+174	20	3s	+3·6	3	+188	14	0·09	0·30	3·2	3·5	3·7	3·7	Nebelreißen (80–83)
81	7 15	+208			+3·9	3	+208				3·4	3·7	4·0	4·1	
82	7 20	+208			+5·0	4	+208				3·3	3·7	3·9	4·0	
83	7 26	+188	21	3	+4·7	4	+188	13	0·03	0·11	3·6	5·3	10·9	3·7	

Der Schnee war durchwegs positiv elektrisch. Der Gang beider Elektrizitäten war wieder parallel, das Maximum der Luftelektrizität verspätet sich wieder gegen das der Elektrizität des Schnees. Die beim Nebelreißen herabfallenden sehr kleinen Tröpfchen sind relativ hoch geladen.

9. Schneefall.

22. Februar 1906.

Schwach. Temperatur über Null. Vollkommene Windstille.

Nr.	Stunde	Luftelektrizität	Blatt		Bürste		Luftelektrizität	Flocken		Niederschlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
84	$2^h 53^m$ p.	+42	22	5^s	0·0	3^m	+34	3	0·52	0·41	0·0	0·0	0·0	0·0	
85	2 59	+21			+1·0	4	+34				3·1	1·9	0·6	0·3	
86	3 05	+34			0·0	4	+34				0·0	0·0	0·0	0·0	
87	3 11	+21	23	2	+1·0	5	+34	14	0·15	0·52	0·5	0·5	0·3	0·4	Etwas stärker, aber kleinere Flocken
88	3 18	+51			+1 0	5	+21				0 5	0·5	0·3	0·4	

Nr.	Stunde	Luftelektrizität	Blatt		Bürste		Luftelektrizität	Flocken		Niederschlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
89	$3^h 24^m 30$ p.	+21			+1·5	5^m	+34				0·8	0·7	0·5	0·7	
90	3 31 30	+34	24	2^s	0·0	5	+51	3	0·09	0·07	0·0	0·0	0·0	0·0	Viel schwächer
91	3 38 50	+29			0·0	5	+34				0·0	0·0	0·0	0·0	
92	3 45 30	+34			+4·7	10	+34				6·6	7·1	7·0	1·0	
93	3 58	+21	25	2	0·0	5	+21	10	0·11	0·28	0·0	0·0	0·0	0·0	Etwas stärker
94	4 06	+21			0·5	5	+21				0·0	0·0	0·0	0·0	Ende

Die elektrische Tätigkeit ist sehr gering. Ähnlichkeiten im Gange beider Elektrizitäten sind keine zu bemerken. Merkwürdig ist die hohe Ladung bei Nr. 92, die ohne sichtbare Änderung im Charakter des Schneefalles auftrat. Nur nachher trat eine kleine Verstärkung des Schneefalles ein.

10. Schwacher Regen.

28. Februar 1906.

Schwacher Nordwestwind.

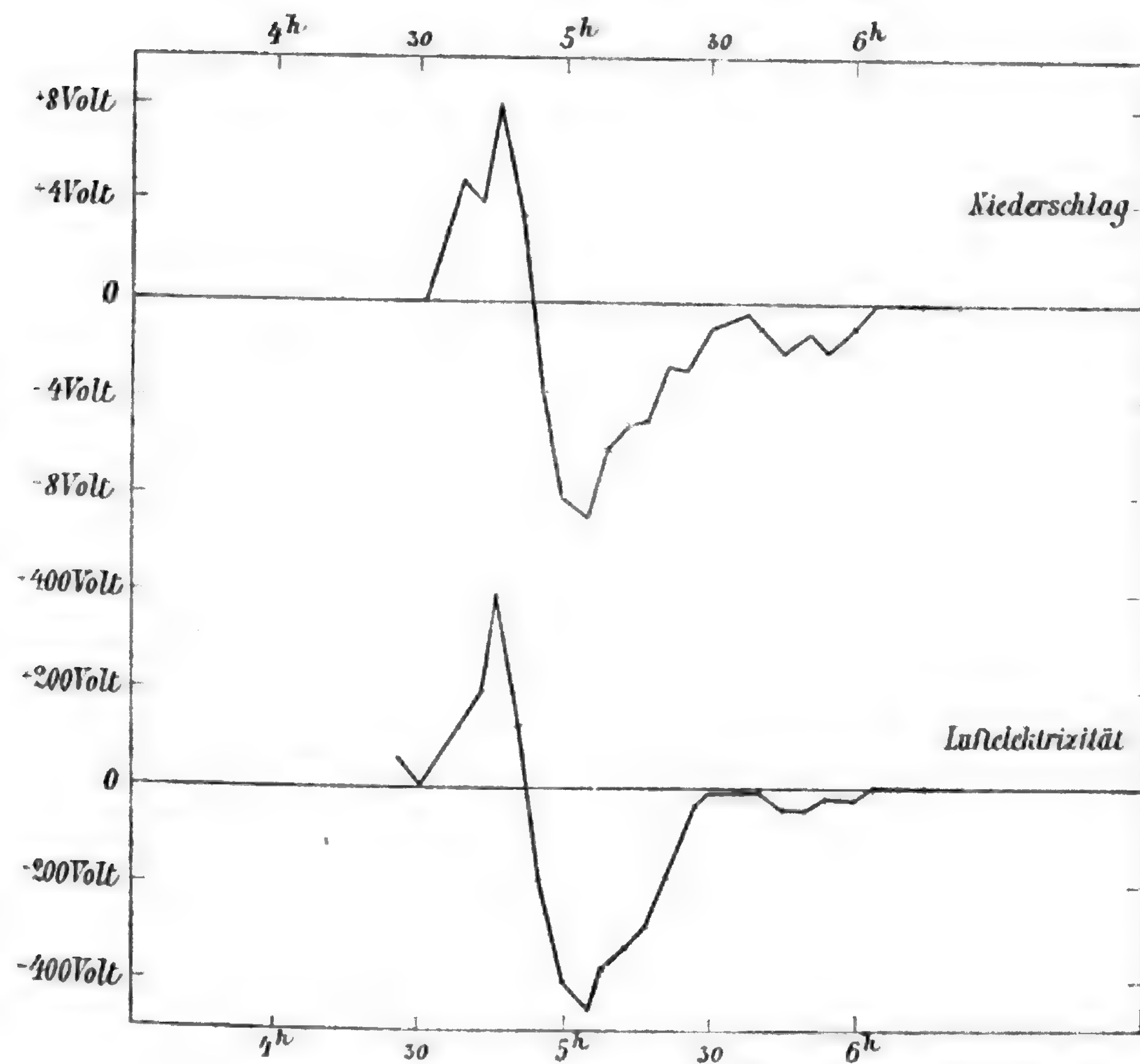


Fig. 1.

Nr.	Stunde	Luft-elek-trizität	Blatt Nr.	Blatt exp.	Bürste Ladung	Bürste in	Luft-elek-trizität	Tropfen Zahl	Tropfen Ge-wicht	Nieder-schlag	Ladung eines Tropfens 10^{-4}	Ladung eines Tropfens Volt	Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	
95	3h 13m p.	+143	26	1s	+8·5	3m	+150	13	0·70	0·23	8·2	9·1	12·0	8·8	Schwach
96	3 19	+ 60	27	2	+3·1	4	+ 9	42	0·12	1·43	0·9	0·9	0·8	2·5	Etwas stärker
97	3 24 30	+ 9			0·0	4	+ 9				0·0	0·0	0·0	0·0	
98	3 31 10	+ 9	28	5	—1·7	4	00	28	0·05	0·34	0·6	0·8	1·2	1·4	Noch schwächer
99	3 36 40	00	29	2	—1·2	6	00	23	0·14	0·78	0·3	0·3	0·3	0·6	Stärker
100	3 42 35	00			+2·6	6	00				0·7	0·7	0·5	1·4	
101	3 50 30	00	30	1	+1·5	7	00	11	0·29	0·79	0·7	0·5	0·2	0·6	Hört auf
102	4 23 30	+121	31	2	0·0	3	+ 9	34	0·15	1·31	0·0	0·0	0·0	0·0	Schwach
103	4 28 30	+ 9			0·0	5	+ 9				0·0	0·0	0·0	0·0	
104	4 36 30	+104	32	1	+4·7	3	+157	29	0·07	0·53	2·0	2·3	2·7	4·9	Schwächer
105	4 41 30	+198			+4·2	3	?				1·8	2·1	2·4	4·4	
106	4 45	+420			+7·8	3	+382				2·1	2·4	2·8	8·1	
107	4 49 30	+242	33	2	+3·1	3	00	35	0·11	0·94	1·1	1·1	1·0	3·2	Stärker
108	4 54	—131	34	2	—3·5	3	—264	42	0·10	1·02	1·0	1·1	1·1	3·6	
109	4 58 30	—332	35	2	—8·1	3	—460	14	0·15	0·52	7·4	6·6	5·0	8·4	

110	5 03	—460			—8·8	3	—430				8·0	7·3	5·3	9·1	
111	5 07	—396	36	1	—5·9	3	—332	25	0·17	1·02	2·9	2·6	1·7	6·1	
112	5 11 30	—332			—5·1	3	—314				2·8	2·2	1·5	5·3	
113	5 15 30	—300	37	2	—4·9	3	—264	28	0·08	0·57	2·2	2·5	2·7	5·1	Schwächer
114	5 20	—242	38	2	—2·7	3	—130	6	0·40	0·60	5·6	3·7	1·4	2·8	
115	5 24 30	— 42			—2·7	3	— 42				5·6	3·7	1·4	2·8	
116	5 29	— 18	39	2	—1·1	3	— 18	15	0·16	1·63	0·9	0·8	0·6	1·1	
117	5 34	— 18			—0·4	3	— 18				0·3	0·3	0·2	0·4	
118	5 38	— 18	40	2	—1·1	3	— 18	23	0·16	0·88	0·6	0·6	0·4	1·1	Etwas stärker
119	5 43 30	— 42			—1·9	3	— 42				1·1	0·9	0·7	2·0	
120	5 48	— 42	41	2	—1·4	3	— 42	28	0·25	1·69	0·6	0·5	0·3	1·4	Noch stärker
121	5 52 30	— 18			—1·9	3	— 18				0·9	0·7	0·4	2·0	
122	5 57 30	— 18	42	2	—1·1	3	— 18	10	0·23	0·55	1·5	1·2	0·6	1·1	Schwächer
123	6 02 30	00			0·0	3	00				0·0	0·0	0·0	0·0	
124	6 07	00	43	2	0·0	3	00	11	0·25	0·70	0·0	0·0	0·0	0·0	
125	6 13	00			0·0	6	00				0·0	0·0	0·0	0·0	
126	6 20 30	00	44	2	0·0	5	00	48	0·06	0·67	0·0	0·0	0·0	0·0	Ende

Dies ist ein Fall, wo der Gang beider Elektrizitäten einmal bei Regen parallel ist. Besonders beim zweiten Teile des Regens ist die Übereinstimmung auffallend. Sowohl das Maximum der Positivität und der Durchgang durch Null als auch das Maximum der Negativität fällt beim Gange beider Elektrizitäten sehr gut zusammen. Beim Durchgange durch Null (Nr. 107) trat eine Verstärkung des Regens ein.

11. Stärkerer Regen.

2. März 1906.

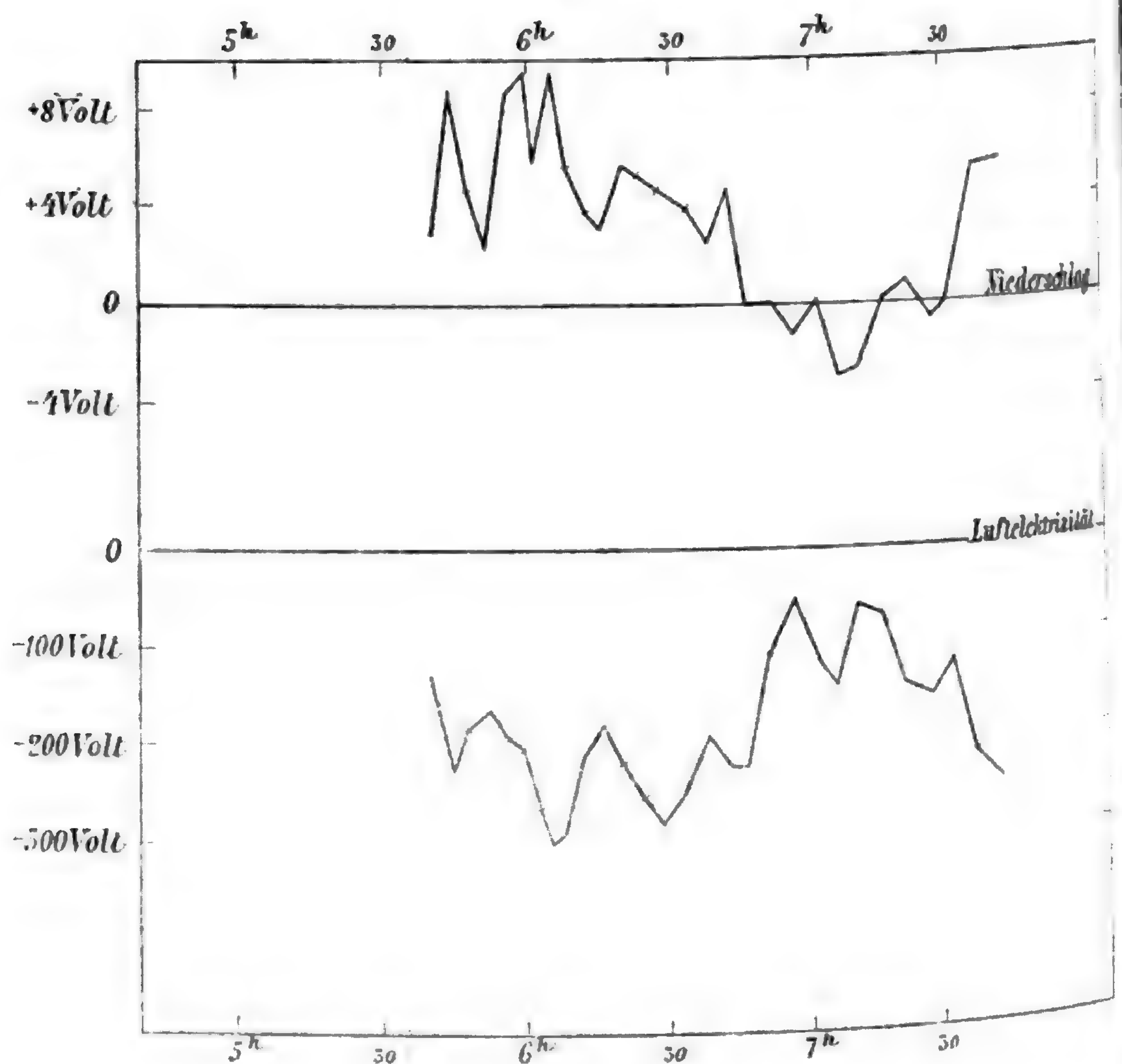


Fig. 2.

I. Dauer der Beobachtung $1^{1}/_{2}$ Stunden. Westwind.

Nr.	Stunde	Luftelektrizität	Blatt		Bürste		Luftelektrizität	Tropfen		Niederschlag	Ladung eines Tropfens		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
127	3^h 37^m 30 p.	—175	45	2^s	0·0	3	—175	21	0·17	0·69	0·0	0·0	0·0	0·0	
128	3 43	—150	46	2	—1·9	$3^1/_2$	—166	20	0·14	0·72	1·1	1·0	0·7	1·7	
129	3 47 30	—166			—1·9	3	—121				1·7	1·1	0·8	2·0	
130	3 51 30	—104	47	2	—3·5	3	— 87	26	0·17	1·10	1·7	1·5	1·0	3·6	Stärker
131	3 55 30	— 65			—1·9	3	— 21				0·9	0·8	0·5	2·0	
132	3 59 30	— 09	48	2	0·0	3	— 09	17	0·34	1·39	0·0	0·0	0·0	0·0	
133	4 04 —	00			—1·2	3	00				1·0	0·7	0·3	1·2	
134	4 08	00			0·0	3	00				0·0	0·0	0·0	0·0	
135	4 12 30	00	49	2	0·0	3	00	15	0·14	0·51	0·0	0·0	0·0	0·0	Schwächer
136	4 16 30	00			0·0	3	00				0·0	0·0	0·0	0·0	
137	4 21	00	50	2	—2·7	3	+ 65	13	0·25	0·78	2·7	2·1	1·1	2·8	Stärker
138	4 25 30	00			—1·9	3	00				1·9	1·5	0·8	2·0	
139	4 29 30	00	51	2	—1·9	3	— 21	16	0·42	1·69	1·5	1·0	0·4	2·0	Noch stärker
140	4 33 30	— 21	52	1	—1·0	3	— 21	29	0·34	2·47	0·4	0·3	0·1	1·0	
141	4 37	— 09			—1·2	3	— 09				0·5	0·3	0·1	1·2	Windstöße
142	4 41 30	00	53	1	—1·2	3	00	10	0·20	0·50	1·5	1·2	0·8	1·2	Schwächer
143	4 45 30	00			—1·2	4	00				1·1	0·9	0·6	0·9	
144	4 51	00			—1·2	4	00				1·1	0·9	0·6	0·9	Hört auf

II. Dauer der Beobachtung 2 Stunden.

Nr.	Stunde	Luft-elek-trizität	Blatt Nr.	Blatt exp.	Bürste Ladung	Bürste in	Luft-elek-trizität	Tropfen Zahl	Tropfen Ge-wicht	Nieder-schlag	Ladung eines Tropfens 10^{-4}	Ladung eines Tropfens Volt	Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	
145	$5^h 37^m 30^s$ p.	—104	54	2^s	+3·9	4^m	—175	19	0·29	1·38	2·0	1·4	0·7	3·1	Mäßig stark. Der Wind hat nachgelassen
146	5 43	—225	55	2	+5·5	2	—215	45	0·38	4·15	2·3	1·6	0·6	8·6	Starker Guß
147	5 46	—191			+4·7	3	—178				2·0	1·4	0·4	4·9	
148	5 50	—178	57	2	+2·3	3	—150	31	0·38	2·90	0·9	0·6	0·3	2·4	Schwächer
149	5 54 30	—172			+5·5	2	—205				3·3	2·3	0·9	8·6	
150	5 57 30	?			+6·2	2	?				3·9	2·6	1·0	9·7	
151	6 00 30	?	58	2	+3·9	2	?	32	0·33	2·56	2·4	1·7	0·7	6·2	
152	6 03	?			+6·2	2	?				3·7	2·6	1·1	9·7	
153	6 06	—314			+5·5	3	—264				2·2	1·5	0·7	5·7	
154	6 10	—234	59	2	+3·9	3	—188	50	0·15	1·88	1·0	0·9	0·7	4·1	
155	6 14	—156			+3·1	3	—208				0·8	0·7	0·5	3·2	
156	6 18	—234	60	2	+5·5	3	—208	72	0·24	4·32	1·0	0·8	0·4	5·7	Stärker
157	6 22	—242			+5·0	3	—264				0·9	0·7	0·4	5·2	
158	6 26	—306			+4·7	3	—256				0·8	0·6	0·3	4·9	
159	6 30 30	—254	61	1	+3·9	4	—242	30	0·29	2·80	1·0	0·7	0·3	3·1	Schwächer
160	6 35 30	—188			+2·6	3	—188				0·8	0·6	0·3	2·7	

161	6 40	—194			+4·7	3	—242				1·5	1·1	0·6	4·9	
162	6 41	—250	62	2	0·0	3	—188	31	0·32	2·47	0·0	0·0	0·0	0·0	Der Wind nimmt zu
163	6 48 30	—156			0·0	4	— 68				0·0	0·0	0·0	0·0	
164	6 53 30	— 18			—1·2	4	?				0·6	0·5	0·2	0·9	
165	6 58 30	— 87			0·0	4	—150				0·0	0·0	0·0	0·0	
166	7 04 30	—157	63	1	—3·0	3	—117	118	0·15	4·53	0·3	0·3	0·2	3·1	Regen stärker
167	7 07 30	— 94			—2·7	4	— 29				0·2	0·2	0·1	2·2	
168	7 13	— 09			0·0	4	—132				0·0	0·0	0·0	0·0	
169	7 18	—125			+1·4	5	—150				0·1	0·1	0·1	0·9	
170	7 24 30	—154			—1·2	4	—150				0·1	0·1	0·1	0·9	
171	7 29 30	— 94			0·0	4	—143				0·0	0·0	0·0	0·0	
172	7 35 •	—183	64	1	+7·3	4	—225	91	0·21	4·70	0·7	0·6	0·4	5·6	Starker Regen
173	7 42	—225			+7·8	4	∞				0·8	0·7	0·4	6·1	Sehr starker Wind

Beim ersten Teile des Regens stimmte der Gang der Luftelektrizität mit dem der Niederschlagselektrizität überein. Der zweite Teil ist ein schönes Beispiel für den entgegengesetzten Fall. Jede Schwankung im Gange der Niederschlagselektrizität findet sich als Spiegelbild im Gange der Luftelektrizität. Nur ein einziges Mal hat die Elektrizität des Niederschlages dasselbe Zeichen wie die Luft. Eine Übereinstimmung zwischen der Intensität des Regens und der elektrischen Ladung ist nicht zu sehen.

Zum Schlusse verstärkte sich der Wind so sehr, daß die Beobachtung vor Ende des Regens abgebrochen werden mußte.

12. Regenböe.

12. März 1906.

Dauer der Beobachtung $1^1/_2$ Stunden.

Nr.	Stunde	Luftelektrizität	Blatt		Bürste		Luftelektrizität	Tropfen		Niederschlag	Ladung eines Tropfens		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
174	$5^h 04^m$ p.	± ∞			+26·1	$^1/_2{}^m$	± ∞				12·1	10·4	6·7	156·6	Starker Westwind
175	5 06	± ∞	66	1^s	— 1·9	$^1/_2$	± ∞	161	0·18	7·10	0·9	0·8	0·5	11·4	
176	5 08	± ∞			—15·1	$^1/_2$	± ∞				7·1	6·1	4·0	90·6	
177	5 29 30	— ∞	67	1	+22·8	2	— ∞	34	0·64	5·47	12·6	7·0	2·0	34·2	
178	5 33	—1080			+15·4	2	— ∞				8·6	4·8	1·3	23·1	
179	5 36 30	— 840	68	1	— ∞	$2^1/_2$	— ∞	156	0·13	5·07	?	?	?	?	
180	5 40 30	+1030			—25·1	2	+1030				3·0	2·9	2·3	37·7	
181	5 44 30	+ 920	69	1	0·0	2	+1030	119	0·32	9·49	0·0	0·0	0·0	0·0	
182	5 47 30	+ ∞			+27·2	2	+1030				3·2	2·3	1·0	30·8	

183	5 53	+			+ ∞	2	—				?	?	?	?	
184	5 56 30	—	70	1	+ ∞	$2^1/_2$	—	286	0·23	16·18	?	?	?	?	
185	6 00 30	—			0·0	$1^1/_2$	—				0·0	0·0	0·0	0·0	
186	6 03	—			—1·9	2	—				0·1	0·1	0·1	2·9	
187	6 06 30	—	71	1	—6·6	2	—	100	0·15	3·78	1·5	1·3	1·0	9·9	Regen wird allmählich schwächer
188	6 09 30	— 580			—8·1	3	— 580				1·0	0·9	0·7	8·1	
189	6 14	— 580	72	1	—5·1	3	— 580	72	0·11	2·01	0·9	0·9	0·8	5·1	
190	6 18 30	— 200			—3·5	3	— 200				0·6	0·6	0·6	3·5	
191	6 29	— 720	73	1	—7·4	$3^1/_2$	— 580	91	0·13	2·97	0·8	0·8	0·6	6·1	
192	6 34	— 200			—4·3	3	— 310				0·6	0·6	0·5	4·3	Ende

Platzregen. Die Luftelektrizität war trotz des tiefsten Standes des Kollektors so groß, daß die Blättchen des Elektroskopes fortwährend anschlugen, im Anfang so rasch, daß nicht einmal das Zeichen bestimmt werden konnte. Eine Analogie im Gange der beiden Elektrizitäten läßt sich schwer konstatieren. Die durch den Regen zur Erde beförderte Elektrizitätsmenge entsprach im Maximum einer Stromstärke von $1{\cdot}6 \times 10^{-13} \frac{\text{Amp}}{cm^2}$. Die Ladung der einzelnen Tropfen ist nicht besonders groß, auch die Ladung der Gewichtseinheit nicht, die große Stromstärke wird nur durch die Menge des Niederschlages veranlaßt.

13. Regen.

16. März 1906.

Windstill. Dauer der Beobachtung $1^1/_4$ Stunden.

Nr.	Stunde	Luftelektrizität	Blatt		Bürste		Luftelektrizität	Tropfen		Niederschlag	Ladung eines Tropfens		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
193	$3^h\ 17^m$ p.	—104	75	2^s	+3·1	3^m	—121	12	0·09	0·25	3·2	3·6	3·8	3·1	Schwach
194	3 21 30	—132	76	1	+7·0	4	—215	85	0·35	7·54	0·7	0·5	0·2	5·0	Viel stärker
195	3 27	?			+8·5	3	—232				1·3	0·9	0·4	8·5	
196	3 31 30	—185	77	1	+3·9	3	—245	31	0·17	1·29	1·2	1·4	0·7	3·9	Schwächer
197	3 35 30	—169	78	1	+3·9	4	—190	89	0·20	4·53	0·4	0·4	0·2	3·0	Etwas stärker
198	3 41	—190	79	1	+3·9	4	—146	34	0·13	1·04	1·1	1·1	0·9	3·0	Schwächer

199	3 46	—169	80	1	+3·9	4	- 122	53	0·19	2·53	0·7	0·6	0·4	3·0	Stärker
200	3 51	— 91	81	1	+3·1	4	— 59	68	0·13	2·24	0·4	0·4	0·3	2·4	
201	3 56	00			+1·2	5	00				0·1	0·1	0·1	0·7	
202	4 02 30	00	82	1	+2·3	4	00	27	0·29	1·96	0·8	0·6	0·3	1·7	
203	4 07 30	— 21			+2·3	4	— 09				0·8	0·6	0·3	1·7	
204	4 22 30	—143	83	1	+5·5	3½	— 87	75	0·12	2·31	0·8	0·8	0·7	4·8	
205	4 27	—150			+7·0	3	—143				1·2	1·1	1·0	7·0	
206	4 31	—104	84	1	+3·1	5	00	24	0·14	0·81	1·0	0·9	0·7	1·9	Ende

Bei diesem schwachen Regen tritt der Gegensatz im Zeichen der beiden Elektrizitäten sehr deutlich hervor. Die Tropfen sind immer positiv geladen, das Potentialgefälle ist negativ. Der Gang der Luftelektrizität ist das Spiegelbild von dem der Niederschlagselektrizität. Die großen Ladungen der Bürste bei Nr. 193 und 194 sind hier ebenfalls nicht durch hohe Ladung der Tropfen veranlaßt, sondern durch ihre große Menge.

14. Regenböe.

16. März 1906.

Starker Regen, der später noch an Intensität zunimmt.

Nr.	Stunde	Luftelektrizität	Blatt		Bürste		Luftelektrizität	Tropfen		Niederschlag	Ladung eines Tropfens		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt			
207	$6^h 01^m$ p.	— ∞	85	1^s	+ ∞	5^m	— ∞	28	0·54	3·77	?	?	?	?	
208	6 08	— ∞			+ ∞	2	— ∞				?	?	?	?	
209	6 11	— ∞	86	2	+26·1	1	— 686	55	0·13	1·86	17·7	16·7	13·6	81·5	**Schwächer**
210	6 13	—312			+11·3	2	— 418				7·7	7·2	5·9	35·3	
211	6 15	—418			+ 9·9	2	— 418				3·4	3·2	2·6	16·0	
212	6 18	—720	87	1	+38·0	2	—1032	224	0·19	10·84	3·0	2·5	1·5	59·3	**Viel stärker**
213	6 22	— ∞			+ ∞	2	— ∞				?	?	?	?	

Der Zeichengegensatz tritt hier deutlich hervor, ebenso der entgegengesetzte Gang der beiden Kurven. Die großen Elektrizitätsmengen werden hier durch hohe Ladungen der Tropfen veranlaßt. Der Regen war lange nicht so stark wie Nr. 12. Die Beobachtung mußte abgebrochen werden, weil das Hankel'sche Elektroskop nicht funktionierte.

15. Schneefall.

22. März 1906.

Dauer der Beobachtung $2^3/_4$ Stunden.

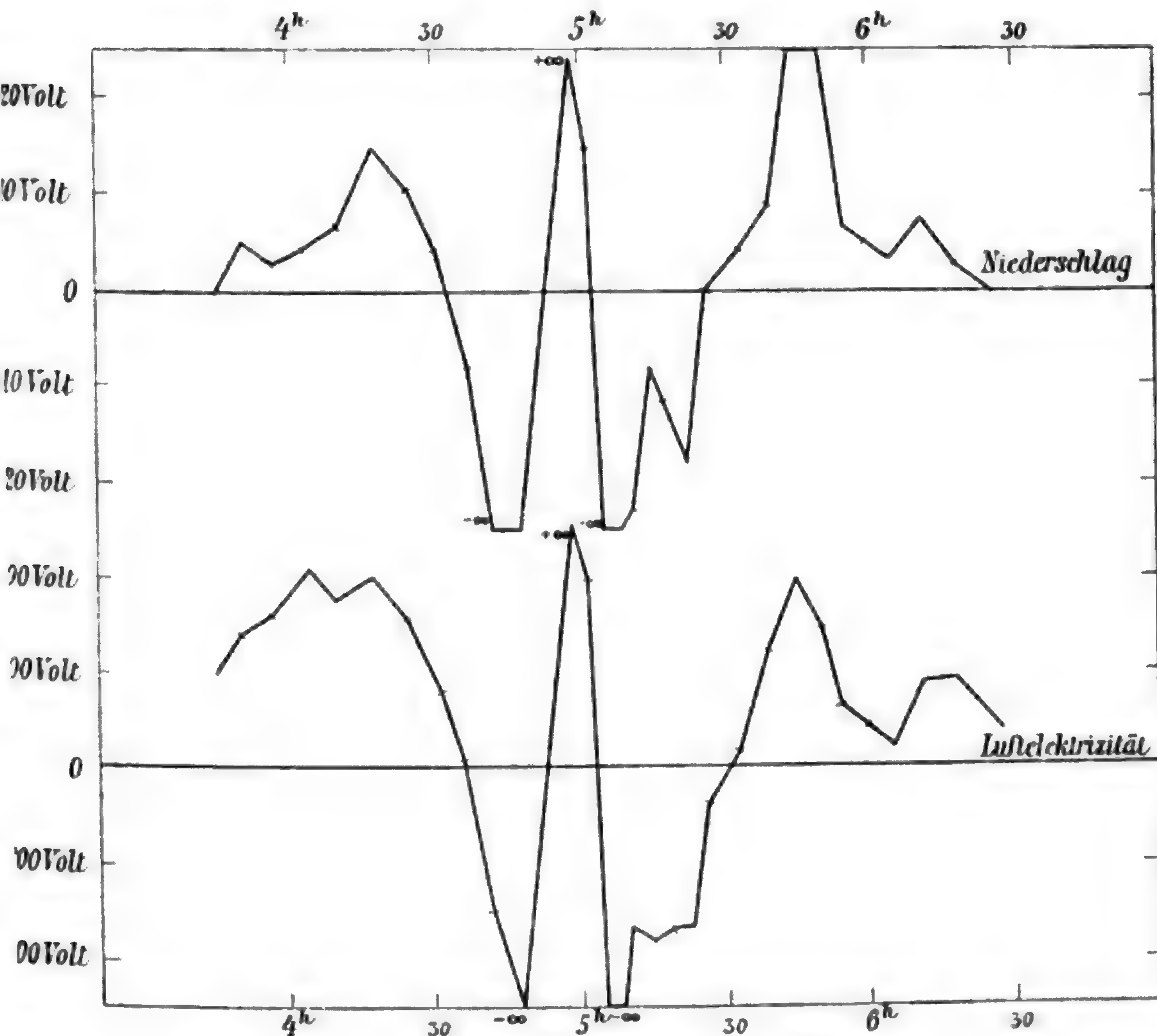


Fig. 3.

Nr.	Stunde	Luft-elek-trizität	Blatt		Bürste		Luft-elek-trizität	Tropfen		Nieder-schlag	Ladung einer Flocke		Ladung 1 *mg*	Strom-stärke 10^{-15} Amp	
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Ge-wicht		10^{-4}	Volt			
214	3h 44m p.	+146	89	2s	0·0	3m	+232	8	0·15	0·30	0·0	0·0	0·0	0·0	Großflockiger Schnee
215	3 48 30	+245	90	2	+ 6·1	4	+315	14	0·37	1·29	4·1	2·8	1·1	4·8	Windstill
216	3 55	?	91	2	+ 4·7	5	+315	25	0·34	2·14	1·4	1·0	0·4	2·9	Stärker
217	4 02	?			+ 6·1	5	+420				1·9	1·3	0·5	3·9	
218	4 09	+460			+10·2	5	+240				3·0	2·1	0·9	6·3	
219	4 16	+380			+23·3	5	+ ∞				7·0	4·9	2·0	14·6	
220	4 23	+314	92	2	+13·4	4	+ ∞	48	0·34	4·01	2·6	1·8	0·8	10·4	
221	4 29	+130			+ 5·4	4	+208				1·0	0·7	0·3	4·2	
222	4 35	+286			— 9·6	4	—242				1·8	1·3	0·6	7·5	
223	4 40 30	— ∞			— ∞	5	—286				?	?	?	?	
224	4 47	— ∞	93	2	— ?	3	— ∞	116	0·11	3·14	?	?	?	?	
225	4 56 30	+ ∞	94	1	+ ∞	3	+ ∞	436	0·26	28·13	?	?	?	?	Sehr dichter Fall
226	5 01	—380			+ 9·6	2	— ∞				0·4	0·3	0·2	15·0	
227	5 04	— ∞			— ∞	2	— ∞				?	?	?	?	

228	5	07	30	— ∞			—52·0	2	— ∞				2·3	1·7	0·9	81·3	
229	5	10	30	—380			—14·7	2	—285				0·6	0·5	0·2	22·8	
230	5	14		—314			— 5·0	2	—380				0·2	0·2	0·1	7·8	Graupeln
231	5	17		—350			—11·1	3	—315				0·3	0·2	0·1	11·5	
232	5	21		—286	95	1	—16·8	3	—350	200	0·31	15·60	1·1	0·8	0·3	17·5	Schwächer
233	5	25	30	—130			0·0	3	00				0·0	0·0	0·0	0·0	Graupeln
234	5	30		00	96	1	+ 7·5	6	+ 84	172	0·19	8·16	0·3	0·2	0·2	4·0	Schnee
235	5	37		+174			+12·1	4	+314				0·7	0·6	0·4	9·5	
236	5	43		+330	97	1	+ ∞	4	+450	264	0·10	6·39	?	?	?	?	Schwächer
237	5	48	30	+336			+28·0	3	+208				1·3	1·4	1·4	29·1	
238	5	53		+174			+ 6·1	3	+ 84				0·3	0·3	0·3	6·3	
239	5	57		+ 84			+ 6·1	4	+ 84				0·2	0·2	0·2	4·8	
240	6	02	30	+ 42			+ 5·4	5	+ 68				0·2	0·2	0·2	3·4	
241	6	09		+130	98	1	+11·5	5	+242	176	0·16	7·05	0·5	0·5	0·3	7·2	Stärker
242	6	15	20	+242			+ 3·9	5	+130				0·2	0·2	0·1	2·4	Viel schwächer
243	6	22		+ 42			+ 0·0	8	+130				0·0	0·0	0·0	0·0	Hört auf

Sehr deutliche Parallelität im Gange der beiden Elektrizitäten. Die Flocken sind nicht hoch geladen, bringen aber durch ihre Menge viel Elektrizität mit.

16. Schwacher Regen.

1. April 1906.

Vollkommen windstill. Dauer der Beobachtung 30 Minuten.

Nr.	Stunde	Luftelektrizität	Blatt		Bürste		Luftelektrizität	Tropfen		Niederschlag	Ladung eines Tropfens		Ladung 1 *mg*	Stromstärke 10^{-15} Amp
			Nr.	exp.	Ladung	in		Zahl	Gewicht		10^{-4}	Volt		
244	$10^h 25^m$ a.	+190	99	1^s	+4·0	4^m	+175	84	0·16	3·36	0·4	0·4	0·3	3·0
245	10 30 20	+143			+2·0	3	+ 42				0·3	0·3	0·2	2·0
246	10 34 30	+ 42	100	2	0·0	5	+ 87	16	0·28	1·10	0·0	0·0	0·0	0·0
247	10 41	+ 21			0·0	5	+ 13				0·0	0·0	0·0	0·0
248	10 47 30	+ 10	101	2	0·0	6	+ 10				0·0	0·0	0·0	0·0
249	10 55	+ 10			0·0	6	+ 10	32	0·10	0·80	0·0	0·0	0·0	0·0

Das Zeichen der Luft- und Niederschlagselektrizität ist dasselbe, die elektrische Tätigkeit sehr gering.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVII.

Über Radiuminduktion in der atmosphärischen Luft und eine Methode zur absoluten Messung derselben

von

K. W. Fritz Kohlrausch.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Oktober 1906.)

Im Jahre 1902 erbrachten Elster und Geitel[1] durch ihre grundlegende Arbeit den Nachweis für das Vorhandensein radioaktiver Induktionen in der atmosphärischen Luft. Elster und Geitel[2] selbst sowie Rutherford und Allan,[3] Saacke,[4] Gockel[5] und insbesondere G. C. Simpson[6] in seiner einen Zeitraum von zwölf Monaten umfassenden Arbeit, setzten diese Untersuchungen fort und gaben ein ziemlich klares Bild der Abhängigkeit der Induktion von den meteorologischen Faktoren. Alle diese Arbeiten liefern aber keine absoluten Werte und außerdem wies H. Gerdien[7] nach, daß die Elster-Geitel'sche Methode zur Bestimmung des Induktionsgehaltes der Luft nicht ganz einwandfrei sei, indem dabei der Einfluß der spezi-

---

[1] Elster und Geitel, Phys. Zeitschr., *3*, p. 305 (1902); ibid. *4*, p. 138 (1902).

[2] Elster und Geitel, Phys. Zeitschr., *4*, p. 522 (1903).

[3] Rutherford und Allan, Phil. Mag. (6), *4*, p. 704 (1902).

[4] Saacke, Phys. Zeitschr., *4*, p. 626 (1903).

[5] Gockel, Phys. Zeitschr., *5*, p. 591 (1904).

[6] G. C. Simpson, Proc. Roy. Soc., *73*, Nr. 491 (1904).

[7] H. Gerdien, Phys. Zeitschr., *6*, p. 465 (1905).

fischen Geschwindigkeiten der Induktionsträger und die Strömungsverhältnisse der Luft vernachlässigt werden. Aus dieser Arbeit von Gerdien schöpfte Dr. H. Mache[1] die Idee zu einer Untersuchungsmethode, die sowohl Resultate in absoluten Maßzahlen zuläßt als auch die oben erwähnte Ungenauigkeit vermeidet; außerdem bietet sie den Vorteil, daß sie eine gleichzeitige Messung der Ionenzahlen gestattet.

Der benützte Apparat war im wesentlichen ein Ebert'scher Aspirationsapparat[2] mit bedeutend erhöhter Fördermenge. Eine 100 *cm* lange und 16 *cm* im Durchmesser breite, horizontal gestellte Röhre, die an beiden Enden durch Deckel verschließbar war, saß auf dem Hals eines Exner-Elster-Geitel'schen Aluminiumblattelektrometers auf. Auf den Blättchenträger desselben konnte ein T-Stück so aufgesteckt werden, daß der 30 *cm* lange, wagrechte Teil zentral und parallel zur Röhre stand.

Mit Hilfe eines elektrisch betriebenen Ventilators wurde Luft durch die Röhre gesaugt und die in ihr enthaltenen Induktionsträger auf den T-Stab niedergeschlagen, der mittels einer Zambonisäule zu einem Potential von zirka —200 Volt geladen worden war. Da drei solche ganz gleich geformte Stäbe zur Verfügung standen und täglich drei Versuche: früh, mittags und abends, durchgeführt wurden, so wurde jeder Stab erst nach 24 Stunden wieder benützt. Die Windgeschwindigkeit wurde an einem geeichten Anemometer während jedesmaliger Aspiration 6- bis 8mal kontrolliert. Man kann sich durch Rechnung leicht überzeugen, daß nach halbstündiger Aspiration 50% des erhältlichen Induktionsgehaltes abgefangen sind; nach dieser Zeit wurde die Röhre geschlossen und in dem so entstandenen Kondensator der Spannungsabfall gemessen. Sowohl der Genauigkeit als der Zeitersparnis halber, da das hauptsächlich in Betracht kommende Radium-*C* in 28 Minuten auf die Hälfte abklingt, wurde mit Mikroskop und Okularmikrometer gearbeitet, so daß auf $^1/_{10}$ *mm* genau abgelesen werden konnte.

---

[1] Mache und Riemer, Phys. Zeitschr., *7*, p. 617 (1906).

[2] Ebert, Phys. Zeitschr., *2* p. 662 (1901).

Die Apparatkonstanten waren:

Kapazität: 19·8 *cm*;

Windgeschwindigkeit im Mittel: 100 *m* in 48 Sekunden, was einer Fördermenge $\Phi = 0 \cdot 05\, m^3$ pro Sekunde entspricht.

Spannungsverlust vor der Aspiration: 10 Volt in 48 Minuten.

Wird während der Zeit t_1 aspiriert, so ist zu Ende der Zeit t_1, d. i. also zu Anfang der Beobachtungszeit t_2, auf dem Stabe die Induktionsmenge:

$$M_1 = \varepsilon\Phi \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_1-x)}dx = \frac{\varepsilon\Phi}{\lambda}(1-e^{-\lambda t_1})$$

abgelagert; dabei ist ε der den Induktionsträgern in einem Kubikmeter Luft zuzuschreibende Sättigungsstrom, Φ die Fördermenge in Kubikmeter pro Sekunde und λ die Abklingungskonstante der Induktion. Der für diese Konstante eingesetzte Wert müßte sowohl die Abklingung von Radium-*B* als auch die von Radium-*C* berücksichtigen. Da für die vorliegende Arbeit Näherungswerte genügen, so wurde bei der Berechnung λ gleich $4 \cdot 1 \times 10^{-4}$, also gleich der Abklingungskonstante von Radium-*C* gesetzt und Radium-*B* vernachlässigt. Die Menge M_1 klingt während der Beobachtung nach dem Gesetz $e^{-\lambda t}$ ab, so daß die während der ganzen Zeit t_2 wirksame Induktionsmenge gegeben ist durch:

$$M_2 = \frac{\varepsilon\Phi}{\lambda}(1-e^{-\lambda t_1})\int_0^{t_2} e^{-\lambda t}dt =$$

$$= \frac{\varepsilon\Phi}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda t_1})(1-e^{-\lambda t_2}) = \frac{CV}{300},$$

wenn *C* die Kapazität und *V* der der Induktionsmenge M_2 zuzuschreibende Spannungsverlust in Volt/Sekunden ist. Daraus läßt sich ε in elektrostatischen Einheiten berechnen.

Die Messungen wurden in Gleinstätten, einem eben gelegenen Dorf in der Nähe von Graz (Steiermark) während des Monates Juli vorgenommen. Der Apparat stand knapp neben einem nach SW gerichteten Fenster eines ebenerdigen Zimmers.

Der aus allen Messungen berechnete Mittelwert für ε war

$$\varepsilon = 0 \cdot 5 . 10^{-5} \text{ st. E.},$$

also 20-, beziehungsweise 200mal kleiner als die von Eve[1] und Hofmann[2] durch indirekte Beobachtung erhaltenen Werte. Die in folgendem gegebenen Resultate über den Zusammenhang von ε mit den meteorologischen Faktoren können wegen der geringen Anzahl von Beobachtungen — es sind deren nur 37 — keinen Anspruch auf große Verläßlichkeit machen. In Tabelle 1 ist ε mit dem Barometerstande b, der Temperatur t, dem relativen Feuchtigkeitsgehalte f und mit n_+, der in einem Kubikzentimeter enthaltenen Anzahl positiver Ionen, in der Weise zusammengestellt, daß ε der Größe nach absteigend geordnet und aus je 10 Werten das Mittel genommen wurde; diesem wurde das Mittel über die entsprechenden 10 Werte der meteorologischen Daten zugeordnet.

Tabelle 1.

ε	b	t	f	n_+
$10 \cdot 40 . 10^{-6}$	736·6	22·2	0·725	631
$5 \cdot 79 . 10^{-6}$	736·5	21·1	0·72	610
$2 \cdot 70 . 10^{-6}$	737·7	22·9	0·635	541
$1 \cdot 20 . 10^{-6}$	735·7	21·8	0·61	600

Aus dieser Tabelle wäre zu entnehmen, daß großer Feuchtigkeit hohe Induktionswerte entsprechen und daß die Ionenzahlen im allgemeinen zugleich mit dem Induktionsgehalte zunehmen. Ersteres Resultat wird auch von Simpson ausgesprochen und letzteres würde der Auffassung entsprechen, daß die Emanation und deren Zerfallsprodukte Hauptursachen des ständigen Ionengehaltes der Luft sind.

[1] Eve, Phil. Mag. X, p. 98 (1905).

[2] Hofmann, Phys. Zeitschr., 6, p. 340 (1905).

In Tabelle 2 sind die Messungen nach der Tageszeit geordnet; die Mittelwerte geben eine die bisherigen Erfahrungen bestätigende, tägliche Periode mit einem Maximum in den Nachtstunden und einem Minimum in den Mittagstunden.

Tabelle 2.

	Vormittag	Mittag	Abend
Anzahl der Messungen.....	14	16	7
Mittel daraus.....	$5 \cdot 13 . 10^{-6}$	$4 \cdot 76 . 10^{-6}$	$6 \cdot 49 . 10^{-6}$

In dieser sowie in den folgenden Tabellen ist in der ersten wagrechten Reihe die Anzahl der Beobachtungen angegeben, aus denen das Mittel gewonnen wurde. Die geringe Zahl der Abendmessungen erklärt sich daraus, daß die Nachtschmetterlinge nicht abzuwehren waren, die des öfteren, da bei Licht und offenem Fenster gearbeitet werden mußte, bis in das Elektrometergehäuse hineingerieten und so jedes Messen unmöglich machten.

Eine Abhängigkeit des Induktionsgehaltes von der Windrichtung konnte nicht konstatiert werden. Dagegen zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang mit der Bewölkung, indem bei klarem Himmel (Tabelle 3) größere Werte für ε erhalten wurden als bei teilweise oder ganz bedecktem Himmel und bei oder unmittelbar nach Regen ε bis auf den halben Wert sank.

Tabelle 3.

	Wolkenlos	Bewölkt	Regen
Anzahl der Messungen.....	19	12	6
Mittel daraus.....	$6 \cdot 1 . 10^{-6}$	$4 \cdot 83 . 10^{-6}$	$3 \cdot 25 . 10^{-6}$

Während ferner eine Beziehung zum Barometerstande, wie aus Tabelle 1 ersichtlich ist, nicht gefunden werden kann, bestätigt sich die Abhängigkeit der Induktion von der Barometerbewegung. Bei fallendem Luftdruck ist ε größer als bei stationärem oder steigendem (Tabelle 4).

Tabelle 4.

	Fallend	Stationär	Steigend
Anzahl der Messungen.....	10	13	14
Mittel daraus.....	$6 \cdot 29 . 10^{-6}$	$5 \cdot 3 . 10^{-6}$	$4 \cdot 41 . 10^{-6}$

Zum Schlusse spreche ich auch an dieser Stelle noch meinen besten Dank Herrn Baron Wucherer in Gleinstätten aus, der mir in liebenswürdigster Weise die Benützung des elektrischen Stromes gestattete.

Elementare Darstellung zweier elektrischer Fundamentalsätze vom Standpunkte der Elektronentheorie

von

E. Lecher,
k. M. k. Akad.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. Oktober 1906.)

Riecke,[1] Drude,[2] J. J. Thomson[3] und H. A. Lorentz[4] lieferten für eine Reihe von elektrischen Erscheinungen in Metallen ein mechanisches Bild, indem sie annahmen, daß zwischen den festsitzenden Metallatomen eine große Anzahl von freien Elektronen hin- und herfliegen.

Man hat so Ausdrücke für das elektrische und thermische Leitvermögen und für die thermoelektrischen Größen (thermoelektrische Kraft, Peltier- und Thomsoneffekt) gefunden, die in ungezwungener Weise eine klare Vorstellung des Ablaufes dieser Erscheinungen ermöglichen. Besonders die Darstellung Drude's eignet sich infolge ihrer Durchsichtigkeit auch sehr gut für elementarere Vorlesungen. Diese einfache Übersichtlichkeit geht auf anderen Gebieten verloren. Ich sehe ab vom Halleffekt und ähnlichen entlegeneren Erscheinungen, denen

---

[1] E. Riecke, Ann. der Phys., *66*, 345, 545 (1899); *2*, 835 (1900). — Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, III, 24 (1906).

[2] Drude, Ann. der Phys., *1*, 566; *3*, 369 (1900).

[3] J. J. Thomson, Rapport du Congrès de phys. de 1900, Paris. *3*, 318.

[4] H. A. Lorentz, k. Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam, XIII, II. Teil, p. 493, 565, 710 (1905).

gegenüber die Elektronentheorie, vielleicht wohl nur infolge mangelnder experimenteller Ausarbeitung, derzeit noch zu versagen scheint.

Dagegen hat schon früher H. A. Lorentz[1] für die elektrodynamischen Vorgänge eine Betrachtung mittels Elektronen eingeführt. Seine allgemeine rechnerische Behandlung läßt aber das mechanische Bild weniger klar hervortreten als dies in den viel später bearbeiteten, eingangs erwähnten Gebieten geschieht.

Darum ist es vielleicht gestattet, eine Versinnbildlichung zweier dieser Haupterscheinungen in elementarer Weise mittels einer einfachen mechanischen Vorstellung zu geben.

Wir stellen uns zunächst auf einen Standpunkt, den Lorentz in einer seiner letzten Arbeiten entwickelt. Dieser Forscher spricht sich infolge wichtiger Gründe[2] für Einführung von nur einer einzigen Art freier Elektronen aus. Das macht die Sache übersichtlicher, doch bleiben die Resultate, wie später gezeigt werden soll, die gleichen, wenn wir mit mehreren Arten von freien Elektronen arbeiten.

Es seien also die positiven Molekel fest im Raume fixiert gedacht, während im Zwischenraume zwischen denselben sich die negativen Elektronen frei bewegen. Die Anzahl dieser Elektronen sei N pro Kubikzentimeter und, da wir stets bei gleichen Temperaturen arbeiten, konstant. Ihre negative Ladung sei e (el. stat.). Die Geschwindigkeit irgend eines Elektrons sei u. Richtung und Größe dieses u kann nach dem Maxwell-schen Wahrscheinlichkeitsgesetze verschiedene Werte haben. Wenn die Komponenten dieser Geschwindigkeit nach den Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems u_x, u_y, u_z sind, so muß die Beziehung gelten:

$$\Sigma\, u_x = 0,\ \Sigma\, u_y = 0,\ \Sigma\, u_z = 0,$$

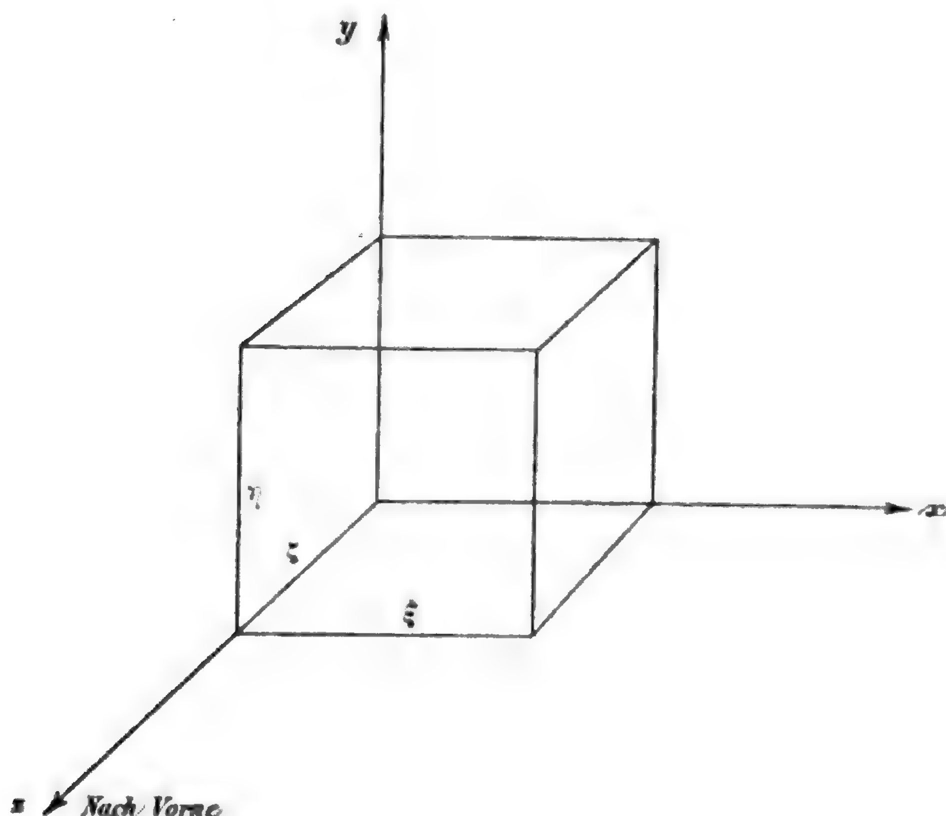
---

[1] H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895, p. 21 und 45. — Enzyklopädie d. math. Wiss. Leipzig 1904, V_2, p. 223 und 255.

[2] H. A. Lorentz, k. Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam, XIII, II. Teil, p. 712 (1905).

weil ja sonst eine dauernde Strömung nach einer dieser Richtungen stattfände, was in einem isolierten und gleichtemperierten Metall unmöglich ist.

Denken wir uns ein Stück aus einem beliebigen Leiter, z. B. eine parallelepipedische Platte, deren Kantenlängen $\xi \eta \zeta$ parallel den rechtwinkeligen Ordinatenachsen xyz seien. In diesem Metallstücke haben wir $N \xi \eta \zeta$ freie Elektronen. Die Kraftlinien eines homogenen magnetischen Feldes von der



Stärke H (el. stat.) gehen in der positiven z-Richtung, die Zeichnungsebene von hinten nach vorne durchdringend.

Infolge der Elektronenbewegung im magnetischen Felde tritt eine Kraft auf, welche die geradlinige Bahn der Elektronen zu Kreisen krümmt, genau in dem Sinne, wie dies ein magnetisches Feld mit einem Kathodenstrahl macht.

Die Bahnrichtung von u_z, bleibt als in der Richtung der Kraftlinien gehend, ungeändert.

Die Kraft auf ein mit $+u_x$ nach rechts fliegendes Teilchen ist

$$k_y = +eHu_x.$$

Diese Kraft wirkt in der positiven y-Richtung nach aufwärts. Ein mit derselben Geschwindigkeit nach links fliegendes Teilchen erfährt dieselbe Kraft nach abwärts. Wenn somit $N\xi\eta\zeta$ Teilchen in unserem Metallstück sind, ist die Komponente der gesamten Kraft nach y

$$K_y = eH\Sigma u_x,$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Summierung von $N\xi\eta\zeta$ verschiedenen Summanden bezieht. Da letztere Summe gleich Null ist, so ist auch

$$K_y = 0.$$

Aus denselben Gründen ist auch die auf die Geschwindigkeiten u_y nach der x-Richtung wirkende Komponente

$$K_x = 0.$$

Dieses selbstverständliche Resultat sagt also aus, daß auf das ruhende Metall als Ganzes (von direkten magnetischen Anziehungs- oder Abstoßungskräften wurde abgesehen) keinerlei Kraft ausgeübt wird. Die Sache wird aber ganz anders, wenn das Metallstück entweder bewegt oder aber von einem Strom durchflossen wird.

Elektromagnetische Induktion.

Es werde unsere Metallplatte in der Richtung der negativen x-Achse (in der Figur nach links), parallel mit sich selbst und mit der Geschwindigkeit v verschoben. Dadurch wird die relative Geschwindigkeit der Elektronen gegen das Magnetfeld geändert.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß diese Änderung sich nur auf die x-Komponente beziehen kann. Nehmen wir nämlich

an, daß auf ein in der z-Richtung fliegendes Teilchen eine Kraft ausgeübt würde (d. h. daß ein den Magnetkraftlinien paralleler Kathodenstrahl durch eine Parallelverschiebung mit sich selbst und senkrecht zu den Kraftlinien geändert würde), so würde ein nach vorwärts fliegendes Elektron sicher entgegengesetzt beeinflußt als ein nach rückwärts fliegendes und, da bei der großen Elektronenzahl sicher jedem $+u_z$ ein dem absoluten Betrage nach gleich großes $-u_z$ entspricht, würde die Gesamtkraft Null sein. Aus ähnlichen Gründen ist auch die Gesamtkraft auf alle mit u_y fliegenden Elektronen gleich Null.

Wir haben also nur die Veränderung von u_x in Rechnung zu ziehen. Durch die mechanische Bewegung des Metallstückes wird die relative Geschwindigkeit des Elektrons gegen das magnetische Feld $u_x - v$, d. h. für ein positives u_x haben wir eine scheinbare Verkleinerung der Geschwindigkeit und für ein negatives u_x eine scheinbare Vergrößerung. Die Kraft in der positiven y-Richtung auf ein Elektron ist also

$$k_y = +eH(u_x - v)$$

und für alle Elektronen ist die Gesamtkraft

$$K_y = eH\Sigma(u_x - v) = eH(\Sigma u_x - \Sigma v)$$

nach aufwärts wirkend.

Nun ist $\Sigma u_x = 0$ und, da Σv sich auf Summierung einer Anzahl $N\xi\eta\zeta$ von gleichen v bezieht, haben wir

$$K_y = -\xi\eta\zeta NeHv.$$

Diese Kraft zieht die im Metallstück $\xi\eta\zeta$ vorhandenen negativen Elektronen, d. i. die gesamte bewegliche Elektrizitätsmenge nach abwärts. Die Kraft auf die Elektrizitätseinheit ist also

$$\frac{K_y}{eN\xi\eta\zeta}$$

und diese Kraft (der Differentialquotient des Potentials nach y) ist hier infolge des linearen Gefälles gleich der Potentialdifferenz pro Einheit oder der in unserem Metallstück faktisch erzeugten Potentialdifferenz φ, dividiert durch die Ausdehnung in der y-Richtung η, also $\frac{\varphi}{\eta}$.

Wir haben somit

$$\frac{\varphi}{\eta} = \frac{K_y}{eN\xi\eta\zeta} = Hv$$

oder

$$\varphi = +\eta Hv.$$

Wir nehmen hier das positive Zeichen, weil, wenn die negativen Elektronen nach abwärts gezogen werden, ein Strom nach aufwärts fließt, die Potentialdifferenz im gewöhnlichen Sinne also gleichfalls in diesem Sinne wirkt.

Diese Gleichung gilt für elektrostatisches Maßsystem, aber auch für elektromagnetisches Maßsystem, weil hier sowohl φ als auch H beide durch die Lichtgeschwindigkeit zu dividieren sind.

Die eben abgeleitete Gleichung ist das bekannte Induktionsgesetz. Ein zu den Magnetkraftlinien senkrecht bewegter, geradliniger Leiter von beliebigem Querschnitt und der Länge η, parallel mit sich selbst verschoben, erhält eine elektromotorische Kraft, welche gleich ist dem obigen Produkt in Größe und Richtung. Das Material des Leiters ist ganz ohne Einfluß, wenn nur, was bei der Definition des Leiters selbstverständlich ist, bewegliche Elektronen vorhanden sind.

Es wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft auf die positiven Metallmolekel; dieselbe kann einen Strom nicht hervorbringen, da unserer Annahme nach diese Molekel festsitzen. Die durch diese letztere Kraft hervorgerufene ponderomotorische Wirkung wird aufgehoben durch den entgegengesetzten Druck der negativen Elektronen, deren Bewegung ja nach ganz kurzen Wegelängen durch den Anprall an die festsitzenden positiven Molekel gehemmt wird.

Will man, weil es für die Erklärung anderweitiger Erscheinungen, z. B. des Halleffektes, notwendig wäre, mehrere Arten von freien Elektronen einführen, so erhielte man mit

$$K_y = H[e' \Sigma (u'_x - v) + e'' \Sigma (u''_x - v) + \ldots]$$

dasselbe Resultat wie früher.

Magnetische Wirkungen auf einen Stromträger.

Nun denken wir uns unsere Metallplatte $\xi\eta\zeta$ in Ruhe, aber im Sinne der positiven x-Richtung gleichmäßig von einem Strom i (el. stat.) durchflossen. Die Intensität dieses Stromes ist dann, wenn wir wieder nur eine einzige Art von Elektronen als beweglich voraussetzen:

$$i = \eta\zeta N(-e)(-v).$$

Hier bedeutet v die unter dem Einflusse der angewandten elektromotorischen Kraft erreichte Durchschnittsgeschwindigkeit eines negativen Elektrons in der Richtung der negativen x-Achse. Der obige Ausdruck gibt somit auch die durch den Querschnitt $\zeta\eta$ in der Sekunde strömende Elektrizitätsmenge.

Die Geschwindigkeit eines in der x-Achse fliegenden Elektrons ist also wieder relativ gegen die Magnetkraftlinien wie früher $(u_x - v)$ und das gibt wieder eine Gesamtkraft in der y-Richtung wie früher

$$K_y = -\xi\eta\zeta NeHv$$

oder

$$K_y = -\xi Hi.$$

Das gilt im elektrostatischen Maßsystem, aber auch im elektromagnetischen, da dann H durch die Lichtgeschwindigkeit zu dividieren und i mit der Lichtgeschwindigkeit zu multiplizieren ist.

Diese Kraft, unabhängig vom Material und Querschnitt, ist der ponderomotorische Druck des Stromträgers gegen das

Magnetfeld, in Größe und Richtung übereinstimmend mit dem bekannten Fundamentalgesetz. Auch hier würde das Resultat durch Einführung mehrerer Arten von freien Elektronen nicht geändert.

Enthalten die eben gegebenen Ableitungen auch nichts prinzipiell Neues, so dürften sie doch vielleicht infolge ihrer Übersichtlichkeit manchem Leser willkommen sein.

Notiz über das Leuchten von Aluminiumelektroden in verschiedenen Elektrolyten

von

Dr. **Ernst Kielhauser.**

Aus dem physikalischen Institute der Universität Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. November 1906.)

Das Leuchten von Aluminiumelektroden in verdünnter Schwefelsäure beim Durchgange eines genügend dichten elektrischen Stromes ist bereits von F. Braun,[1] F. Eichberg und L. Kallir[2] beobachtet und beschrieben worden. Eine ganz befriedigende Erklärung dieser Erscheinung liegt aber bis heute nicht vor. Am ehesten könnte man dieselbe als einen herabgesetzten Wehnelt-Effekt ansehen. In der Tat geht die Leuchterscheinung in den Wehnelt-Effekt über, wenn man einen Aluminiumstift als Anode verwendet, welcher zum größten Teile durch Kautschuk isoliert ist, so daß nur eine Spitze hervorragt. Auch ist dieselbe Abhängigkeit von Stromdichte und Temperatur vorhanden. Daß gerade das Aluminium die Leuchterscheinung zeigt und nicht die anderen Metalle auch, die doch den Wehnelt-Effekt ermöglichen, dürfte mit der bekannten auf Polarisation mit einer sehr schlecht leitenden Oxydschichte beruhenden Ventilwirkung der Aluminiumelektroden zusammenhängen. Diese Oxydschichte dürfte zu starker Wärmeentwicklung infolge Joule-Effekts Anlaß geben.

Indem der Verfasser eine Reihe sehr sauerstoffreicher Elektrolyte untersuchte, stieß er bei Anwendung von Chrom-

---

[1] Wied. Annalen, *65*, 361 (1898).

[2] Diese Sitzungsberichte, *108*, 212 (1899).

säure-, Kaliumbichromat- und Eisenchloridlösungen auf neuartige, reizvolle Erscheinungen, welche von den bisher beschriebenen Leuchtphänomenen erheblich abweichen.

Bei all den zuletzt genannten Elektrolyten ist das Aufleuchten der Anode kein kurz andauerndes mehr, sondern es leuchtet die betreffende Platte so lange, als sie Anode ist. Das Licht war in Kaliumbichromat, solange die Lösung sehr stark verdünnt war, dem Anodenlicht in Schwefelsäure gleich, d. h. der eingetauchte Plattenteil wies auf seiner ganzen Fläche ein gleichmäßiges weißliches Licht auf. Wurde jedoch zu stärkeren Konzentrationen (über 7 %) vorgeschritten, so ging das gleichmäßige Leuchten in ein Flimmern über. Dabei traten an den in die Flüssigkeit getauchten Plattenrändern intensiv leuchtende, gelbliche Lichtpunkte gleich kleinen Sternchen auf; an der Trennungsschichte, d. h. dort, wo die Platte die Flüssigkeit verläßt, bildete sich eine ganze Kette solcher leuchtender Punkte, die entstanden, wenn die sich zahlreich entwickelnden Gasblasen verpafften; das Phänomen war dabei so lichtstark, daß es selbst bei Tageslicht noch deutlich wahrnehmbar war. Wurde die Platte etwas höher gezogen, so bildete sich nach einer Weile an der neuen Trennungsschichte ebenfalls eine Kette leuchtender Punkte. An der Kathode konnte keine Lichterscheinung wahrgenommen werden. Elektroden, welche zu diesen Versuchen gedient hatten, erschienen nach Gebrauch dort, wo die Kette von Lichtpunkten aufgetreten war, geschwärzt, was darauf schließen läßt, daß jene Lichtpunkte durch chemischen Angriff des Aluminiums infolge des in statu nascendi besonders aktiven Sauerstoffes entsteht. Das Flimmern dürfte seine Erklärung in der heftigen Gasentwicklung finden, die die Flüssigkeit in Bewegung bringt und daher Ursache einer unregelmäßigen Reflexion wird. Nimmt die Temperatur des Elektrolyten zu, so vermindert sich die Intensität der Erscheinung, indem die Lichtpunkte spärlicher werden; nahe an der Siedetemperatur der Lösung verschwindet die Lichterscheinung gänzlich. Die Hoffnung, über die Natur und die Entstehungsursache des Lichtes auf spektroskopischem Wege nähere Aufschlüsse zu erhalten, scheiterte an der zu geringen Intensität desselben.

Im Wechselstromkreise war die Erscheinung wohl infolge der weniger starken Elektrolyse noch bedeutend lichtschwächer.

Wurde Eisenchlorid als Elektrolyt verwendet, so trat statt des Flimmerns wieder das gleichmäßige Leuchten des eingetauchten Teiles der Anodenplatte auf; dabei konnten nur vereinzelte Lichtpunkte wahrgenommen werden.

In Chromsäure trat an die Stelle der Kette von leuchtenden Punkten, wie sie in Kaliumbichromat beobachtet wurden, ein heller weißer Streifen. Der übrige Plattenteil flimmerte und besaß an seinen Rändern nur vereinzelte leuchtende Punkte. Beim Kommutieren des Stromes blieb an der Platte, die nunmehr Kathode geworden war, nur der helle weiße Streifen erhalten. Im Wechselstromkreise trat die oben beschriebene Erscheinung gleichzeitig an beiden Platten auf.

In Kaliumpermanganat stellten sich dieselben Erscheinungen ein, die man in Schwefelsäure beobachtet. Wurden bei den genannten Elektrolyten andere Metalle, wie Zink, Kupfer, Eisen, Silber, Platin, als Elektroden verwendet, so blieb jedwede Lichterscheinung aus.

Über die Darstellung der Legendre'schen Symbole der biquadratischen, kubischen und bikubischen Reste durch Thetareihen

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1906.)

1.

Eisenstein[1] hat das Legendre'sche Zeichen in der Theorie der quadratischen, biquadratischen und kubischen[2] Reste durch Ausdrücke dargestellt, welche aus Kreisfunktionen, beziehungsweise elliptischen Funktionen vom Modul $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und (nach einer Bemerkung Kummer's[3]) $k = \sin\frac{\pi}{12}$ zusammengesetzt sind und sehr elegante Beweise der in den genannten Theorien geltenden Reziprozitätsgesetze ergeben.

---

[1] Eisenstein, Applications de l'algèbre à l'arithmétique transcendante. Crelle's Journal, Bd. 29.

[2] In Bezug auf die kubischen Reste findet sich in der angeführten Abhandlung Eisenstein's nur die Bemerkung, daß der Beweis sich ähnlich wie bei den biquadratischen Resten führen lasse. Eine Ausführung des Beweises verdankt man Herrn v. Dantscher, Mathematische Annalen, Bd. XII. Vergl. Eisenstein, Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen; Crelle's Journal, Bd. 35. Scheibner, Zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$, Abhandlung II im XXVII. Bande der Abhandl. der math.-phys. Klasse der königl. sächsischen Gesellsch. der Wissenschaften.

[3] Kummer, Über die allgemeinen Reziprozitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist. Abhandl. der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859.

In dem folgenden werden Darstellungen des Legendreschen Symbols der kubischen und biquadratischen Reste aus der Transformation der Thetareihen hergeleitet. Diese Reihen sollen in folgender Bezeichnung gebraucht werden:

$$q = e^{i\pi\omega}$$

$$\vartheta_0(x) = \Sigma(-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi i x}$$

$$\vartheta_1(x) = -i\,\Sigma(-1)^{\frac{f-1}{2}} q^{\frac{1}{4}f^2} e^{f\pi i x} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\vartheta_2(x) = \Sigma q^{\frac{1}{4}f^2} e^{f\pi i x} \qquad (f = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$

$$\vartheta_3(x) = \Sigma q^{n^2} e^{2n\pi i x}$$

2.

Für das Legendre'sche Zeichen der kubischen Reste empfehlen sich die Thetareihen vom Parameter

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Es werde zur Abkürzung

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = r \qquad 1 - r = \rho$$

gesetzt. Eine Zahl $a + br$ mit ganzzahligen Koeffizienten a, b soll kurz eine ganze komplexe Zahl in r genannt werden. Eine zu ρ teilerfremde komplexe Zahl wird primär genannt, wenn sie der Kongruenz

$$m \equiv 1 \pmod 3$$

genügt.

Nach den Haupttransformationen erster Ordnung ist

$$\vartheta_1(x, r) = e^{\frac{-i\pi}{4}} \vartheta_1(x, 1 + r) = e^{\frac{-i\pi}{4}} \vartheta_1\left(x_1, \frac{-1}{r}\right)$$

$$\vartheta_1\left(x, -\frac{1}{r}\right) = -i\sqrt{-ir}\, e^{i\pi r x^2} \vartheta_1(rx, r),$$

wo die Quadratwurzel mit positivem reellen Bestandteil auszuziehen ist. Daher ist

$$\sqrt{-ir} = r^2 e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

$$\vartheta_1(rx) = re^{-i\pi r x^2}\vartheta_1(x).$$

In derselben Weise ergeben sich die Formeln

$$\vartheta_0(rx) = -ire^{-i\pi r x^2}\vartheta_2(x)$$

$$\vartheta_2(rx) = -re^{\frac{i\pi}{4}}e^{-i\pi r x^2}\vartheta_3(x)$$

$$\vartheta_3(rx) = -re^{\frac{i\pi}{4}}e^{-i\pi r x^2}\vartheta_0(x).$$

Hienach genügt die Funktion

$$\Theta(x) = \frac{\vartheta_1\left(x+\frac{1}{\rho}\right)\vartheta_1\left(x-\frac{1}{\rho}\right)}{\vartheta_1^2(x)}$$

der Gleichung

$$\Theta(rx) = r\Theta(x).$$

Dieselbe hat die Perioden $1, r$ und ändert sich demnach nicht, wenn x um eine ganze komplexe Zahl in r vermehrt wird.

Es sei $\mathfrak{p} = a+br$ eine zweigliedrige komplexe Primzahl in r, p ihre Norm und l eine reelle Zahl, welche den Bedingungen

$$l \equiv -r \pmod{a+br^2}$$

$$l \equiv 0 \pmod{8}$$

genügt. Setzt man

$$l+r = (c+dr)(a+br^2),$$

so wird

$$ad-bc = 1$$

$$\frac{l+r}{p} = \frac{c+dr}{a+br} = \frac{c+dr}{\mathfrak{p}}.$$

Auf Grund derjenigen Transformation p^{ter} Ordnung, welche in der Division des Parameters durch p besteht, ist der Quotient

$$\frac{\Pi\vartheta_1\left(x+h\,\frac{l+r}{p},\, l+r\right)}{\vartheta_1\left(x,\,\frac{l+r}{p}\right)} \qquad h=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\pm\frac{p-1}{2}$$

eine Konstante. Infolge der Gleichungen

$$\vartheta_1\left(x+h\,\frac{l+r}{p},\, l+r\right)=\vartheta_1\left(x+h\,\frac{c+dr}{\mathfrak{p}},\, r\right)$$

$$\vartheta_1\left(x,\,\frac{l+r}{p}\right)=\vartheta_1\left(x,\,\frac{c+dr}{\mathfrak{p}}\right)$$

nimmt derselbe die Gestalt

$$\frac{\Pi\vartheta_1\left(x+h\,\frac{c+dr}{\mathfrak{p}},\, r\right)}{\vartheta_1\left(x,\,\frac{c+dr}{\mathfrak{p}}\right)}$$

an. Da ferner die Ersetzung von r durch $\frac{c+dr}{a+br}$ eine Transformation erster Ordnung bildet, so ist auch der Quotient

$$\frac{\vartheta_1\left(x,\,\frac{c+dr}{\mathfrak{p}}\right)e^{-b\mathfrak{p}\pi i x^2}}{\vartheta_1(\mathfrak{p}x,\, r)}$$

eine Konstante und man hat

$$\Pi\vartheta_1\left(x+h\,\frac{c+dr}{\mathfrak{p}}\right)=Ae^{b\mathfrak{p}\pi i x^2}\vartheta_1(\mathfrak{p}x), \tag{1}$$

wo A eine Konstante bezeichnet.

Eine ähnliche Gleichung gilt für eine reelle Primzahl $\mathfrak{p}$ von der Form $\pm(6k+5)$. Denn auf Grund der Multiplikationsformeln der Thetareihen ist der Quotient

$$\frac{\Pi\vartheta_1\left(x+\frac{g+hr}{\mathfrak{p}}\right)}{\vartheta_1(\mathfrak{p}x)} \qquad g, h=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\pm\frac{1}{2}(|\mathfrak{p}|-1)$$

eine Konstante A und man hat

$$\Pi \vartheta_1\left(x+\frac{g+hr}{\mathfrak{p}}\right) = A\vartheta_1(\mathfrak{p}x).$$

Die Primzahl 2 erfordert eine besondere Behandlung. Die Gleichungen

$$\vartheta_1\left(x+\frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(x)$$

$$\vartheta_1\left(x+\frac{r}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi x}\vartheta_0(x)$$

$$\vartheta_1\left(x+\frac{r^2}{2}\right) = -\vartheta_1\left(-x+\frac{1+r}{2}\right) = -q^{-\frac{1}{4}}e^{i\pi x}\vartheta_3(x)$$

$$\vartheta_0(x)\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x) = \frac{1}{2}\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_1(2x)$$

ergeben

$$\vartheta_1(x)\vartheta_1\left(x+\frac{1}{2}\right)\vartheta_1\left(x+\frac{1}{2}r\right)\vartheta_1\left(x+\frac{r^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{-i}{2}q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_1(2x).$$

Hienach gilt für jede zweigliedrige und jede reelle komplexe Primzahl $\mathfrak{p} = a+br$ die Gleichung

$$\Pi \vartheta_1\left(x+\frac{h}{\mathfrak{p}}\right) = Ae^{b\mathfrak{p}\pi i x^2}\vartheta_1(\mathfrak{p}x), \tag{2}$$

wo A eine Konstante bezeichnet und h ein beliebiges Restsystem des Moduls $\mathfrak{p}$ zu durchlaufen hat, bei welchem das Produkt $\Pi\vartheta_1\left(x+\frac{h}{\mathfrak{p}}\right)$ eine ungerade Funktion von x ist.

Aus der vorstehenden Gleichung ergibt sich für eine primäre Primzahl $\mathfrak{p} = a+br$

$$\Pi \Theta\left(x+\frac{h}{\mathfrak{p}}\right) = e^{\frac{2b\mathfrak{p}\pi i}{\rho^2}}\frac{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x+\frac{\mathfrak{p}}{\rho}\right)\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x-\frac{\mathfrak{p}}{\rho}\right)}{\vartheta_1^2(\mathfrak{p}x)}.$$

Setzt man aber

$$N\mathfrak{p} = p$$

$$\frac{\mathfrak{p}-1}{\rho} = \gamma+\delta r \qquad \gamma = \frac{1}{3}(2(a-1)-b) \qquad \delta = \frac{1}{3}(a-1+b),$$

so wird

$$e^{\frac{2b\mathfrak{p}\pi i}{\rho^2}} = e^{-\frac{2}{3}b\mathfrak{p}\pi i r^2} = q^{\frac{2}{3}ab}$$

$$\frac{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x+\frac{\mathfrak{p}}{\rho}\right)}{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x+\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x+\frac{1}{\rho}+\gamma+\delta r\right)}{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x+\frac{1}{\rho}\right)}$$

$$= (-1)^{a-1}q^{-\delta^2}e^{-2\delta\pi i\left(\mathfrak{p}x+\frac{1}{\rho}\right)}$$

$$= (-1)^{a-1}r^{\delta}q^{\frac{1}{9}(1-p)-\frac{1}{3}ab}e^{-2\delta\mathfrak{p}\pi i x}$$

$$\frac{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x-\frac{\mathfrak{p}}{\rho}\right)}{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x-\frac{1}{\rho}\right)} = (-1)^{a-1}r^{\delta}q^{\frac{1}{9}(1-p)-\frac{1}{3}ab}e^{2\delta\mathfrak{p}\pi i x}$$

und der Kongruenz

$$p = a^2+b^2-ab = (a+b)^2-3ab \equiv (1+3\delta)^2$$
$$\equiv 1+6\delta \pmod 9$$

zufolge

$$2\delta \equiv \frac{p-1}{3} \pmod 3.$$

Somit ist

$$e^{\frac{2b\mathfrak{p}\pi i}{\rho^2}}\frac{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x+\frac{\mathfrak{p}}{\rho}\right)\vartheta_1\left(\mathfrak{p}x-\frac{\mathfrak{p}}{\rho}\right)}{\vartheta_1^2(\mathfrak{p}x)} = r^{\frac{1}{3}(p-1)}q^{\frac{2}{9}(1-p)}\Theta(\mathfrak{p}x)$$

und es ergibt sich

$$\frac{\Theta(\mathfrak{p}x)}{\Theta(x)} = \left(r^2 q^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}(p-1)}\Pi\,\Theta\left(x+\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right), \tag{3}$$

wo σ alle zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden Zahlen eines beliebigen Restsystems von $\mathfrak{p}$ zu durchlaufen hat.

3.

Es seien nun m, n zwei voneinander und von ρ verschiedene primäre komplexe Primzahlen in r und M, N ihre Normen. Bezeichnet Γ die Gruppe der Zahlen $1, r, r^2$ und $z\Gamma$ den Inbegriff der Zahlen z, zr, zr^2, so lassen sich alle zu n teilerfremden Zahlen eines Restsystems von n in $\frac{1}{3}(N-1)$ Inbegriffe

$$\nu_1\Gamma,\ \nu_2\Gamma, \ldots$$

verteilen. Jedes Produkt $m\nu_i$ ist einem Produkte $\varepsilon_i n_i$ nach dem Modul n kongruent, wo ε_i eine Potenz von r und n_i eine der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ist, und der dem Gauß'schen Lemma aus der Theorie der quadratischen Reste entsprechende Satz lautet:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \Pi\varepsilon_i \qquad i = 1, 2, \ldots \frac{1}{3}(N-1).$$

Da

$$\varepsilon_i = \frac{\Theta\left(\frac{m\nu_i}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{n_i}{n}\right)}$$

ist und die Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots$ zusammenfallen, so wird

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \Pi \frac{\Theta\left(\frac{m\nu_0}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{\nu_0}{n}\right)},$$

wo ν_0 alle Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots$ zu durchlaufen hat. Nach (3) folgt hieraus

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(r^2 q^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{9}(M-1)(N-1)} \Pi\Theta\left(\frac{\mu}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right),$$

wo das Produkt über alle Zahlen ν_0 und alle zu m teilerfremden Zahlen μ eines Restsystems von m zu erstrecken ist.

Verteilt man auch die Zahlen μ in $\frac{1}{3}(M-1)$ Inbegriffe

$$\mu_1\Gamma,\ \mu_2\Gamma, \ldots$$

und bezeichnet die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ allgemein mit μ_0, so wird

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(r^2 q^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{9}(M-1)(N-1)} \Pi\Theta\left(\frac{r^\alpha \mu_0}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right),$$

wo das Produktzeichen auf alle Zahlen μ_0, ν_0 und die Werte $0, 1, 2$ von α zu beziehen ist.

Diese Gleichung ergibt unmittelbar das kubische Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right),$$

da der Gleichung

$$\Theta\left(\frac{\mu_0}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right)\Theta\left(\frac{r\mu_0}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right)\Theta\left(\frac{r^2\mu_0}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right) =$$
$$= \Theta\left(\frac{\mu_0}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right)\Theta\left(\frac{\mu_0}{m} + \frac{r\nu_0}{n}\right)\Theta\left(\frac{\mu_0}{m} + \frac{r^2\nu_0}{n}\right)$$

zufolge

$$\Pi\Theta\left(\frac{r^\alpha \mu_0}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right) = \Pi\Theta\left(\frac{\mu_0}{m} + \frac{r^\alpha \nu_0}{n}\right)$$

ist und der für $\left(\frac{m}{n}\right)$ gefundene Ausdruck bei der Vertauschung der Zahlen m, n ungeändert bleibt.

4.

Um den auf die Primzahl ρ sich beziehenden Ergänzungssatz zu erhalten, sei

$$\varphi(x) = \frac{\vartheta_1\left(x + \frac{1}{3}\right)\vartheta_1\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\vartheta_1\left(x + \frac{1}{\rho}\right)\vartheta_1\left(x - \frac{1}{\rho}\right)}.$$

Die Funktion $\varphi(x)$ bleibt bei der Vermehrung von x um eine ganze komplexe Zahl in r ungeändert und es ist

$$\varphi(x) = \frac{\vartheta_1\left(x + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right)\vartheta_1\left(x - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)}{\Theta(x)\vartheta_1^2(x)}$$

$$\varphi(rx) = \frac{\vartheta_1\left(r\left(x + \frac{1}{3}r^2\right)\right)\vartheta_1\left(r\left(x - \frac{1}{3}r^2\right)\right)}{\Theta(rx)\vartheta_1^2(rx)}$$

$$= \frac{r^2 e^{-2\pi i r\left(x^2 + \frac{1}{9}r\right)}\vartheta_1\left(x + \frac{1}{3}r^2\right)\vartheta_1\left(x - \frac{r^2}{3}\right)}{r^2 e^{-2\pi i r x^2}\vartheta_1^2(x)\Theta(rx)}$$

$$= e^{\frac{1}{9}2\pi i} q^{\frac{2}{9}} \frac{\vartheta_1\left(x + \frac{1}{\rho^2}\right)\vartheta_1\left(x - \frac{1}{\rho^2}\right)}{\vartheta_1^2(x)\Theta(rx)}$$

$$\varphi(r^2 x) = \frac{\vartheta_1\left(r^2\left(x + \frac{r}{3}\right)\right)\vartheta_1\left(r^2\left(x - \frac{r}{3}\right)\right)}{\vartheta_1(r^2 x)\Theta(r^2 x)}$$

$$= q^{\frac{2}{9}} \frac{\vartheta_1\left(x + \frac{1}{3}r\right)\vartheta_1\left(x - \frac{1}{3}r\right)}{\vartheta_1^2(x)\Theta(r^2 x)}$$

$$= q^{\frac{8}{9}} \frac{\vartheta_1\left(x + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)\vartheta_1\left(x - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right)}{\vartheta_1^2(x)\Theta(r^2 x)}.$$

Hieraus folgt

$$\varphi(x)\varphi(rx)\varphi(r^2 x) =$$

$$= e^{\frac{2}{9}\pi i} q^{\frac{10}{9}} \frac{\vartheta_1\left(x + \frac{1}{\rho^2}\right)^3 \vartheta_1\left(x - \frac{1}{\rho^2}\right)^3 \Theta\left(x + \frac{1}{\rho^2}\right)\Theta\left(x - \frac{1}{\rho^2}\right)}{\vartheta_1(x)^6\Theta(x)^3}.$$

Aus (1) ergibt sich aber für $\mathfrak{p} = \rho$ die Gleichung

$$A e^{-i\pi\rho x^2} \vartheta_1(\rho x) = \vartheta_1(x) \vartheta_1\left(x + \frac{1}{\rho}\right) \vartheta_1\left(x - \frac{1}{\rho}\right)$$
$$= \vartheta_1^3(x)\,\Theta(x)$$

und es wird, wenn man derselben die Ausdrücke für das Quadrat von $\vartheta_1^3(x)\,\Theta(x)$ und das Produkt von

$$\vartheta_1^3\left(x + \frac{1}{\rho^2}\right) \Theta\left(x + \frac{1}{\rho^2}\right) \text{ in } \vartheta_1^3\left(x - \frac{1}{\rho^2}\right) \Theta\left(x - \frac{1}{\rho^2}\right)$$

entnimmt,

$$\frac{\vartheta_1^3\left(x + \frac{1}{\rho^2}\right) \vartheta_1^3\left(x - \frac{1}{\rho^2}\right) \Theta\left(x + \frac{1}{\rho^2}\right) \Theta\left(x - \frac{1}{\rho^2}\right)}{\vartheta_1^6(x)\,\Theta(x)^2} =$$
$$= e^{-\frac{2}{9}\pi i}\, q^{-\frac{4}{9}}\, \Theta(\rho x).$$

Es ist demnach

$$\frac{\Theta(\rho x)}{\Theta(x)} = q^{-\frac{2}{3}} \varphi(x) \varphi(r x) \varphi(r^2 x).$$

Ist nun $m = a + b r$ eine primäre komplexe Primzahl, p ihre Norm,

$$\mu_1 \Gamma,\ \mu_2 \Gamma, \ldots$$

eine Verteilung der zu m teilerfremden Zahlen eines Restsystems von m mittels der Gruppe Γ und werden die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ allgemein mit μ_0 bezeichnet, so ergibt sich wie oben

$$\left(\frac{\rho}{m}\right) = \Pi \frac{\Theta\left(\frac{\rho \mu_0}{m}\right)}{\Theta\left(\frac{\mu_0}{m}\right)}$$

und es wird auf Grund der vorstehenden Gleichung

$$\left(\frac{\rho}{m}\right) = q^{-\frac{2}{9}(p-1)} \Pi \varphi\left(\frac{\mu_0}{m}\right) \varphi\left(\frac{r \mu_0}{m}\right) \varphi\left(\frac{r^2 \mu_0}{m}\right)$$
$$= q^{-\frac{2}{9}(p-1)} \Pi \varphi\left(\frac{\mu}{m}\right),$$

wo μ_0 die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ und μ alle zu m teilerfremden Zahlen eines Restsystems von m zu durchlaufen haben. Nach (2) folgt hieraus

$$\left(\frac{\rho}{m}\right) = q^{-\frac{2}{9}(p-1)} e^{2bm\pi i\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{\rho^2}\right)} \left\{\frac{\vartheta_1\left(\frac{m}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{m}{\rho}\right)}\right\}^2$$

Es ist aber

$$\vartheta_1\left(\frac{m}{3}\right)^2 = \vartheta_1\left(\frac{1}{3}+\frac{br}{3}\right)^2 = r^{\frac{1}{3}b} q^{-\frac{2}{9}b^2} \vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\vartheta_1\left(\frac{m}{\rho}\right)^2 = \vartheta_1\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{3}(a-1+b)r\right)^2 =$$

$$= r^{-\frac{1}{3}(a-1)-\frac{1}{3}b} q^{\frac{2}{9}-\frac{2}{9}(a+b)^2} \vartheta_1\left(\frac{1}{\rho}\right)^2$$

$$e^{2bm\pi i}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{\rho^2}\right) = r^{\frac{1}{3}b} q^{\frac{2}{9}b^2-\frac{2}{3}ab}$$

und daher

$$\left\{\frac{\vartheta_1\left(\frac{m}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{m}{\rho}\right)}\right\}^2 = r^{\frac{1}{3}(a-1)} q^{\frac{2}{9}(p-1)}.$$

Somit ist

$$\left(\frac{\rho}{m}\right) = r^{\frac{1}{3}(a-1)}.$$

5.

Das Reziprozitätsgesetz für die sechsten Potenzreste geht aus einer Verbindung des kubischen Reziprozitätsgesetzes mit dem in dem Körper der dritten Einheitswurzeln geltenden quadratischen hervor. Denn es ist, wenn $\mathfrak{p}$ eine von 2 und ρ verschiedene Primzahl in r, p ihre Norm, c eine zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde Zahl und

$$\left(\frac{c}{\mathfrak{p}}, 2\right), \left(\frac{c}{\mathfrak{p}}, 3\right), \left(\frac{c}{\mathfrak{p}}, 6\right)$$

beziehungsweise die Legendre'schen Symbole für quadratische, kubische und bikubische Reste bezeichnen,

$$\frac{p-1}{6} \equiv \frac{p-1}{2} + 2\,\frac{p-1}{3} \pmod{p-1}$$

und daher

$$c^{\frac{p-1}{6}} \equiv c^{\frac{p-1}{2}}\, c^{2\frac{p-1}{3}} \pmod{\mathfrak{p}}$$

$$\left(\frac{c}{\mathfrak{p}}, 6\right) = \left(\frac{c}{\mathfrak{p}}, 2\right)\left(\frac{c}{\mathfrak{p}}, 3\right)^2.$$

Das quadratische Reziprozitätsgesetz in dem Körper der dritten Einheitswurzeln ergibt sich aus den Eigenschaften der Funktion

$$\psi(x) = \frac{\vartheta_1^3(x)}{\vartheta_0(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}.$$

Dieselbe ist ungerade, hat die Perioden $1, r$ und genügt der Gleichung

$$\psi(rx) = \psi(x).$$

Es sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} r$ eine komplexe Primzahl in r, in welcher $\mathfrak{a}$ ungerade, $\mathfrak{b}$ gerade ist. Ersetzt man in Gleichung (2) x der Reihe nach durch $x + \frac{r}{2}, x + \frac{1}{2}, x + \frac{1+r}{2}$ und nimmt an, was erlaubt ist, daß die von h durchlaufene Wertereihe die Null zur Summe hat, so ergeben sich die drei weiteren Gleichungen

$$A e^{\mathfrak{b}\mathfrak{p}\pi i x^2}\vartheta_0(\mathfrak{p}x) = i^{1-\mathfrak{a}+\frac{1}{2}\mathfrak{b}^2-\frac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,\Pi\vartheta_0\left(x+\frac{h}{\mathfrak{p}}\right)$$

$$A e^{\mathfrak{b}\mathfrak{p}\pi i x}\vartheta_2(\mathfrak{p}x) = i^{1-\mathfrak{a}-\frac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,\Pi\vartheta_2\left(x+\frac{h}{\mathfrak{p}}\right)$$

$$A e^{\mathfrak{b}\mathfrak{p}\pi i x}\vartheta_3(\mathfrak{p}x) = i^{1-\mathfrak{a}+\frac{1}{2}\mathfrak{b}^2-\mathfrak{b}}\,\Pi\vartheta_3\left(x+\frac{h}{\mathfrak{p}}\right)$$

und man hat

$$\psi(\mathfrak{p}x) = (-1)^{\frac{\mathfrak{a}-1}{2}}\,\Pi\psi\left(x+\frac{h}{\mathfrak{p}}\right).$$

Eine primäre Primzahl $m = a+br$, welche durch die Bedingung

$$m \equiv 1 \pmod 3$$

definiert ist, sowie die Primzahl $\rho = 1-r$ kann durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz r^λ von r in eine Zahl

$$mr^\lambda = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}r$$

verwandelt werden, in welcher $\mathfrak{a}$ ungerade, $\mathfrak{b}$ gerade ist. Zu diesem Ende ist in den Fällen

a ungerade, b gerade	$\lambda = 0$
a gerade, b ungerade	$\lambda = 2$
a ungerade, b ungerade	$\lambda = 1$

zu setzen. Die vorstehende Gleichung gibt dann, wenn

$$\mathfrak{p} = mr^\lambda$$

gesetzt wird,

$$\frac{\psi(mx)}{\psi(x)} = (-1)^{\frac{\mathfrak{a}-1}{2}} \Pi \psi\left(x + \frac{\mu}{m}\right), \tag{4}$$

wo μ alle zu m teilerfremden Zahlen eines beliebigen Restsystems von m zu durchlaufen hat.

Ist nun n irgend eine von m verschiedene primäre komplexe Primzahl oder ρ, N ihre Norm und

$$\Gamma\nu_1, \Gamma\nu_2, \ldots$$

eine Verteilung der zu n teilerfremden Zahlen eines Restsystems von n mittels der aus den Zahlen $1, -1$ bestehenden Gruppe Γ, so ist

$$\left(\frac{m}{n}, 2\right) = \Pi \frac{\psi\left(\frac{m\nu_0}{n}\right)}{\psi\left(\frac{\nu_0}{n}\right)},$$

wo ν_0 alle Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots$ zu durchlaufen hat, und es wird nach (4)

$$\left(\frac{m}{n}, 2\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{N-1}{2}} \Pi \psi\left(\frac{\mu}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right),$$

wo das Produkt über alle Zahlen μ und ν_0 zu erstrecken ist.

Verteilt man auch die Zahlen μ in Inbegriffe

$$\Gamma\mu_1, \Gamma\mu_2, \ldots$$

und bezeichnet die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ allgemein mit μ_0, so wird

$$\left(\frac{m}{n}, 2\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{N-1}{2}} \Pi \psi\left(\frac{\mu_0}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right) \psi\left(-\frac{\mu_0}{m} + \frac{\nu_0}{n}\right).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich das quadratische Reziprozitätsgesetz in der Gestalt

$$\left(\frac{n}{m}, 2\right) = (-1)^{\frac{M-1}{2}\frac{N-1}{2} + \frac{\alpha-1}{2}\frac{N-1}{2} + \frac{\alpha'-1}{2}\frac{M-1}{2}} \left(\frac{m}{n}, 2\right),$$

wo $M = Nm$ ist und α' in Bezug auf n dieselbe Bedeutung hat wie α in Bezug auf m.

Insbesondere ist

$$\left(\frac{\rho}{m}, 2\right) = (-1)^{\frac{M-1}{2} + \frac{\alpha-1}{2}} \left(\frac{m}{\rho}, 2\right)$$

und der Gleichung

$$\left(\frac{m}{\rho}, 2\right) = \left(\frac{1}{\rho}, 2\right) = 1$$

zufolge

$$\left(\frac{\rho}{m}, 2\right) = (-1)^{\frac{M-1}{2} + \frac{\alpha-1}{2}}.$$

6.

Zur Darstellung des Legendre'schen Symbols der biquadratischen Reste eignen sich die Thetareihen vom Parameter

$$\omega = i.$$

Die hier in Betracht kommenden ganzen komplexen Zahlen haben die Form $a+bi$, wo a, b ganze Zahlen sind. Eine zu $1+i$ teilerfremde komplexe Zahl m wird primär genannt, wenn sie der Kongruenz

$$m \equiv 1 \pmod{2+2i}$$

genügt.

Es ist

$$\vartheta_1(ix) = i e^{\pi x^2} \vartheta_1(x)$$
$$\vartheta_3(ix) = e^{\pi x^2} \vartheta_3(x).$$

Die Funktion

$$\Theta(x) = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)}$$

besitzt demnach die Eigenschaft

$$\Theta(ix) = i\Theta(x)$$

und hat die Perioden $2, 1+i$, so daß sie ungeändert bleibt, wenn x um irgend eine durch $1+i$ teilbare komplexe Zahl vermehrt wird.

Es sei $\mathfrak{p} = a+bi$ eine primäre zweigliedrige komplexe Primzahl und p ihre Norm. Bestimmt man eine reelle Zahl l, welche den Bedingungen

$$l+i \equiv 0 \pmod{a-bi}$$
$$l \equiv 0 \pmod{8}$$

genügt, und setzt

$$l+i = (c+di)(a-bi),$$

so wird

$$\frac{l+i}{p} = \frac{c+di}{a+bi} = \frac{c+di}{\mathfrak{p}}$$

und es erhellt aus den Formeln der Transformation p^{ter} Ordnung, daß der Quotient

$$\frac{\Pi\vartheta_1\left(x+h\dfrac{l+i}{p}, l+i\right)}{\vartheta_1\left(x, \dfrac{l+i}{p}\right)} = \frac{\Pi\vartheta_1\left(x+h\dfrac{c+di}{\mathfrak{p}}, i\right)}{\vartheta_1\left(x, \dfrac{c+di}{a+bi}\right)}$$

$$h = 0, \pm 1, \ldots \pm \frac{p-1}{2}$$

eine Konstante ist. Da ferner der Quotient

$$\frac{e^{-b\mathfrak{p}ix^2}\vartheta_1\left(x, \dfrac{c+di}{a+bi}\right)}{\vartheta_1(\mathfrak{p}x, i)}$$

auf Grund einer linearen Transformation konstant ist, so ergibt sich

$$\Pi\vartheta_1\left(x+h\frac{c+di}{\mathfrak{p}}\right) = Ae^{b\mathfrak{p}\pi ix^2}\vartheta_1(\mathfrak{p}x),$$

wo A eine Konstante bezeichnet.

Eine ähnliche Gleichung gilt für eine reelle primäre Primzahl. Denn die Multiplikationsformeln der Thetareihen ergeben, wenn $-n$ eine reelle Primzahl von der Form $4h+3$ ist,

$$\Pi\vartheta_1\left(x+\frac{2g+2hi}{n}\right) = A\vartheta_1(nx) \qquad g, h = 0, \pm 1, \ldots \pm\frac{n+1}{2}$$

wo A eine Konstante bezeichnet.

Hienach ist für jede primäre Primzahl $\mathfrak{p} = a+bi$

$$\Pi\vartheta_1\left(x+h\frac{1+i}{\mathfrak{p}}\right) = Ae^{b\mathfrak{p}\pi ix^2}\vartheta_1(\mathfrak{p}x),$$

wo A eine Konstante bezeichnet; h durchläuft ein Restsystem von $\mathfrak{p}$, welches aus der Null und $\frac{1}{2}(N\mathfrak{p}-1)$ Zahlenpaaren besteht, deren Zahlen sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Die Ersetzung von x durch $x+\frac{1+i}{2}$ ergibt

$$\Pi\vartheta_3\left(x+h\frac{1+i}{\mathfrak{p}}\right) = Ae^{b\mathfrak{p}\pi ix^2}\vartheta_3(\mathfrak{p}x) \tag{5}$$

und man hat

$$\Theta(\mathfrak{p}x) = \Pi\Theta\left(x+h\frac{1+i}{\mathfrak{p}}\right). \tag{6}$$

7.

Es seien nun m, n zwei untereinander und von $1+i$ verschiedene primäre Primzahlen und M, N ihre Normen. Mittels der Gruppe Γ der Zahlen $1, i, i^2, i^3$ können alle zu n teilerfremden Zahlen eines Restsystems von n in $\frac{1}{4}(Nn-1)$ Inbegriffe

$$\nu_1\Gamma, \nu_2\Gamma, \ldots$$

verteilt werden und jedes Produkt $m\nu_k$ ist nach dem Modul n einem Produkte $\varepsilon_k n_k$ kongruent, wo ε_k zu Γ gehört und n_k eine der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ist. Wird daher das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ auf biquadratische Reste bezogen, so ergibt das Analogon des Gauß'schen Lemmas

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \Pi\varepsilon_k \qquad k = 1, 2, \ldots \frac{1}{4}(Nn-1)$$

Da

$$\varepsilon_k = \frac{\Theta\left(\frac{m\nu_k(1+i)}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{n_k(1+i)}{n}\right)}$$

ist und die Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ bis auf die Reihenfolge mit $\nu_1, \nu_2, \ldots$ zusammenfallen, so wird

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \Pi\frac{\Theta\left(\frac{\nu_0 m(1+i)}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{\nu_0(1+i)}{n}\right)},$$

wo ν_0 alle Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots$ zu durchlaufen hat. Nach (6) folgt hieraus

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \Pi\,\Theta\left(\frac{\mu(1+i)}{m} + \frac{\nu_0(1+i)}{n}\right),$$

wo das Produkt über alle Zahlen ν_0 und alle zu m teilerfremden Zahlen μ eines Restsystems von m zu erstrecken ist.

Verteilt man auch die Zahlen μ in $\frac{1}{4}(Nm-1)$ Inbegriffe

$$\mu_1\Gamma,\ \mu_2\Gamma, \ldots$$

und bezeichnet die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ allgemein mit μ_0, so wird

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \Pi\Theta\left(\frac{i^\alpha\mu_0(1+i)}{m} + \frac{\nu_0(1+i)}{n}\right),$$

wo das Produkt auf alle Zahlen μ_0, ν_0 und die Werte 0, 1, 2, 3 von α zu beziehen ist.

Diese Darstellung ergibt unmittelbar das biquadratische Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{Nm-1}{4}\cdot\frac{Nn-1}{4}}\left(\frac{m}{n}\right),$$

da

$$\Pi\Theta\left(\frac{i^\alpha\mu_0(1+i)}{m} + \frac{\nu_0(1+i)}{n}\right) = -\Pi\Theta\left(\frac{\mu_0(1+i)}{m} + \frac{i^\alpha\nu_0(1+i)}{n}\right)$$

ist, wenn das Produktzeichen nur auf α bezogen wird.[1]

Man erhält die Eisenstein'sche Darstellung, wenn man von dem Parameter i zu dem Parameter $1+i$ oder zu den elliptischen Funktionen vom Modul $k = i$ übergeht.

8.

Der auf die Primzahl $1+i$ sich beziehende Ergänzungssatz ergibt sich aus einem Ausdrucke für die Funktion $\frac{\Theta(2x)}{\Theta((1-i)x)}$.

Setzt man

$$\varphi(x) = \frac{\vartheta_3\left(\frac{1}{2}+x\right)}{\vartheta_3\left(\frac{1+i}{4}+x\right)},$$

[1] Scheibner, l. c., Nr. 34.

so wird

$$\varphi(x)\varphi(-x) = \frac{\vartheta_0^2(x)}{\vartheta_3\left(\frac{1+i}{4}+x\right)\vartheta_3\left(\frac{1+i}{2}-\frac{1+i}{4}-x\right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}-i\pi x}\,\vartheta_0^2(x)}{\vartheta_1\left(x+\frac{1+i}{4}\right)\vartheta_3\left(x+\frac{1+i}{4}\right)}$$

$$\varphi(ix)\varphi(-ix) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+\pi x}\,\vartheta_0^2(ix)}{\vartheta_2\left(i\left(x+\frac{1+i}{4}\right)\right)\vartheta_0\left(i\left(x+\frac{1+i}{4}\right)\right)}$$

$$= \frac{e^{-i\pi x}\,\vartheta_2^2(x)}{\vartheta_0\left(x+\frac{1+i}{4}\right)\vartheta_2\left(x+\frac{1+i}{4}\right)}$$

Hieraus folgt

$$\Pi\varphi(i^\alpha x) = e^{\frac{i\pi}{4}-2\pi i x}\,\frac{\vartheta_0(x)\vartheta_2(x)}{\vartheta_1(x)\vartheta_3(x)}\,\Pi\frac{\vartheta_\alpha(x)}{\vartheta_\alpha\left(x+\frac{1+i}{4}\right)} \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Es ist aber

$$\Pi\vartheta_\alpha(x) = \frac{1}{2}\,\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_1(2x)$$

$$\Pi\vartheta_\alpha\left(x+\frac{1+i}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_1\left(2x+\frac{1+i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\,q^{-\frac{1}{4}}\,e^{-2\pi i x}\,\vartheta_3(2x)$$

und daher

$$\Pi\frac{\vartheta_\alpha(x)}{\vartheta_\alpha\left(x+\frac{1+i}{4}\right)} = q^{\frac{1}{4}}\,e^{2\pi i x}\,\Theta(2x).$$

Ferner ist auf Grund der Transformation zweiter Ordnung, welche in dem Übergange von dem Parameter ω zu $\frac{1+\omega}{2}$ besteht,

$$\frac{\vartheta_0(x)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x)} = \frac{\vartheta_2\left(x,\ \frac{1+i}{2}\right)}{\vartheta_1\left(x,\ \frac{1+i}{2}\right)} = \frac{\vartheta_2\left(x,\ \frac{1}{1-i}\right)}{\vartheta_1\left(x,\ \frac{1}{1-i}\right)}$$

und auf Grund einer linearen Transformation

$$\frac{\vartheta_2\left(x,\ \frac{1}{1-i}\right)}{\vartheta_1\left(x,\ \frac{1}{1-i}\right)} = \frac{\vartheta_0((i-1)x,\ i-1)}{-i\,\vartheta_1((i-1)x,\ i-1)} = \frac{\vartheta_3((1-i)x,\ i)}{ie^{-\frac{i\pi}{4}}\,\vartheta_1((1-i)x,\ i)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\Theta((1-i)x)}.$$

Somit ist

$$\frac{\Theta(2x)}{\Theta((1-i)x)} = q^{-\frac{1}{4}}\,\Pi\varphi(i^\alpha x). \tag{7}$$

Ist nun $m = a+bi$ eine primäre komplexe Primzahl, p ihre Norm und verteilt man die zu m teilerfremden Zahlen μ eines Restsystems von m in $\frac{p-1}{4}$ Inbegriffe

$$\mu_1\Gamma,\ \mu_2\Gamma, \ldots,$$

so ist

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \Pi\,\frac{\Theta\left(\frac{2\mu_0(1+i)}{m}\right)}{\Theta\left(\frac{\mu_0(1+i)}{m}\right)}$$

$$\left(\frac{1-i}{m}\right) = \Pi\,\frac{\Theta\left(\frac{(1-i)\,\mu_0(1+i)}{m}\right)}{\Theta\left(\frac{\mu_0(1+i)}{m}\right)},$$

wo μ_0 alle Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ zu durchlaufen hat. Durch Division folgt hieraus

$$\left(\frac{1+i}{m}\right) = \Pi \frac{\Theta\left(\frac{2\mu_0(1+i)}{m}\right)}{\Theta\left((1-i)\frac{\mu_0(1+i)}{m}\right)}$$

und man hat nach (7)

$$\left(\frac{1+i}{m}\right) = q^{-\frac{1}{16}(p-1)} \Pi \varphi\left(i^a \frac{\mu_0(1+i)}{m}\right)$$

$$= q^{-\frac{1}{16}(p-1)} \Pi \varphi\left(\frac{\mu(1+i)}{m}\right),$$

wo μ_0 alle Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ und μ alle zu m teilerfremden Zahlen eines Restsystems von m zu durchlaufen haben. Die Formel (5) ergibt

$$\left(\frac{1+i}{m}\right) = q^{-\frac{1}{16}(p-1)} e^{bm\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{8}\right)} \frac{\vartheta_3\left(\frac{m}{2}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\vartheta_3\left(\frac{1+i}{4}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{m(1+i)}{4}\right)}.$$

Es ist aber

$$\vartheta_3\left(\frac{m}{2}\right) = \vartheta_3\left(\frac{1}{2} + \frac{a-1}{2} + \frac{b}{2} i\right)$$

$$= i^{-b} q^{-\frac{1}{4}b^2} \vartheta_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\vartheta_3\left(\frac{m(1+i)}{4}\right) = \vartheta_3\left(\frac{1+i}{4} + \frac{a-1-b}{4} + \frac{a-1+b}{4} i\right)$$

$$= q^{-\frac{1}{16}(a-1+b)^2} e^{-\frac{i\pi}{8}(1+i)(a-1+b)} \vartheta_3\left(\frac{1+i}{4}\right)$$

$$= i^{-\frac{1}{4}(a-1+b)} q^{\frac{1}{16}(1-p)-\frac{1}{8}ab} \vartheta_3\left(\frac{1+i}{4}\right)$$

$$e^{bm\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{8}\right)} = i^{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2} q^{\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{8}ab}$$

und der Kongruenz

$$a \equiv 1 - b \pmod 4$$

zufolge

$$e^{bm\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{8}\right)} = i^{\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}b^2} q^{\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{8}ab}.$$

Daher wird

$$\left(\frac{1+i}{m}\right) = i^{\frac{1}{4}(a-1-b)-\frac{1}{4}b^2}.$$

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. IX. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Die Radau'sche Theorie der Refraktion

von

Dr. L. de Ball,

Direktor der v. Kuffner'schen Sternwarte.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Oktober 1906.)

Die von Herrn Radau über die astronomische Strahlenbrechung veröffentlichten Arbeiten enthalten, neben einer kritischen Übersicht über die wichtigsten bisher bekannten Theorien der Refraktion,[1] eine Fülle neuer und für die weitere Forschung unentbehrlicher Untersuchungen. Seiner letzten größeren Abhandlung: Essai sur les réfractions astronomiques (Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, t. XIX) hat Herr Radau überdies ausführliche, auf Grund seiner eigenen Theorie berechnete Tafeln beigegeben, welche sich bei mehreren in der neuesten Zeit veröffentlichten Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung als äußerst wertvoll erwiesen haben. Die Berechnung der Refraktion nach den Vorschriften und Tafeln von Herrn Radau im Gegensatze zu der bisher üblichen empfiehlt sich aus mehreren Gründen. Es wird zunächst Rücksicht genommen auf die Schwerekorrektion des

[1] Diese Theorien werden hauptsächlich in den Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques (Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, t. XVI) behandelt. Weitere Belehrung über diesen Gegenstand findet man, außer in der bekannten Preisschrift von C. Bruhns (Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung), auch noch in der von Herrn A. Bemporad in den Memorie della società degli spettroscopisti italiani, Vol. 34, disp. 10, begonnenen Artikelserie: Sulla teoria della refrazione astronomica.

Barometers[1] und auf die Feuchtigkeit der Luft. Letzterer Umstand ist von besonderer Wichtigkeit, denn die vor dem Erscheinen der Radau'schen Tafeln stets begangene Vernachlässigung des Einflusses des Dampfdruckes verursacht Fehler von jährlicher Periode, welche schon bei mittleren Zenithdistanzen einen merkbaren Betrag ausmachen.[2] Ferner berücksichtigen die Radau'schen Tafeln ein in den andern vernachlässigtes Glied, welches bei großen Zenithdistanzen freilich nur einige Zehntel der Bogensekunde ausmacht, das aber auch noch bei mittleren Zenithdistanzen das Zehntel der Bogensekunde beeinflußt und deshalb nicht vernachlässigt werden sollte.[3] Weiterhin läßt sich mit Hilfe der Radau'schen Tafeln die für den jeweiligen Barometer- und Thermometerstand gültige Refraktion aus der für fest gewählte Angaben des Barometers und Thermometers gültigen (der sogenannten mittleren) Refraktion strenger berechnen, als wie solches unter Anwendung der Bessel'schen und Pulkowaer, beziehungsweise der aus diesen abgeleiteten Tafeln möglich ist. Endlich gestatten die Radau'schen Tafeln auch noch, die Änderung der Refraktion zu berechnen, welche beispielsweise einer von der Tages- oder Jahreszeit abhängigen Änderung des Verhältnisses der Temperatur- zu der Dichtigkeitsabnahme der Luft (bei zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche) entspricht; die Möglichkeit, eine derartige für die Theorie der Refraktion sehr wichtige Berechnung ausführen zu können, wird durch keine andere Tafel geboten.

Den Radau'schen Tafeln liegt der von Bessel aus seinen Königsberger Beobachtungen abgeleitete Wert der Refraktionskonstante zu Grunde, welcher aber, wie die Untersuchungen an andern Sternwarten ergeben haben, zu groß ist. Als ich nun mit dem Plane umging, unter Anwendung der von Herrn

---

1 Cleveland Abbe, A correction for gravity in the use of Refraction Tables. Astronomische Nachrichten, Bd. 116. — L. de Ball, The value of the constant of refraction. Monthly Notices of R. A. S., Vol. 66.

2 L. de Ball, Über den Einfluß des Dampfdruckes auf die Refraktion. Astronomische Nachrichten, Bd. 169.

3 Th. v. Oppolzer, Eine Bemerkung über die Berechnung der Refraktion. Astronomische Nachrichten, Bd. 92.

Bauschinger aus sieben neueren Beobachtungsreihen abgeleiteten Refraktionskonstante neue Refraktionstafeln zu berechnen, kam mir der Gedanke, daß die Refraktionsrechnung sich vermutlich einfacher gestalten würde, wenn man das bisher stets befolgte Prinzip, den Ausdruck für die Refraktion als Funktion der Barometerhöhe und der Temperatur zu betrachten und zu entwickeln,[1] durch ein anderes ersetzte. Da nämlich der Ausdruck für die Refraktion bei gegebener Zenithdistanz nur die Dichtigkeit und die Temperatur der Luft als Veränderliche enthält, so erschien es ganz naturgemäß, ihn auch nach diesen zwei Variablen zu entwickeln; ein solches Vorgehen empfahl sich um so mehr, als diejenigen Glieder, in denen die Temperatur explizite vorkommt, selbst bei 80° Zenithdistanz höchstens 0·5% der ganzen Refraktion ausmachen. Das einzige Bedenken, welches man haben könnte, daß nämlich die Dichtigkeit der Luft erst aus den Ablesungen der meteorologischen Instrumente berechnet werden muß, läßt sich durch die Konstruktion geeigneter Tabellen ohne jede Mühe beseitigen. Die Berechnung der Refraktion wird nun auf dem angegebenen Wege in der Tat vereinfacht; außerdem hat sich aus den an der v. Kuffner'schen Sternwarte ausgeführten Versuchen ergeben, daß man bei der Anwendung meiner Tafeln[2] erheblich weniger Zeit für eine Refraktionsrechnung gebraucht als wie bei Benutzung irgend welcher anderer Tafeln.

Die Gelegenheit, jene Formeln mitteilen zu können, zu denen die Entwicklung des Ausdruckes für die Refraktion nach der Dichtigkeit und Temperatur der Luft führt,[3] habe ich nun auch dazu benutzen wollen, den meinen Tafeln zu Grunde

---

[1] Herr Radau hat, abweichend von dem bisherigen Gebrauch, die für verschiedene Temperaturen und Barometerstände gültige Refraktion direkt berechnet und mit Hilfe der so gewonnenen Resultate die numerischen Werte der Differentialquotienten der Refraktion nach der Barometerhöhe und der Temperatur abgeleitet. Er bemerkt hiezu (Essai, p. 45): »Ce n'est que de cette manière que je pouvais espérer d'obtenir avec quelque rigeur les corrections en question pour les grandes distances zénithales, car les formules différentielles, dont on s'était toujours contenté jusqu'à ce jour, n'y suffiraient pas.

[2] L. de Ball, Refraktionstafeln, Leipzig 1906 (W. Engelmann).

[3] Artikel 7 dieser Arbeit.

liegenden Teil der Radau'schen Theorie in einer Form darzustellen, die, wie ich hoffe, geeignet ist, die nicht unerheblichen Schwierigkeiten, welche das Studium der hier in Betracht kommenden Abschnitte der Originalabhandlungen bietet, aus dem Wege zu räumen. Um dieses Ziel zu erreichen, war es wiederholt nötig, durch neue Erörterungen und Entwicklungen die Ausführungen Herrn Radau's zu ergänzen. Außerdem habe ich die Ableitung der Radau'schen Formeln teilweise abgeändert. In einigen Fällen wurden diese Formeln selbst vereinfacht, beziehungsweise durch andere, für die Rechnung bequemere ersetzt; dies bezieht sich u. a. auf die Berechnung der Koeffizienten in der nach den ungeraden Potenzen der Tangente der Zenithdistanz entwickelten Reihe für die Refraktion und auf die Berechnung der für die Ermittlung der Refraktion bei großen Zenithdistanzen auftretenden Funktion $\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-x^2}dx$. Endlich möchte ich noch erwähnen, daß ich auch stets auf die praktische Anwendung der Formeln Rücksicht genommen habe. Um die jetzt beginnende Auseinandersetzung der Theorie möglichst übersichtlich zu gestalten, sollen zunächst einige Formeln abgeleitet werden, deren man in der Folge bedarf; diesem Zwecke dienen die drei ersten Artikel der vorliegenden Arbeit.

1. Die Theorie der Refraktion beruht auf der Annahme, daß die Atmosphäre aus unendlich dünnen, zum Mittelpunkte der Erde konzentrischen Kugelschichten bestehe; die Dichtigkeit der Luft wird innerhalb einer Schicht als konstant, aber von Schicht zu Schicht als stetig veränderlich betrachtet. Es sei P der Druck, t die Temperatur, Δ die Dichtigkeit der Luft in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde und γ der dieser Entfernung entsprechende Wert der Beschleunigung durch die Schwere; dann ist die Änderung des Luftdruckes, welche einem Übergange von dem Abstande r zu dem Abstande $r+dr$ entspricht, gleich

$$dP = -\gamma\Delta dr. \tag{1}$$

Wenn ferner P_0, t_0, Δ_0, γ_0 der Reihe nach den Luftdruck, die Temperatur, die Dichtigkeit der Luft und die Schwere am

Beobachtungsorte bedeuten und wenn l_0 die Höhe einer Luftsäule angibt, welche ebenfalls den Druck P_0 ausübt und für deren sämtliche Teile die Temperatur, die Dichtigkeit und die Schwere dieselben Werte haben wie am Beobachtungsorte, so gilt die Gleichung

$$P_0 = \gamma_0 l_0 \Delta_0. \tag{2}$$

Als Maß des Luftdruckes wählt man den Druck einer Quecksilbersäule von $0^{m}760$ Höhe und der Temperatur 0° C. unter der geographischen Breite 45° und im Meeresniveau, oder kurz ausgedrückt den Druck einer Atmosphäre. Wenn m die Dichtigkeit des Quecksilbers für die Temperatur 0° bezeichnet und Γ die durch die Schwere im Meeresniveau und unter der Breite 45° bewirkte Beschleunigung angibt, so ist der Druck einer Atmosphäre durch die Gleichung bestimmt

$$P' = 0^{m}760\,\Gamma m.$$

Es läßt sich nun auch leicht die Höhe einer Säule trockener Luft von der Temperatur 0° und der Dichtigkeit Δ', deren sämtliche Teile als unter dem Einflusse der Schwere Γ stehend angenommen werden, so bestimmen, daß der Druck dieser Säule ebenfalls gleich P' ist. Wird nämlich die gesuchte Höhe mit l' bezeichnet, so hat man

$$P' = \Gamma l' \Delta' \tag{3}$$

also, wenn für P' sein durch die vorige Gleichung festgelegter Wert eingesetzt wird,

$$l' = 0^{m}760\,\frac{m}{\Delta'}.$$

Nach Regnault wiegt aber ein Kubikmeter trockener Luft bei 0° C. und 760^{mm} Barometerhöhe $1292^{g}74$ und ein Kubikmeter Quecksilber bei 0° C. 13595930^{g}; somit ist

$$l' = \frac{13595930}{1292 \cdot 74}\,0^{m}760 = 7993^{m}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß P' eine Konstante ist,

$$d\left(\frac{P}{P'}\right) = -\frac{\gamma\Delta}{\Gamma l'\Delta'} dr. \tag{4}$$

Ferner folgt aus (2) und (3)

$$\frac{P_0}{P'} = \frac{\gamma_0 l_0 \Delta_0}{\Gamma l'\Delta'}. \tag{5}$$

Setzt man

$$\frac{P}{P'} = p, \qquad \frac{\Delta}{\Delta'} = \rho, \qquad \frac{\gamma}{\Gamma} = g$$

$$\frac{P_0}{P'} = p_0, \qquad \frac{\Delta_0}{\Delta'} = \rho_0, \qquad \frac{\gamma_0}{\Gamma} = g_0$$

und nennt p den Luftdruck, ρ die Dichtigkeit der Luft, g die Schwere in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde, also p_0 den Luftdruck, ρ_0 die Dichtigkeit der Luft, g_0 die Schwere am Beobachtungsorte, so ist damit als Einheit des Luftdruckes der Druck einer Atmosphäre, als Einheit der Dichtigkeit die Dichtigkeit der trockenen Luft von der Temperatur 0° C. und unter dem Druck einer Atmosphäre, als Einheit der Schwere die Schwere unter der geographischen Breite 45° und im Meeresniveau gewählt, und die Gleichungen (4) und (5) lassen sich schreiben

$$l'dp = -g\rho dr \tag{6}$$

$$l'p_0 = g_0\rho_0 l_0 \tag{7}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{l_0}{p_0} dp = -\frac{g\rho}{g_0\rho_0} dr = -\frac{r_0^2\rho}{r^2\rho_0} dr = r_0 \frac{\rho}{\rho_0} d\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

oder, wenn

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1-\omega, \qquad \frac{r_0}{r} = 1-s$$

gesetzt wird,

$$dp = -p_0 \frac{r_0}{l_0} (1-\omega) ds. \tag{8}$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit einer im nächsten Artikel abzuleitenden Differentialgleichung zwischen p und ω wird sich eine Beziehung zwischen s und ω, also nach der Bedeutung dieser Größen, das Gesetz ergeben, nach dem sich die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe ändert. Zunächst aber soll die Bestimmung der in der Differentialgleichung (8) vorkommenden Größe l_0 vorgenommen werden. Dazu ist nun die Kenntnis einer zwischen dem Druck, der Dichtigkeit und der Temperatur der Luft stattfindenden Beziehung erforderlich, welche sich in folgender Weise gewinnen läßt. Die Luft enthält stets eine gewisse Menge Wasserdampf. Nach den Versuchen Dalton's ist aber der Druck eines Gemenges von trockener Luft und Dampf bei der Temperatur t gleich der Summe der Drucke, welche diese beiden Substanzen, bei derselben Temperatur t, jede für sich ausüben. Ist also p der Druck, welchen die feuchte Luft ausübt, und π der Druck des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes, so ist $p-\pi$ der Druck, welchen die trockene Luft allein ausübt. Wenn aber a den Ausdehnungskoeffizienten der trockenen Luft bedeutet, so ist für diese (nach dem Gay-Lussac-Mariotteschen Gesetz) der Quotient: Druck dividiert durch das Produkt aus Dichtigkeit und dem Aggregat $1+at$ gleich einer Konstanten. Da nach der oben getroffenen Bestimmung für $p=1$ und $t=0°$ C. die Dichtigkeit der trockenen Luft gleich 1 werden soll, so muß die eben erwähnte Konstante gleich 1 sein; somit ist für trockene Luft von der Temperatur t die

$$\text{Dichtigkeit} = \frac{\text{Druck}}{1+at}. \tag{A}$$

Bezeichnet man die Dichtigkeit der trockenen Luft von der Temperatur t und unter dem Druck $p-\pi$ mit ρ_1, so gilt demnach die Gleichung

$$\rho_1 = \frac{p-\pi}{1+at}.$$

Würde der Wasserdampf von der Temperatur t, dessen Druck mit π bezeichnet wurde, durch trockene Luft von der Temperatur t ersetzt, welche ebenfalls den Druck π ausübt, so

würde nach der Gleichung *(A)* die Dichtigkeit dieser Luft gleich $\frac{\pi}{1+at}$ sein. Der Versuch lehrt aber, daß das Gewicht eines Volumens Wasserdampfes nur 0·622 des Gewichtes des gleichen Volumens trockener Luft von gleicher Temperatur und unter gleichem Druck beträgt; für gleiche Temperatur und gleichen Druck ist also auch die Dichtigkeit des Wasserdampfes gleich 0·622 mal der Dichtigkeit der trockenen Luft. Somit ergibt sich für die Dichtigkeit ρ_2 des Wasserdampfes, dessen Temperatur gleich t und dessen Druck gleich π ist,

$$\rho_2 = 0\cdot 622\,\frac{\pi}{1+at}.$$

Die oben mit ρ bezeichnete Dichtigkeit der feuchten Luft ist nun gleich der Summe $\rho_1+\rho_2$ und man erhält durch Substitution der Werte von ρ_1 und ρ_2 die gesuchte Beziehung

$$\rho = \frac{p-0\cdot 378\,\pi}{1+at}.$$

Ersetzt man 0·378 durch $\frac{3}{8}$, so folgt

$$p = \frac{\rho(1+at)}{1-\frac{3}{8}\,\frac{\pi}{p}}. \tag{9}$$

Wenn also die für den Beobachtungsort gültige Werte von $p, \pi, \ldots$ durch den angehängten Index 0 gekennzeichnet werden, so ist

$$p_0 = \frac{\rho_0(1+at_0)}{1-\frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{p_0}}. \tag{10}$$

Mit Benutzung dieser Gleichung erhält man aus (7)

$$l_0 = \frac{l'}{g_0}\left(1+at_0+\frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{p_0}\right). \tag{11}$$

Zur vollständigen Bestimmung von l_0 erübrigt also nur noch diejenige von g_0; es empfiehlt sich jedoch, zuerst die in der Gleichung (8) auftretende Entfernung r_0 des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde zu bestimmen. Bezeichnet R die Entfernung eines Punktes im Meeresniveau und unter der Breite φ von dem Mittelpunkte der Erde und ist h die Höhe des Beobachtungsortes über dem Meeresniveau, so ist

$$r_0 = R+h.$$

Bezeichnen aber a und b beziehungsweise den Äquatorial- und Polarhalbmesser der Erde und wird zur Abkürzung

$$\frac{a^2}{b^2}-1 = e^2$$

gesetzt, so ist bekanntlich

$$\frac{R}{a} = 1-\frac{1}{2}e^2 \sin^2\varphi+\ldots,$$

wo auf der rechten Seite statt der geozentrischen die geographische Breite eingeführt wurde. Nimmt man

$$a\left(1-\frac{1}{4}e^2\right) = 6366000^{m}, \qquad \frac{e^2}{4-e^2} = 0\cdot00168$$

an, so wird

$$R = 6366000^{m}(1+0\cdot00168 \cos 2\varphi).$$

Folglich erhält man, wenn auch h in Metern ausgedrückt ist,

$$r_0' = 6366000^{m}(1+0\cdot00168 \cos 2\varphi+0\cdot000000157\,h). \qquad (12)$$

Was nun die Bestimmung von g_0 betrifft, so findet Helmert aus einer großen Zahl von Schwerebestimmungen für die auf das Meeresniveau reduzierte Beschleunigung durch die Schwere den Wert $9^{m}80604-0^{m}02595 \cos 2\varphi$, wo φ die geographische Breite bedeutet. Um aus diesem Werte, der mit (γ_0) bezeichnet werden möge, die für einen in der Höhe h über dem Meeresniveau liegenden Beobachtungsort auf dem Festlande gültige Schwere γ_0 zu erhalten, ist auf die Anziehung des Festlandes

Rücksicht zu nehmen, und zwar genügt es für unsere Zwecke, die folgende, von Poisson abgeleitete Formel anzuwenden:

$$\gamma_0 = (\gamma_0)\left[1-\left(2-\frac{3\delta'}{2\delta}\right)\frac{h}{R}\right].$$

Hierin hat R die oben angegebene Bedeutung, ferner bezeichnet δ' die Dichtigkeit an der Oberfläche und δ die mittlere Dichtigkeit der Erde. Nimmt man $\delta' = 0\cdot5\,\delta$ an und wählt für R den mittleren Wert 6366000^{m}, so ergibt sich nach Substitution des Wertes von (γ_0)

$$\gamma_0 = 9^{m}80604\,(1-0\cdot00265\cos 2\varphi-0\cdot000000196\,h).$$

Da nun

$$g_0 = \frac{\gamma_0}{\Gamma}$$

ist und Γ den Wert von (γ_0) für $\varphi = 45°$ bedeutet, also gleich $9^{m}80604$ ist, so erhält man

$$g_0 = 1-0\cdot00265\cos 2\varphi-0\cdot000000196\,h. \qquad (13)$$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung (11) gibt den Wert von l_0, und zwar folgt, wenn der mit a bezeichnete Ausdehnungskoeffizient der trockenen Luft nach Regnault gleich 0·003663 angenommen wird,

$$l_0 = l'\left(1+0\cdot003663\,t_0+\frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{p_0}+0\cdot00265\cos 2\varphi+\right.$$
$$\left.+0\cdot000000196\,h\right). \qquad (14)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (12) und mit Einsetzung des früher für l' gefundenen Wertes $l' = 7993^{m}$ erhält man schließlich für den reziproken Wert des in der Gleichung (8) vorkommenden Quotienten $\frac{r_0}{l_0}$

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7993}{6366000}\left(1+0\cdot003663\,t_0+\frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{p_0}+\right.$$
$$\left.+0\cdot00097\cos 2\varphi+0\cdot000000039\,h\right)$$

oder mit vollkommen ausreichender Genauigkeit

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7993}{6366000}\left(1+0\cdot 003663\, t_0 + \frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{p_0} + \right.$$
$$\left. +0\cdot 0010 \cos 2\varphi\right). \quad (15)$$

2. Um die im vorigen Artikel angekündigte Differentialgleichung zwischen p und ω ableiten zu können, ist man genötigt, auf Grund der bei Ballonfahrten ausgeführten Messungen des Luftdruckes, der Temperatur und des Dunstdruckes sowie der hieraus berechneten Werte der Dichtigkeit der Luft (Artikel 3) einige Hypothesen zu machen. Die seit mehreren Jahren sehr intensiv betriebene Erforschung der höheren Luftschichten mittels Drachen, bemannten und unbemannten Ballons muß uns zweifellos mit der Zeit ein Beobachtungsmaterial verschaffen, mit dessen Hilfe es möglich sein wird, die im folgenden gemachten Annahmen zu verbessern; immerhin aber kann man sagen, daß die unter Benutzung der nachstehend angegebenen Hypothesen berechneten Werte der Refraktion den astronomischen Beobachtungen in erträglicher Weise Genüge leisten.

Die erste Annahme, welche gemacht werden soll, ist, daß für alle Schichten der Atmosphäre

$$\frac{\pi}{p} = \frac{\pi_0}{p_0} \quad (16)$$

vorausgesetzt wird. Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt dann

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho(1+at)}{\rho_0(1+at_0)},$$

oder, da

$$a = 0\cdot 003663 = \frac{1}{273}$$

ist,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\left(1 - \frac{t_0 - t}{273+t_0}\right). \quad (17)$$

Macht man die weitere Annahme, daß bei zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche die Änderung der Temperatur derjenigen der Dichtigkeit proportional ist,[1] so hat man

$$t_0 - t = C(\rho_0 - \rho), \tag{18}$$

wo C noch von der Tages- oder Jahreszeit abhängig gedacht werden kann.

Wenn diese Gleichung in aller Strenge richtig wäre, so würde, wenn an der Grenze der Atmosphäre ($\rho = 0$) die Temperatur $t = -273° + T$ herrschte,

$$t_0 + 273 - T = C\rho_0 \tag{18*}$$

sein und man erhielte aus den beiden letzten Gleichungen

$$\frac{t_0 - t}{273 + t_0} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0}\left(1 - \frac{T}{t_0 + 273}\right).$$

Setzt man

$$1 - \frac{T}{t_0 + 273} = f, \tag{19}$$

so wird[2]

$$\frac{t_0 - t}{273 + t_0} = f\,\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = f\omega \tag{20}$$

[1] Th. v. Oppolzer, Über die astr. Refr., p. 11 (Denkschriften der math.-naturw. Klasse der kaiserl. Akad. der Wissensch., Bd. 53).

[2] Die durch die Gleichung (20) dargestellte Beziehung zwischen der Temperatur- und Dichtigkeitsänderung ist unter dem Namen der Ivory'schen Hypothese bekannt. Nimmt man mit Ivory für f einen konstanten Wert an, so wird T, also auch die Temperatur der Grenzschicht der Atmosphäre $= -273° + T$ in einer durch die Gleichung (19) bestimmten Weise von der Temperatur an der Oberfläche der Erde t_0 abhängig gedacht. Wird jedoch T auf irgend eine andere Weise als veränderlich vorausgesetzt oder auch als konstant angenommen, so ändert sich f mit t_0, d. h. der Wert von f wird abhängig von der Tages- und Jahreszeit. Es möge hier noch eine Bemerkung von Herrn J. Hann (Lehrbuch der Meteorologie, 2. Aufl., p. 124) Platz finden, welche lautet: »Die zahlreichen neueren Ballonaufstiege bis zu sehr großen Höhen haben noch ein anderes sehr unerwartetes Resultat ergeben ... Früher dachte man, daß schon in Höhen von 7 bis 9 *km* die Temperatur das ganze Jahr hindurch nahezu konstant sei, während die Jahresschwankung in dieser Höhe kaum schon abgenommen hat.«

und nach (17)

$$\frac{p}{p_0} = (1-\omega)(1+f\omega). \tag{21}$$

Es ändern sich aber p und ρ, also auch p und ω von Schicht zu Schicht; wenn nun p_0 und f gegebene Werte haben, so erhält man aus (21) die gesuchte Differentialgleichung

$$dp = -p_0[(1-f)+2f(1-\omega)]d\omega.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit (8) ergibt sich

$$\frac{r_0}{l_0} ds = (1-f)\frac{d\omega}{1-\omega} + 2f d\omega.$$

Integriert man diese Gleichung und bestimmt die Integrationskonstante durch die Bedingung, daß für den Beobachtungsort $\omega = s = 0$ sein muß, so erhält man die für die Folge wichtige Beziehung

$$\frac{r_0}{l_0} s = -(1-f)\log(1-\omega)+2f\omega. \tag{22}$$

3. In dem Vorigen war wiederholt von dem Druck und der Dichtigkeit der Luft die Rede; es soll nun gezeigt werden, in welcher Weise sich diese aus den Ablesungen der meteorologischen Instrumente bestimmen lassen. Ist $\mathfrak{B}$ die wahre Barometerhöhe, τ die Temperatur des Quecksilbers, m' die Dichtigkeit des Quecksilbers bei der Temperatur τ und γ_0 die Schwere für den Beobachtungsort, so erhält man für den Druck der Luft am Beobachtungsort

$$P_0 = \gamma_0 m' \mathfrak{B}. \tag{23}$$

Die abgelesene Barometerhöhe B ist im allgemeinen von der wahren verschieden. Nimmt man an, daß B schon wegen eventueller Teilungsfehler der Skala oder des Nonius und auch wegen einer etwaigen, durch die Kapillarität bewirkten Depression des Quecksilbers korrigiert worden ist, so muß, damit $\mathfrak{B} = B$ sei, außerdem noch die Temperatur des Quecksilbers derjenigen gleich sein, bei der die Skala geteilt wurde. Wurde die Skala bei der Temperatur 0° C. geteilt und

sind die Teilstriche auf einer messingenen Röhre eingraviert, welche das eigentliche Barometerrohr fast in seiner ganzen Länge umgibt, so erhält man die wahre Barometerhöhe $\mathfrak{B}$ aus der bei der Temperatur des Quecksilbers τ abgelesenen mittels der Formel

$$\mathfrak{B} = B(1+0\cdot 000019\tau).$$

Die Dichtigkeit m' des Quecksilbers für die Temperatur τ ergibt sich aus der für die Temperatur 0° gültigen Dichtigkeit m mit Hilfe der Formel

$$m' = \frac{m}{1+0\cdot 000181\tau}.$$

Somit folgt aus (23), wenn die Skala bei der Temperatur 0° geteilt ist,

$$P_0 = \gamma_0 \frac{mB(1+0\cdot 000019\tau)}{1+0\cdot 000181\tau} = \gamma_0 mB(1-0\cdot 000162\tau).$$

Oben wurde für den Druck P' einer Atmosphäre der Ausdruck gefunden:

$$P' = \Gamma m\, 760^{\mathrm{mm}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß B in Millimetern ausgedrückt ist, ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen, wenn zur Abkürzung

$$\frac{P_0}{P'} = p_0$$

gesetzt wird und somit p_0 den Druck der Luft am Beobachtungsort in Einheiten des Druckes einer Atmosphäre bedeutet,

$$p_0 = \frac{\gamma_0 B(1-0\cdot 000162\tau)}{760\,\Gamma}. \tag{24}$$

Substituiert man für $\frac{\gamma_0}{\Gamma} = g_0$ seinen durch die Gleichung (13) bestimmten Wert, so folgt

$$p_0 = (1-0\cdot 00265\cos 2\varphi - 0\cdot 000000196\,h)\frac{B(1-0\cdot 000162\tau)}{760}. \tag{25}$$

Der Gleichung (10) zufolge hat man aber auch, wenn $a = 0 \cdot 003663$ gesetzt wird,

$$p_0 = \rho_0 \frac{1 + 0 \cdot 003663\, t_0}{1 - \frac{3}{8} \frac{\pi_0}{p_0}}. \tag{26}$$

Mit Hilfe eines Psychrometers läßt sich die Höhe einer Quecksilbersäule bestimmen, deren Druck gleich ist demjenigen des in der Luft vorhandenen Wasserdampfes; der Druck selbst ergibt sich aus der Gleichung (25), wenn man für B die Höhe jener Quecksilbersäule, ausgedrückt in Millimetern, substituiert. Bezeichnet man nun diese Höhe ebenfalls mit π_0, so kann in der Gleichung (26) $\frac{\pi_0}{p_0} = \frac{\pi_0}{B}$ gesetzt werden. Es ergibt sich dann aus (25) und (26)

$$\rho_0 = \frac{B}{760} \frac{1 - 0 \cdot 000162\, t_0}{1 + 0 \cdot 003663\, t_0} [1 + 0 \cdot 000162 (t_0 - \tau) -$$
$$- 0 \cdot 00265 \cos 2\varphi - 0 \cdot 000000196\, h] \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\pi_0}{B}\right). \tag{27}$$

Wird der Wert, welchen ρ_0 für $B = 760^{mm}$, $t_0 = \tau = 0°$ C., $h = 0$, $\varphi = 45°$, $\pi_0 = 6^{mm}$ annimmt, mit ρ'_0 bezeichnet, so folgt

$$\rho'_0 = 1 - \frac{3}{8} \frac{6}{760}. \tag{28}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{\rho_0}{\rho'_0} \frac{1 + 0 \cdot 003663\, t_0}{1 - 0 \cdot 000162\, t_0} =$$
$$= \frac{B}{760} [1 + 0 \cdot 000162 (t_0 - \tau) - 0 \cdot 00265 \cos 2\varphi -$$
$$- 0 \cdot 000000196\, h] + \frac{1}{760} \frac{3}{8} \left(6 \frac{B}{760} - \pi_0\right).$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung läßt sich sowohl in den Produkten aus B und den von $t_0 - \tau$, h und $\cos 2\varphi$ abhängigen

Gliedern als auch in dem letzten Gliede die beobachtete Barometerhöhe B durch die mittlere für den Beobachtungsort gültige Barometerhöhe B_m ersetzen. Schreibt man demnach zur Abkürzung

$$\beta = B + B_m[0\cdot000162\,(t_0 - \tau) - 0\cdot00265\cos 2\varphi - \\ - 0\cdot000000196\,h] + \frac{3}{8}\left(6\,\frac{B_m}{760} - \pi_0\right), \quad (29)$$

so erhält man

$$\frac{\rho_0}{\rho_0'} = \frac{\beta}{760}\,\frac{1 - 0\cdot000162\,t_0}{1 + 0\cdot003663\,t_0}. \quad (30)$$

4. Ein Lichtstrahl bB treffe in B auf die Grenzfläche FF zweier Medien M und M' und werde nach Bc gebrochen. Aus physikalischen Versuchen ergeben sich dann folgende drei Sätze: 1. Bc liegt mit Bb und der Normalen BN in einer Ebene. 2. Bezeichnen i und ε die Winkel, welche beziehungsweise der einfallende und der gebrochene Strahl mit der Normalen BN bilden, und bedeutet ν eine Konstante, so ist

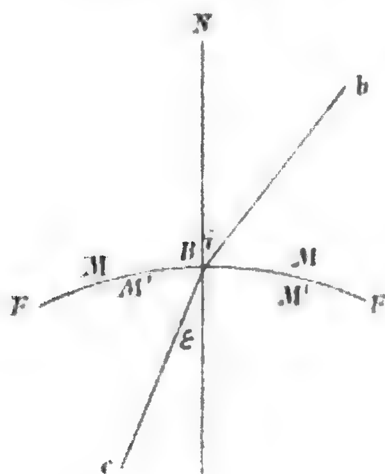


Fig. 1.

$$\frac{\sin i}{\sin \varepsilon} = \nu. \quad (31)$$

Die Konstante ν wird der Brechungsexponent des Mediums M' in Bezug auf das Medium M genannt; ist $\nu > 1$, so bezeichnet man M' als optisch dichter wie M. 3. Es seien μ' und μ die Brechungsexponenten von M', beziehungsweise M in Bezug auf ein Medium L, dann ist

$$\frac{\mu'}{\mu} = \nu. \quad (32)$$

Aus den zwei letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\sin i}{\sin \varepsilon} = \frac{\mu'}{\mu}. \quad (33)$$

Ist unter dem Medium L der luftleere Raum zu verstehen, so werden μ' und μ kurzweg die Brechungsexponenten der Medien M', beziehungsweise M genannt.

Wenn μ' sich nur wenig von μ unterscheidet, so ist auch die Differenz $i-\varepsilon$ klein; setzt man

$$\mu' = \mu + d\mu, \qquad \varepsilon = i - di,$$

so folgt aus (33)

$$di = \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tang} i. \tag{34}$$

Es werde jetzt angenommen, daß die Atmosphäre aus einer Reihe sehr dünner Kugelschichten $M_1, M_2, \ldots$ bestehe, deren Zentrum der Mittelpunkt der Erde C sei. Wir setzen ferner voraus, daß der Brechungsexponent innerhalb jeder Schicht konstant ist und sich von Schicht zu Schicht nur wenig ändert. Ein Lichtstrahl Sa, der, aus dem luftleeren Raume kommend, die Grenze der Atmosphäre in a trifft, werde in der ersten Schicht nach ab gebrochen, in der zweiten nach bc, in der dritten nach cE u. s. w. Ist E ein Punkt der Erdoberfläche, so wird ein dort befindlicher Beobachter den Stern S, welchen wir als die Lichtquelle annehmen, in der Richtung EcS' wahrnehmen. Der Winkel ZES', wo Z das Zenith des Beobachters in E bezeichnet, wird die scheinbare Zenithdistanz des Sternes genannt.

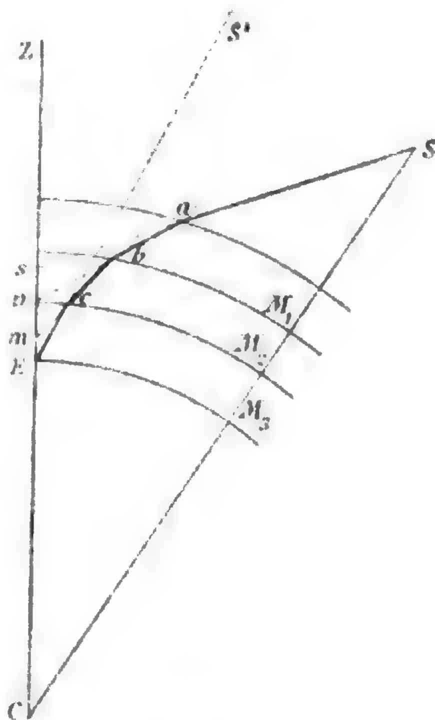


Fig. 2.

Aus dem Dreiecke Ccb folgt, wenn $Cb = r_1$, $Cc = r_2$, der Winkel $Ccb = 180° - i_2$ und der Winkel $Cbc = \varepsilon_1$ gesetzt wird,

$$\frac{\sin i_2}{\sin \varepsilon_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Ferner ergibt sich aus der Gleichung (33), wenn der Winkel Cba mit $180° - i_1$ und die Brechungsexponenten der

Medien M_1 und M_2 mit μ_1, beziehungsweise μ_2 bezeichnet werden,

$$\frac{\sin i_1}{\sin \varepsilon_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$r_2 \mu_2 \sin i_2 = r_1 \mu_1 \sin i_1.$$

Da diese Gleichung für je zwei aufeinander folgende Schichten gilt, so gilt sie auch für zwei beliebige von ihnen. Nimmt man die Schichten als unendlich dünn an, so wird der Weg des Lichtes eine Kurve und die letzte Gleichung drückt jetzt folgendes aus: Bedeutet r die Entfernung eines Punktes der Kurve vom Mittelpunkte der Erde, μ den ihm entsprechenden Wert des Brechungsexponenten der Luft, i den Winkel zwischen der in dem betrachteten Punkte zur Kurve gezogenen Tangente und seiner Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte der Erde, so hat das Produkt $r\mu \sin i$ für alle Punkte der Kurve denselben Wert. In dem Punkte E, in dem das Licht den Beobachter trifft, ist aber $r = EC = r_0$, $\mu = \mu_0$, $i = z$, wo z die scheinbare Zenithdistanz des Sternes bedeutet; somit ist

$$r\mu \sin i = r_0 \mu_0 \sin z. \tag{35}$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung erhält man aus (34)

$$di = \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z}} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{36}$$

Man verlängere (Fig. 2) den die Grenzschicht der Atmosphäre in a treffenden Strahl Sa und den gebrochenen Strahl ab bis zum Durchschnitt s, beziehungsweise v mit CZ. Bezeichnet man die Winkel Zsa, Zva mit ζ, beziehungsweise z_1, so ist $\zeta - z_1$ gleich dem Werte, den di im Punkte a hat; ferner ist der dem Punkte a entsprechende Wert von μ gleich 1. Da für den Beobachter E an der Oberfläche der Erde $z_1 = z$ und $\mu = \mu_0$ ist, so erhält man durch Integration der Gleichung (36)

$$\zeta = z + \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z}} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{37}$$

Wäre keine Atmosphäre vorhanden, so würde der Beobachter in E die wahre Zenithdistanz ZES beobachten; bezeichnet man die wahre Zenithdistanz mit z_0 und den Winkel sSE mit σ, so ist

$$z_0 = \zeta - \sigma. \tag{38}$$

Wegen der im Verhältnis zu den Entfernungen der Himmelskörper kleinen Erddimensionen ist σ selbst für den Mond ein sehr kleiner Winkel. Setzt man noch $Es = x$, $ES = \Delta$, so folgt aus dem Dreiecke sSE

$$\sigma \sin 1'' = \frac{x}{\Delta} \sin \zeta = \frac{x}{r_0} \frac{r_0}{\Delta} \sin \zeta.$$

Aus dem Dreiecke saC ergibt sich, wenn $aC = H$ und der Winkel $saC = \varphi$ gesetzt wird,

$$r_0 + x = \frac{H \sin \varphi}{\sin \zeta}.$$

Oben wurde aber gefunden, daß das Produkt $r\mu \sin i$ in allen Punkten eines Lichtstrahles denselben Wert besitze. Im Punkte a des Strahles $SabcE$ ist nun $r = H$, $\mu = 1$, $i = \varphi$ und im Punkte E ist $r = r_0$, $\mu = \mu_0$, $i = z$; somit ist

$$H \sin \varphi = r_0 \mu_0 \sin z.$$

Demnach wird die vorige Gleichung

$$1 + \frac{x}{r_0} = \frac{\mu_0 \sin z}{\sin \zeta}$$

und die Gleichung für σ verwandelt sich in

$$\sigma = \frac{r_0}{\Delta \sin 1''} (\mu_0 \sin z - \sin \zeta).$$

Bezeichnet man das auf der rechten Seite der Gleichung (37) befindliche Integral zur Abkürzung mit $\mathfrak{R}$, so wird

$$\zeta = z + \mathfrak{R}$$

und man erhält

$$\sigma = \frac{r_0}{\Delta \sin 1''}\left[(\mu_0 - 1)\sin z - 2\sin\frac{1}{2}\mathfrak{R}\cos\left(z + \frac{1}{2}\mathfrak{R}\right)\right]$$

Die später folgende Berechnung des Integrals $\mathfrak{R}$ lehrt, daß man $2\sin\frac{1}{2}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\sin 1''$ setzen kann. Ferner ist es erlaubt, Δ gleich der Entfernung des Gestirnes vom Mittelpunkte der Erde anzunehmen; bezeichnet dann π die Horizontalparallaxe des Gestirnes, so wird

$$\sigma = \pi\left[(\mu_0 - 1)\sin z - \mathfrak{R}\sin 1''\cos\left(z + \frac{1}{2}\mathfrak{R}\right)\right]. \tag{39}$$

Um also für gegebene Werte von π und z den Winkel σ berechnen zu können, muß man μ_0 und $\mathfrak{R}$ kennen; in welcher Weise sich μ_0 und $\mathfrak{R}$ bestimmen lassen, wird im folgenden gezeigt werden. Hier sei aber schon bemerkt, daß σ für die Sonne und die Planeten verschwindend klein ist; für den Mond beträgt σ bei $z = 84°$ nur 0ʺ1 und bei $z = 90°$ rund 1ʺ. Die durch die Gleichung (38) bestimmte wahre Zenithdistanz z_0 ist also nicht wesentlich von dem durch die Gleichung (37) bestimmten Winkel ζ verschieden. Aus diesem Grunde wird gewöhnlich der Winkel ζ als wahre Zenithdistanz bezeichnet.

5. Es handelt sich jetzt darum, den Wert des in (37) vorkommenden Integrals

$$\mathfrak{R} = \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z}} \frac{d\mu}{\mu} =$$

$$= \int_1^{\mu_0} \frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 z} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}} \frac{d\mu}{\mu} \tag{40}$$

zu bestimmen. Aus physikalischen Versuchen ergibt sich, daß der Ausdruck μ^2-1, also die sogenannte brechende Kraft der Luft, der Dichtigkeit proportional gesetzt werden kann. Bezeichnet demnach $2c$ eine Konstante und ρ die Dichtigkeit der Luft in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde, so ist

$$\mu^2 = 1+2c\rho. \tag{41}$$

Wird also die Dichtigkeit der Luft am Beobachtungsort mit ρ_0 bezeichnet, so gilt auch die Gleichung

$$\mu_0^2 = 1+2c\rho_0.$$

Somit erhält man, wenn noch

$$1-\frac{\rho}{\rho_0} = \omega, \qquad \frac{c\rho_0}{1+2c\rho_0} = \alpha \tag{42}$$

gesetzt wird,

$$\frac{\mu^2}{\mu_0^2} = 1-2\alpha\omega. \tag{43}$$

Die logarithmische Differentiation dieser Gleichung gibt

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{\alpha\, d\omega}{1-2\alpha\omega}. \tag{44}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (43) und (44) läßt sich in dem Integral (40) die Variable μ durch ω ersetzen. Um die neuen Integrationsgrenzen zu bestimmen, berücksichtige man, daß nach (41) der Wert $\mu = 1$ dem Werte $\rho = 0$ entspricht; für $\rho = 0$ ist aber nach (42) $\omega = 1$. Der Wert $\mu = \mu_0$ gilt für den Beobachtungsort und für diesen ist $\rho = \rho_0$, folglich $\omega = 0$. Wird noch

$$\frac{r_0}{r} = 1-s \tag{45}$$

gesetzt und die Gleichung

$$\frac{1}{\sin^2 z} = 1+\operatorname{cotg}^2 z$$

benutzt, so ergibt sich

$$\mathfrak{R} = \int_0^1 \frac{\alpha(1-s)(1-2\alpha\omega)^{-\frac{3}{2}}\,d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z+(2s-2\alpha\omega-s^2)(1-2\alpha\omega)^{-1}}}.$$

Dieses Integral läßt sich vereinfachen, wie jetzt gezeigt werden soll. Zuvor aber erscheint es wünschenswert, sich eine Vorstellung über die Größe von α und s zu verschaffen. Die physikalischen Versuche ergeben für den Brechungsexponenten der Luft bei der Dichtigkeit 1 den Wert $\mu = 1\cdot0003$; den Gleichungen (41) und (42) zufolge ist somit $\alpha = 0\cdot0003$. Der Wert von α ändert sich etwas mit der Dichtigkeit der Luft und beträgt im Maximum 0·00035. Die durch die Gleichung (45) definierte Größe s ist an der Oberfläche der Erde gleich 0 und würde für $r = \infty$ gleich 1 werden. Die Höhe der Atmosphäre aber, insoweit letztere noch einen merklichen Beitrag zur Refraktion geben kann, darf zu 50 *km* veranschlagt werden;[1] nimmt man also für r_0 den mittleren Radius der Erde (6366 *km*) an, so ist r höchstens gleich 6416 *km*, und dem entspricht als Maximalwert von s der Betrag 0·0078. Vernachlässigt man nun in dem Zähler des oben unter dem Integralzeichen vorkommenden Bruches die Glieder von der Ordnung $\alpha^2 s$ und von höherer Ordnung, so wird

$$\alpha(1-s)(1-2\alpha\omega)^{-\frac{3}{2}} = \alpha(1-s+3\alpha\omega).$$

Ferner erhält man, wenn in dem Nenner des genannten Bruches das Glied von der Ordnung $s^2\alpha$ und die Glieder höherer Ordnung unberücksichtigt bleiben,

$$(2s-2\alpha\omega-s^2)(1-2\alpha\omega)^{-1} = 2s-2\alpha\omega-s^2+4s\alpha\omega-4\alpha^2\omega^2$$

oder, wenn

$$s-\alpha\omega = u \tag{46}$$

gesetzt wird,

$$(2s-2\alpha\omega-s^2)(1-2\alpha\omega)^{-1} = 2u-(u-\alpha\omega)^2.$$

[1] Nach J. Hann (Lehrbuch der Meteorologie, II. Aufl., p. 9) beträgt die Luftdichte in dieser Höhe nur mehr 0·0004 von jener an der Erdoberfläche.

Dividiert man noch den Wert des Integrals $\mathfrak{R}$ durch $\sin 1''$ und setzt

$$\frac{\alpha}{\sin 1''} = \alpha'',$$

so ergibt sich für $\mathfrak{R}$, ausgedrückt in Bogensekunden,

$$\mathfrak{R} = \alpha'' \int_0^1 \frac{(1-u+2\alpha\omega)\,d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u - (u-\alpha\omega)^2}}. \tag{47}$$

Von den Entwicklungen, welche dieser Ausdruck zuläßt, sollen hier nur zwei vorgenommen werden. Wie sich ergeben wird, eignet sich die erste dieser Entwicklungen für $z \leqq 80°$, die zweite für $z > 80°$.

6. Das Integral (47) läßt sich schreiben

$$\mathfrak{R} = \alpha'' \operatorname{tang} z \int_0^1 \frac{(1-u+2\alpha\omega)\,d\omega}{\left\{1+2\left[u - \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]\operatorname{tang}^2 z\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \alpha'' \operatorname{tang} z \int_0^1 (1-u+2\alpha\omega)\left\{1 - \left[u - \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]\operatorname{tang}^2 z + \right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{1.2}\left[u - \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]^2 \operatorname{tang}^4 z - \ldots\right\} d\omega.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha'' \int_0^1 (1-u+2\alpha\omega)\,d\omega = A_0$$

$$\alpha'' \int_0^1 (1-u+2\alpha\omega)\left[u - \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right] d\omega = A_1 \tag{48}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\,\alpha'' \int_0^1 (1-u+2\alpha\omega)\left[u - \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]^n d\omega = A_n$$

so lautet die vorige Reihe

$$\mathfrak{R} = A_0 \operatorname{tang} z - A_1 \operatorname{tang}^3 z +$$

$$+ A_2 \operatorname{tang}^5 z - \ldots + (-1)^n A_n \operatorname{tang}^{2n+1} z + \ldots \tag{49}$$

Um die Koeffizienten A_n berechnen zu können, bedarf man der Kenntnis der Integrale $\int_0^1 u^n d\omega$ und $\int_0^1 u^n \omega d\omega$. Man setze

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n d\omega = U_n. \tag{50}$$

Soll die Integration sich ausführen lassen, so muß u als Funktion von ω dargestellt werden. Nun ergibt sich, wenn man von beiden Seiten der Gleichung (22), nämlich

$$\frac{r_0}{l_0} s = -(1-f)\log(1-\omega)+2f\omega,$$

$\frac{r_0}{l_0}\alpha\omega$ subtrahiert und zur Abkürzung

$$\frac{r_0}{l_0}\alpha = \varepsilon \tag{51}$$

setzt,

$$\frac{r_0}{l_0} u = -(1-f)\log(1-\omega)+(2f-\varepsilon)\omega.$$

Wird jetzt noch

$$\frac{l_0(1-f)}{r_0} = a_0, \qquad \frac{2f-\varepsilon}{1-f} = k_0 \tag{52}$$

gesetzt, so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen u und ω

$$\frac{u}{a_0} = -\log(1-\omega)+k_0\omega. \tag{53}$$

Es empfiehlt sich aber, statt ω eine andere Variable x einzuführen, wo x durch die Gleichung

$$1-\omega = e^{-x} \tag{54}$$

definiert werden soll. Dann wird

$$\frac{u}{a_0} = x+k_0(1-e^{-x}) \tag{55}$$

und

$$U_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty u^n e^{-x}\, dx. \tag{56}$$

Durch Substitution des aus (55) folgenden Wertes von u in (56) erhält man

$$\frac{1}{a_0^n} U_n = \int_0^\infty \Big[\frac{1}{n!} x^n + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}(1-e^{-x}) k_0 + $$
$$+ \frac{1}{2!}\,\frac{1}{(n-2)!} x^{n-2}(1-e^{-x})^2 k_0^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{h!}\,\frac{1}{(n-h)!} x^{n-h}(1-e^{-x})^h k_0^h + \dots + \frac{1}{n!}(1-e^{-x})^n k_0^n\Big] e^{-x}\, dx.$$

Schreibt man diese Reihe in der Form

$$\frac{1}{a_0^n} U_n = \beta_n^{(0)} + \beta_n^{(1)} k_0 + \frac{1}{2!}\beta_n^{(2)} k_0^2 + \dots + \frac{1}{h!}\beta_n^{(h)} k_0^h + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\beta_n^{(n)} k_0^n, \tag{57}$$

so sind damit die Koeffizienten β durch die Gleichungen definiert

$$\beta_n^{(0)} = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

. . . .

. . . .

$$\beta_n^{(h)} = \frac{1}{(n-h)!}\int_0^\infty x^{n-h}(1-e^{-x})^h e^{-x}\, dx \tag{58}$$

. . . .

. . . .

$$\beta_n^{(n)} = \int_0^\infty (1-e^{-x})^n e^{-x}\, dx.$$

Nun erhält man durch partielle Integration

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \Gamma(n), \tag{59}$$

so sagt die vorige Gleichung, daß

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{60}$$

ist. Der Definition nach ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1. \tag{61}$$

Substituiert man also in der Gleichung (60) für n der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots n$, so erhält man

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{62}$$

Da

$$\beta_n^{(0)} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \Gamma(n+1)$$

ist, so wird

$$\beta_n^{(0)} = 1. \tag{63}$$

Ferner ist

$$\beta_n^{(n)} = \int_0^\infty (1-e^{-x})^n e^{-x} dx = \int_0^\infty (1-e^{-x})^n d(1-e^{-x})$$

oder

$$\beta_n^{(n)} = \frac{1}{n+1}. \tag{64}$$

Um den Wert von

$$\beta_n^{(h)} = \frac{1}{(n-h)!} \int_0^\infty x^{n-h} (1-e^{-x})^h e^{-x} dx$$

zu erhalten, entwickle man $(1-e^{-x})^h$ und berücksichtige, daß, wenn $px = v$ gesetzt wird,

$$\int_0^\infty x^{n-h} e^{-px} dx = \frac{1}{p^{n-h+1}} \int_0^\infty v^{n-h} e^{-v} dv =$$
$$= \frac{1}{p^{n-h+1}} \Gamma(n-h+1)$$

ist, folglich nach (62)

$$\int_0^\infty x^{n-h} e^{-px} dx = \frac{(n-h)!}{p^{n-h+1}}. \tag{65}$$

Man erhält so für $0 < h < n$

$$\beta_n^{(h)} = 1 - \frac{h}{2^{n-h+1}} + \frac{h(h-1)}{1.2}\,\frac{1}{3^{n-h+1}} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{h-1} h \frac{1}{h^{n-h+1}} + (-1)^h \frac{1}{(h+1)^{n-h+1}}. \tag{66}$$

Durch die Gleichungen (63), (64) und (66) sind die Koeffizienten β bestimmt; für die Logarithmen von $\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \ldots$, beziehungsweise von $\frac{1}{2}\beta_2^{(2)}, \frac{1}{2}\beta_3^{(2)}, \ldots$ u. s. w. ergeben sich die folgenden Werte:

log	log	log	log
$\beta_1^{(1)}$ 9·6989700			
$\beta_2^{(1)}$ 9·8750613	$\frac{1}{2}\beta_2^{(2)}$ 9·221849		
$\beta_3^{(1)}$ 9·9420081	$\frac{1}{2}\beta_3^{(2)}$ 9·485090	$\frac{1}{6}\beta_3^{(3)}$ 8·61979	
$\beta_4^{(1)}$ 9·9719713	$\frac{1}{2}\beta_4^{(2)}$ 9·594965	$\frac{1}{6}\beta_4^{(3)}$ 8·93855	$\frac{1}{24}\beta_4^{(4)}$ 7·9208
$\beta_5^{(1)}$ 9·9862117	$\frac{1}{2}\beta_5^{(2)}$ 9·647063	$\frac{1}{6}\beta_5^{(3)}$ 9·07947	$\frac{1}{24}\beta_5^{(4)}$ 8·2794
	$\frac{1}{120}\beta_5^{(5)}$ 7·143		
$\beta_6^{(1)}$ 9·9931606	$\frac{1}{2}\beta_6^{(2)}$ 9·672843	$\frac{1}{6}\beta_6^{(3)}$ 9·14903	$\frac{1}{24}\beta_6^{(4)}$ 8·4444
	$\frac{1}{120}\beta_6^{(5)}$ 7·532	$\frac{1}{720}\beta_6^{(6)}$ 6·30	
$\beta_7^{(1)}$ 9·9965937	$\frac{1}{2}\beta_7^{(2)}$ 9·685796	$\frac{1}{6}\beta_7^{(3)}$ 9·18451	$\frac{1}{24}\beta_7^{(4)}$ 8·5283
	$\frac{1}{120}\beta_7^{(5)}$ 7·716	$\frac{1}{720}\beta_7^{(6)}$ 6·71	$\frac{1}{5040}\beta_7^{(7)}$ 5·39

Zur numerischen Berechnung der U_n ist jetzt noch die Kenntnis der Werte von a_0 und k_0 erforderlich. Diese ergeben sich aus den Gleichungen (52) in Verbindung mit (51) und (15), vorausgesetzt, daß die in diesen Gleichungen vorkommenden Größen α und f anderweitig bekannt sind. Der zweiten der Gleichungen (42) zufolge ist α definiert durch

$$\alpha = \frac{c\rho_0}{1+2c\rho_0},$$

wo ρ_0 die Dichtigkeit der Luft am Beobachtungsorte bedeutet. Bezeichnet α' den Wert von α, welcher der Dichtigkeit ρ_0' entspricht, ist also

$$\alpha' = \frac{c\rho_0'}{1+2c\rho_0'},$$

so folgt aus den zwei letzten Gleichungen

$$\alpha = \frac{\rho_0}{\rho_0'} \frac{\alpha'}{1-2\alpha'\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_0'}\right)}. \tag{67}$$

Ist also der für irgend eine Dichtigkeit der Luft ρ_0' gültige Wert α' bekannt, so läßt sich auch der jeder andern Dichtigkeit ρ_0 entsprechende Wert von α angeben. Für ρ_0' soll nun die durch die Gleichung (28) definierte Dichtigkeit

$$\rho_0' = 1-\frac{3}{8}\,\frac{6}{760}$$

gewählt werden. Wie schon oben erwähnt wurde, folgt aus der im Laboratorium ausgeführten Bestimmung des Brechungsexponenten der Luft, daß der der Dichtigkeit ρ_0' entsprechende Wert von α' beiläufig gleich 0·0003 (genauer 0·000292, für die Maximalintensität des Spektrums) ist. Im folgenden wird

$$\alpha' = 60''15 \sin 1'' = 0\cdot0002916\ldots$$

angenommen werden, ein Wert, der von Herrn Bauschinger im Mittel aus den besten, durch astronomische Beobachtungen gewonnenen Bestimmungen von α' abgeleitet wurde. In welcher

Weise sich aus den Ablesungen der meteorologischen Instrumente die jeweilige Dichtigkeit der Luft ermitteln läßt, ist in Artikel 3 gezeigt worden; insbesondere ermöglichen es die dortigen Gleichungen (29) und (30), den in (67) vorkommenden Quotienten $\frac{\rho_0}{\rho'_0}$ zu berechnen.[1] Wenn die in der Gleichung (30) mit β bezeichnete reduzierte Barometerhöhe zwischen 690 und 790 *mm* und die Temperatur zwischen −30° und +38° C. liegt, so ist der Wert von $\frac{\rho_0}{\rho'_0}$ zwischen den Grenzen 0·79 und 1·18 eingeschlossen.

Um f zu bestimmen, kann man sich der gelegentlich einer Ballonfahrt gewonnenen Messungen des Luftdruckes, der Temperatur und des Dunstdruckes in den durchstrichenen Schichten bedienen. Mit Hilfe dieser Angaben berechne man nämlich zunächst die Werte für die Dichtigkeit der Luft; verbindet man hiemit und mit den im Ballon beobachteten Temperaturen die für die Luft an der Erdoberfläche geltenden Werte der Dichtigkeit und Temperatur, so ergibt sich aus der Gleichung (20) der gesuchte Wert von f. Auf Grund der Ergebnisse der in früheren Jahren unternommenen Ballonfahrten ist man dazu gekommen, $f = 0\cdot 2$ anzunehmen.

Der in (52) vorkommende Quotient $\frac{l_0}{r_0}$ läßt sich mit Hilfe der Gleichung (15) berechnen. Für die Praxis empfiehlt es sich, von den zwei letzten von $\cos 2\varphi$ und π_0 abhängigen Gliedern der Gleichung (15) zunächst abzusehen und den Einfluß derselben nachträglich zu bestimmen. Man setze also

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7\cdot 993}{6366}(1+0\cdot 003663\, t_0).$$

Aus dem vorhin Gesagten geht nun hervor, daß von den durch die Gleichungen (51) und (52) bestimmten Größen ε, k_0 und a_0 die beiden ersten von der Dichtigkeit und der

---

[1] Die Berechnung von $\frac{\rho_0}{\rho'_0}$ wird sehr einfach, wenn man sich der Tabellen 1 und 2 meiner Refraktionstafeln bedient; dort wird $\frac{\rho_0}{\rho'_0}$ mit ρ bezeichnet.

Temperatur der Luft, die letzte aber von der Temperatur allein abhängt. Für

$$p_0' = 1 - \frac{3}{8}\,\frac{6}{760}, \qquad t_0 = 0° \text{ C.}$$

erhält man

$$\log \varepsilon = 9\cdot365967, \quad \log a_0 = 7\cdot001933, \quad \log k_0 = 9\cdot321556.$$

Die Gleichung (57) in Verbindung mit (63) und den oben angegebenen Werten von $\frac{1}{h!}\beta_n^{(h)}$ liefert dann die nachstehenden für $p_0' = 1 - \frac{3}{8}\,\frac{6}{760}$ und $t_0 = 0°$ C. gültigen Werte von $\log U_n$

$$\begin{aligned}
\log U_1 &= 7\cdot045233-10 & \log U_5 &= 5\cdot097368-20\\
\text{»}\ \ U_2 &= 4\cdot070038-10 & \text{»}\ \ U_6 &= 2\cdot10096\ \ -20\\
\text{»}\ \ U_3 &= 1\cdot083999-10 & \text{»}\ \ U_7 &= 9\cdot1037\ \ -30\\
\text{»}\ \ U_4 &= 8\cdot092199-20 & &
\end{aligned}$$

Nachdem im vorigen die Mittel angegeben worden sind, die für eine beliebige Dichtigkeit und Temperatur der Luft gültigen Werte von U_n zu bestimmen, ist jetzt noch die Berechnung des Integrals $\int_0^1 u^n \omega\, d\omega$ erforderlich. Da aber dieses Integral in A_n mit dem kleinen Faktor $\alpha''\alpha$ versehen auftritt, so genügt es, einen genäherten Wert desselben zu kennen. Nun ist nach (53) und (54)

$$u = a_0(x + k_0\omega),$$

somit hat man

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n \omega\, d\omega =$$

$$= a_0^n\left[\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \omega\, d\omega + \frac{1}{(n-1)!}\,k_0\int_0^1 x^{n-1}\omega^2 d\omega + \ldots\right].$$

Den Gleichungen (58) zufolge und unter Berücksichtigung von (54) ist aber

$$\frac{1}{(n-h)!}\int_0^1 x^{n-h}\omega^h d\omega = \beta_n^{(h)}.$$

Folglich wird die vorige Gleichung

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n \omega\, d\omega = a_0^n(\beta_{n+1}^{(1)}+\beta_{n+1}^{(2)}k_0+\ldots).$$

Ferner ist nach (57) und (63)

$$a_0^n = U_n(1-\beta_n^{(1)}k_0-\ldots).$$

Vernachlässigt man jetzt die von k_0 abhängigen Glieder, so wird

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n \omega\, d\omega = U_n \beta_{n+1}^{(1)}. \tag{68}$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 u^{n-1}\omega^2 d\omega = U_{n-1}\beta_{n+1}^{(2)} \tag{68*}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann an die Berechnung der A_n geschritten werden. Die erste der Gleichungen (48) liefert ohne weiteres

$$A_0 = \alpha''(1+\alpha-U_1) = \alpha''\left(1+\frac{3}{2}\alpha-\frac{l_0}{r_0}\right). \tag{69}$$

Für A_1 erhält man aus der zweiten der Gleichungen (48)

$$A_1 = \alpha''\int_0^1 (1-u+2\alpha\omega)\left[u-\frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]d\omega =$$

$$= \alpha''\int_0^1\left(u-\frac{3}{2}u^2+3u\alpha\omega+\frac{1}{2}u^3-\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2-2u^2\alpha\omega+\right.$$

$$\left.+\frac{5}{2}u\alpha^2\omega^2-\alpha^3\omega^3\right)d\omega.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (50) und (68) wird der Beitrag, den die letzten fünf Glieder in der Klammer unter dem vorigen Integral zu $\mathfrak{R}$ liefern, gleich

$$-\alpha''\operatorname{tang}^3 z\left(3U_3-\frac{1}{6}\alpha^2-4\alpha\beta_3^{(1)}U_2+\frac{5}{2}\alpha^2\beta_3^{(2)}U_1-\frac{1}{4}\alpha^3\right).$$

Substituiert man hierin die oben gegebenen, der Dichtigkeit $1-\frac{3}{8}\,\frac{6}{760}$ und der Temperatur 0° entsprechenden Werte

von α'', α, U_1, U_2, U_3, $\beta_3^{(1)}$, $\beta_3^{(2)}$, so erhält man selbst für $z = 80°$ eine verschwindend kleine Größe.[1] Somit wird

$$A_1 = \alpha'' \int_0^1 \left(u - \frac{3}{2} u^2 + 3 u \alpha \omega\right) d\omega$$

oder, wenn man von den Gleichungen (50) und (68) Gebrauch macht,

$$A_1 = \alpha''[(1+3\alpha\beta_2^{(1)})U_1 - 3U_2].$$

Um allgemein A_n berechnen zu können, ist es nötig, das Produkt

$$(1-u+2\alpha\omega)\left[u - \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]^n$$

zu entwickeln. Da vorhin gezeigt wurde, daß für $n = 1$ nur diejenigen Glieder des Produktes beizubehalten sind, deren Ordnung nicht höher als die von u^2 und $u\alpha$ ist, so genügt es, für ein beliebiges n nur die Glieder zu berücksichtigen, deren Ordnung diejenige von u^{n+1} und $u^n\alpha$ nicht übertrifft. Man erhält dann zunächst

$$\left[u - \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]^n = u^n - n u^{n-1} \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2} + \ldots =$$

$$= u^n - \frac{n}{2}(u^{n+1} - 2 u^n \alpha\omega) + \cdots$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $1-u+2\alpha\omega$ und vernachlässigt die Glieder, deren Ordnung höher als die von u^{n+1} und $u^n\alpha$ ist, so ergibt sich

$$(1-u+2\alpha\omega)\left[u - \frac{(u-\alpha\omega)^2}{2}\right]^n =$$

$$= u^n - \frac{n+2}{2} u^{n+1} + (n+2)\alpha u^n \omega.$$

[1] Herr Radau behält in seinen Formeln das Produkt

$$-\alpha'' \operatorname{tang}^3 z \left(3U_3 - \frac{1}{6}\alpha^2\right)$$

bei, das aber für $z = 80°$ nur 0'0001 ausmacht, also zu vernachlässigen ist. Hiemit ist zugleich der Grund angegeben, warum die im folgenden für A_1, beziehungsweise für A_n abgeleiteten Ausdrücke von den Radau'schen abweichen.

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die unter (48) gegebene Gleichung für A_n und unter Berücksichtigung der Gleichungen (50) und (68) erhält man schließlich

$$A_n = 1.3.5\ldots(2n-1)\,\alpha''\Big\{[1+(n+2)\alpha\beta^{(1)}_{n+1}]\,U_n - \\ -\frac{(n+1)(n+2)}{2}\,U_{n+1}\Big\}. \quad (70)$$

Da der Gleichung (64) zufolge $\beta^{(1)}_1 = \frac{1}{2}$ ist, so ist die Gleichung (69) für A_0 schon in (70) einbegriffen, wenn man nur festsetzt, daß für $n = 0$ das Produkt $1.3.5\ldots(2n-1) = 1$ sein soll und wenn außerdem $U_0 = 1$ angenommen wird. Setzt man noch

$$A_n 10^{2n+1} = (A_n), \quad (71)$$

so wird die Reihe (49)

$$\Re = (A_0)\frac{\text{tang}\,z}{10} - (A_1)\left(\frac{\text{tang}\,z}{10}\right)^3 + (A_2)\left(\frac{\text{tang}\,z}{10}\right)^5 - \ldots \quad (72)$$

Für

$$\rho'_0 = 1 - \frac{3}{8}\,\frac{6}{760}, \qquad t = 0^\circ\,\text{C.}$$

ist

$\log(A_0) = 2{\cdot}778880$	$\log(A_4) = 0{\cdot}887$
» $(A_1) = 1{\cdot}823368$	» $(A_5) = 0{\cdot}844$
» $(A_2) = 1{\cdot}32414$	» $(A_6) = 0{\cdot}886$
» $(A_3) = 1{\cdot}0355$	

Substituiert man diese Werte in die vorige Reihe für $\Re$, so erhält man die für die eben angegebenen Werte von ρ'_0 und t gültige Refraktion in Bogensekunden.

Berücksichtigt man nur das Hauptglied von A_n, so folgt aus den Gleichungen (70), (57) und (63)

$$A_n = 1.3.5\ldots(2n-1)\,\alpha'' a_0^n.$$

Unter Benutzung dieses Näherungswertes erhält man für das Verhältnis zweier aufeinander folgender Glieder der Reihe (72)

$$\frac{(A_{n+1})}{(A_n)}\left(\frac{\text{tang}\, z}{10}\right)^2 = \frac{A_{n+1}}{A_n}\,\text{tang}^2 z = (2n+1)a_0\,\text{tang}^2 z.$$

Da nach dem Früheren $\log a_0 = 7\cdot0019$ ist, wenn $t = 0°$, so wird der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung für $n = 5$ und $z = 84°$ gleich 1; für sehr große Zenithdistanzen ist also die Reihe (72) nicht mehr brauchbar. Um nicht allzu viele Glieder berücksichtigen zu müssen, benutzt Herr Radau die Reihe (72) nur bis zu $z = 80°$.

Die oben mitgeteilten, der Dichtigkeit $\rho_0' = 1 - \frac{3}{8}\,\frac{6}{760}$ und der Temperatur 0° C. entsprechenden numerischen Werte von $\log U_n$ und $\log (A_n)$ sind mit Vernachlässigung der in der Gleichung (15), nämlich

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7\cdot993}{6366}\left(1+0\cdot003663\,t_0+0\cdot0010\cos 2\varphi+\frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{p_0}\right),$$

von $\cos 2\varphi$ und π_0 abhängigen Glieder berechnet worden. Um den Beitrag zu bestimmen, den diese Glieder zur Refraktion liefern, kann man die Gleichung (49) in Verbindung mit den Gleichungen (69) und (70) benutzen. Werden zunächst nur die beiden ersten Glieder der Reihe (49) berücksichtigt, so ist

$$\mathfrak{R} = A_0\,\text{tang}\, z - A_1\,\text{tang}^3 z + \ldots,$$

wo

$$A_0 = \alpha''(1+\alpha-U_1)$$

$$A_1 = \alpha''[(1+3\alpha\beta_2^{(1)})U_1 - 3U_2]$$

ist. Aus den Gleichungen (57), (52) und (51) folgt aber

$$U_1 = \frac{l_0}{r_0} - \frac{1}{2}\alpha.$$

Berücksichtigt man also in dem Ausdrucke für A_1 nur das Hauptglied $\alpha'' U_1$ und setzt wieder $\frac{\pi_0}{p_0} = \frac{\pi_0}{B}$ (p. 1377), so erhält man für den Beitrag, den die von $\cos 2\varphi$ und π_0 abhängigen Glieder in $\frac{l_0}{r_0}$ zu $\mathfrak{R}$ liefern,

$$\Delta \mathfrak{R} = -\alpha'' \frac{7 \cdot 993}{6366} \left[0 \cdot 0010 \cos 2\varphi + \frac{3}{8} \frac{\pi_0}{B} \right] \operatorname{tang} z \sec^2 z.$$

Das von $\cos 2\varphi$ abhängige Glied macht selbst für $\varphi = 0°$ und $z = 80°$ nur 0ʹ01 aus. Das von π_0 abhängige Glied beträgt für $\pi_0 = 10^{mm}$, $B = 760^{mm}$, $\alpha'' = 60ʹ15$, bei

$z = 75°$	$-0ʹ02$,	$z = 79°$	$-0ʹ05$
$= 77$	$-0 \cdot 03$	$= 80$	$-0 \cdot 07$

Die Berücksichtigung dieses Gliedes macht also keine Mühe; wegen der Unsicherheit der berechneten Refraktion in so großen Zenithdistanzen aber könnte es ohne Nachteil auch ganz übergangen werden. Bei der Berechnung von $U_2, U_3, \ldots$, also auch von $A_2, A_3, \ldots$ sind die von 2φ und π_0 abhängenden Glieder völlig zu vernachlässigen.

7. Mit Hilfe der im vorigen Artikel gegebenen Formeln würde man für eine Reihe äquidistanter Werte der Dichtigkeit und Temperatur der Luft die Refraktion berechnen können; durch Interpolation ergäbe sich dann die für eine beliebige Dichtigkeit und Temperatur der Luft gültige Refraktion. Einfacher aber ist es, die betreffenden Formeln nur zur Berechnung der sogenannten mittleren, d. h. der einer fest gewählten Dichtigkeit und Temperatur der Luft entsprechenden Refraktion anzuwenden und durch Differentiation die Korrektionen zu ermitteln, welche an die mittlere Refraktion anzubringen sind, um die dem jeweiligen Luftzustand entsprechende Strahlenbrechung zu erhalten. Die für die Berechnung dieser Korrektionen erforderlichen Formeln sollen jetzt abgeleitet werden.

Wenn wie vorhin das Produkt $1.3.5\ldots(2n-1)$ für $n = 0$ gleich 1 und $U_0 = 1$ gesetzt wird, so hat man den Gleichungen (49), (70) und (67) zufolge

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \Sigma(-1)^n A_n \operatorname{tang}^{2n+1} z \\ &= \frac{\rho_0}{\rho_0'} \frac{\alpha'}{\sin 1'' \left[1-2\alpha'\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_0'}\right)\right]} \Sigma(-1)^n 1.3\ldots(2n-1)\cdot \\ &\quad \cdot\left\{\left[1+(n+2)\alpha\beta_{n+1}^{(1)} U_n - \frac{(n+1)(n+2)}{2} U_{n+1}\right\} \operatorname{tang}^{2n+1} z.\end{aligned}$$

Hierin ist

$$[1.3\ldots(2n-1)]_{n=0} \equiv 1, \qquad U_0 \equiv 1$$

und nach (57) und (63)

$$U_n = a_0^n \left(1 + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{1}{h!} \beta_n^{(h)} k_0^h\right), \qquad n > 0$$

Aus der letzten Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (51) und (52) ergibt sich — wenn wiederum

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7.993}{6366} (1 + 0{\cdot}003663\, t_0)$$

gesetzt wird — daß U_n von α und t_0 abhängt. Da aber α der Gleichung (67) zufolge eine Funktion von $\frac{\rho_0}{\rho_0'}$ ist, so kann man auch sagen, daß U_n von $\frac{\rho_0}{\rho_0'}$ und t_0 abhängt. Für ein gegebenes z und ein als konstant betrachtetes f ist demnach $\log \frac{\mathfrak{R}}{\left(\frac{\rho_0}{\rho_0'}\right)}$ eine Funktion von $\frac{\rho_0}{\rho_0'}$ und t_0. Zur Abkürzung soll jetzt

$$\frac{\rho_0}{\rho_0'} = \rho, \qquad t_0 = t \tag{73}$$

gesetzt werden; der Taylor'sche Satz gibt dann, wenn noch der für $\rho = 1$ und $t = 0°$ C. gültige Wert von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_0$ bezeichnet wird,

$$\log \frac{\mathfrak{R}}{\rho} = \log \mathfrak{R}_0 + t \left[\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right]_{\rho=1,\, t=0} + (\rho - 1)\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \log \frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right]_{\rho=1,\, t=0}. \tag{74}$$

Bei den für die astronomischen Beobachtungen in Frage kommenden Werten von ρ und t stimmen die mit Hilfe der Formeln (74) berechneten Werte der Refraktion, auch bei $z = 80°$, mit den direkt berechneten überein; bis zu $z = 80°$ reicht man also mit den ersten Differentialquotienten von $\log \frac{\mathfrak{R}}{\rho}$ aus. Aus der oben für $\mathfrak{R}$ gegebenen Gleichung folgt

$$\log \frac{\mathfrak{R}}{\rho} = \log \frac{\alpha'}{\sin 1''[1-2\alpha'(1-\rho)]} +$$
$$+ \log \Sigma(-1)^n 1.3\ldots(2n-1)\Big\{[1+(n+2)\alpha\beta^{(1)}_{n+1}]U_n - $$
$$- \frac{(n+1)(n+2)}{2} U_{n+1}\Big\} \operatorname{tang}^{2n+1} z. \quad (75)$$

Nun ergibt sich aus (67)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} = \alpha'(1-2\alpha'). \quad (76)$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen (51) und (52) unter Berücksichtigung des vorhin angegebenen Wertes von $\frac{l_0}{r_0}$

$$\left(\frac{\partial a_0}{\partial t}\right)_{t=0} = (1-f)\,\frac{7\cdot 993}{6366}\,0\cdot 003663, \qquad \frac{\partial a_0}{\partial \rho} = 0$$
$$\left(\frac{\partial k_0}{\partial t}\right)_{\rho=1,\,t=0} = \frac{\alpha'}{1-f}\,\frac{6366}{7\cdot 993}\,0\cdot 003663, \quad (77)$$
$$\left(\frac{\partial k_0}{\partial \rho}\right)_{\rho=1,\,t=0} = -\frac{\alpha'(1-2\alpha')}{1-f}\,\frac{6366}{7\cdot 993}.$$

Unter den früher gemachten Annahmen

$$f = 0\cdot 2, \qquad \alpha' = 60''15 \sin 1''$$

wird für $\rho = 1$, $t = 0°$

$$\log \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\infty \qquad \log \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} = 6\cdot 46455-10$$
$$\log \frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial t} = 7\cdot 56384-10 \qquad \log \frac{\partial a_0}{\partial \rho} = -\infty$$
$$\log \frac{\partial k_0}{\partial t} = 7\cdot 02672-10 \qquad \log \frac{\partial k_0}{\partial \rho} = 9\cdot 46262-10$$

Setzt man fest, daß

$$[(h-1)!]_{h=1} = 1$$

sein soll, so wird

$$\left[\frac{\partial U_n}{\partial t}\right]_{\rho=1,\,t=0} = n\left[\frac{1}{a_0}\,\frac{\partial a_0}{\partial t}\,U_n\right]_{\rho=1,\,t=0} +$$

$$+\left[a_0^n\left(\frac{\partial k_0}{\partial t}\right)\sum_{h=1}^{h=n}\frac{1}{(h-1)!}\,\beta_n^{(h)}\,k_0^{h-1}\right]_{\rho=1,\,t=0} \qquad (78)$$

$$\left[\frac{\partial U_n}{\partial \rho}\right]_{\rho=1,\,t=0} = \left[a_0^n\left(\frac{\partial k_0}{\partial \rho}\right)\sum_{h=1}^{h=n}\frac{1}{(h-1)!}\,\beta_n^{(h)}\,k_0^{h-1}\right]_{\rho=1,\,t=0}.$$

Da $U_0 = 1$ angenommen wurde, so ist

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = \frac{\partial U_0}{\partial \rho} = 0. \qquad (78^*)$$

Für $\rho = 1$, $t = 0°$ C. erhält man

$\log \frac{\partial U_0}{\partial t} = -\infty$ | $\log \frac{\partial U_0}{\partial \rho} = -\infty$

» $\frac{\partial U_1}{\partial t} = 4 \cdot 66268-10$ | » $\frac{\partial U_1}{\partial \rho} = 6 \cdot 16352_n-10$

» $\frac{\partial U_2}{\partial t} = 1 \cdot 97716-10$ | » $\frac{\partial U_2}{\partial \rho} = 3 \cdot 38024_n-10$

» $\frac{\partial U_3}{\partial t} = 9 \cdot 15898-20$ | » $\frac{\partial U_3}{\partial \rho} = 0 \cdot 47215_n-10$

» $\frac{\partial U_4}{\partial t} = 6 \cdot 28608-20$ | » $\frac{\partial U_4}{\partial \rho} = 7 \cdot 51734_n-20$

» $\frac{\partial U_5}{\partial t} = 3 \cdot 38365-20$ | » $\frac{\partial U_5}{\partial \rho} = 4 \cdot 54096_n-20$

» $\frac{\partial U_6}{\partial t} = 0 \cdot 46302-20$ | » $\frac{\partial U_6}{\partial \rho} = 1 \cdot 55392_n-20$

» $\frac{\partial U_7}{\partial t} = 7 \cdot 5302\ -30$ | » $\frac{\partial U_7}{\partial \rho} = 8 \cdot 5614_n\ -30$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\left\{[1+(n+2)\alpha'\beta_{n+1}^{(1)}]\right\}\frac{\partial U_n}{\partial t} - \left.-\frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{\partial U_{n+1}}{\partial t}\right\}_{\rho=1,\,t=0} = K_n$$

$$\left\{(n+2)\beta_{n+1}^{(1)}U_n\frac{\partial \alpha}{\partial \rho} + [1+(n+2)\alpha'\beta_{n+1}^{(1)}]\frac{\partial U_n}{\partial \rho} - \left.-\frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{\partial U_{n+1}}{\partial \rho}\right\}_{\rho=1,\,t=0} = L_n, \qquad (79)$$

so wird, wenn $\mathfrak{M}$ den Modul der Brigg'schen Logarithmen bedeutet,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right]_{\rho=1,\,t=0} = \mathfrak{M}\frac{\alpha'}{\mathfrak{R}_0 \sin 1''}\Sigma(-1)^n 1.3\ldots(2n-1)K_n \operatorname{tang}^{2n+1} z$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\log\frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right]_{\rho=1,\,t=0} = \mathfrak{M}\left\{-2\alpha' + \frac{\alpha'}{\mathfrak{R}_0 \sin 1''}\Sigma(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)L_n \operatorname{tang}^{2n+1} z\right\}, \qquad (80)$$

wo n der Reihe nach gleich 0, 1, 2, ... anzunehmen und $1.3\ldots(2n-1)$ für $n=0$ gleich 1 zu setzen ist. Es werde jetzt wieder $\alpha' = 60''15 \sin 1''$ angenommen und den Gleichungen (80) die Form gegeben

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right]_{\rho=1,\,t=0} = \frac{60''15}{\mathfrak{R}_0}(k^{(0)}\operatorname{tang} z + k^{(1)}\operatorname{tang}^3 z + k^{(2)}\operatorname{tang}^5 z + \ldots)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\log\frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right]_{\rho=1,\,t=0} = m + \frac{60''15}{\mathfrak{R}_0}(l^{(0)}\operatorname{tang} z + l^{(1)}\operatorname{tang}^3 z + l^{(2)}\operatorname{tang}^5 z + \ldots \qquad (80^*)$$

die Werte von $\log k^{(n)}$, $\log m$ und $\log l^{(n)}$ sind dann

	$\log m = 6\cdot 40363_n - 10$
$\log k^{(0)} = 4\cdot 30046_n - 10$	» $l^{(0)} = 6\cdot 27843 - 10$
» $k^{(1)} = 4\cdot 29804_n - 10$	» $l^{(1)} = 5\cdot 79733 - 10$
» $k^{(2)} = 2\cdot 08852 - 10$	» $l^{(2)} = 3\cdot 49028_n - 10$
» $k^{(3)} = 9\cdot 96762_n - 20$	» $l^{(3)} = 1\cdot 2794 - 10$
» $k^{(4)} = 7\cdot 93763 - 20$	» $l^{(4)} = 9\cdot 1674_n - 20$
» $k^{(5)} = 5\cdot 9865_n - 20$	» $l^{(5)} = 7\cdot 143 - 20$
» $k^{(6)} = 4\cdot 1044 - 20$	» $l^{(6)} = 5\cdot 194_n - 20$

Durch Substitution dieser Werte in die Gleichungen (80*) erhält man die partiellen Differentialquotienten von $\log\frac{\Re}{\rho}$ in Bogensekunden ausgedrückt.

8. Wie oben erwähnt wurde, wendet Herr Radau die im Artikel 6 gegebene Entwicklung des Integrals (47) nur für $z \leqq 80°$ an. Ehe nun die für $z > 80°$ geeignete Reihe abgeleitet wird, soll die Berechnung der dabei auftretenden Funktion

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-x^2}dx$$

vorgenommen werden.

a) Wenn $Z = 0$ ist, wird[1]

$$\psi(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{81}$$

b) Wenn Z von 0 verschieden ist, so benutze man die Gleichung

$$\int_Z^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx - \int_0^Z e^{-x^2}dx = $$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^Z e^{-x^2}dx.$$

[1] Brünnow, Lehrbuch der sphär. Astronomie, 3. Aufl., p. 33, 34. — Eine hübsche Ableitung dieser Formel gibt Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis, I. Bd., 5. Aufl., p. 459—460.

Wird auf der rechten Seite an Stelle von e^{-x^2} die bekannte Exponentialreihe substituiert und dann integriert, so ergibt sich

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-\left(Z-\frac{Z^3}{3}+\frac{1}{1.2}\,\frac{Z^5}{5}-\frac{1}{1.2.3}\,\frac{Z^7}{7}+\ldots\right)\right], \quad (82)$$

wo

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0\cdot 88622692545$$

ist. Die vorige Reihe für $\psi(z)$ ist aber nur für kleine Werte von Z brauchbar; schon für $Z=1$ ist noch das von Z^{21} abhängige Glied zu berücksichtigen, wenn man $\log\psi(Z)$ auf 7 Dezimalen richtig erhalten will.

Ein zweites Verfahren $\psi(Z)$ zu berechnen, besteht darin, daß man wie vorhin

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-\int_0^Z e^{-x^2}\,dx\right)$$

setzt und das Integral $\int_0^Z e^{-x^2}dx$ nach Th. v. Oppolzer's Vorschlag durch mechanische Quadratur bestimmt.[1]

Die Werte von $\int_0^Z e^{-x^2}dx$ sind in der Oppolzer'schen Tafel X (l. c., p. 587) auf 10 Dezimalen mitgeteilt. Da e^{Z^2} für $Z=2\cdot 5$ gleich 518 ist, so erhält man $\psi(2\cdot 5)$ noch auf 7 Dezimalen richtig, wenn $\int_0^{2\cdot 5} e^{-x^2}dx$ auf 10 Dezimalen strenge berechnet ist. Ist aber $Z > 2\cdot 5$, so nimmt die Anzahl der Dezimalen, auf die $\int_0^Z e^{-x^2}dx$ bekannt sein muß, um $\psi(Z)$ auf 7 Dezimalen richtig zu erhalten, schnell zu; so z. B. würde $\psi(3\cdot 035)$ [da $e^{(3\cdot 035)^2} = 10009$ ist] um eine Einheit der 7. Dezimale unrichtig werden, wenn das Integral $\int_0^{3\cdot 035} e^{-x^2}dx$ um eine Einheit der 11. Dezimale fehlerhaft wäre.

---

[1] Th. v. Oppolzer, Lehrbuch zur Bahnbestimmung, Bd. 2, p. 36 ff.

Für $Z \geqq 2 \cdot 5$ empfiehlt es sich, von einer Reihenentwicklung Gebrauch zu machen, welche von Schlömilch herrührt und die bisher nicht die ihr gebührende Beachtung gefunden hat. Für größere Werte von Z wird gewöhnlich die halbkonvergente Reihe

$$\psi(Z) = \frac{1}{2Z}\left\{1 - \frac{1}{2Z^2} + \frac{1.3}{(2Z^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2Z^2)^3} + \ldots\right\}$$

oder der Kettenbruch

$$\psi(Z) = \frac{1}{2Z} \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{2Z^2}}{1 + \cfrac{\frac{2}{2Z^2}}{1 + \ldots}}}$$

benutzt, doch darf dies erst von $Z = 4$ an geschehen, wenn $\psi(Z)$ auf 7 Dezimalen berechnet werden soll. Die Schlömilch'sche Reihe ist, wie schon bemerkt, von $Z = 2 \cdot 5$ an brauchbar und konvergiert für $Z \geqq 4$ bedeutend schneller wie die obige halbkonvergente Reihe. Die Ableitung der Reihe soll hier, unter Einführung einiger Vereinfachungen, nach Schlömilch gegeben werden;[1] mit Rücksicht auf die spätere Anwendung ist aber die Entwicklung der Reihe weiter getrieben worden, als es von Schlömilch geschehen ist. Schlömilch stützt sich auf eine Reihenentwicklung für $\frac{1}{x+t}$ (wo x und t positiv sein sollen), welche man in folgender Weise erhält. Wenn man von den identischen Gleichungen

[1] Zeitschrift für Mathematik und Physik, 4. Jahrgang, p. 390, und Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis, 2. Band: Die Gammafunktionen.

$$\frac{x+t}{x} = 1 + \frac{t}{x} \qquad \text{Faktor: } 1$$

$$\frac{x+t}{x+1} = 1 + \frac{t-1}{x+1} \qquad \text{»} \quad -\frac{t}{x}$$

$$\frac{x+t}{x+2} = 1 + \frac{t-2}{x+2} \qquad \text{»} \quad \frac{t(t-1)}{x(x+1)}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{x+t}{x+n-1} = 1 + \frac{t-(n-1)}{x+n-1}$$

$$\text{Faktor: } (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\ldots(t-[n-2])}{x(x+1)\ldots(x+[n-2])}$$

jede mit dem rechts von ihr stehenden Faktor multipliziert und sodann die Gleichungen addiert, so erhält man

$$\frac{1}{x+t} - (-1)^n \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-[n-1])}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])}\frac{1}{x+t} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{t}{x(x+1)} + \frac{t(t-1)}{x(x+1)(x+2)} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\ldots(t-[n-2])}{x(x+1)\ldots(x+[n-1])}.$$

Von t soll jetzt vorausgesetzt werden, daß es zwischen zwei ganzen positiven Zahlen $k-1$ und k eingeschlossen sei. Ist $n > k$ und wird zur Abkürzung

$$(t-1)(t-2)\ldots(t-[k-2])(t-[k-1]) = P$$

$$(t-k)(t-[k+1])\ldots(t-[n-2])(t-[n-1]) = Q$$

gesetzt, so hat man

$$(t-1)(t-2)\ldots(t-[n-2])(t-[n-1]) = PQ.$$

Da $k-1 < t < k$ sein soll, so sind alle Faktoren von P positiv; ferner erhält man einen zu großen Wert für das Produkt P, wenn in jedem Faktor $t = k$ gesetzt wird. Bedeutet also Δ_1 einen positiven echten Bruch, so ist

$$P = \Delta_1(k-1)(k-2)\ldots 2 \cdot 1.$$

Aus der Gleichung für Q folgt

$$\frac{Q}{(-1)^{n-k}} = (k-t)([k+1]-t)\ldots([n-2]-t)([n-1]-t).$$

Alle Faktoren des auf der rechten Seite stehenden Produktes sind wieder positiv. Da $t>0$ sein soll, so sieht man außerdem, daß man für das Produkt einen zu großen Wert erhält, wenn in jedem Faktor $t=0$ angenommen wird. Somit ergibt sich, wenn mit Δ_2 ein positiver echter Bruch bezeichnet wird,

$$Q = (-1)^{n-k}\Delta_2 k(k+1)\ldots(n-2)(n-1).$$

Demnach erhält man

$$(-1)^n \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-[n-1])}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])}\frac{1}{x+t} =$$

$$= (-1)^{2n-k}\Delta_1\Delta_2 \frac{1.2\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])}\frac{t}{x(x+t)}.$$

Da x und t als positiv vorausgesetzt sind, so ist $\frac{t}{x(x+t)}$ ein positiver echter Bruch. Schreibt man noch zur Abkürzung

$$(-1)^{2n-k}\Delta_1\Delta_2\frac{t}{x(x+t)} = \eta_n,$$

wo also η_n einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet, so erhält man die gesuchte Reihe

$$\frac{1}{x+t} = \frac{1}{x} - \frac{t}{x(x+1)} + \frac{t(t-1)}{x(x+1)(x+2)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\ldots(t-[n-2])}{x(x+1)\ldots(x+[n-1])} +$$

$$+ \eta_n \frac{1.2\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])}, \quad (83)$$

$$x>0,\ t>0.$$

Um nun die Schlömilch'sche Reihe für $\psi(Z)$ abzuleiten, setze man in dem Integral

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv,$$

wo x und λ positiv sein sollen,

$$v = (1+u)x$$

und betrachte u als neue Variable. Damit wird

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = x^{1-\lambda} e^{-x} \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)^\lambda} e^{-xu} du. \qquad (B)$$

Früher war gesetzt worden

$$\int_0^\infty z^{\lambda-1} e^{-z} dz = \Gamma(\lambda).$$

Führt man an Stelle von z eine neue Variable t ein, indem man setzt

$$z = (1+u)t,$$

wo $u > 0$ vorausgesetzt wird, so erhält man

$$(1+u)^\lambda \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t} dt = \Gamma(\lambda),$$

also

$$\frac{1}{(1+u)^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t} dt.$$

Somit wird die Gleichung *(B)*

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = \frac{x^{1-\lambda} e^{-x}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty e^{-xu} du \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t} dt.$$

Hier läßt sich die Reihenfolge der Integrationen umkehren und es ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{-xu}du\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-(1+u)t}dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt\int_0^\infty e^{-(x+t)u}du = \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{x+t}e^{-t}dt.$$

Demnach erhält man

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda}e^{-v}dv = \frac{x^{1-\lambda}e^{-x}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{x+t}e^{-t}dt.$$

Substituiert man jetzt für $\frac{1}{x+t}$ die in (83) angegebene Reihe und setzt zur Abkürzung

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty t(t-1)\ldots(t-[m-1])t^{\lambda-1}e^{-t}dt = a_m, \tag{83a}$$

so wird

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda}e^{-v}dv = x^{1-\lambda}e^{-x}\left\{\frac{1}{x} - \frac{a_1}{x(x+1)} + \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)} - \ldots\right.$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} +$$

$$\left. + \gamma_n \frac{1.2\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}\right\}$$

Aus der Annahme $x > 0$ folgt aber

$$\frac{1.2\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} <$$

$$< \frac{1}{1+x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}$$

Da nun bei unendlich wachsendem n

$$\lim \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} \right\} = \infty$$

ist. so hat man

$$\lim \left\{ \frac{1.2 \ldots (n-1)}{(x+1)(x+2) \ldots (x+n-1)} \right\} = 0.$$

Oben wurde gezeigt, daß η_n ein echter Bruch sei; folglich ist auch das Produkt aus η_n und dem zuletzt angeführten Grenzwert gleich 0. Es wird also

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = \frac{1}{x^\lambda} e^{-x} \left\{ 1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots \right\} \qquad (84)$$

$$x > 0, \ \lambda > 0.$$

Um die Koeffizienten a_m zu berechnen, kann man sich einer Rekursionsformel bedienen, welche von Herrn Dr. A. Wilkens gefunden und mir gütigst mitgeteilt worden ist. Zerlegt man nämlich das Integral (83 a) in zwei Integrale, indem man den Integranden mittels des Faktors $t-(m-1)$ in eine Summe auflöst, und schreibt $a_m^{(\lambda)}$ statt a_m, so folgt

$$a_m^{(\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1) \ldots (t-[m-2]) t^{(\lambda+1)-1} e^{-t} dt$$

$$-(m-1) \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1) \ldots (t-[m-2]) t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} a_{m-1}^{(\lambda+1)} - (m-1) a_{m-1}^{(\lambda)}.$$

Wird jetzt m durch $m+1$ ersetzt und von der Gleichung (60) Gebrauch gemacht, so ergibt sich die Wilkens'sche Formel

$$a_{m+1}^{(\lambda)} = \lambda a_m^{(\lambda+1)} - m a_m^{(\lambda)}. \qquad (83\,b)$$

Nach (83a) hat man aber

$$a_1^{(\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^\lambda e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda.$$

somit

$$a_1^{(\lambda+1)} = \lambda+1.$$

Da also $a_1^{(\lambda)}$ und $a_1^{(\lambda+1)}$ bekannt sind, läßt sich mit Hilfe der Gleichung (83b) $a_2^{(\lambda)}$, demnach auch $a_2^{(\lambda+1)}$ bestimmen u. s. w. Die sich auf diese Weise ergebenden Werte von $a_m^{(\lambda)}$ oder, wie jetzt wieder geschrieben werden soll, von a_m sind:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \lambda \\
a_2 &= \lambda^2 \\
a_3 &= \lambda^3+\lambda \\
a_4 &= \lambda^4+4\lambda^3-\lambda \\
a_5 &= \lambda^5+10\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda \\
a_6 &= \lambda^6+20\lambda^4-15\lambda^3+58\lambda^2-26\lambda \\
a_7 &= \lambda^7+35\lambda^5-35\lambda^4+238\lambda^3-217\lambda^2+194\lambda \\
a_8 &= \lambda^8+56\lambda^6-70\lambda^5+728\lambda^4-1008\lambda^3+2035\lambda^2-1142\lambda \\
a_9 &= \lambda^9+84\lambda^7-126\lambda^6+1848\lambda^5-3444\lambda^4+11611\lambda^3- \\
&\qquad -13470\lambda^2+9736\lambda \\
a_{10} &= \lambda^{10}+120\lambda^8-210\lambda^7+4116\lambda^6-9660\lambda^5+47815\lambda^4- \\
&\qquad -85410\lambda^3+134164\lambda^2-81384\lambda.
\end{aligned}
$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ wird die Reihe (84)

$$\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v} dv = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \left\{1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \cdots\right\}$$

oder, wenn x^2 für x und darauf $v = t^2$ gesetzt wird,

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2} \left\{1 - \frac{a_1}{x^2+1} + \frac{a_2}{(x^2+1)(x^2+2)} - \cdots\right\}.$$

Wählt man Z als untere Grenze des Integrals und ersetzt unter dem Integralzeichen den Buchstaben t durch x, so erhält man schließlich

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^{\infty} e^{-x^2}dx =$$
$$= \frac{1}{2Z}\left\{1 - \frac{a_1}{Z^2+1} + \frac{a_2}{(Z^2+1)(Z^2+2)} - \dots\right\}. \quad (85)$$

Hierin ist

$a_1 = +\ 0{\cdot}5$	$a_8 = -144{\cdot}05859$
$a_2 = +\ 0{\cdot}25$	$a_9 = +2793{\cdot}0645$
$a_3 = +\ 0{\cdot}625$	$a_{10} = -15077{\cdot}546$
$a_4 = +\ 0{\cdot}5625$	$a_{11} = +204110{\cdot}94$
$a_5 = +\ 4{\cdot}03125$	$a_{12} = -1807850{\cdot}9$
$a_6 = +\ 0{\cdot}890625$	$a_{13} = +24035187{\cdot}7$
$a_7 = +71{\cdot}4140625$	

Für $Z = 2{\cdot}5$ macht das von a_{12} abhängige Glied in $\psi(Z)$ nur 3 Einheiten und das von a_{13} abhängige Glied nur 2 Einheiten der 8. Dezimale aus. — Es sei zum Schlusse noch erwähnt, daß Herr Radau im 18. Bande der Annalen der Pariser Sternwarte eine Tafel veröffentlicht hat, aus der man den $\log\psi(Z)$ für die Werte von Z zwischen $-0{\cdot}120$ und $+1{\cdot}010$ sowie für die Werte des $\log Z$ zwischen $0{\cdot}000$ und $1{\cdot}000$ auf 7 Dezimalen entnehmen kann.

9. Mit Hilfe der Funktion $\psi(Z)$ lassen sich die im folgenden vorkommenden Integrale

$$\int_0^{\infty}\frac{x^m e^{-nx}}{\sqrt{Z^2+x}}dx$$

leicht berechnen. Setzt man, wenn $m = 0$ ist,

$$Z^2+x = \frac{1}{n}t^2,$$

wo t eine neue, an die Stelle von x tretende Variable bedeuten soll, so wird

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} = \frac{2}{\sqrt{n}} e^{nZ^2} \int_{Z\sqrt{n}}^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{n}} \psi(Z\sqrt{n}). \tag{86}$$

Herr Radau schreibt zur Abkürzung

$$\psi_n = \sqrt{n}\,\psi(Z\sqrt{n}), \tag{87}$$

die Gleichung (86) lautet dann

$$n\int_0^\infty \frac{e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} = 2\psi_n. \tag{88}$$

Damit ist der Fall $m = 0$ erledigt.

Ist m von Null verschieden, so berücksichtige man, daß durch Differentiation erhalten wird

$$d\left\{\sqrt{Z^2+x}\; x^{m-1} e^{-nx}\right\} =$$
$$= \frac{e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} \left\{\frac{1}{2} x^{m-1} + [(m-1)x^{m-2} - n x^{m-1}](Z^2+x)\right\}. \tag{89}$$

Wird hierin $m = 1$ gesetzt und dann integriert, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (88)

$$n\int_0^\infty \frac{x e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} = Z + \left(\frac{1}{2} - nZ^2\right)\int_0^\infty \frac{e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} =$$
$$= Z + \left(\frac{1}{n} - 2Z^2\right)\psi_n. \tag{90}$$

Es werde jetzt auf der rechten Seite der Gleichung (89) die Multiplikation ausgeführt und darauf die Gleichung integriert; man erhält dann

$$n\int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} = \left(\frac{2m-1}{2} - nZ^2\right)\int_0^\infty \frac{x^{m-1}e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} +$$
$$+ (m-1)Z^2\int_0^\infty \frac{x^{m-2}e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}}. \tag{91}$$

Den Gleichungen (88) und (90) zufolge ist der Wert des auf der linken Seite der Gleichung (91) stehenden Integrals für $m = 0$ und $m = 1$ bekannt; mit Hilfe von (91) läßt er sich also auch für $m = 2$ und weiterhin für $m = 3, 4, \ldots$ bestimmen. Für $m = 2$ hat man

$$n \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-nx}\, dx}{\sqrt{Z^2+x}} =$$
$$= \frac{3}{2n} Z - Z^3 + \left(\frac{3}{2n^2} - \frac{2}{n} Z^2 + 2Z^4\right) \psi_n. \qquad (91^*)$$

10. Nachdem die im vorigen Artikel behandelten Integrale als bekannt vorauszusetzen sind, soll jetzt die für $z > 80°$ gültige Entwicklung des Integrals (47)

$$\Re = \alpha'' \int_0^1 \frac{(1-u+2\alpha\omega)\, d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u - (u-\alpha\omega)^2}}$$

vorgenommen werden. Mit Rücksicht auf die Bequemlichkeit der numerischen Rechnung empfiehlt sich dabei der folgende Weg. Man hat zunächst

$$\Re = \alpha'' \int_0^1 \frac{1-u+2\alpha\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}\, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{2} \alpha'' \int_0^1 \frac{(1-u+2\alpha\omega)(u-\alpha\omega)^2}{(\operatorname{cotg}^2 z + 2u)^{\frac{3}{2}}}\, d\omega + \ldots \qquad (92)$$

Um das erste auf der rechten Seite dieser Gleichung befindliche Integral

$$(\Re_0) = \alpha'' \int_0^1 \frac{1-u+2\alpha\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}\, d\omega \qquad (93)$$

zu berechnen, erinnere man sich des Satzes: Wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = b$ stetig sind und $\psi(x)$ außerdem positiv bleibt, so ist, wenn ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet,

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx = \varphi[a+\vartheta(b-a)] \int_a^b \psi(x)\, dx. \qquad (94)$$

Für $\psi(x) = 1$ würde sich hieraus ergeben:

$$\varphi[a+\vartheta(b-a)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{95}$$

In dem Integral (93), worin nach (53) u von ω abhängt, werde nun $1-u+2\alpha\omega$ mit $\varphi(\omega)$ und die positive Quadratwurzel aus $\operatorname{cotg}^2 z+2u$ mit $\psi(\omega)$ identifiziert. Die Gleichungen (94) und (95) lehren dann, daß man einen Näherungswert $\mathfrak{R}_0$ des Integrals (93) erhält, wenn man setzt

$$\mathfrak{R}_0 = \alpha''\left[\int_0^1 (1-u+2\alpha\omega)\,d\omega\right]\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z+2u}}$$

oder, unter Anwendung der durch die erste der Gleichungen (48) eingeführten Bezeichnung,

$$\mathfrak{R}_0 = A_0\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z+2u}}, \tag{96}$$

wo der Wert von A_0 durch die Gleichung (69) bestimmt erscheint. Es wird sich nun zeigen, daß dieselbe Methode, nach welcher das Integral (96) sich berechnen läßt, auch auf die in der Gleichung (92) vorkommenden Integrale anwendbar ist; ferner wird sich ergeben, daß für irgend eine Zenithdistanz der aus (96) folgende Wert von $\mathfrak{R}_0$ nur ganz unbedeutend von dem mittels der Gleichung (92) berechneten $\mathfrak{R}$ abweicht. Da nun die Berechnung von $\mathfrak{R}$ weit mehr Mühe verursacht als die von $\mathfrak{R}_0$, so wird man die Refraktion — wenn es sich um die Konstruktion einer Tafel handelt — zunächst mit Hilfe der sehr bequemen Formeln, zu denen die Entwicklung des Integrals (96) führt, etwa von Minute zu Minute der Zenithdistanz berechnen; nachdem dies geschehen ist, benutzt man die in passender Weise entwickelte Formel (92), um die strengen Werte der Refraktion von Grad zu Grad zu ermitteln, und bildet dann die Differenzen $\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_0$. Aus letzteren findet man durch eine leichte Interpolation die für die einzelnen Minuten jedes Grades gültigen Differenzen $\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_0$, welche also nur zu den nach der Gleichung (96) berechneten Werten $\mathfrak{R}_0$ zu addieren sind, um die strengen Werte der Refraktion zu erhalten.

Die zunächst zu lösende Aufgabe bildet nach dem Vorstehenden die Berechnung des Integrals (96). Wird in (96) an die Stelle der Variablen ω die durch die Gleichung (54) definierte Variable x eingeführt, so erhält man

$$\mathfrak{R}_0 = A_0 \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}, \tag{97}$$

wo nach der Gleichung (55) in Verbindung mit (52)

$$\frac{r_0}{l_0} u = (1-f)x + (2f-\varepsilon)(1-e^{-x})$$

ist. Die letzte Gleichung läßt sich schreiben

$$\frac{r_0}{l_0} u = [1-f+\lambda(2f-\varepsilon)]x - (2f-\varepsilon)(\lambda x - 1 + e^{-x}),$$

wobei λ eine zunächst unbestimmt gelassene Zahl bedeuten soll. Wird hierin

$$\frac{r_0}{l_0} \frac{1}{1-f+\lambda(2f-\varepsilon)} = 2\gamma^2$$

$$\frac{2f-\varepsilon}{1-f+\lambda(2f-\varepsilon)} = k \tag{98}$$

$$k(\lambda x - 1 + e^{-x}) = \varphi(x)$$

gesetzt, so lautet die Gleichung

$$2u\gamma^2 = x - \varphi(x). \tag{99}$$

Somit hat man

$$\mathfrak{R}_0 = A_0\gamma \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{\gamma^2 \operatorname{cotg}^2 z + x - \varphi(x)}}.$$

Zur Abkürzung werde

$$A_0\gamma = C, \qquad \gamma \operatorname{cotg} z = Z \tag{100}$$

gesetzt. Man erhält dann

$$\mathfrak{R}_0 = C \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{Z^2 + x - \varphi(x)}}. \tag{101}$$

Es werde jetzt mittels der Gleichung

$$x - \varphi(x) = w \tag{102}$$

an Stelle von x eine neue Variable w eingeführt. Der Nenner des Bruches unter dem vorigen Integral wird dann sofort zu einer Funktion von w, anders aber verhält es sich mit dem Zähler; um auch diesen als Funktion von w darstellen zu können, erinnere man sich des Satzes von Lagrange: Wenn zwischen zwei Variablen x und w eine Gleichung von der Form (102) besteht und mit $F(x)$ eine Funktion von x bezeichnet wird, so ist

$$F(x) = F(w) + \varphi(w) \frac{dF(w)}{dw} + \frac{1}{1.2} \frac{d}{dw}\left\{[\varphi(w)]^2 \frac{dF(w)}{dw}\right\} + \ldots$$

Hieraus folgt

$$\frac{dF(x)}{dw} = \frac{dF(w)}{dw} + \frac{d}{dw}\left\{\varphi(w)\frac{dF(w)}{dw}\right\} + \\ + \frac{1}{1.2}\frac{d^2}{dw^2}\left\{[\varphi(w)]^2\frac{dF(w)}{dw}\right\} + \ldots,$$

also, wenn $F(x) = e^{-x}$ gesetzt wird,

$$\frac{de^{-x}}{dw} = -\frac{e^{-x}\,dx}{dw} = -e^{-w} - \frac{d}{dw}\{\varphi(w)e^{-w}\} - \\ - \frac{1}{1.2}\frac{d^2}{dw^2}\{[\varphi(w)]^2 e^{-w}\} - \ldots \tag{103}$$

Aus der durch die Gleichung (102) gegebenen Definition von w in Verbindung mit der letzten der Gleichungen (98) folgt

$$w = x - \varphi(x) = x - k(\lambda x - 1 + e^{-x}),$$

somit ist für $x = 0$ auch $w = 0$ und für $x = \infty$ auch $w = \infty$. Substituiert man also die in (103) gegebene Reihe für $e^{-x}dx$ in (101), so wird

$$\mathfrak{R}_0 = C\int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{Z^2+w}}\Big[e^{-w} + \frac{d}{dw}\{\varphi(w)e^{-w}\} + \\ + \frac{1}{1.2}\frac{d^2}{dw^2}\{[\varphi(w)]^2 e^{-w}\} + \ldots\Big]$$

oder, wenn die unter dem Integralzeichen angedeuteten Differentiationen ausgeführt werden und darauf der Buchstabe w durch x ersetzt wird,

$$\mathfrak{R}_0 = C\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{Z^2+x}}\Big\{1+k(1+\lambda-\lambda x-2e^{-x})+ \\ +k^2\Big[\frac{1}{2}+2\lambda+\lambda^2-(1+2\lambda)\lambda x+ \\ +\frac{1}{2}\lambda^2x^2-4(1+\lambda)e^{-x}+4\lambda xe^{-x}+ \\ +\frac{9}{2}e^{-2x}\Big]+\ldots\Big\}.$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (88), (90) und (91*) erhält man hieraus, wenn noch zur Abkürzung

$$L_0 = 2\psi_1, \qquad L_1 = (2+\lambda)\psi_1-2\psi_2-\lambda Z(1-2Z\psi_1)$$

$$L_2 = \left(1+3\lambda+\frac{3}{4}\lambda^2\right)\psi_1-(4+3\lambda)\psi_2+3\psi_3+ \\ +\lambda Z(1+2Z\psi_1-4Z\psi_2)- \\ -\lambda^2 Z\Big[\frac{5}{4}+\frac{1}{2}Z^2-(3Z+Z^3)\psi_1\Big] \tag{104}$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{R}_0 = C(L_0+kL_1+k^2L_2+\ldots). \tag{105}$$

Wählt man für die bisher unbestimmt gelassene Zahl λ den Wert $\frac{1}{2}$, so ergeben die zwei ersten der Gleichungen (98)

$$k = \frac{4f-2\varepsilon}{2-\varepsilon}, \qquad \gamma^2 = \frac{r_0}{l_0}\frac{1}{2-\varepsilon}. \tag{106}$$

γ wird also unabhängig von f und, wie die Gleichungen (100) lehren, hängen darum auch C und Z nicht von f ab; dieser

Umstand ist von Wichtigkeit, wenn man die Refraktion unter verschiedenen Annahmen für f berechnen will, wie es von Herrn Radau geschehen ist.

Im vorigen sind alle zur Bestimmung von $\mathfrak{R}_0$ nötigen Formeln abgeleitet worden, es soll jetzt nur noch der bei der numerischen Rechnung zu befolgende Gang angegeben werden. Mit Hilfe der nach Artikel 6 bekannten Werte von $\frac{r_0}{l_0}$ und ε berechne man die durch die Gleichungen (106) definierten Größen k und γ, wobei wieder $f = 0 \cdot 2$ angenommen werden möge; ferner führt die Gleichung (69) in Verbindung mit dem in Artikel 6 bestimmten U_1 zur Kenntnis von A_0. Nachdem γ und A_0 gefunden sind, erhält man mittels der ersten der Gleichungen (100) den Koeffizienten C und mittels der zweiten der Gleichungen (100) das einer gegebenen Zenithdistanz entsprechende Z. Mit den Argumenten Z, $Z\sqrt{2}$, $Z\sqrt{3}$ geht man in die im Artikel 8 erwähnte Tafel für $\psi(Z)$ ein und berechnet darauf nach (87)

$$\psi_1 = \psi(Z), \qquad \psi_2 = \sqrt{2}\,\psi(Z\sqrt{2}), \qquad \psi_3 = \sqrt{3}\,\psi(Z\sqrt{3})$$

Wird jetzt auch in den Gleichungen (104) $\lambda = \frac{1}{2}$ gesetzt, so lassen sich $L_0, L_1, L_2, \ldots$ ohne Mühe bestimmen und die Substitution dieser Werte sowie derjenigen von C und k in die Gleichung (105) ergibt schließlich den Wert von $\mathfrak{R}_0$.

11. Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, in welcher Weise der durch die Reihe (92) ausgedrückte strenge Wert der Refraktion berechnet werden kann. Das erste Glied dieser Reihe, nämlich

$$(\mathfrak{R}_0) = \alpha'' \int_0^1 \frac{1 - u + 2\alpha\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}\, d\omega,$$

wird, wenn man wie im vorigen Artikel

$$\omega = 1 - e^{-x}, \qquad 2u\gamma^2 = x - \varphi(x) = w, \qquad \gamma \operatorname{cotg} z = Z$$

setzt,

$$(\mathfrak{R}_0) = \alpha''(1+2\alpha)\gamma\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{Z^2+w}} - \frac{\alpha''}{2\gamma}\int_0^\infty \frac{we^{-x}dx}{\sqrt{Z^2+w}} - $$
$$-2\alpha\alpha''\gamma\int_0^\infty \frac{e^{-2x}dx}{\sqrt{Z^2+w}}. \quad (107)$$

Substituiert man hierin den durch die Gleichung (103) gegebenen Wert von $e^{-x}dx$ als Funktion von w sowie die entsprechende Reihe für $e^{-2x}dx$

$$e^{-2x}dx = e^{-2w}dw + \frac{d}{dw}\{\varphi(w)e^{-2w}\}dw +$$
$$+\frac{1}{1.2}\frac{d^2}{dw^2}\{[\varphi(w)]^2e^{-2w}\}dw + \dots$$

und führt die angedeuteten Differentiationen aus, wobei

$$\varphi(w) = k(\lambda w - 1 + e^{-w})$$

zu setzen ist, so stößt man wieder auf Integrale, welche den Gleichungen (88), (90) und (91*) zufolge bekannt sind. Schließlich kann man die willkürliche Zahl $\lambda = \frac{1}{2}$ und demgemäß für k und γ ihre aus den Gleichungen (106) folgenden Werte annehmen. Die strenge Berechnung des ersten Gliedes der Reihe (92) bietet also keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar; die Ausführung der Rechnung soll hier unterbleiben, doch möge bemerkt werden, daß das Endresultat nur ganz unbedeutend von dem durch die Gleichung (105) gegebenen abweicht. Die Gleichung (105) entspricht aber dem Integral (97), welches, wie oben gezeigt wurde, einen Näherungswert des Integrals (93) oder des ersten Integrals der Reihe (92) darstellt.

Wendet man dieselbe Schlußweise, welche bei der Ableitung des Integrals (97) aus (93) angewandt wurde, auch auf das zweite Glied der Reihe (92), nämlich

$$(\mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2}\alpha''\int_0^1 \frac{(1-u+2\alpha\omega)(u-\alpha\omega)^2}{(\cot g^2 z+2u)^{\frac{3}{2}}}d\omega$$

an, so erhält man als Näherungswert $\mathfrak{R}_1$ desselben

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{2} A_0 \int_0^1 \frac{(u - \varkappa\omega)^2}{(\cot g^2 z + 2u)^{\frac{3}{2}}} d\omega =$$

$$= \frac{A_0}{8\gamma} \int_0^\infty \frac{[w - 2\alpha\gamma^2(1 - e^{-x})]^2}{(Z^2 + w)^{\frac{3}{2}}} e^{-x} dx. \qquad (108)$$

Entwickelt man den Zähler des unter dem Integralzeichen stehenden Bruches und substituiert für $e^{-x} dx$, $e^{-2x} dx, \ldots$ die aus dem Lagrange'schen Satze sich ergebenden als Funktionen von w erscheinenden Reihen, so erhält man lauter Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}}{(Z^2 + x)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

welche sich in folgender Weise berechnen lassen.

Ist zunächst $m = 0$, so berücksichtige man, daß sich durch Differentiation ergibt

$$d\left\{(Z^2 + x)^{-\frac{1}{2}} e^{-nx}\right\} = -\frac{1}{2} \frac{e^{-nx} dx}{(Z^2 + x)^{\frac{3}{2}}} - n \frac{e^{-nx} dx}{\sqrt{Z^2 + x}}.$$

Folglich wird

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nx} dx}{(Z^2 + x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{Z} - 2n \int_0^\infty \frac{e^{-nx} dx}{\sqrt{Z^2 + x}}$$

oder mit Anwendung der Gleichung (88)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nx} dx}{(Z^2 + x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{Z} - 4\psi_n. \qquad (109)$$

Der Fall $m = 1$ läßt sich ohneweiters auf den vorigen zurückführen; man hat nämlich

$$\int_0^\infty \frac{x e^{-nx} dx}{(Z^2 + x)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\infty \frac{(Z^2 + x - Z^2) e^{-nx} dx}{(Z^2 + x)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-nx} dx}{\sqrt{Z^2 + x}} - Z^2 \int_0^\infty \frac{e^{-nx} dx}{(Z^2 + x)^{\frac{3}{2}}}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (88) und (109)

$$\int_0^\infty \frac{x e^{-nx}\, dx}{(Z^2+x)^{\frac{3}{2}}} = -2Z + \left(4Z^2 + \frac{2}{n}\right)\psi_n. \tag{110}$$

Für $m > 1$ benutze man die Differentialformel

$$d\left\{(Z^2+x)^{-\frac{1}{2}} x^{m-1} e^{-nx}\right\} =$$

$$= \frac{e^{-nx}\, dx}{(Z^2+x)^{\frac{3}{2}}}\left\{-\frac{1}{2} x^{m-1} + [(m-1)x^{m-2} - n x^{m-1}](Z^2+x)\right\}.$$

Wird auf der rechten Seite die Multiplikation ausgeführt und dann die Gleichung integriert, so folgt

$$\int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}\, dx}{(Z^2+x)^{\frac{3}{2}}} = -\left(Z^2 + \frac{3-2m}{2n}\right)\int_0^\infty \frac{x^{m-1} e^{-nx}\, dx}{(Z^2+x)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \frac{m-1}{n} Z^2 \int_0^\infty \frac{x^{m-2} e^{-nx}\, dx}{(Z^2+x)^{\frac{3}{2}}}. \tag{111}$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (109) und (110) läßt sich der Wert des auf der linken Seite stehenden Integrals zunächst für $m = 2$ und weiterhin für $m = 3, 4, \ldots$ bestimmen.

Da auf der rechten Seite der Gleichung (109) der reziproke Wert von Z auftritt, so soll noch nachgewiesen werden, daß auch im Horizont, wo $Z = 0$ ist, der Ausdruck (108) für $\mathfrak{R}_1$ endlich bleibt. Es kommt dabei nur auf das Glied

$$\frac{A_0}{8\gamma}\int_0^\infty \frac{4\alpha^2\gamma^4(1-e^{-x})^2}{(Z^2+w)^{\frac{3}{2}}} e^{-x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} A_0 \alpha^2 \gamma^3 \int_0^\infty \frac{e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x}}{(Z^2+w)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

an. Substituiert man hierin die aus der Gleichung (103) und den ihr entsprechenden sich ergebenden Reihen

$$e^{-x}\,dx = e^{-w}\,dw\{1+k(1+\lambda-2e^{-w}-\lambda w)+\ldots\}$$
$$e^{-2x}\,dx = e^{-2w}\,dw\{1+k(2+\lambda-3e^{-w}-2\lambda w)+\ldots\}$$
$$e^{-3x}\,dx = e^{-3w}\,dw\{1+k(3+\lambda-4e^{-w}-3\lambda w)+\ldots\}$$

und wendet dann die Formel (109) an, so sieht man, daß alle Glieder, in denen der reziproke Wert von Z auftritt, sich gegenseitig aufheben; damit ist also bewiesen, daß die Entwicklung von $\mathfrak{R}_1$ für $Z = 0$ einen endlichen Wert liefert.

Es wurde bereits oben bemerkt, daß das erste Glied der Reihe (92) kaum von seinem Näherungswert (96), beziehungsweise (97) verschieden ist; das an und für sich schon sehr kleine zweite Glied der Reihe (92) fällt ganz mit dem entsprechenden Näherungswerte (108) zusammen. Die wirkliche Ausführung der Berechnung von $\mathfrak{R}_1$ kann unterlassen werden, es sollen aber die Differenzen zwischen den aus (92) folgenden strengen Werten $\mathfrak{R}$ der Refraktion und den der Formel (96) entsprechenden genäherten Werten $\mathfrak{R}_0$ mitgeteilt werden, welche Herr Radau unter Zugrundelegung der Bessel'schen Refraktionskonstante und unter der Annahme $\rho = 1$, $t = 0°$ C, $f = 0{\cdot}2$ gefunden hat; dieselben sind für

z	$\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_0$	z	$\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_0$	z	$\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_0$
80°	+0ʺ02	84°	+0ʺ07	88°0	+0ʺ36
81	+0·03	85	+0·10	89·0	+0·63
82	+0·04	86	+0·14	89·5	+0·85
83	+0·05	87	+0·21	90·0	+1·14

Gegenüber der Unsicherheit der Beobachtungen und noch mehr mit Rücksicht darauf, daß die für so große Zenithdistanzen berechnete Refraktion infolge der Abweichung des wirklichen Zustandes der Atmosphäre von dem in der Theorie vorausgesetzten ganz erheblich falsch sein kann, würden die obigen Differenzen $\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_0$ unbedenklich vernachlässigt werden können. Sie sind indessen in den von Herrn Radau veröffentlichten Refraktionstafeln noch berücksichtigt worden.

Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind

von

Ing. Dr. **Alfons Leon.**

(Mit 13 Textfiguren.)

(**Vorgelegt in der Sitzung am 16. November 1906.**)

I.

Bezeichnet man mit ρ und ξ die Verrückungen eines Punktes mit den Koordinaten r und x eines halbpolaren Koordinatensystems, mit σ_r, σ_t, σ_x die radiale, tangentiale, axiale Normalspannung, mit τ die in den Meridianebenen wirkende Schubspannung, endlich mit K und θ die Kirchhoff'schen Elastizitätskonstanten, so sind die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen in einem gleichmäßig um die x-Achse sich drehenden Drehungskörper gegeben durch die Gleichungen

$$\sigma_r = -2K\left[\frac{\partial \rho}{\partial r} + \theta v\right], \tag{1}$$

$$\sigma_t = -2K\left[\frac{\rho}{r} + \theta v\right], \tag{2}$$

$$\sigma_x = -2K\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta v\right], \tag{3}$$

$$\tau = -K\left[\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\right], \tag{4}$$

wobei

$$\nu = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \, . \, \rho)}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (5)$$

die kubische Ausdehnung bedeutet. Die Gleichgewichtsbedingungen für einen in gleichmäßiger Drehung befindlichen Drehungskörper lauten

$$\frac{\partial (r \, . \, \sigma_r)}{r \partial r} - \frac{\sigma_t}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\gamma \omega^2}{g} r = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial (r \, . \, \tau)}{r \partial r} = 0, \qquad (7)$$

wobei γ das spezifische Gewicht des Materials, g die Beschleunigung der Schwere, ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet und nur die Beanspruchung des Körpers durch die Fliehkraft in Betracht gezogen wird.

Sollen die Hauptspannungsrichtungen im ganzen Bereiche des Körpers mit den Koordinatenrichtungen übereinstimmen, so muß τ in allen Punkten verschwinden, also nach Gleichung (7):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0,$$

somit

$$\sigma_x = f(r),$$

eine Funktion von r allein sein.

Für jedes Oberflächenelement müssen die in der Richtung der Flächennormalen wirkenden Normal- und die Schubspannungen Null sein. Nennt man den Winkel, den die Oberflächennormale r' mit der r-Achse einschließt, α, so lassen sich für ein um diesen Winkel gedrehtes Koordinatensystem die Spannungen aus den Gleichungen

$$\sigma_r' = \sigma_r \cos^2 \alpha + \sigma_x \sin^2 \alpha - 2\tau \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sigma_x' = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_r \sin^2 \alpha + 2\tau \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sigma_t' = \sigma_t,$$

$$\tau' = \tau(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_r - \sigma_x) \cos \alpha \sin \alpha$$

finden.

Für alle Punkte der Oberfläche muß $\sigma'_r = \tau' = 0$, somit

$$|\sigma_r \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha - 2\tau \cos\alpha \sin\alpha = 0|,$$

$$|\tau(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sigma_r - \sigma_x)\cos\alpha \sin\alpha = 0|$$

sein. Für die hier zur Untersuchung kommenden Körper ist

$$\tau = 0, \tag{8}$$

also

$$|\sigma_r \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha = 0|,$$

$$|\sigma_r - \sigma_x = 0|,$$

somit

$$|\sigma_r = \sigma_x = 0|.$$

Nachdem aber σ_x im ganzen Bereiche des Körpers, also auch an der Oberfläche, nur eine Funktion von r ist, an der Oberfläche aber für jedes beliebige r verschwindet, so ergibt sich daraus, daß

$$\sigma_x = 0 \tag{9}$$

im ganzen Bereiche des Körpers ist. Dies findet nach Gleichung (3) statt, wenn

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta\nu = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r.\rho)}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] = 0,$$

also

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{\partial(\rho.r)}{r\partial r} \tag{10}$$

ist. Nach Gleichung (8) muß ferner

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{11}$$

sein. Setzt man nun für $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ den aus Gleichung (10) sich ergebenden Wert in die Gleichungen (1) und (2) ein, so erhält man die folgenden:

$$\sigma_r = -\frac{2K}{1+\theta}\left[(1+2\theta)\frac{\partial \rho}{\partial r} + \theta\frac{\rho}{r}\right], \tag{12}$$

$$\sigma_t = -\frac{2K}{1+\theta}\left[\theta\frac{\partial\rho}{\partial r}+(1+2\theta)\frac{\rho}{r}\right]. \qquad (13)$$

Setzt man diese Werte in die Gleichgewichtsbedingung (9) ein, so ergibt sich daraus

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2}+\frac{\partial\rho}{r\partial r}-\frac{\rho}{r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{\rho}{r}\right)=-\frac{1+\theta}{2(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r;$$

daher ist

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{\rho}{r}=\frac{\partial(r\rho)}{r\partial r}=-\frac{1+\theta}{4(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^2+X, \qquad (14)$$

wobei X eine Funktion von x allein bedeutet. Durch eine zweite Integration der Gleichung (14) erhält man

$$\rho=-\frac{1+\theta}{16(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^3+\frac{1}{2}Xr+\frac{1}{r}\cdot X_1. \qquad (15)$$

X_1 ist eine neue Funktion von x, welche, ebenso wie X, weiter unten erledigt werden soll. Aus den Gleichungen (10) und (14) folgt, daß

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\theta}{4(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^2-\frac{\theta}{1+\theta}\cdot X,$$

somit

$$\xi=\frac{\theta}{4(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^2x-\frac{\theta}{1+\theta}\int X\,dx+R \qquad (16)$$

ist, wobei R eine vorläufig willkürliche Funktion von r allein bedeutet. Aus (11) folgt ferner

$$\frac{\theta}{2(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}rx+\frac{dR}{dr}+\frac{r}{2}\cdot\frac{dX}{dx}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dX_1}{dx}=0$$

für jedes r und jedes x, und daraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= -\frac{\theta}{1+2\theta} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} x, \\ \frac{dX_1}{dx} &= C_1, \\ \frac{dR}{dr} &= -\frac{C_1}{r}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Somit ist

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\theta}{2(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} x^2 + C, \\ X_1 &= C_1 x + C_2, \\ R &= -C_1 . lr + C_3, \\ \int X dx &= -\frac{\theta}{6(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} x^3 + Cx. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

C, C_1, C_2, C_3 sind konstante Koeffizienten. Setzt man die vorstehenden Werte in die Gleichungen (15) und (16) ein, so erhält man folgende Lösungen:

$$\rho = -\frac{1+\theta}{16(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} r^3 - \frac{\theta}{4(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} x^2 r + \\ + \frac{C}{2} r + C_1 \cdot \frac{x}{r} + \frac{C_2}{r}, \quad (19)$$

$$\xi = \frac{\theta}{4(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} r^2 x + \frac{\theta^2}{6(1+\theta)(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} x^3 - \\ - \frac{\theta}{1+\theta} Cx - C_1 . lr + C_3. \quad (20)$$

Somit ergeben sich die folgenden Formeln für die Spannungen und für die räumliche Ausdehnung:

$$\sigma_r = \frac{2K}{1+\theta} \left[\frac{(3+7\theta)(1+\theta)}{16(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} r^2 + \frac{\theta(1+3\theta)}{4(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} x^2 - \right. \\ \left. - \frac{1+3\theta}{2} C + (1+\theta) C_1 \cdot \frac{x}{r^2} + (1+\theta) \frac{C_2}{r^2} \right], \quad (21)$$

$$\sigma_t = \frac{2K}{1+\theta}\left[\frac{(1+5\theta)(1+\theta)}{16(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^2+\frac{\theta(1+3\theta)}{4(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}x^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1+3\theta}{2}C-(1+\theta)C_1\cdot\frac{x}{r^2}-(1+\theta)\frac{C_2}{r^2}\right], \quad (22)$$
$$\sigma_x = 0,$$
$$\tau = 0.$$

$$\nu = \frac{1}{1+\theta}\left[-\frac{1+\theta}{4(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^2-\frac{\theta}{2(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}x^2+C\right]. \quad (23)$$

Die kubische Ausdehnung ist von C allein, nicht aber von C_1 und C_2 abhängig. Die Flächen gleicher räumlicher Ausdehnung sind homothetische Rotationsellipsoide.

Da die radiale Spannung σ_r an der Oberfläche verschwinden muß, so lautet die Gleichung der Oberfläche:

$$\frac{(3+7\theta)(1+\theta)}{16(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^2+\frac{\theta(1+3\theta)}{4(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}x^2-$$
$$-\frac{1+3\theta}{2}C+(1+\theta)C_1\cdot\frac{x}{r^2}+(1+\theta)\frac{C_2}{r^2}=0. \quad (24)$$

Für $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man somit:

$$39r^4+20r^2x^2+C'r^2+C''x+C'''=0, \quad (25)$$

für $\theta = 1$:

$$5r^4+\ 4r^2x^2+C'r^2+C''x+C'''=0. \quad (26)$$

Die erste Formel entspricht dem sogenannten theoretischen Werte $m = 4$ des Poisson'schen Koeffizienten, die zweite dem Werte $m = 3$.

C', C'', C''' sind willkürliche, an Stelle von C, C_1 und C_2 eingeführte Koeffizienten. Sind C'' und C''' nicht gleich Null, so müssen für einen Punkt der Drehungsachse, also für $r = 0$, σ_r und σ_t unendlich groß werden. Daraus folgt, daß die Achse x im allgemeinen nicht im Innern des Drehungskörpers liegen kann. Dies ist nur im besonderen Falle möglich, daß sowohl C'' als auch C''' Null sind.

In den nachstehenden Figuren sind einige allgemeine und besondere Fälle aufgezeichnet. Spezielle Fälle ausgenommen, ist die x-Achse eine Asymptote, wie man übrigens aus der



Fig. 1 ($\theta = \frac{1}{2}$).

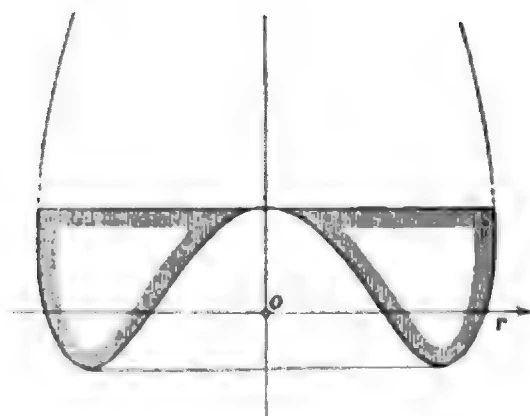


Fig. 2 ($\theta = \frac{1}{2}$).

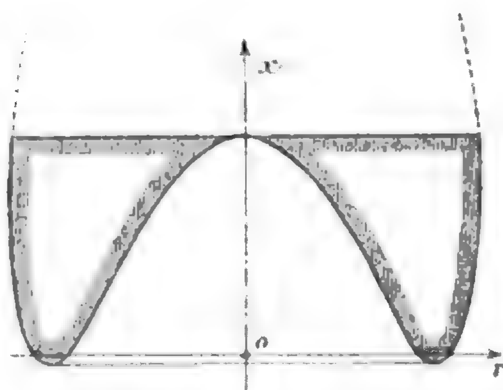


Fig. 3 ($\theta = \frac{1}{2}$).

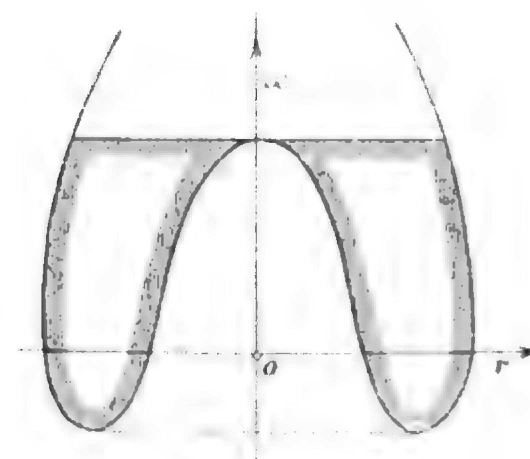


Fig. 4 ($\theta = \frac{1}{2}$).

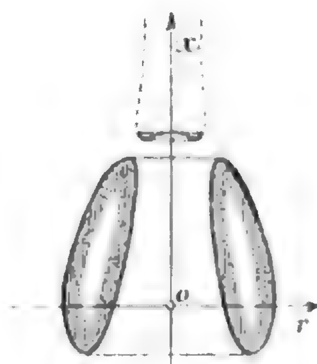


Fig. 5 ($\theta = \frac{1}{2}$).

Gleichung (24) unmittelbar ersehen kann. Wenn $C'' = C'''$ ist, so degeneriert die allgemeine Kurve vierter Ordnung, welche den Meridianschnitt des Drehungskörpers darstellt, in eine Gerade und eine Ellipse. Auf diese Ellipse, deren Achsen im

Verhältnisse $1:\sqrt{\frac{4\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)(3+7\theta)}}$ stehen, hat M. L. Lecornu aufmerksam gemacht (siehe Comptes rendus *123*, 1896, p. 96 bis 99, und A. Leon, Proseminaraufgaben aus der Elastizitäts-



Fig. 6 ($\theta = \frac{1}{2}$).

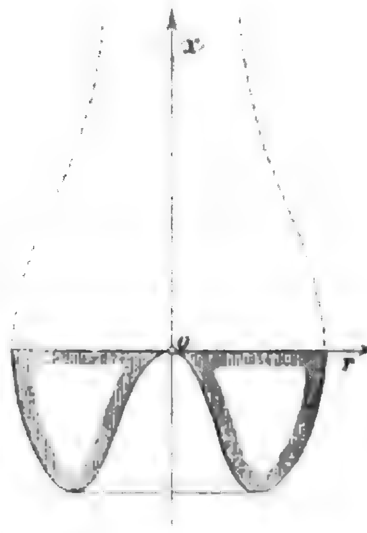


Fig. 7 ($\theta = \frac{1}{2}$, $C'' = 0$).

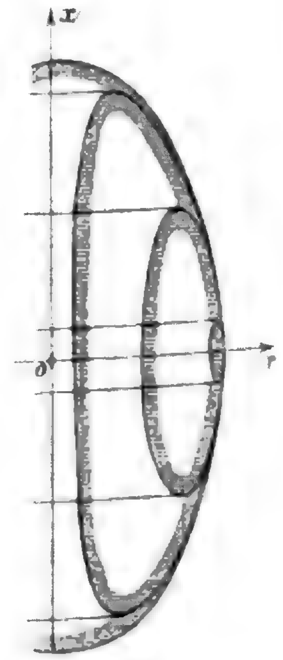


Fig. 8 ($\theta = \frac{1}{2}$, $C' = 0$).



Fig. 9 ($\theta = \frac{1}{2}$, $C' = 0$).

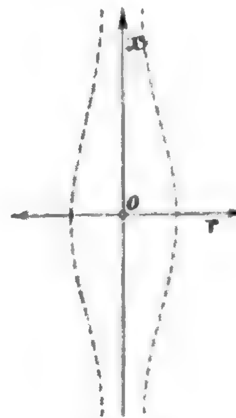


Fig. 10 ($\theta = \frac{1}{2}$, $C = C'' = 0$).



Fig. 11 ($\theta = \frac{1}{2}$, $C = C'' = 0$).

theorie, Fromme, 1906) und angewendet zur Untersuchung rotierender Mühlsteine. In Abbildung 8 ist die Meridianellipse für $\theta = \frac{1}{2}$, in Abbildung 13 für $\theta = 1$ zu sehen.

Als reale Lösungen der vorliegenden Frage kommen nur die schraffierten Teile in Betracht. Jeden dieser Körper kann man durch Schnitte normal zur Drehungsachse x beliebig unterteilen, ohne das elastische Gleichgewicht irgendwie zu stören.

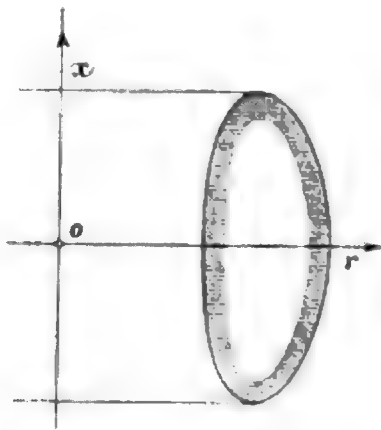


Fig. 12 ($\theta = 1$, $C' = 0$).

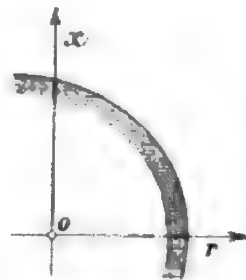


Fig. 13 ($\theta = 1$, $C' = C'' = 0$).

II.

Liegt eine rotierende Scheibe vor, welche um die x-Achse gleichmäßig sich dreht und deren r-Achse mit dem plattenförmigen Körper in fester Verbindung steht, so lauten die Formeln in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem wie folgt:

$$\sigma_r = -\frac{2K}{1+\theta}\left[(1+2\theta)\frac{\partial \rho}{\partial r} + \theta\frac{\partial \xi}{\partial x}\right], \tag{27}$$

$$\sigma_x = -\frac{2K}{1+\theta}\left[\theta\frac{\partial \rho}{\partial r} + (1+2\theta)\frac{\partial \xi}{\partial x}\right], \tag{28}$$

$$\tau = -K\left[\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\right], \tag{29}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\gamma w^2}{g} r = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0. \tag{31}$$

Wird $\tau = 0$ angenommen, so folgt in gleicher Weise wie früher, daß auch σ_x im ganzen Bereiche der rotierenden Scheibe verschwinden muß. Daher ist nach Gleichung (28)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\theta}{1+2\theta} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r}, \tag{32}$$

und somit nach Gleichung (27)

$$\sigma_r = -\frac{2K(1+3\theta)}{1+2\theta} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r}. \tag{33}$$

Die Gleichung (30) lautet aber

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\gamma w^2}{g} \cdot r.$$

Es ist daher

$$\sigma_r = \frac{\gamma w^2}{2g} r^2 + X = -\frac{2K(1+3\theta)}{1+2\theta} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r}, \tag{34}$$

wobei X eine vorläufig noch willkürliche Funktion von x bedeutet. Somit erhält man aus den Gleichungen (34) und (32)

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{1+2\theta}{4(1+3\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} r^2 - \frac{1+2\theta}{2K(1+3\theta)} \cdot X = -\frac{1+2\theta}{\theta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

und daraus

$$\rho = -\frac{1+2\theta}{12(1+3\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} \cdot r^3 - \frac{1+2\theta}{2K(1+3\theta)} \cdot X.r + X_1. \tag{35}$$

$$\xi = \frac{\theta}{4(1+3\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{Kg} \cdot r^2 x + \frac{\theta}{2K(1+3\theta)} \cdot \int X dx + R. \tag{36}$$

X_1 ist eine Funktion von x, R eine von r allein. Soll aber die Schubspannung τ überall verschwinden, so muß

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r} = -\frac{1+2\theta}{2K(1+3\theta)} \cdot r \frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx} + \frac{\theta}{2K(1+3\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{g} rx + \frac{dR}{dr} = 0$$

sein. Die Funktionen X, X_1 und R ergeben sich somit aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX}{dx} &= \frac{\theta}{1+2\theta}\cdot\frac{\gamma w^2}{g}x,\\ \frac{dX_1}{dx} &= C,\\ \frac{dR}{dr} &= -C.\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

Es ist also

$$\left.\begin{aligned}X &= \frac{\theta}{2(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{g}\cdot x^2+C_1,\\ X_1 &= Cx+C_2,\\ R &= -Cr+C_3,\\ \int X dx &= \frac{\theta}{6(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{g}x^3+C_1 x.\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

Es ist überflüssig, in der letzten der vorstehenden Gleichungen noch eine Konstante hinzuzufügen.

Es lauten nun die Formeln für die Verrückungen wie folgt:

$$\rho = -\frac{1+2\theta}{12(1+3\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^3-\frac{\theta}{4(1+3\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r x^2-$$
$$-\frac{1+2\theta}{2K(1+3\theta)}C_1 r+Cx+C_2,\quad(39)$$

$$\xi = \frac{\theta}{4(1+3\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}r^2 x+\frac{\theta^2}{12(1+3\theta)(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}x^3+$$
$$+\frac{\theta}{2K(1+3\theta)}C_1 x-Cr+C_3.\quad(40)$$

Für die radiale Spannung bekommt man nun:

$$\sigma_r = \frac{\gamma w^2}{2Kg}r^2+\frac{\theta}{2(1+2\theta)}\cdot\frac{\gamma w^2}{Kg}x^2+C_1.\quad(41)$$

Für den Umfang muß $\sigma_x = 0$ sein; es lautet somit die Gleichung der Randkurve:

$$r^2 + \frac{\theta}{1+2\theta} x^2 = C'. \quad (42)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Nennt man ihre Achsen a_1 und a_2, so stehen diese in folgendem Verhältnisse zueinander:

$$a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{\frac{1+2\theta}{\theta}}.$$

Für $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man:

$$a_1 : a_2 = 1 : 2,$$

für $\theta = 1$:

$$a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{3}.$$

Die Kurven gleicher radialer Spannung und gleicher räumlicher Ausdehnung sind homothetische Ellipsen.

Es sei vorbehalten, die entsprechenden Verhältnisse beim polaren Koordinatensysteme zu untersuchen.

Ein einfacher Beweis für das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung

von

Dr. Heinrich Mache.

Aus dem physikalischen Institute der Universität Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Dezember 1906.)

Der von Maxwell gegebene zweite Beweis dieses Gesetzes, der dann von Boltzmann, Lorentz und anderen noch vertieft wurde, findet sich in den ausführlichen Lehrbüchern der Gastheorie in sehr breit angelegter Form. Nur in seltenen Fällen wird der Beweis in solcher Allgemeinheit nötig sein und so wird man sich meistens mit dem ersten Maxwell'schen Beweise begnügen, der nun freilich große Mängel zeigt und vor allem nicht die Prämissen klarlegt, aus denen die Gültigkeit des Gesetzes folgt.

Im Nachstehenden wird der Versuch gemacht, gerade hier volle Klarheit und Übersichtlichkeit beizubehalten, dabei aber doch den Beweis so einfach als möglich zu führen. Er erfolgt unter den folgenden vier Annahmen:

1. Die Tatsache, daß eine Molekel die Geschwindigkeit c hat, ist unabhängig von dem Ereignis, daß eine andere Molekel gleichzeitig die Geschwindigkeit c_1 besitzt,
2. der gemeinsame Schwerpunkt,
3. die lebendige Kraft,
4. die Molekelzahl[1] des Systems bleiben erhalten.

[1] Bedingung 4 sagt aus, daß, wenn in der Zeiteinheit eine bestimmte Zahl von Molekeln die Raumeinheit infolge der Zusammenstöße verläßt, die gleiche Zahl aus der Umgebung dafür eintritt. Bei Unterschieden im Drucke oder Partialdrucke (Strömung oder Diffusion) innerhalb der Gasmasse gilt ja bekanntlich das Verteilungsgesetz nicht mehr.

Eine einfache Überlegung verhilft uns zunächst dazu, der ersten Annahme eine andere Form zu geben:

Unter einer gewissen Anzahl von Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem bestimmten Würfel eine bestimmte Zahl, etwa die Eins, zu werfen, unabhängig von dem Wurfresultat der anderen Würfel. Es ist somit auch umgekehrt die Wahrscheinlichkeit, mit einem der anderen Würfel die Eins zu werfen, die gleiche. Das Eintreten des Ereignisses, Eins zu werfen, ist also um so wahrscheinlicher, je mehr Würfel vorhanden sind, und zwar ist diese Wahrscheinlichkeit der Anzahl der Würfel einfach proportional. Wir werden im Mittel mit sechs Würfeln eine Eins, mit 600 Würfeln 100 Eins werfen. Diese Proportionalität ist ein direkter Ausdruck für die Unabhängigkeit der Einzelereignisse.

Wir können somit die erste Annahme auch folgendermaßen formulieren:

Ist $F(c)\,dw$ die Wahrscheinlichkeit, daß eine Molekel nahezu die Geschwindigkeit c hat, daß also ihr Geschwindigkeitspunkt, d. h. der Endpunkt des vom Ursprung aus aufgetragenen Geschwindigkeitsvektors im Parallelepiped $dw = dx\,dy\,dz$ liegt, so haben unter N Molekeln $NF(c)\,dw$ dieselbe Geschwindigkeit, d. h. ihre Geschwindigkeitspunkte liegen innerhalb des gleichen Parallelepipeds. Das Unbedenkliche dieser Annahme ist wohl einleuchtend.

Wir können nun die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig eine jede Molekel die Geschwindigkeit besitzt, die sie eben hat, durch das Produkt aller Teilwahrscheinlichkeiten, also in der Form $W = \Pi F(c)$ ausdrücken, wobei sich das Produkt über alle Molekel erstreckt. Es haben aber unter N Molekeln $NF(c)\,dw$ denselben Absolutwert von c. Dann ist auch:

$$W = \Pi [F(c)]^{NF(c)\,dw} \tag{1}$$

und

$$\log W = H = \Sigma NF(c) \log F(c)\,dw,$$

wo die Summe über alle Molekel gebildet ist. W ist nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit der durch $F(c)$ gegebenen Geschwindigkeitsverteilung, $H = \log W$ ist die Boltzmann'sche

Funktion, die natürlich, wenn W am größten ist, selbst den kleinsten Wert annimmt.

Um den wahrscheinlichsten Wert der Geschwindigkeitsverteilung zu finden, haben wir nach der Methode der Variationsrechnung diejenige Verteilung $F(c)$ zu suchen, die den mit W bezeichneten Ausdruck zu einem Maximum, beziehungsweise H zu einem Minimum macht, d. h. wir haben δW oder $\delta H = 0$ zu setzen. Hiebei müssen wir aber gleichzeitig noch den Annahmen 2, 3 und 4 genügen, da wir ja bisher nur der Annahme 1 entsprochen haben.

Annahme 2 postuliert, daß bei der Bewegung und den Zusammenstößen der Molekel der gemeinsame Schwerpunkt des Systems erhalten bleibt. Dies ist ersichtlich der Fall, wenn für jede ihrem absoluten Betrage nach vorgegebene Geschwindigkeitsklasse zu jeder Zeit alle Richtungen gleich möglich sind, oder mit anderen Worten, wenn zu jedem Geschwindigkeitsvektor der gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete existiert. Der Annahme 2 ist somit genügt, wenn wir dw durch $4c^2\pi dc$ ersetzen und in $F(c)$ das c nicht mehr als Vektorgröße auffassen, sondern nur dem Absolutwerte nach in Betracht ziehen. In dem Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit

$$W = \Pi[F(c)]^{NF(c)4c^2\pi dc} \tag{2}$$

gibt dann jeder der Teilfaktoren den Wahrscheinlichkeitsbetrag, der von den Molekeln herrührt, deren Geschwindigkeit zwischen c und $c+dc$ liegt und deren Geschwindigkeitspunkte zwischen den Kugeln vom Radius c und vom Radius $c+dc$ homogen verteilt sind. Auch können wir jetzt in H die Summe durch ein bestimmtes Integral ersetzen und erhalten als Bedingungsgleichung, die auch bereits unseren beiden ersten Annahmen entspricht, den Ausdruck:

$$\delta H = \delta\int_0^\infty NF(c) \log F(c) 4c^2\pi dc = 0.$$

Es ist nun gemäß Annahme 3:

$$\int_0^\infty NF(c) 4c^4\pi dc = \text{constans} = K \tag{3}$$

und gemäß Annahme 4:

$$\int_0^\infty NF(c)\, 4c^2\pi\, dc = \text{constans} = N. \qquad (4)$$

Bildet man δH unter gleichzeitiger Befriedigung der beiden letzten Gleichungen, so erhält man als Bestimmungsgleichung für $F(c)$ den Ausdruck:

$$[\log F(c)+1]\, 4c^2\pi\, dc + A\, 4c^4\pi\, dc + B\, 4c^2\pi\, dc = 0.$$

Hierin sind A und B die zunächst willkürlichen Lagrangeschen Koeffizienten. Weiters wird:

$$\log F(c) = -Ac^2 - 1 - B$$

und

$$F(c) = e^{-Ac^2-(1+B)}.$$

Setzen wir $e^{-(1+B)} = C$, so erhalten wir für die Geschwindigkeitsverteilung, welche die größte Wahrscheinlichkeit für sich hat und gleichzeitig unseren vier Annahmen entspricht, die Funktion

$$F(c) = Ce^{-Ac^2},$$

also den Maxwell'schen Ausdruck.

Die Bestimmung der Koeffizienten C und A erfolgt dann mit großer Leichtigkeit durch Substitution von $F(c)$ in die Bedingungsgleichungen (3) und (4). Zunächst ist nach Gleichung (4):

$$4\pi C \int_0^\infty e^{-Ac^2} c^2\, dc = 1$$

und hieraus

$$C = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2}.$$

Ferner ist nach Gleichung (3):

$$4\pi \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-Ac^2} c^4\, dc = K = c^2,$$

falls wir in üblicher Weise mit $\overline{c^2}$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat bezeichnen. Hieraus folgt

$$A = \frac{3}{2\overline{c^2}}, \quad C = \left(\frac{3}{2\pi\overline{c^2}}\right)^{3/2}$$

und wir erhalten schließlich das Verteilungsgesetz in der Form:

$$F(c) = \left(\frac{3}{2\pi\overline{c^2}}\right)^{3/2} e^{-\frac{3c^2}{2\overline{c^2}}}.$$

Die Zahl der Molekel, deren Geschwindigkeit zwischen c und $c+dc$ liegt, ist

$$NF(c)4c^2\pi dc = \sqrt{\frac{54}{\pi}} \frac{N}{(\overline{c^2})^{3/2}} c^2 e^{-\frac{3c^2}{2\overline{c^2}}} dc.$$

Da dieser Ausdruck offenbar für $c^2 = \frac{2}{3}\overline{c^2}$ ein Maximum wird, so ergibt sich auch ohne weitere Rechnung der Zusammenhang zwischen dem Mittelwert von c^2 und dem wahrscheinlichsten Wert der Geschwindigkeit α in der Form $\overline{c^2} = \frac{3}{2}\alpha^2$.

Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind

von

Ing. Dr. **Alfons Leon.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. November 1906.)

III.

Auf kein so glückliches und anregendes Ergebnis gelangt man bei der Untersuchung des ebenen Problems im polaren Koordinatensysteme: es läßt sich nämlich nachweisen, daß sich keine gleichmäßig rotierende, symmetrische Scheibe finden läßt, deren Hauptspannungsrichtungen durch die des Radiusvektors und der auf ihn normal stehenden Geraden gegeben sind.

Bezeichnet man mit r und φ die polaren Koordinaten eines Punktes, mit ρ und ξ die Verrückungen desselben in der Richtung des Radiusvektors und in der auf ihn normalstehenden Geraden, so lauten die Beziehungen zwischen den Spannungen und Formänderungen wie folgt:

$$\sigma_r = -2K\left[\frac{\partial\rho}{\partial r}+\theta\nu\right], \tag{1}$$

$$\sigma_t = -2K\left[\frac{\rho}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}+\theta\nu\right], \tag{2}$$

$$\tau = -K\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \frac{\partial\xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r}\right]. \tag{3}$$

σ_r ist die Normalspannung in der Richtung des Radius, σ_t die in darauf senkrechter Richtung wirkende; τ bezeichnet die Schubspannung und ν die räumliche Ausdehnung, welche durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\nu = \frac{1}{1+\theta}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r.\rho)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\right]. \tag{4}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = \frac{\gamma w^2}{g} r\cos^2\varphi, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\sigma_t}{\partial\varphi} + \frac{2\tau}{r} = -\frac{\gamma w^2}{g} r\sin\varphi\cos\varphi. \tag{6}$$

Sollen σ_r und σ_t die Hauptspannungen darstellen, so muß τ verschwinden und die vorstehenden Gleichungen gehen in die folgenden über:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = \frac{\gamma w^2}{g} r\cos^2\varphi, \tag{7}$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\sigma_t}{\partial\varphi} = -\frac{\gamma w^2}{g} r\sin\varphi\cos\varphi. \tag{8}$$

Aus Gleichung (8) folgt

$$\sigma_t = -\frac{\gamma w^2}{2g} r^2\sin^2\varphi + R, \tag{9}$$

wobei R eine beliebige Funktion von r bedeutet. Setzt man diesen Wert in Gleichung (7) ein, so erhält man durch eine Integration

$$\sigma_r = \frac{\gamma w^2}{6g}(2 - 3\sin^2\varphi)r^2 + \frac{1}{r}\int R\,dr + \frac{1}{r}.\Phi. \tag{10}$$

Φ ist eine beliebige Funktion von φ. Die Funktionen R und Φ müssen nun so bestimmt werden, daß die Schubspannung τ, also auch

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}+\frac{\partial\xi}{\partial r}-\frac{\xi}{r}=0 \tag{11}$$

ist. Es müssen nun die Verrückungen durch die Spannungen ausgedrückt werden. Aus den Gleichungen (1), (2) und (4) ergibt sich

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{\rho}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}=-\frac{1+\theta}{2K(1+3\theta)}(\sigma_r+\sigma_t),$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}-\frac{\rho}{r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}=-\frac{1+3\theta}{2K(1+3\theta)}(\sigma_r-\sigma_t),$$

und daraus

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{1}{2K(1+3\theta)}[-(1+2\theta)\sigma_r+\theta\sigma_t], \tag{12}$$

$$\frac{\rho}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}=\frac{1}{2K(1+3\theta)}[\theta\sigma_r-(1+2\theta)\sigma_t]. \tag{13}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (9) und (10) geht die erste der vorstehenden Gleichungen in die folgende über:

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{1}{2K(1+3\theta)}\left\{\frac{\gamma w^2}{6g}r^2[-2(1+2\theta)+3(1+\theta)\sin^2\varphi]-\right.$$
$$\left.-(1+2\theta)\cdot\frac{1}{r}\int R\,dr-(1+2\theta)\cdot\frac{1}{r}\cdot\Phi+\theta R\right\}.$$

Es ist somit

$$\rho=\frac{1}{2K(1+3\theta)}\left\{\frac{\gamma w^2}{18g}r^3[-2(1+2\theta)+3(1+\theta)\sin^2\varphi]-\right.$$
$$\left.(1+2\theta)\int\frac{dr}{r}\int R\,dr-(1+2\theta).lr.\Phi+\theta\int R\,dr+\Phi_1\right\}, \tag{14}$$

wobei Φ_1 eine neue Funktion von φ bedeutet. Setzt man nun diesen Wert in die Gleichung (13) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2K(1+3\theta)} \left\{ \frac{\gamma w^2}{18g} r^3 [2(1+5\theta)+6(1+\theta)\sin^2\varphi] + \right.$$

$$\left. +\theta\Phi - \Phi_1 - (1+2\theta) rR + (1+2\theta) \int \frac{dr}{r} \int R dr + (1+2\theta) lr . \Phi \right\}.$$

Daraus ergibt sich

$$\xi = \frac{1}{2K(1+3\theta)} \left\{ \frac{\gamma w^2}{18g} r^3 [(5+13\theta)\varphi - 3(1+\theta)\sin\varphi\cos\varphi] + \right.$$

$$+\theta \int \Phi d\varphi - \int \Phi_1 d\varphi - (1+2\theta) rR\varphi +$$

$$\left. +(1+2\theta)\varphi \int \frac{dr}{r} \int R dr + (1+2\theta) lr \int \Phi d\varphi + R_1 \right\}. \quad (15)$$

R_1 ist eine vorläufig willkürliche Funktion von r. Die Gleichungen (14) und (15) setzen uns in die Lage, die Bedingung anzugeben, unter welcher die Gleichung (11) stattfindet; setzt man nämlich die Werte für ρ und ξ in (11) ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$0 = \frac{\gamma w^2}{9g} r^2 (5+13\theta)\varphi - (1+2\theta) \frac{lr}{r} \cdot \frac{d\Phi}{d\varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Phi_1}{d\varphi} -$$

$$-(1+2\theta) r\varphi \frac{dR}{dr} + (1+2\theta) \frac{\varphi}{r} \int R dr + (1+\theta) \cdot \frac{1}{r} \cdot \int \Phi d\varphi +$$

$$+ \frac{dR_1}{dr} + \frac{1}{r} \int \Phi_1 d\varphi - (1+2\theta) \frac{\varphi}{r} \int \frac{dr}{r} \int R dr -$$

$$-(1+2\theta) \frac{lr}{r} \int \Phi d\varphi - \frac{R_1}{r} \quad (16)$$

Diese Bedingung muß im ganzen Bereiche der Scheibe erfüllt werden, also für jedes r und jedes φ. Man kann somit aus ihr die Glieder, welche $r^2.\varphi$ enthalten können, herausnehmen und erhält:

$$\int \frac{dr}{r} \int R\,dr - \int R\,dr + r^2 \frac{dR}{dr} = ar^3, \tag{I}$$

wenn der Abkürzung wegen

$$a = -\frac{5+13\theta}{9(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{g}. \tag{17}$$

Es verbleiben dann in der Gleichung (16) noch zwei Glieder, welche $\frac{lr}{r}$, multipliziert mit Funktionen von φ, enthalten; auch diese Glieder müssen sich heben. Es ist somit

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} + \int \Phi\,d\varphi = 0. \tag{II}$$

In ähnlicher Weise bekommt man noch die Gleichungen:

$$\frac{d\Phi_1}{d\varphi} + (1+\theta)\int \Phi\,d\varphi + \int \Phi_1 d\varphi = 0, \tag{III}$$

$$\frac{dR_1}{dr} - \frac{R_1}{r} = 0. \tag{IV}$$

Aus den Gleichungen (I), (II), (IV) lassen sich R, Φ, R_1 bestimmen. Hat man Φ, so gibt Gleichung (III) die Funktion Φ_1. Um die Gleichung (I) auf die gebräuchlichere und daher übersichtlichere Form zu bringen, sei

$$\int \frac{dr}{r} \int R\,dr = y$$

gesetzt; sie lautet dann

$$y - r\frac{dy}{dr} + 2r^2 \frac{d^2y}{dr^2} + r^3 \frac{d^3y}{dr^3} = ar^3.$$

Dies ist eine nicht homogene, nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung; durch die Transformation $r = e^s$ kann sie jedoch linear gemacht werden. Man erhält, wenn man

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

setzt:

$$y''' - y'' - y' + y = ae^{3x}. \tag{18}$$

Das vollständige Integral der reduzierten Gleichung

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

ist die komplementäre Funktion der Gleichung (18). Dieses lautet

$$y = Ae^{-x} + (B + Cx)e^x,$$

denn die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

sind 1, 1, —1. Die Lagrange'sche Methode der Variation der Konstanten gibt das allgemeine Integral von (18).[1] Es sei

$$y = u_1 . e^{-x} + u_2 e^x + u_3 . x . e^x,$$

wobei u_1, u_2 und u_3 Funktionen von x bedeuten. Es ist daraus

$$y' = -u_1 e^{-x} + u_2 e^x + u_3 (e^x + xe^x),$$

wenn u_1, u_2 und u_3 derart beschaffen sind, daß

$$u_1' e^{-x} + u_2' e^x + u_3' x e^x = 0. \tag{a}$$

---

[1] Siehe z. B.: Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. II, p. 356.

Es ist ferner

$$y'' = u_1 e^{-x} + u_2 e^x + u_3 (2 e^x + x e^x),$$

wenn

$$-u_1' e^{-x} + u_2' e^x + u_3' (e^x + x e^x) = 0 \tag{b}$$

ist. Es sind drei beliebige Funktionen angenommen worden, für welche zwei Bedingungen zu erfüllen sind. Eine dritte aufzustellen ist zunächst nicht statthaft. Sucht man jedoch den Wert für y''' und setzt diesen, nebst den für y, y', y'' in (18) ein, so kommt man zur Beziehung

$$u_1' e^{-x} + u_2' e^x + u_3' (2 e^x + x e^x) = a e^{3x}. \tag{c}$$

Die drei Gleichungen *(a)*, *(b)* und *(c)* genügen zur Bestimmung von u_1, u_2 und u_3. Es ist

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= \frac{a}{4} e^{4x}, \\ u_2' &= -\frac{a}{4} (1 + 2x) e^{2x}, \\ u_3' &= \frac{a}{2} e^{2x}, \end{aligned} \right\}$$

somit

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{a}{16} e^{4x} + C_1, \\ u_2 &= -\frac{a}{4} x e^{2x} + C_2, \\ u_3 &= \frac{a}{4} e^{2x} + C_3. \end{aligned} \right\}$$

C_1, C_2, C_3 sind konstante Größen. Es ist nun

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) e^x + \frac{a}{16} e^{3x} =$$

$$= \frac{C_1}{r} + (C_2 + C_3 . lr) r + \frac{a}{16} r^3 = \int \frac{dr}{r} \int R \, dr \tag{19}$$

und hiermit die Gleichung (I) gelöst. Aus der vorstehenden Gleichung folgen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\int R\,dr &= -\frac{C_1}{r}+(C_2+C_3)r+C_3 . lr . r+\frac{3a}{16}r^3,\\ R &= \frac{C_1}{r^2}+(C_2+2\,C_3)+C_3 . lr+\frac{9a}{16}r^2,\\ r^2\frac{dR}{dr} &= -\frac{2\,C_1}{r}+C_3 r+\frac{18a}{16}r^3.\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Die Gleichung (II) ist ungemein einfach. Sie ist linear und homogen. Ihre charakteristische Gleichung hat die Nullstellen

$$\pm\sqrt{-1};$$

man erhält somit:

$$\left.\begin{aligned}\int\Phi\,d\varphi &= C_4\cos\varphi+C_5\sin\varphi,\\ \Phi &= -C_4\sin\varphi+C_5\cos\varphi,\\ \frac{d\Phi}{d\varphi} &= -C_4\cos\varphi-C_5\sin\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Die zu (III) gehörige homogene Gleichung ist von derselben Form wie (II). Es ist daher

$$\Phi_1 = u_1\cos\varphi+u_2\sin\varphi$$

u_1 und u_2 sind Funktionen von x, welche nach der oben erwähnten Methode von Lagrange sich entwickeln lassen. Man erhält

$$u_1' = (1+\theta)(C_4\cos\varphi . \sin\varphi+C_5\sin^2\varphi).$$

$$u_2' = -(1+\theta)(C_4\cos^2\varphi+C_5\sin\varphi\cos\varphi).$$

Daraus ergibt sich:

$$u_1 = \frac{1+\theta}{2}\left[C_4 \sin^2\varphi - C_5 \sin\varphi\cos\varphi + C_5\varphi\right] + C',$$

$$u_2 = -\frac{1+\theta}{2}\left[C_4 \sin\varphi\cos\varphi + C_5 \sin^2\varphi + C_4\varphi\right] + C''.$$

Das allgemeine Integral von (III) und seine Ableitungen lauten demnach nach geringen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned}
\int \Phi_1 d\varphi &= \frac{1+\theta}{2}(-C_4 \sin\varphi + C_5 \cos\varphi)\varphi + \\
&\qquad + C_6 \cos\varphi + C_7 \sin\varphi, \\
\Phi_1 &= \frac{1+\theta}{2}(-C_4 \sin\varphi + C_5 \cos\varphi) + \\
&\quad + \frac{1+\theta}{2}(-C_4 \cos\varphi - C_5 \sin\varphi)\varphi - C_6 \sin\varphi + C_7 \cos\varphi, \\
\frac{d\Phi_1}{d\varphi} &= \frac{1+\theta}{2}(-C_4 \cos\varphi - C_5 \sin\varphi) + \\
&\quad + \frac{1+\theta}{2}(+C_4 \sin\varphi - C_5 \cos\varphi)\varphi - C_6 \cos\varphi - C_7 \sin\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

C_6 und C_7 sind Konstante, welche an Stelle von C' und C'' eingeführt wurden. Das Integral von (IV) lautet

$$R_1 = C_8 . r. \qquad (23)$$

Unsere Gleichungen (9) und (10) lauten nun:

$$\sigma_r = -\frac{\gamma w^2}{2g} r^2 \sin^2\varphi - \frac{C_1}{r^2} + C_2 + C_3 + C_3\, lr +$$
$$+ \left[\frac{1}{3} + \frac{5+13\theta}{48(1+2\theta)}\right]\frac{\gamma w^2}{g} r^2 - \frac{C_4}{r}\sin\varphi + \frac{C_5}{r}\cos\varphi, \quad (24)$$

$$\sigma_t = -\frac{\gamma w^2}{2g} r^2 \sin^2 \varphi + \frac{C_1}{r^2} + C_2 + 2C_3 + C_3 . lr +$$
$$+ \frac{5+13\theta}{16(1+2\theta)} \cdot \frac{\gamma w^2}{g} r^2. \quad (25)$$

Am Rande der Scheibe müssen die Spannungen σ_r und σ_t verschwinden. Daher stellen die Gleichungen $\sigma_r = 0$ und $\sigma_t = 0$ die Gleichung der Randkurve dar. Beiden Bedingungen kann aber nicht entsprochen werden; dies zeigen die Gleichungen (24) und (25).

Über die scheinbare Verlängerung eines Kometenschweifes beim Durchgange der Erde durch die Ebene der Kometenbahn

von

Dr. J. Holetschek.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1906.)

Bei meinen Untersuchungen über die Helligkeitsgrade und Schweife der Kometen habe ich mehrere Fälle gefunden, in denen sich die wahre Schweiflänge unter der die Rechnung wesentlich vereinfachenden Annahme, daß der Schweif in der geradlinigen Verlängerung des Radiusvektors liegt, außerordentlich groß, aber auch recht unsicher ergibt, ja in einigen Fällen überhaupt gar nicht berechnet werden kann, weil der

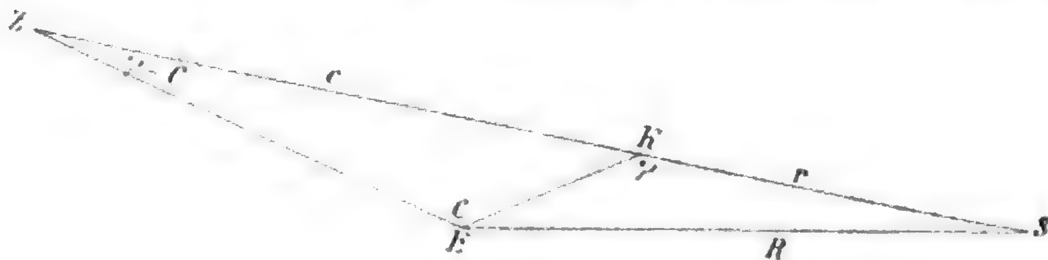


Fig. 1.

zu dieser Rechnung nötige Winkel unerwartet klein und sogar negativ wird. Ist C (Fig. 1) die beobachtete scheinbare Schweiflänge, γ in dem durch die Erde E, die Sonne S und den Kometen K gebildeten ebenen Dreieck der Winkel am Kometen und Δ $(= EK)$ die Distanz des Kometen von der Erde, so ergibt sich unter der obigen Voraussetzung die wahre Schweiflänge c aus der Formel:

$$c = KZ = \frac{\Delta \sin C}{\sin (\gamma - C)}.$$

Diese Formel kann nun zu sehr unsicheren Resultaten führen, wenn C so groß ist, daß die Winkeldifferenz $\gamma - C$ (die als Parallaxe des Schweifes bezeichnet werden kann, da sie in dem durch die Erde E, den Kopf des Kometen K und das Ende des Schweifes Z gebildeten Dreieck der Winkel am Ende des Schweifes ist) sehr klein wird, weil dann jede Unsicherheit in der Differenz $\gamma - C$ vergrößert in das Resultat c übergeht. Ist C so groß wie γ oder noch größer, so daß also die Differenz $\gamma - C$ sogar negativ wird, so ist die Formel überhaupt unanwendbar.

Dieser letztere Fall zeigte sich in einem besonders überraschenden Grade beim Kometen 1618 II, indem der Schweif desselben von Longomontanus (Astronomia Danica, Appendix) in der Nacht vom 9. zum 10. Dezember, als der Winkel γ nach der Rechnung fast 98° betrug, bis zu einer Länge von 104° gesehen wurde; er reichte nämlich, wie es a. a. O. heißt, als er um 1^h morgens fast gleichzeitig mit dem Mond aufgegangen war, über den Scheitelpunkt bis zu einer Elongation von 104°, nämlich bis zu den Sternen in der linken Hand des Fuhrmann, wurde aber, als der Komet höher gestiegen war, rasch kürzer (vermutlich wegen des jetzt schon merklicher gewordenen Mondlichtes). Hier ist also C nicht kleiner, sondern im Gegenteile noch größer als γ, somit die Differenz $\gamma - C$ negativ und die Berechnung der wahren Schweiflänge nach der obigen Formel unausführbar.

Die Schweiflänge des Kometen 1759 I (des Halley'schen Kometen) war am 5. Mai nach der Messung von La Nux auf der Insel Bourbon 47°, aber ebenso groß ergibt sich an diesem Tage auch der Winkel γ, so daß also die Differenz $\gamma - C$ Null und somit die Berechnung der wahren Schweiflänge nach der vereinfachten Formel ebenfalls unausführbar ist.

Der Schweif des Kometen von 1769 ist am 9. September morgens von Pingré, der sich damals auf dem Meere zwischen Teneriffa und Cadiz befand, bis zu einer Länge von 75°, am 11. September bis zu 90° und an diesem letzteren Tage von dem schon genannten La Nux sogar bis zu einer Länge von $97^1/_2$° gesehen worden. Der Winkel γ ist für den ersten dieser Zeitpunkte 93° 47′, für den letzten 102° 47′, somit allerdings etwas größer als C, aber doch nur um einen so geringen

Betrag, daß als wahre Schweiflänge, besonders in dem letzten Falle, eine sehr große, aber zugleich auch sehr unsichere Zahl zu erwarten ist. In der Tat findet man, da die Distanz des Kometen von der Erde Δ am ersten dieser beiden Tage 0·3298, am zweiten 0·3270 war, als wahre Schweiflänge c nach diesen drei Angaben in derselben Reihenfolge in Einheiten der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne 1·0, 1·5, 3·5, Werte, deren bedeutende Größe schon darum sehr unwahrscheinlich ist, weil die Schweiflänge auf Grund der Beobachtungen vor und nach diesen zwei Tagen wesentlich kleiner, und zwar höchstens 0·5 ist.

Beim Anblick so ungewöhnlicher Ergebnisse könnte man sich versucht fühlen, an der Richtigkeit der Angaben über die scheinbare Schweiflänge zu zweifeln und dieselben für Übertreibungen zu halten, namentlich wenn es sich bloß um Angaben aus alten Zeiten handeln würde. In der Wirklichkeit ist aber, da auch aus der neueren Zeit ähnliche Angaben vorliegen (z. B. 1843 I), ein solcher Zweifel natürlich nicht berechtigt, besonders wenn man sieht, daß ein so ungewöhnliches Verhältnis zwischen γ und C auch bei viel kleineren Beträgen der beobachteten Schweiflänge vorkommen kann. Es sei hier auf den Kometen 1759 II aufmerksam gemacht, dessen Schweif in der ersten Hälfte des Februar 1760 eine Länge von 4 bis 5° hatte, während der Winkel γ, da sich der Komet nahezu in Opposition mit der Sonne befand, noch kleiner war, nämlich nur 3°, so daß also wieder die Schweiflänge größer war als der Winkel γ. Der Ausnahmsfall hat eben nichts anderes zu bedeuten, als daß man, nachdem sich die vereinfachte Formel fast durchgehends anscheinend ganz brauchbar erwiesen hat, in einigen außergewöhnlichen Fällen durch scheinbar unmögliche Zahlenverhältnisse direkt dazu gezwungen werden kann, von der vereinfachten, nur angenäherten Rechnung abzugehen und auch die Abweichung des Schweifes von der Richtung des Radiusvektors in Rechnung zu ziehen.

Geht man aber daran, diese Abweichung für die betreffenden Tage zu ermitteln, so stößt man auf eine neue Schwierigkeit. Es zeigt sich nämlich, daß sie aus den Beobachtungen nicht erkannt werden kann, weil bei einem jeden dieser

Kometen die Tage der außerordentlich großen Schweiflänge sehr nahe mit der Zeit zusammentreffen, in welcher die Erde durch die Bahnebene des Kometen gegangen ist, bei welcher Stellung der Schweif nach unseren Erfahrungen stets schmal und gerade erscheint und seine Krümmung durch Beobachtungen nicht ermittelt werden kann.

Beim Kometen 1618 II, an welchem am 10. Dezember eine außerordentlich große Schweiflänge beobachtet worden ist, stand die Erde am 7. Dezember in der Ebene der Kometenbahn, indem an diesem Tage die heliozentrische Länge der Erde so groß war wie die Länge des aufsteigenden Knotens der Kometenbahn ($L \pm 180° = \Omega = 75° 44'$). Beim Kometen 1759 I, an welchem die größte Schweiflänge am 5. Mai beobachtet wurde, war am 14. Mai die Länge der Sonne so groß wie die des aufsteigenden Knotens ($L = \Omega = 53° 50'$), also die heliozentrische Länge der Erde so groß wie die des absteigenden Knotens.

Beim Kometen von 1769, an welchem eine besonders große Schweiflänge am 9. und noch mehr am 11. September beobachtet worden ist, kam die Erde am 17. September in die Ebene der Kometenbahn, indem an diesem Tage die Länge der Sonne so groß war wie die des aufsteigenden Knotens der Kometenbahn ($L = \Omega = 175° 4'$). Beim Kometen 1759 II, an welchem in der Zeit vom 7. bis 10. Februar 1760 eine den Winkel γ übertreffende Schweiflänge beobachtet wurde, war am 8. Februar die heliozentrische Länge der Erde so groß wie die des aufsteigenden Knotens ($L \pm 180° = \Omega = 139° 40'$).

Nun könnte man allerdings, wenn man ernstlich darauf ausgeht, die wahre Schweiflänge für diese Kometen zu berechnen, anstatt der durch direkte Beobachtungen nicht ermittelbaren Abweichung des Schweifes von der Richtung des Radiusvektors einfach diejenige Abweichung annehmen, welche sich aus den der Durchgangszeit benachbarten Tagen ergibt, doch soll jetzt die Bestimmung der wahren Schweiflänge einstweilen noch bei Seite gelassen und dafür etwas länger bei dem sehr wichtigen Umstande verweilt werden, daß diese wohlmarkierte Stellung der Erde eine Aufklärung darüber gibt, warum der Schweif gerade dann, wenn sich die Erde nahe an

der Ebene der Kometenbahn befindet, besonders lang gesehen werden kann.

Da nach unseren Erfahrungen die Schweifpartikelchen viel mehr in der Bahnebene als in irgend einer anderen Richtung verstreut sind — was insbesondere daraus erkannt werden kann, daß der Schweif bei der erwähnten Stellung der Erde niemals gekrümmt, sondern stets schmal und gerade gesehen wird — so sind bei diesem Stande für einen Beobachter auf der Erde die Partikelchen so zahlreich, als es nur möglich ist, hintereinander auf eine verhältnismäßig schmale Zone des Himmels projiziert, ihre Helligkeiten summieren sich und infolge der dadurch verstärkten Flächenhelligkeit des Schweifes ist uns die Möglichkeit geboten, nicht nur den Schweif überhaupt heller, sondern auch lichtschwache Partien des Schweifes zu sehen, die bei einer anderen Stellung der Erde wegen ihrer zu geringen Flächenhelligkeit unsichtbar sind. Und so können wir in dieser Stellung namentlich auch die besonders lichtschwachen Partien am Ende des Schweifes wegen ihrer jetzigen Gedrängtheit mehr vereinigt und daher den Schweif länger sehen.

Zu diesem charakteristischen Umstand ist bei den meisten Kometen noch ein anderer hinzugetreten, welcher die Sichtbarkeit des Schweifes begünstigt hat, nämlich der, daß die Erde in den Zeitpunkten des Durchganges nicht nur der Bahnebene, sondern auch dem Schweif des Kometen nahe gewesen ist, und zwar dort, wo $r < R$ war, dem Schweif sogar näher als dem Kopf des Kometen. Dies folgt unmittelbar aus der Kleinheit des Winkels $\gamma - C$.

Daß dieser Winkel in den vorgelegten vier Fällen klein war, braucht wohl nicht mehr eigens dargelegt zu werden, denn obschon er sich in diesen Fällen zur Berechnung der wahren Schweiflänge nur wenig oder gar nicht geeignet gezeigt hat, so kommt doch alles, was über ihn gefunden wurde, mag er nun positiv oder Null oder negativ gewesen sein, darauf hinaus, daß er als klein angesehen werden muß und wenn das der Fall ist, so ergibt sich von selbst, daß die Erde in einem solchen Zeitpunkt entweder (wenn $r < R$) dem Kometenschweif selbst (Fig. 1) oder (wenn $r > R$) wenigstens dem Radiusvektor

des Kometen nahe gewesen ist (Fig. 2). Im ersteren Falle (Fig. 1), der hier der wichtigere ist, steht die Erde, wie schon bemerkt, dem Schweife des Kometen näher als dem Kopfe; der Schweif geht demnach in verhältnismäßig geringer Entfernung an der Erde vorüber und das Besondere dieser Stellung hat, da der Schweif von der Sonne abgewendet und die Erde stets in der Ekliptik ist, zur Folge, daß das Schweifende nahe in Opposition mit der Sonne und nahe an der Ekliptik gesehen wird. Das war bei diesen Kometen auch tatsächlich der Fall.

Was zunächst den Kometen 1618 II betrifft, so war die Sonne am 10. Dezember an der Grenze der Sternbilder Skorpion und Schütze, das Schweifende im Fuhrmann. Beim Kometen von 1769 befand sich die Sonne nach dem ersten Drittel des



Fig. 2.

September an der Grenze der Sternbilder Löwe und Jungfrau, das Ende des Schweifes am 11. September nach der Angabe von Pingré in den Fischen (unterhalb α Piscium). Also hier wie dort nahe in Opposition mit der Sonne und nahe an der Ekliptik.

Beim Kometen 1759 I fehlt zwar die Angabe der Stelle des Himmels, an welcher das Ende des Schweifes gesehen worden ist, so daß also die obige Behauptung hier nicht geprüft werden kann, doch findet sich dafür in dem Berichte von La Nux eine andere, für die vorliegende Untersuchung wichtige Bemerkung: »Wir sahen den Schweif dünner und länger werden bis zum 5. Mai, wo ich ihn zu nahe 47° maß; am 14. Mai hatte er noch 19° Länge«.

Über die Stelle, an welcher das Schweifende des Kometen 1759 II gesehen wurde, ist eine nähere Angabe nicht nötig, da sich hier wegen $r > R$ nicht nur der Schweif, sondern der ganze Komet in Opposition mit der Sonne befand.

Es erscheint mir nicht ganz überflüssig, auch noch auf den folgenden Umstand aufmerksam zu machen. Wenn die Erde,

wie hier dargelegt worden ist, infolge der Kleinheit des Winkels (γ—C) nahe dem Schweife des Kometen oder wenigstens nahe dem Radiusvektor des Kometen gewesen ist, so muß sie aus diesem Grund auch sehr nahe an der Ebene der Kometenbahn gewesen sein und man kommt also auch auf diesem Wege wieder zu dem schon früher gefundenen Durchgange der Erde durch die Ebene der Kometenbahn. Es ist somit jedesmal, wenn die Winkeldifferenz (γ—C) klein ist, auch L—☊, beziehungsweise L—☋ klein; aber nicht immer umgekehrt.

Je kleiner nun der Winkel (γ—C), d. h. also je näher die Erde dem Kometenschweif ist, um so mehr sind wir in die Lage versetzt, längs des Schweifes fast in derselben Richtung, in welcher der Schweif verläuft, gegen sein Ende blicken zu können und hier auch den zurückgekrümmten Teil am Ende des Schweifes, falls derselbe über uns gewissermaßen hinüberreicht und nicht von uns abgewendet ist, als eine Verlängerung des Schweifes zu beobachten, also noch aus einem zweiten Grunde den Schweif länger zu sehen.

Der Beobachter auf der Erde ist sonach in dieser besonderen Stellung durch zwei Umstände begünstigt: 1. Wegen des Standes der Erde in der Ebene der Kometenbahn sehen wir möglichst viele Partikelchen des Schweifes hintereinander projiziert und die Fortsetzung des Schweifes auch noch an den Stellen, an welchen die Partikelchen schon verhältnismäßig lichtschwach sind. 2. Wegen des Standes der Erde nahe am Kometenschweif selbst können wir, abgesehen davon, daß wir dem Schweif überhaupt näher sind, auch die in der zurückgekrümmten Partie befindlichen Partikel als eine Verlängerung des Schweifes sehen.

Bei diesen Darlegungen ist immer vorausgesetzt worden, daß der zurückgekrümmte Teil des Schweifes und überhaupt seine konkave Seite gegen die Erde gewendet ist. Ob das der Fall ist, kann, wenigstens in erster Annäherung, verhältnismäßig leicht erkannt werden. Man hat zu diesem Zweck, da bei der Bewegung eines Kometen in seiner Bahn, sei es zur Sonne oder von der Sonne, stets die konvexe Seite des Schweifes die vordere und die konkave die hintere ist, eigentlich nur zu untersuchen, ob die Erde in dem vorgelegten Zeit-

punkte hinter oder vor dem Kometen war, oder mit anderen Worten, ob der Komet in diesem Zeitpunkte die auf der Richtung seiner Bewegung senkrecht stehende, durch die Erde gehende Ebene bereits passiert hat oder noch nicht. Im ersten Falle war die konkave Seite des Schweifes gegen die Erde gewendet, im zweiten die konvexe.

Für diese Ebene kann bei den meisten Kometen, da ihre Bewegungsrichtung gegen die Ekliptik wesentlich geneigt ist, in erster Annäherung die Ekliptik selbst gewählt werden und man kann daher auch sagen, die konkave Seite des Schweifes ist gegen die Erde gewendet, wenn die wahre Anomalie des Kometen v (algebraisch) schon größer ist als die, welche er bei seinem letzten Durchgange durch die Ekliptik gehabt hat, für welchen Zeitpunkt, wenn der Komet von Süd nach Nord gegangen ist, $v = -(\pi - \Omega)$, und wenn er sich von Nord nach Süd bewegt hat, $v = 180° - (\pi - \Omega)$ ist. Im ersten Fall ist das Argument der Breite u schon größer als 0°, im zweiten schon größer als 180°. Das ist nun bei den genannten Kometen in der Tat zu bemerken.

Der Komet 1618 II, der während seiner Sichtbarkeit heliozentrisch von Süd nach Nord gegangen ist, hatte am 10. Dezember, an welchem Tage die außerordentlich große Schweiflänge von 104° beobachtet wurde, schon das Argument der Breite $u = 23°$ erreicht, nachdem am 25. November $u = 0°$, d. h. $v = -(\pi - \Omega) = +72° 39'$ gewesen war. Es ist also die Annahme gestattet, daß die konkave Seite seines Schweifes gegen die Erde gewendet war.

Der Komet 1759 I war am 5. Mai, zu welcher Zeit er sich heliozentrisch von Nord nach Süd bewegte, bei $u = 204°$, nachdem er schon fast einen Monat früher, nämlich am 11. April, bei $u = 180°$, d. h. bei $v = 180° - (\pi - \Omega) = 69° 20'$ gewesen war.

Ähnlich war es beim Kometen von 1769, dessen Schweif am 9. und 11. September scheinbar übermäßig lang gesehen worden ist; er ging im September von Nord nach Süd und war an den zwei genannten Tagen bei $u = 192°$, beziehungsweise 193°, nachdem er schon am 30. Juli bei $u = 180°$, d. h. bei $v = 180° - (\pi - \Omega) = -149° 8'$ gewesen war.

Dadurch erscheint nun tatsächlich der Nachweis erbracht, daß ein jeder dieser Kometen zu der Zeit, in welcher sein Schweif besonders lang gesehen wurde, die Erde gewissermaßen schon überholt hatte, woraus sodann gefolgert werden kann, daß sich die Erde zu dieser Zeit auf der zurückgewendeten, d. h. konkaven Seite des Schweifes befunden hat.

Beim Kometen 1759 II läßt sich zwar der Nachweis nicht in der gleichen Weise erbringen, indem dieser Komet zu der Zeit, in welcher $\gamma < C$ war, in Opposition mit der Sonne von Süd nach Nord ging ($r > R$), so daß $\lambda - L$ in der Nähe von 180° und β ebenso wie u in der Nähe von 0° war, doch ist dafür die Zurückbeugung des Schweifes schon aus den Angaben der Beobachter zu erkennen, indem es dort heißt, daß der Schweif, obgleich er immer der Sonne entgegengesetzt war, doch stets eine südliche Abweichung behielt; der Schweif ist also, da der Komet von Süd nach Nord ging, in der Tat zurückgeblieben.

Nachdem nun alle Folgerungen dargelegt erscheinen, zu welchen der Umstand führt, daß die Länge des Schweifes unter der vereinfachten Voraussetzung in einigen Fällen nicht berechnet werden kann, soll nunmehr versucht werden, die Länge tatsächlich zu ermitteln (wenn es auch nur angenähert möglich ist), also jetzt auch die Abweichung des Schweifes von der Richtung des Radiusvektors mit in Rechnung zu ziehen. Da aber diese Abweichung und speziell die Zurückbeugung des Schweifes wegen der Eigenheit der hier zusammentreffenden Umstände durch direkte Beobachtungen nicht bestimmt werden kann, ist es nötig, eine Annahme zu machen und dazu empfiehlt es sich, als Zurückbeugung diejenige in Rechnung zu ziehen, welche sich aus den der Durchgangszeit benachbarten Beobachtungen ergibt. Die Rechnung kann, da die Zurückbeugung φ ebenso wie der Schweif selbst und der Radiusvektor in der durch die Erde, die Sonne und den Kometen gehenden Ebene liegend angenommen werden darf, in der einfachsten Weise gemacht werden, nämlich nach der Formel

$$c = \frac{\Delta \sin C}{\sin(\gamma + \varphi - C)}.$$

So kann für den Kometen 1618 II auf Grund der Untersuchungen von Bredichin $\varphi = 24°$, für 1759 I $\varphi = 10°$, für 1769 $\varphi = 6°$ in Rechnung gebracht werden.

Es zeigt sich jedoch, daß auch diese Werte der Zurückbeugung in den meisten Fällen noch immer zu klein sind, um eine auch nur einigermaßen sichere Berechnung der wahren Schweiflänge zu ermöglichen, indem der Parallaxenwinkel $(\gamma - C)$ auch nach Hinzufügung von φ so klein bleibt, daß sich für c infolge der Kleinheit des Nenners auch jetzt noch immer ein ungewöhnlich großer und somit auch unsicherer Wert ergibt. Man müßte, um eine so außerordentlich bedeutende, aber auch mit einer großen Unsicherheit behaftete Länge nicht zum Vorschein kommen zu lassen, noch viel größere Werte von φ, beispielsweise 30°, 40° oder gar 50° in Rechnung bringen, aber so weit den Schweif als ganzes zurückgebeugt anzunehmen, ist wohl nicht zulässig.

Ich habe daher versucht, die Figur des Schweifes als eine gebrochene Linie in Rechnung zu ziehen und zu diesem Zweck angenommen, daß der erste Teil des Schweifes — beispielsweise bis zu zwei Dritteln der Länge — noch in der Verlängerung des Radiusvektors liegt, der zweite, entferntere aber zurückgewendet und über die Erde hinweg gerichtet ist, etwa so wie ein Ast eines Baumes, unter dem wir stehen. Es werden also zwei Partien des Schweifes unterschieden, C_1 und C_2, von denen jede in einer anderen Weise in Rechnung gezogen wird. Die Länge der ersten Partie wird nach der gewöhnlichen vereinfachten Formel gerechnet, wobei übrigens auch die anderswoher bekannte Zurückbeugung φ berücksichtigt werden kann, also nach:

$$c_1 = \frac{\Delta \sin C_1}{\sin(\gamma - C_1)} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta \sin C_1}{\sin(\gamma + \varphi - C_1)}.$$

Bezüglich der zweiten Partie muß eine Annahme darüber gemacht werden, unter welchem Winkel diese Partie von der Verlängerung des Radiusvektors abzweigt. Ich habe angenommen, daß sie sich an die Verbindungslinie zwischen der Erde und dem Endpunkte der ersten Partie des Schweifes unter einem rechten Winkel anschließt, so daß man also, nachdem

zunächst der Abstand des Endpunktes der ersten Partie des Schweifes von der Erde nach

$$\Delta' = \frac{\Delta \sin \gamma}{\sin(\gamma - C_1)}$$

gerechnet ist, zu c_1 noch hinzuzufügen hat:

$$c_2 = \Delta' \operatorname{tang} C_2.$$

Man findet durch eine solche Zerlegung für den Kometen 1618 II am 9./10. Dezember:

$$C = 69°\ 20' + 34°\ 40',$$
$$c = 0\cdot71 + 0\cdot52 = 1\cdot23,$$

oder wenn in der ersten Partie auch noch die Zurückbeugung $\varphi = 24°$ eingeführt wird:

$$c = 0\cdot43 + 0\cdot31 = 0\cdot74.$$

Als Schweiflänge des Kometen 1759 I am 5. Mai findet man auf demselben Wege:

$$C = 31°\ 20' + 15°\ 40',$$
$$c = 0\cdot73 + 0\cdot29 = 1\cdot02,$$

oder wenn in der ersten Partie des Schweifes auch noch $\varphi = 10°$ in Rechnung gezogen wird:

$$c = 0\cdot63 + 0\cdot18 = 0\cdot81.$$

Will man die Rechnung unter der Annahme machen, daß die Abzweigung der zweiten Partie schon in der Mitte der scheinbaren Länge beginnt, also bei $C = 23^1/_2°$, so findet man:

$$c = 0\cdot38 + 0\cdot31 = 0\cdot69.$$

Für den Kometen von 1769 ergibt sich als Schweiflänge am 10./11. September:

$$C = 90° \ldots\ldots \quad c = 0\cdot42 + 0\cdot27 = 0\cdot69,$$
$$C = 97^1/_2° \ldots \quad c = 0\cdot48 + 0\cdot33 = 0\cdot81;$$

oder wenn auch noch die kleine Zurückbeugung $\varphi = 6°$ berücksichtigt wird:

$$C = 90° \ldots\ldots \quad c = 0 \cdot 38 + 0 \cdot 24 = 0 \cdot 62,$$
$$C = 97^1/_2° \ldots \quad c = 0 \cdot 43 + 0 \cdot 29 = 0 \cdot 72.$$

Es war mir mit diesen ziemlich willkürlichen Zerlegungen natürlich nur darum zu tun, eine Berechnung der wahren Schweiflänge wenigstens vom geometrischen Standpunkt aus zu ermöglichen. Um auch den physikalischen Anforderungen mehr entsprechen zu können, müßte man der Form des Schweifes, insbesondere an seinem Ende, noch mehr Aufmerksamkeit widmen, wobei unter anderm auch die von Pingré an dem Kometen von 1769 bemerkte zweifache Krümmung zu beachten wäre. Übrigens ist eine genaue Bestimmung der Länge bei diesen Objekten ohnehin ganz ausgeschlossen, selbst dann, wenn die Verhältnisse wesentlich günstiger liegen als in diesen Fällen.

Beim Kometen 1759 II, dessen scheinbare Schweiflänge keine bedeutende war (größte Länge am 9. Februar 5°), kann der Schweif als ganzes zurückgebeugt angenommen werden. Man findet, wenn als Zurückbeugung φ der Reihe nach die Werte 10°, 20°, 30° gewählt werden:

φ	c
10°	0·33
20	0·15
30	0·10

Diese Werte von c müssen, da sich aus den anderen beobachteten scheinbaren Schweiflängen des Kometen viel kleinere ergeben (selbst im Maximum am 25. Jänner 1760 bloß 0·05), als sehr groß bezeichnet werden und man wird daher auf Grund des Umstandes, daß man, um den anderen Werten von c nahe zu kommen, eine so bedeutende Zurückbeugung annehmen muß, zu der Folgerung gedrängt, daß zwar tatsächlich die Zurückbeugung eine sehr bedeutende gewesen sein muß, aber andrerseits der Schweif auch infolge des Standes der Erde nahe an der Ebene der Kometenbahn verlängert erschienen

sein dürfte und daß somit hier vermutlich diese beiden Umstände zusammengewirkt haben.

Nachdem nun diese vier Kometen, die durch das Absonderliche in dem Verhältnis zwischen den Winkelgrößen γ und C zu einer näheren Untersuchung gedrängt und dadurch die hier dargelegte Erklärung veranlaßt haben, erledigt erscheinen, soll zunächst bemerkt werden, daß sich unter den Kometen bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, bis wohin meine bisher publizierten diesbezüglichen Kometenuntersuchungen reichen, auch solche gefunden haben, bei denen zwar die Schweiflänge nach der vereinfachten Formel ohneweiters berechnet werden kann, aber trotzdem für irgend einen Tag eine unerwartet große Länge zum Vorscheine kommt, und zwar auffallenderweise wieder gerade zu der Zeit, in welcher die Erde nahe an der Ebene der Kometenbahn gewesen ist.

So war es z. B. beim Kometen von 1742, bei welchem am 26. März $L = ☊$ war. Unter den ziemlich zahlreichen Angaben über den Schweif, welche Lacaille in der Zeit vom 8. bis 27. März gemacht hat, führt die vom 25. März auf eine Länge ($>10°$), die wesentlich größer ist als die unmittelbar vorangehenden (3° bis 6°) und dieses Maximum ist hier besonders darum beachtenswert, weil zu dieser Zeit der Periheldurchgang schon lange vorüber war (T am 8. Februar), also der Schweif nach unseren Erfahrungen eigentlich schon immer kleiner werden mußte und andrerseits tatsächlich gleich nach dem 27. März die Angaben über den Schweif ganz aufhören.

Ein ähnliches Beispiel liefert der hauptsächlich von Messier beobachtete Komet 1770 II (T am 22. November, $L = ☋$ am 8./9. Jänner 1771), indem man bei der Berechnung der wahren Schweiflänge am 10. Jänner 1771 (demjenigen Beobachtungstage, welcher dem 8./9. Jänner am nächsten liegt) durch einen unerwartet großen Wert, nämlich $c = 0 \cdot 16$, überrascht wird, während sich nur wenige Tage später wesentlich kleinere Werte ergeben, nämlich am 16. Jänner 0·06 und am 17. nur 0·03.

Auch der Komet 1781 II kann hier noch erwähnt werden (T am 29. November, $L = ☋$ am 8. Dezember), indem unter den Angaben über die scheinbare Schweiflänge, welche fast alle

von Méchain sind, die vom 10. Dezember den größten Wert der wahren Länge, nämlich 0·09 liefert, während sich aus den Angaben vom November nur 0·02, beziehungsweise 0·03 ergibt.

Da sonach der Umstand, daß eine ungewöhnlich große Schweiflänge auf den gleichzeitigen Stand der Erde in der Ebene der Kometenbahn zurückgeführt werden kann, nicht besonders selten zu sein scheint, so liegt es nahe, diese Untersuchung auf die Gesamtheit der Kometen auszudehnen und dabei das gefundene Merkmal selbst zum Ausgange zu wählen, d. h. also nachzusehen, ob es außer den schon vorgeführten noch andere Kometen gibt, bei denen sich (auch wenn der Berechnung der wahren Länge nach der vereinfachten Formel anscheinend kein Hindernis entgegensteht) der Durchgang der Erde durch die Ebene der Kometenbahn durch eine besonders große Schweiflänge verraten hat.

Ich habe dementsprechend die diesbezügliche Kometenliteratur und insbesondere die des 19. Jahrhunderts durchgesehen, muß aber gleich hier bemerken, daß diese Nachlese wenig ergiebig ausgefallen ist. Es kommt zwar nicht selten vor, daß der Schweif eines Kometen zu der Zeit, in welcher die Erde nahe an der Ebene seiner Bahn war, besonders lang gesehen worden ist, doch ist diese Verlängerung nicht überall beweiskräftig, weil sie bei manchen Kometen mit einem anderen Umstand zusammentrifft, welchem ebenfalls eine Steigerung der Ansehnlichkeit des Schweifes zugeschrieben werden kann; das ist vor allem die Nähe des Perihels, dann auch bedeutende Erdnähe oder große Höhe über dem Horizonte. Auch trifft es sich öfters, daß eine Beobachtungsreihe gerade mit den Tagen der größten Schweiflänge beginnt (beim Heraustreten eines Kometen aus den Sonnenstrahlen oder überhaupt aus der Dämmerung) oder abbricht (beim Verschwinden eines Kometen in der Dämmerung oder am Horizonte), so daß also der Nachweis in solchen Fällen kein vollständiger, sondern nur ein einseitiger ist. Trotzdem empfiehlt es sich, auch solche Fälle nicht unerwähnt zu lassen, weil es leicht möglich und gewiß nicht unwahrscheinlich ist, daß die besondere Länge eines Schweifes durch den Stand unserer Erde in der Ebene der Kometenbahn,

wenn auch nicht vollständig bewirkt, so doch wenigstens teilweise mit verursacht, also die Erscheinung verstärkt und begünstigt worden ist.

Hier muß vor allem der durch eine außerordentlich kleine Periheldistanz ausgezeichnete Komet von 1680 genannt werden, der nur wenige Tage nach seinem Periheldurchgang (T am 18. Dezember) und ebenso wenige Tage nach dem Durchgang der Erde durch die Ebene seiner Bahn ($L = ☊$ am 21. Dezember) mit einem außerordentlich langen und hellen Schweif am Abendhimmel aus den Sonnenstrahlen herausgetreten ist; ebenso der Komet 1819 II ($q = 0 \cdot 34$), der Anfang Juli in beträchtlicher Größe aus den Sonnenstrahlen herausgekommen ist, nachdem am 27. Juni der Durchgang durch das Perihel und nur einen Tag früher der Durchgang der Erde durch die Ebene seiner Bahn ($L = ☋$) stattgefunden hatte. Auch der Komet 1860 III ($q = 0 \cdot 29$) ist hier zu nennen, da sein Schweif gleich an den ersten Beobachtungstagen, welche dem Periheldurchgang (16. Juni) und dem Stand der Erde bei $L = ☊$ (15. Juni) schon nach wenigen Tagen folgten, am längsten gesehen und sodann immer kürzer wurde.

Bei diesen drei Kometen ist die Zulässigkeit der Vermutung, daß der schon an sich lange Schweif auch noch infolge des besonderen Standes der Erde wesentlich verlängert erschienen ist, nur eine kleine; größer ist sie schon bei den folgenden.

Komet von 1590. T am 8. Februar; $L = ☋$ am 6. März. Der Schweif erschien an diesem letzteren Tag in der Tat am längsten, indem sich aus den Beobachtungen von Tycho Brahe als wahre Länge am 5. März 0·04, am 6. März 0·05 und am 8. März nur mehr 0·01 ergibt.

Komet von 1652. T am 12. November; $L = ☋$ am 19. Dezember. Nach den Beobachtungen von Hevelius war der Schweif am 20. Dezember am längsten und ist von da an, abgesehen von kleineren Schwankungen, immer kürzer erschienen; die Bestätigung ist jedoch ganz so wie beim Kometen von 1590 keine ausreichende, weil die Beobachtungen erst mit dem 20. Dezember beginnen und die Abnahme der Schweiflänge gewiß auch darauf zurückgeführt werden darf, daß sich der

Komet zu dieser Zeit schon immer mehr von der Sonne entfernte.

Komet von 1664. T am 4. Dezember; $L = ☋$ am 12. Dezember. Auch bei diesem Kometen beginnen die Beobachtungen gerade zu der Zeit, in welcher die Erde nahe an der Ebene seiner Bahn war und überdies ist die größte Schweiflänge nicht schon zu dieser Zeit, sondern erst später, nämlich Ende Dezember 1664 und am Anfange des Jahres 1665 beobachtet worden, doch darf der Komet trotzdem hier genannt werden, weil es sehr wahrscheinlich ist, daß sein Schweif beim Beginne der Beobachtungen wesentlich länger war, als er gesehen wurde und nur darum verkürzt erschienen ist, weil der Komet zu jener Zeit noch sehr weit im Süden stand (Deklination −22° bis −30°) und daher für die meisten Beobachter auf der Nordhemisphäre nur in kleinen Höhen zu sehen war.

Komet 1861 II. T am 11. Juni, $L = ☋$ am 30. Juni. Nach den zahlreichen Schweifbeobachtungen, insbesondere denen von J. Schmidt in Athen, hatte der Schweif gerade am 30. Juni seine größte Länge und ist von da an Tag für Tag kürzer erschienen. Diese auffallende Bestätigung erleidet zwar eine Einschränkung durch den Umstand, daß der von Süden heraufkommende Komet in Europa an diesem Tage überhaupt zum ersten Male gesehen worden ist und noch dazu der Erde sehr nahe war, doch ist es jedenfalls nicht unwahrscheinlich, daß zu der bedeutenden Schweiflänge auch der besondere Stand der Erde beigetragen hat. Ziemlich dasselbe gilt von dem folgenden.

Komet 1881 III. T am 16. Juni, $L = ☋$ am 22. Juni. Auch bei diesem ebenfalls von Süden heraufgekommenen Kometen war der Schweif zu der Zeit, in welcher der Komet auf der Nordhemisphäre allgemein sichtbar wurde (25. Juni), am längsten und hat von da ziemlich gleichmäßig abgenommen.

Nach diesen Kometen, bei denen die größten Schweiflängen beim Beginn der Beobachtungen gesehen wurden, kann ein anderer, ebenfalls sehr ansehnlicher Komet genannt werden, bei dem die Beobachtungen mit der größten Schweiflänge geendet haben, und das ist der von 1874.

Komet 1874 III. T am 8. Juli, $L = ☊$ am 21. Juli. Der Schweif des Kometen ist an diesem letzteren Tage, nachdem

er bis dahin stetig zugenommen hatte, tatsächlich am längsten gesehen worden, so insbesondere von J. Schmidt (Astr. Nachr., Bd. 87, Nr. 2067), doch darf auch hier der einschränkende Umstand nicht unerwähnt bleiben, daß die Schweifentwicklung zu dieser Zeit infolge des vor kurzem stattgehabten Periheldurchganges überhaupt eine sehr bedeutende gewesen ist und daß der Komet überdies auch der Erde recht nahe war. Jedenfalls kann aber die Möglichkeit nicht in Abrede gestellt werden, daß zu der bedeutenden Länge des Schweifes auch der besondere Stand der Erde bei $L = \Omega$ beigetragen hat und außerdem ist dieser Komet hier schon darum erwähnenswert, weil der Durchgang der Erde durch die Ebene seiner Bahn dadurch angedeutet ist, daß der Schweif am 21. Juli, wie Bredichin auf Grund der Beobachtungen von Schmidt gefunden hat (Annales de l'observ. de Moscou, III, 2., p. 7 und 8), ganz gerade erschienen ist.

Ein vollständiges Seitenstück zu den Kometen, durch welche diese Untersuchungen veranlaßt worden sind (1618 II, 1759 I, 1769), bietet der durch seine kleine Periheldistanz an den Kometen von 1680 erinnernde Komet 1843 I; T am 27. Februar, Ω zwischen 359° und 2°, demnach $L = \Omega$ zwischen dem 20. und 23. März.

Der Komet 1843 I ist bald nach seinem Periheldurchgang im März mit einem außerordentlich langen und hellen Schweif aus den Sonnenstrahlen herausgekommen, also ähnlich wie der große Komet von 1680, doch scheint sich bei ihm, obwohl die beträchtliche Schweiflänge so wie bei jenem Kometen größtenteils seiner außerordentlichen Annäherung an die Sonne ($q = 0 \cdot 006$) zugeschrieben werden muß, doch auch der Durchgang der Erde durch die Ebene der Kometenbahn (zwischen dem 20. und 23. März) verraten zu haben, und zwar dadurch, daß der Schweif auch zu der Zeit, in welcher er in Mitteleuropa sichtbar wurde (erst vom 17. März an), noch immer eine beträchtliche Länge hatte. Die Beobachtungen der scheinbaren Schweiflänge des Kometen von J. Schmidt (Astr. Nachr., Bd. 21, Nr. 487), der damals noch im Hamburg war, lassen zu dieser Zeit sogar ein Maximum, und zwar am 21. März, erkennen (siehe die Werte von C in der nachfolgenden

Tabelle). Nicht minder beachtenswert ist auch die Bemerkung von Schmidt, daß der Schweif am 20. März die größte Helligkeit hatte.

Noch mehr tritt das Ungewöhnliche in der Schweiflänge dieses Kometen dann zu Tage, wenn man daran geht, aus der scheinbaren Länge nach der vereinfachten Formel die wahre Länge zu berechnen. Man stößt nämlich hier auf dieselben Schwierigkeiten, die sich schon bei den vier zuerst vorgeführten Kometen gezeigt haben, indem der Winkel γ, wie man aus der Zusammenstellung ersieht, an vier Tagen von der scheinbaren Schweiflänge C übertroffen wird und auch an den meisten anderen nicht so groß ist, daß die Bestimmung von c eine sichere genannt werden könnte. Da auch die Berücksichtigung der Zurückbeugung keine wesentlich größere Sicherheit bringt, indem dieselbe nach der Untersuchung von Bredichin kaum mehr als $\varphi = 4°$ betragen hat, so wird man hier wieder zu der Annahme gedrängt, daß der Schweif nicht nur zurückgebeugt, sondern auch stark zurückgekrümmt war und ich habe daher wieder versucht, den Schweif als eine gebrochene Linie zu berechnen, deren letzte Partie über die Erde hinweg gerichtet ist.

Da zeigt sich aber, daß auch auf diesem Wege, wenn man so wie früher den Schweif bis zu zwei Dritteln der scheinbaren Länge als Fortsetzung des Radiusvektors und nur das letzte Drittel als Abzweigung ansieht, noch immer nicht viel erreicht ist, indem sich auch jetzt noch außerordentlich große Längen ergeben, nämlich gegen 3·0 und noch darüber hinaus. Auch wenn bloß die Hälfte der scheinbaren Länge in der Fortsetzung des Radiusvektors und die zweite Hälfte als Abzweigung angenommen wird, ergibt sich die wahre Länge ungewöhnlich groß, nämlich gegen 2·5. Erst wenn man noch weiter herabgeht, also beispielsweise nur ein Drittel der scheinbaren Länge in der geradlinigen Fortsetzung des Radiusvektors und dagegen zwei Drittel als Abzweigung ansieht, gelangt man zu Werten, die weniger unglaublich erscheinen. Diese sind zugleich mit den Winkelgrößen C und γ und den Distanzen des Kometen von der Erde Δ in der Tabelle unter c' mitgeteilt.

Die ungewöhnliche Größe der berechneten Längen erscheint noch mehr befremdend, wenn man beachtet, daß der Schweif dieses Kometen, soweit uns die Beobachtungen belehren, nur wenig gekrümmt war.

1843	C	Υ	Δ	c'	c''
März 19....	56°	63° 54'	1·046	1·48	1·39
20....	60	61 58	1·071	1·73	1·61
21....	64	60 10	1·096	2·03	1·86
24....	59½	55 15	1·174	2·07	1·93
25....	57	53 46	1·201	2·01	1·89
26....	55	52 23	1·228	1·98	1·87
27....	50	51 2	1·256	1·78	1·70
28....	45	49 46	1·284	1·58	1·52
30....	38	47 23	1·341	1·34	1·30

Ich habe auch den Versuch gemacht, noch einen Schritt weiter zu gehen und drei Partien des Schweifes anzunehmen, so zwar, daß die dritte an die zweite ebenso anschließt wie die zweite an die erste, und habe die so erhaltenen Resultate unter c'' angesetzt. Noch weiter soll aber hier nicht mehr gegangen werden, damit sich die Rechnung nicht gar zu sehr in Hypothesen verliert. Eines aber kann nicht unbemerkt bleiben, nämlich, daß trotz der vielfachen Willkür, mit welcher hier darauf hingearbeitet worden ist, Schweiflängen von mäßiger Größe zu erhalten, immer noch außerordentlich bedeutende Längen zum Vorschein kommen und daß somit der Schweif dieses Kometen jedenfalls sehr lang gewesen sein muß.

Nachdem nun aus der Reihe der größeren Kometen des 19. Jahrhunderts diejenigen vorgeführt sind, welche für die vorliegende Untersuchung als Bestätigungen herangezogen werden können, erscheint es der Vollständigkeit halber nicht unnütz, aus dieser Reihe auch noch die zu nennen, welche keinen Beitrag liefern können, weil während der Schweifentfaltung die Erde gar nicht in die Nähe der Kometenbahnebene gekommen ist; es sind die folgenden: 1807, 1811 I, 1821, 1882 II, 1886 I, 1886 II.

Auch der Komet 1858 VI (T am 29. September) liefert keinen wesentlichen Beitrag, weil der Durchgang der Erde durch die Ebene seiner Bahn (L = ☊ am 8. September) schon einen Monat vor der größten Schweifentfaltung stattgefunden hat, doch soll hier nicht unerwähnt bleiben, daß in der Schweiflänge wenigstens eine Andeutung der Annäherung der Erde an die Kometenbahnebene zu erkennen ist. Zunächst ist es auffallend, daß die Zeit, in welcher sich nach Bond zuerst eine rapide Zunahme von Helligkeit und Schweiflänge gezeigt hat, nämlich am 10. und 12. September, sehr nahe mit dem Stand der Erde bei der Ebene der Kometenbahn zusammentrifft, so daß also die Vergrößerung der Schweiflänge zu dieser Zeit durch den bezeichneten Stand der Erde mitverursacht worden sein kann. Überdies ergibt sich die wahre Schweiflänge am 8. und 12. September im Vergleiche zu den nächstfolgenden auffallend groß, nämlich $c = 0 \cdot 2$, und wenn es auch Tatsache ist, daß die Verkürzung in der Mitte des September hauptsächlich eine Folge des Mondlichtes war (Vollmond am 23. September), so ist es doch gewiß beachtenswert, daß der Schweif schon um den 8. September eine Länge zeigte, die er nach der Störung durch das Mondlicht erst wieder am 25. und 27. September erreicht hat. Hiernach wäre also die Verkürzung in der Mitte des September nicht ausschließlich eine Folge der Erhellung des Himmels durch das Mondlicht, sondern zum Teile reell gewesen.

Hier können auch zwei Kometen genannt werden, die zu der Zeit, in welcher wegen des Standes der Erde eine wenn auch nur kleine Verlängerung des Schweifes zu erwarten gewesen wäre, zwar keine derartige Vergrößerung, wohl aber andere Eigentümlichkeiten gezeigt haben.

Der eine ist der Komet von 1823 (T am 9. Dezember 1823, L = ☊ am 23. Jänner 1824), der außer dem normalen, von der Sonne abgewendeten noch einen zweiten, der Sonne zugewendeten, schmal und spitzig erscheinenden Schweif gezeigt hat. Dieser letztere wurde nun auffallenderweise gerade zu der Zeit gesehen (22. bis 31. Jänner 1824), in welcher die Erde nahe an der Ebene der Kometenbahn war.

Der zweite ist der Komet 1825 IV (T am 10. Dezember, $L = \Omega$ am 29. Oktober). Eine dem letzten Datum entsprechende Vergrößerung des Schweifes ist zwar aus den Beobachtungen, unter denen hier besonders die von Dunlop in Paramatta geeignet wären (Untersuchungen von Bredichin, Annales de l'observ. de Moscou, VIII, 1), nicht zu erkennen, doch ist dafür erwähnenswert, daß das Aussehen des Kometen und insbesondere seines Schweifes vielfach gewechselt hat, so daß Dunlop sogar auf die Annahme einer Rotation des Schweifes um seine Achse verfallen ist.

Es soll hier noch bemerkt werden, daß auch der andere, schon länger bekannte Umstand, durch den sich der Durchgang der Erde durch die Ebene einer Kometenbahn verraten kann, nämlich daß der Schweif zu dieser Zeit meistens schmal und fast gerade gesehen wird, aus den überlieferten Beobachtungen nicht immer so bestimmt zu entnehmen ist, als zu erwarten wäre, und es scheint, daß die Beobachter auf diesen Umstand erst dann besonders geachtet haben, als auch seine Ursache erkannt war. Die älteste Angabe, die mit Sicherheit hieher gedeutet werden kann, findet man bei dem im Sommer 1264 sichtbar gewesenen Kometen, indem von ihm berichtet wird, daß sein Schweif einem Schiffssegel glich und seine Breite von Tag zu Tag abnahm, während seine Länge im Gegenteile zunahm. Leider ist aber der Tag, an welchem die Breite am kleinsten oder die Länge am größten gesehen wurde, nicht angegeben. Der Durchgang der Erde durch die Ebene der Kometenbahn hat nach der wahrscheinlichsten Bahn am 6. August stattgefunden. Aus der neuesten Zeit kann der Komet 1903 IV genannt werden (T am 27. August, $L = \mho$ am 17. Juli), dessen Schweif besonders in der Mitte des Juli wie ein langer, spitzer Kegel erschienen ist.

Beim Halley'schen Kometen, der hier schon einmal vorgeführt werden mußte, nämlich wegen seiner außerordentlichen Schweiflänge im Jahre 1759, kommt die Erde einerseits im Mai ($L = \Omega$), andrerseits im November ($L = \mho$) in die Ebene seiner Bahn, doch findet man außer der hier genannten keine einzige Erscheinung, die für die vorliegende Untersuchung einen Beitrag liefern könnte. In der Erscheinung

von 1456 wurde der Komet hauptsächlich im Juni gesehen, während der Durchgang der Erde durch die Stellung $L = ☊$ schon am 25. April (alten Stils) stattgefunden hatte. In den Erscheinungen von 1378 und 1835, bei denen die Stellung $L = ☋$, also der Monat November, in Betracht kommen würde, war der Komet mit seinem Schweif am besten im Oktober zu sehen und kam im November schon in eine ungünstige Stellung am Abendhimmel; nahe dasselbe gilt von der Erscheinung im Jahre 1607, nur mit dem geringfügigen Unterschiede, daß hier der Komet schon Ende Oktober in die Abenddämmerung rückte. Die Erscheinungen von 1531 und 1682 können noch weniger herangezogen werden, weil der Komet in denselben hauptsächlich im August, beziehungsweise August und September beobachtet worden ist.

Wenn wir nun von den Kometen mit großen Schweifen zu denjenigen mit geringerer Schweifentwicklung übergehen, so soll zunächst bemerkt werden, daß sich bei diesen nicht mehr so sicher wie bei jenen angeben läßt, ob und in welchem Grade eine allenfalls beobachtete Verlängerung des Schweifes auf den besonderen Stand der Erde zurückgeführt werden kann. Überhaupt sind augenscheinliche Beweise unter diesen Kometen nicht mehr zu finden, aber es kommt wiederholt vor, daß die Sichtbarkeit eines Schweifes überhaupt nahe mit dem Durchgang der Erde durch die Kometenbahnebene zusammentrifft; es ist daher jedenfalls angezeigt, die betreffenden Kometen wenigstens zu nennen, da es immerhin möglich ist, daß der Schweif infolge dieses günstigen Standes der Erde heller erschienen und daher leichter sichtbar geworden ist. Es soll demnach hier auf die folgenden Kometen aufmerksam gemacht werden:

1748 I (*T* am 28. April, $L = ☋$ am 12. Mai);
1771 (*T* am 19. April, $L = ☊$ am 17. April);
1847 III (*T* am 9. August, $L = ☋$ am 1. September);
1847 V (*T* am 9. September, $L = ☋$ am 2. August);
1851 IV (*T* am 30. September, $L = ☋$ am 7. November);
1853 II (*T* am 9. Mai, $L = ☊$ am 1. Mai);
1888 V (*T* am 12. September 1888, $L = ☋$ am 6. Februar 1889).

Zum Schlusse sei nochmals darauf hingewiesen, daß in den meisten Fällen, in denen ein Kometenschweif beim Durchgang der Erde durch die Bahnebene wesentlich länger gesehen worden ist (wie insbesondere gleich bei den vier zuerst vorgeführten Kometen), die Erde dem betreffenden Kometen und insbesondere seinem Schweife ziemlich nahe war und daß somit die Erscheinung eines besonders langen Schweifes in diesen Fällen auch noch durch eine geringe Distanz zwischen der Erde und dem Kometen begünstigt worden ist.

Daraus darf aber andrerseits gefolgert werden, daß in solchen Fällen, in denen ein Komet zur Zeit des Durchganges der Erde durch die Ebene seiner Bahn von der Erde weit entfernt war ($\Delta > 1$), eine Verlängerung des Schweifes, wenn sie auch tatsächlich vorhanden war, nur ausnahmsweise zu bemerken ist, weil dann auch schon der Schweif überhaupt wegen seines großen Abstandes von der Erde bei weitem nicht so ansehnlich erscheint, wie er in beträchtlicher Erdnähe erscheinen würde. So ist bei dem Kometen 1853 III, obwohl die Erde während der Sichtbarkeit desselben durch die Ebene seiner Bahn gegangen ist (13. August), aus den Beobachtungen von einer Verlängerung seines Schweifes nichts zu erkennen, weil sich der Komet während des angedeuteten Erdstandes weit von der Erde, und zwar jenseits der Sonne befand ($\Delta = 1 \cdot 3$). Nur der große Komet 1843 I bildet auch hier wieder eine auffallende Ausnahme, da derselbe eine außerordentlich große Schweiflänge gezeigt hat, obwohl sein Abstand von der Erde schon größer als $1 \cdot 0$ war.

Damit sind nun so gut wie alle Kometen genannt, die bei der Beantwortung der Frage, bei welchen Kometen sich der Durchgang der Erde durch die Ebene der Kometenbahn in der Erscheinung des Schweifes bemerkbar gemacht hat, erwähnt werden müssen. Überblickt man die Ergebnisse dieser kleinen Durchmusterung, so sieht man, daß die an den zuerst vorgeführten Kometen besonders auffallend hervortretende Tatsache der scheinbaren Verlängerung eines Kometenschweifes mit Sicherheit eigentlich nur selten bemerkt worden ist, aber immerhin doch so häufig, daß das Phänomen jetzt noch mehr

wahrscheinlich geworden ist und auf dasselbe auch in anderen Fällen mit Berechtigung aufmerksam gemacht werden darf.

Es kann sich somit ein solcher Durchgang der Erde nicht nur dadurch verraten, daß der Schweif schmal und gerade, sondern auch dadurch, daß er länger erscheint als vor und nach diesem Zeitpunkte. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Schweifpartikelchen viel mehr in der Bahnebene als in irgend einer anderen Richtung verstreut sind, und daß neben oder zwischen den vorderen auch noch die meisten rückwärtigen gesehen werden können.

Diese Ergebnisse liefern eine neue Bestätigung des Erfahrungssatzes, daß die Kometenschweife eigentlich noch viel länger sind, als wir sie gewöhnlich sehen. Diese Folgerung erscheint schon bei jeder genaueren Betrachtung eines Kometenschweifes unabweislich und ist durch die in der Neuzeit gelungenen photographischen Aufnahmen von Kometenschweifen in einem unerwarteten Grade bestätigt worden.

Wir können aber einen Kometenschweif in einem besonderen Fall auch direkt länger sehen, und zwar dann, wenn die Erde eine solche Stellung hat, daß die hauptsächlich in der Bahnebene verstreuten Schweifpartikelchen möglichst gedrängt hintereinander auf eine verhältnismäßig schmale Strecke des Himmels projiziert erscheinen und infolge der dadurch verstärkten Flächenhelligkeit des Schweifes auch Partien am Ende des Schweifes, die bei einem anderen Standpunkte des Beobachters zu lichtschwach erscheinen, gesehen werden können; und das ist der Fall, wenn sich die Erde nahe an der Ebene der Kometenbahn befindet und insbesondere dann, wenn sie zugleich auch dem Kometenschweif selbst nahe ist.

Berichtigung. In meiner Abhandlung »Über die mutmaßliche Zeit der Wiederauffindung des Halley'schen Kometen bei seiner nächsten Erscheinung« soll es auf der 4. Seite (p. 686 dieses 115. Bandes) 11. Zeile von oben anstatt »Periheldistanz« heißen »Perihelzeit«.

Über nirgends singuläre lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

von

Georg Pick in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Dezember 1906.)

Vorbemerkung.

Nachfolgende Mitteilung ist ein Ausschnitt aus einer vor 10 Jahren angestellten Untersuchung, die ich niemals zu publizieren die Absicht hatte. Die Notiz des Herrn G. Herglotz über den im Titel bezeichneten Gegenstand,[1] auf die ich ganz kürzlich von befreundeter Seite aufmerksam gemacht wurde, zeigt mir indes, daß mein Verfahren zur Aufstellung jener nirgends singulären Differentialgleichungen, wie es in früheren Veröffentlichungen[2] auseinandergesetzt ist, keine Beachtung gefunden hat und veranlaßt mich so zu den hier zu gebenden Ausführungen. Das Verfahren scheint mir vor den üblichen Versuchen zur Gewinnung der Gleichung zweierlei Vorzüge zu besitzen. Einmal die Sicherheit, mit welcher es die richtige Gleichungsform liefert; in dieser Hinsicht hat es sich bereits bewährt im Falle binärer Darstellung des Gebildes, wo es zuerst die richtige Gleichungsform geliefert hat.[3] Andrerseits der Umfang der Anwendbarkeit. Das Verfahren ist wirklich durchführbar, gleichgültig, ob das Gebilde in irgend

---

[1] Math. Ann., *62*, p. 329.

[2] Göttinger Nachr., 1894, Nr. 4, p. 311. — Math. Ann., *50*, p. 381. Letzteren Aufsatz zitiere ich im folgenden mit »M. F.«.

[3] Siehe die vorige Anmerkung, sowie Klein, Vorlesung über lineare Differentialgleichungen von 1894 (Teubner), p. 97, Fußnote.

welcher besonderen Gestalt (kanonische Flächen etc.) oder in allgemeiner Art gegeben ist, also insbesondere für ebene Kurven mit beliebigen Singularitäten u. s. f. Vielleicht findet sich noch Gelegenheit, die in dieser Hinsicht gewonnenen Resultate mitzuteilen.

Die Ermittlung der nirgends singulären Differentialgleichungen ist eine Einzelanwendung der Theorie der Überschiebungen der Formen eines algebraischen Gebildes, insbesondere der multiplikativen Formen, deren Grundzüge in den zitierten beiden Arbeiten entwickelt sind. Auf diese werde ich mich daher im folgenden stützen müssen.

§ 1. Ein formaler Hilfsatz.

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_k$ Formen der binären Veränderlichen ξ_1, ξ_2 von gleichem Grade ρ und übrigens beliebiger funktionaler Beschaffenheit, ferner sei M eine Form der x vom Grade m gleichfalls beliebiger Natur. M kann symbolisch so geschrieben werden:[1]

$$M = M_x^m$$

und ist in letzter Linie eine Form der ξ vom Grade ρm. In den x geschrieben ist sie für $k \geqq 3$ noch unendlich vieler Gestalten fähig, was hier ohne weiteren Belang ist.

Sind nun η_1, η_2 irgend welche Größen, so rechnet man leicht

$$\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) M = \rho m . M_x^{m-1} M_{x_\eta},$$

$$\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)^2 M = \rho^2 . m(m-1) M_x^{m-2} M_{x_\eta}^2 + \\ + m\rho(\rho-1) M_x^{m-1} M_{x_{\eta\eta}},$$

[1] Bezüglich des Gebrauches symbolischer Darstellung bei nicht ganz rationalen Formen vergl. die Ausführungen in dem Aufsatze: »Über lineare Differentialgleichungen in invarianter Darstellung«, diese Sitzungsber., März 1903, insbesondere p. 83 ff. Natürlich wäre es möglich, die Entwicklungen des Textes auch in unsymbolischer Form durchzuführen, aber nur mit einem sehr erheblichen Opfer an Kürze und Deutlichkeit.

wo durch x_η, $x_{\eta\eta}$ die ersten und zweiten Polaren der Formen x bezeichnet sind. Andrerseits ist[1]

$$(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2 . M_x^{m-2}(M_x, M_x)^2 = 2\,M_x^{m-2}(M_x M_{x_{\eta\eta}} - M_{x_\eta}^2),$$

also

$$\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)^2 M = \frac{m\rho(\rho-1)}{2} M_x^{m-2}(M_x, M_x)^2 . (\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2 +$$
$$+ \rho m(\rho m-1)\, M_x^{m-2} M_{x_\eta}^2 . \quad (1)$$

Nunmehr werde angenommen, daß M eine ganze und rationale Linearform der ξ sei:

$$M = c_1\xi_1 + c_2\xi_2.$$

Dann ist

$$\rho m = 1,$$

$$\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)^2 M = 0$$

und es folgt

$$M_x^{m-2}(M_x, M_x)^2 = 0. \quad (2)$$

Der Ausnahmefall $\rho = 1$ kommt im folgenden nicht in Betracht.

§ 2. Ebene singularitätenfreie Kurven. Erste Überschiebung.

Es sei

$$f \equiv f_x^n = 0 \quad (1)$$

die Gleichung einer ebenen singularitätenfreien Kurve, also vom Geschlechte

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

[1] Der Sinn dieser Überschiebung innerhalb eines Symbols braucht kaum erläutert zu werden. Es ist

$$M_x^{m-2}(M_x, M_x)^2 = \sum_i \sum_k \frac{1}{m(m-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_k} (x_i, x_k)^2.$$

Sind ξ_1, ξ_2 nirgends singuläre homogene Veränderliche[1] der Kurve, so läßt sich (1) durch eine »Parameterdarstellung« befriedigen, welche darin besteht, daß x_1, x_2, x_3 drei unverzweigten ganzen (d. i. überall endlichen) multiplikativen Formen der ξ von gleichem Multiplikatorsystem und gleichem Grade, nämlich mit je n Nullstellen gleichgesetzt werden. Dieser Grad ist

$$-\frac{n}{p-1} = -\frac{2}{n-3}.$$

Sind u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 willkürliche Größen, so ist

$$d\omega = C \cdot \frac{\begin{vmatrix} u_x & u_{dx} \\ v_x & v_{dx} \end{vmatrix}}{f_x^{n-1}(fuv)}$$

eine nirgends singuläre oder verschwindende Differentialform und man kann also setzen:

$$d\omega = \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1.$$

Sind nun A, B Formen von den Graden α, β in ξ, also von den Ordnungen (Graden in x):

$$-\alpha\frac{p-1}{n}, \quad -\beta\frac{p-1}{n},$$

so setze man für die u und v die durch diese bezüglichen Ordnungen dividierten ersten Differentialquotienten der A, B nach den x. Es ergibt sich

$$d\omega = \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1 = -\frac{Cn}{p-1} \cdot \frac{A\frac{dB}{\beta} - B\frac{dA}{\alpha}}{(f, A, B)^1},$$

woraus

$$(A, B)^1 = -\frac{p-1}{Cn} \cdot (f, A, B)^1$$

[1] Von den bekannten Eigenschaften, die hier nicht weiter besprochen zu werden brauchen.

folgt. $(A, B)^1$ bedeutet die erste Überschiebung der A, B nach den ξ, $(f, A, B)^1$ die in bekannter Weise normierte Funktionaldeterminante der Funktionen der x: f, A, B. Wir verfügen nun noch über den willkürlichen Koeffizienten C derart, daß die Formeln endgültig lauten:

$$(A, B)^1 = (f, A, B)^1, \tag{2}$$

$$d\omega = -\frac{n-3}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} u_x & u_{dx} \\ v_x & v_{dx} \end{vmatrix}}{(f, u_x, v_x)^1}. \tag{3}$$

§ 3. Zweite Überschiebung.

Nach dem bei früherer Gelegenheit[1] auseinandergesetzten Verfahren hat man, um die zweite Überschiebung zweier Linearformen u_x, v_x zu bilden, zu beachten, daß für $v_x = 0$

$$w_x . (u_x, v_x)^2 = 2\left\{((u_x, w_x)^1, v_x)^1 - ((u_x, v_x)^1, w_x)^1\right\}$$

ist. Nach (2) des vorigen Paragraphen erhält man für die rechte Seite zunächst

$$2(f_x^{n-1}(fuw), v_x)^1 - 2(f_x^{n-1}(fuv), w_x)^1$$

und hieraus bei nochmaliger Anwendung jener Formel

$$2\bar{f}_x^{n-1} f_x^{n-2}(\bar{f}fv)(fuw) - 2\bar{f}^{n-1} f_x^{n-2}(\bar{f}fw)(fuv) =$$
$$= w_x . \bar{f}_x^{n-2} f_x^{n-2}(\bar{f}fu)(\bar{f}fv) - v_x . \bar{f}_x^{n-2} f_x^{n-2}(\bar{f}fu)(\bar{f}fw),$$

wo $\bar{f}$ und f gleichbedeutende Symbole sind. Es ist also für $v_x = 0$:

$$(u_x, v_x)^2 = \bar{f}_x^{n-2} f_x^{n-2}(\bar{f}fu)(\bar{f}fv)$$
$$= (f, f, u_x v_x)^2$$

nach üblicher Bezeichnungsweise. Wegen der Symmetrie dieses Ausdruckes in u_x, v_x gilt die gefundene Gleichung auch für $u_x = 0$ und es ist folglich die Form

$$(u_x, v_x)^2 - (f, f, u_x v_x)^2$$

---

[1] Vergl. »M. F.«, § 5, und Abschnitt II.

durch $u_x v_x$ teilbar. Der Quotient ist eine ganze Rationalform Φ der x (von der Ordnung $2n-6$), wie unmittelbar aus den l. c. besprochenen Eigenschaften der zweiten Überschiebung folgt. Im übrigen erfährt Φ keine nähere Bestimmung und es wird sich unten zeigen, daß es je nach Auswahl der nirgends singulären ξ_1, ξ_2 jede Form obiger Ordnung bedeuten kann. Wir erhalten also

$$(u_x, v_x)^2 = (f, f, u_x v_x)^2 + \Phi . u_x v_x. \tag{1}$$

Φ ist von u_x, v_x unabhängig, wie leicht zu sehen ist.

§ 4. Die nirgends singuläre Differentialgleichung.

Aus der zuletzt gefundenen Formel folgt sofort

$$M_x^{m-2}(M_x, M_x)^2 = (f, f, M)^2 + \Phi . M.$$

Bedeutet nun M eine ganze rationale Linearform der ξ, so hat man nach (2), § 1:

$$(f, f, M)^2 + \Phi . M = 0.\text{[1]} \tag{1}$$

Andrerseits verifiziert man leicht, daß die Gleichung (1) eine singularitätenfreie Differentialgleichung zweiter Ordnung für M darstellt, wie immer das Polynom Φ von der Ordnung $(2n-6)$ gewählt werden mag, da ja die Auswahl von Φ auf die Singularitäten der Differentialgleichung überhaupt ohne Einfluß ist. Damit ist die Herleitung in beweiskräftiger Weise geschlossen.

Folgende Bemerkung, den Kern der gegebenen Entwicklung betreffend, ist vielleicht nicht überflüssig. Die Sicherheit, durch welche dieselbe ausgezeichnet ist, beruht darauf, daß der erforderliche funktionentheoretische Schluß an jene Stelle geschoben ist, wo er leicht und unzweideutig durchgeführt werden kann. Es sind die benützten Sätze über die funktionentheoretische Natur der Überschiebungen multiplikativer Formen, die den bezeichneten Zweck erfüllen.

---

[1] In Übereinstimmung mit der früheren Angabe von Herrn Gordan für die C_4 und der neuerlichen allgemeinen von Herrn Herglotz.

§ 5. Raumkurve sechster Ordnung vom Geschlechte 4.

Auch für Kurven in drei- oder mehrdimensionalen Räumen bewährt sich die Methode; bei Beschränkung auf volle Schnitte sind die erforderlichen Operationen besonders einfacher Natur. Ich setze das hier an dem Falle der Raum-C_6 vom Geschlechte 4 auseinander, bemerke aber ausdrücklich, daß der allgemeine Fall in völlig gleicher Weise zu behandeln ist und keine neue Schwierigkeit mit sich bringt.

Es seien $f=0$, $F=0$ die Gleichungen der Flächen zweiter, beziehungsweise dritter Ordnung, deren Schnitt die Raumkurve bildet. Dann hat man

$$d\omega = C\cdot\frac{\begin{vmatrix} u_x & du_x \\ v_x & dv_x \end{vmatrix}}{(f, F, u_x, v_x)^1}.$$

Ähnlich wie im § 2 ergibt sich hieraus

$$(A, B)^1 = (f, F, A, B)^1, \tag{1}$$

$$d\omega = -\frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} u_x & u_{dx} \\ v_x & v_{dx} \end{vmatrix}}{(f, F, u_x, v_x)^1}. \tag{2}$$

Ferner gewinnt man die für $v_x = 0$ gültige Relation

$$w_x\cdot(u_x, v_x)^2 = 2\left\{((u_x, w_x)^1, v_x)^1-((u_x, v_x)^1, w_x)^1\right\} =$$
$$= -\frac{1}{3}\,w_x\left\{(\bar{f}\bar{F}fu)(fF\bar{f}v)\bar{F}_x^2F_x^2+2(\bar{f}\bar{F}Fu)(fF\bar{F}v)\bar{f}_xf_x\bar{F}_xF_x\right\}$$

durch leichte symbolische Umformung. Die in der Klammer enthaltene, in u_x, v_x symmetrische Bildung hängt im Grunde nur von den Formen f, F und dem Produkt u_xv_x ab. Wir wollen sie mit

$$-3(f, f, F, F, u_xv_x)^2$$

bezeichnen, so daß also für $v_x = 0$

$$(u_x, v_x)^2 = (f, f, F, F, u_xv_x)^2$$

wird. Wegen der erwähnten Symmetrie gilt diese Gleichung auch für $u_x = 0$ und man hat also wieder allgemein

$$(u_x, v_x)^2 = (f, f, F, F, u_x v_x)^2 + \Phi . u_x v_x, \tag{1}$$

wo Φ eine ganze Rationalform der x von zweiter Ordnung bedeutet, welche keine nähere Bestimmung erfährt. Aus (1) ergibt sich mittels (2), § 1, die nirgends singuläre Differentialgleichung

$$(f, f, F, F, M)^2 + \Phi . M = 0, \tag{2}$$

worin, wie kaum hinzuzufügen nötig, $(f, f, F, F, M)^2$ aus $(f, f, F, F, u_x v_x)^2$ entsteht, indem sowohl die u als die v durch die normierten ersten Ableitungen von M ersetzt werden.

Über die hier auftretende invariante Bildung sei nur noch folgendes bemerkt. Wenn man in $(f, f, F, F, M)^2$ F durch

$$F + w_x f$$

ersetzt, so ändert sich diese Bildung, während die linke Seite von (2) ungeändert bleibt, wenn man nur Φ in entsprechender Weise durch eine andere Form gleicher Ordnung ersetzt. Indem also an Stelle von $(f, f, F, F, M)^2$

$$(f, f, F, F, M)^2 + \Phi_0 M$$

gesetzt wird, ist man im stande, den Ausdruck gegenüber besagter Änderung von F invariant (kombinant) zu gestalten. Als einfachste Annahme ergibt sich hiebei

$$\Phi_0 = \frac{2}{9} \frac{(F_x F_\varphi^2)^2}{f_\varphi^2},$$

wenn u_φ^2 die adjungierte Form von f_x^2 bedeutet. Man erreicht dasselbe durch den ursprünglichen Ausdruck von $(f, f, F, F, M)^2$, wenn man F von vornherein durch die (Apolaritäts-) Bedingung

$$F_x F_\varphi^2 = 0$$

normiert.

Es muß dahingestellt bleiben, unter welchen Umständen an die erhaltene Gleichungsform ähnliche Schlüsse geknüpft werden können, wie sie Herr C. Herglotz im § 2 seiner Notiz für den Fall gewisser ebener Kurven in Anspruch nimmt.[1]

---

[1] Ich glaube, in § 2 der Herglotz'schen Notiz die Forderung, daß die Gruppe von »η« eine Hauptkreisgruppe sei, hinzudenken zu müssen, da ohne diese Voraussetzung die unzweideutige Festlegung von η durch die Bedingung eindeutiger Umkehrbarkeit wohl nicht behauptet werden kann.

Einfluß des Lichtes auf elektrostatisch geladene Konduktoren

von

Dr. **Franz Aigner.**

Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Dezember 1906.)

Lichtelektrische Ermüdung und Gefäßeinfluß.

Der zum ersten Male von M. v. Hoor[1] beschriebene Prozeß der zeitlichen Abnahme der lichtelektrischen Empfindlichkeit einer frisch hergestellten Oberfläche, welcher hauptsächlich bei stark elektropositiven, noch für relativ langwelliges Licht empfindlichen Metallen, wie Zn, Al, Mg, auftritt, der Ermüdung, wie ihn Kreusler[2] nannte, wurde früher gewöhnlich auf Oxydation der blanken Metallfläche an der Luft zurückgeführt. Die Unhaltbarheit dieser Anschauung zeigte zunächst in einigen Fällen Hallwachs,[3] dann an Vakuumzellen Ladenburg[4] und Lenard.[5] Die in dieser Richtung von Buisson,[6] Kreusler[7, 2] und von v. Schweidler[8] ausgeführten Versuche

---

[1] M. v. Hoor, diese Sitzungsberichte, *97*, 719 (1888).

[2] H. Kreusler, Ann. d. Phys., *6*, 398 und 412 (1901).

[3] W. Hallwachs, Wied. Ann., *37*, 666 (1889).

[4] E. Ladenburg, Ann. d. Phys., *12*, 558 (1903).

[5] Ph. Lenard, Ann. d. Phys., *12*, 449 (1903).

[6] H. Buisson, C. R., *130*, 1298 (1900).

[7] H. Kreusler, Verh. d. phys. Ges. Berlin, *17*, 86 (1898).

[8] E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *112*, IIa, 974 (1903).

gipfeln darin, daß die Ermüdung hauptsächlich durch die Belichtung hervorgerufen wird. Hallwachs[1] hingegen fand bei Cu, Cu_2O, CuO, Pt, Zn, Fuchsinlösung und Stahl die Ermüdung unabhängig von der Belichtung mit sichtbaren und ultravioletten Strahlen, hingegen in hervorragender Weise abhängig vom »Gefäßeinfluß«, das ist von der Größe des Luftraumes, in dem die zu prüfende Substanz aufgehoben wird, in dem Sinne, daß mit wachsendem Volumen des Aufbewahrungsortes die Ermüdung parallel geht; und zwar ist es in erster Linie das Ozon, welches diesen Prozeß ausbildet, nicht aber infolge seiner oxydierenden Wirkung, sondern wahrscheinlich teilweise durch die Absorption des ultravioletten Lichtes, eventuell auch durch kontaktelektrische Vorgänge. Die bisherigen Versuche mit entgegengesetzten Resultaten betreffs der Lichtwirkung hält Hallwachs nicht für einwandfrei, da bei diesen der Gefäßeinfluß nicht bekannt war und deshalb bei den Beobachtungen nicht eliminiert werden konnte. In folgenden Versuchen wurde bei Zn und amalgamiertem Zn unter Elimination eines eventuellen Gefäßeinflusses zunächst die Lichtwirkung auf die Ermüdungserscheinungen, dann die Existenz eines Gefäßeinflusses bei konstanter Lichtwirkung studiert. Die Versuchsanordnung war im Wesentlichen folgende: Die zu untersuchenden kreisförmigen Platten von zirka 3 *cm* Durchmesser konnten in zwei gleich großen zylindrischen Gefäßen mit gleicher Basis von 665 cm^3 Inhalt an einen Stift angesteckt werden, der sich, durch die Gefäße mit Paraffin isoliert durchgehend, direkt an ein Exner'sches Elektroskop mit Bernsteinisolation samt dem Gefäß aufsetzen ließ. Den Platten gegenüber befanden sich gegen Licht zu verschließende, auswechselbare Glasfenster, die bei den Empfindlichkeitsmessungen durch eine Quarzplatte ersetzt werden konnten, um den stark brechbaren Strahlen, welche hauptsächlich den Hallwachseffekt bedingen, den Durchgang zu ermöglichen; zwischen Platte und Fenster befand sich in Verbindung mit dem geerdeten Gefäß ein Drahtnetz, um eventuelle Ladungen des Quarzes vom Versuchsobjekt fern zu halten. Die Gefäße selbst waren aus Blech und

[1] W. Hallwachs, Phys. Zeitschr., *5*, 489 (1904).

zeigten, auf den Hallwachseffekt geprüft, infolge ihres Alters der Oberfläche nur den gewöhnlichen Zerstreuungswert des

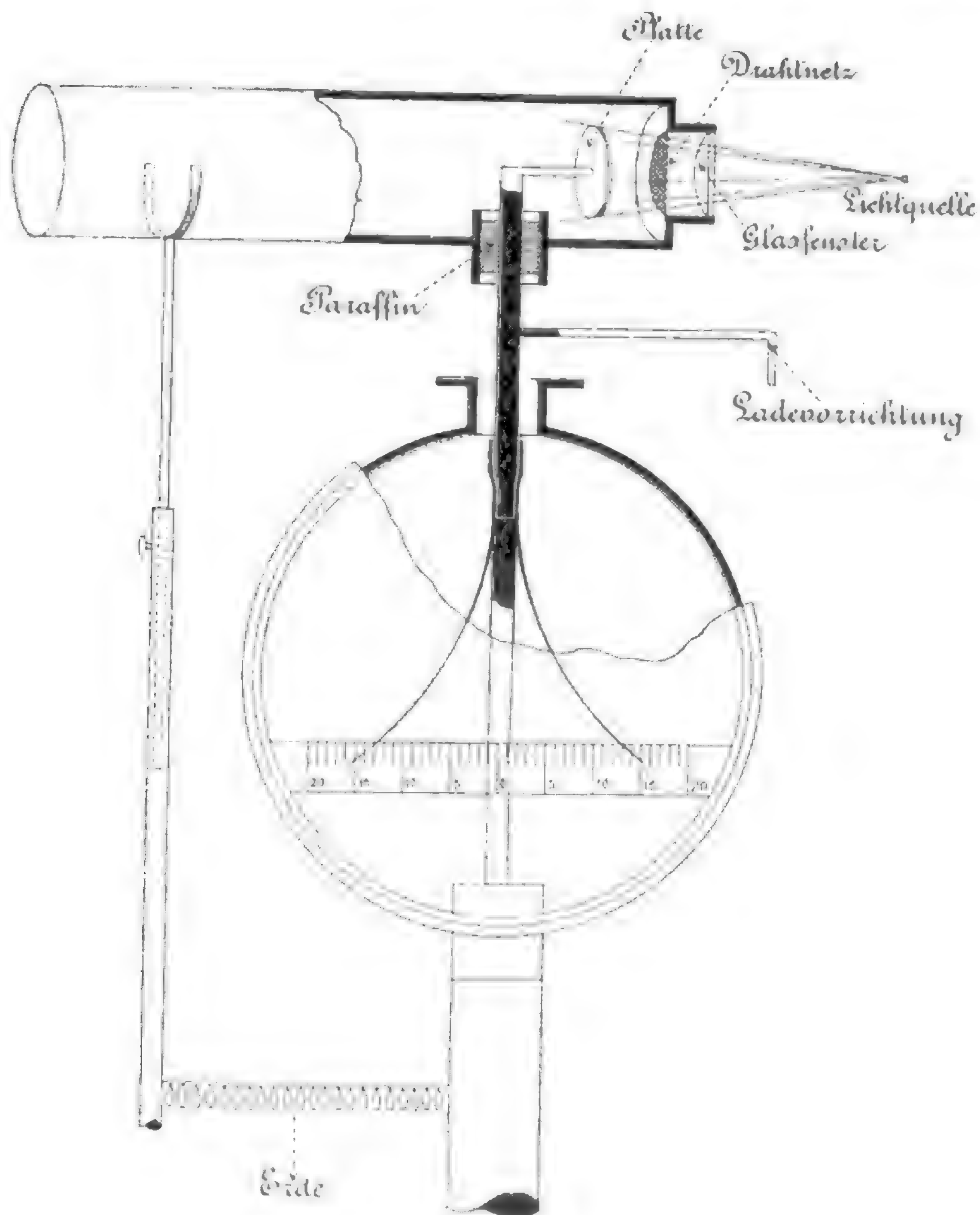


Fig. 1.

Elektroskops. Für später anzuführende Messungen wurden noch fünf weitere Gefäße vom zweifachen bis zum sechsfachen Volumen und gleicher Basis der erstgenannten angefertigt. Die Empfindlichkeitsmessung selbst geschah mit brennendem Magnesiumband in der Weise, daß der zeitliche Verlauf der

Entladung der mit einer Zambonisäule negativ geladenen Platte (Hallwachseffekt, Hallwachs,[1] Righi[2]) in stets gleichem Intervalle der Spannung mit einer Sekundenuhr fixiert wurde.

Die beiden gleichen kleinen Gefäße bekamen nun ein gelbes und blaues Glasfenster und wurden beide gleichzeitig dem Lichte einer Bogenlampe ausgesetzt. Durch diese Anordnung eliminierte sich einerseits ein eventuell vorhandener Gefäßeinfluß infolge der Gleichheit der Räume, anderseits vermochten die unvermeidlichen Bogenschwankungen nicht die Vergleichsmessungen zu stören. Dunkelheit und irgend eine wirksame Farbe, wie zuerst geplant war, konnten aus dem Grunde nicht gewählt werden, da sich bei frisch amalgamierten Zn-Platten die Erholungserscheinungen (E. v. Schweidler,[3] Tabelle I) störend geltend machten, hingegen bei gelbem Lichte nicht auftraten. Ein weiterer störender Einfluß, nämlich die Unmöglichkeit der Herstellung zweier gleich beschaffener Oberflächen, um so streng untereinander vergleichbare Objekte zu erhalten, konnte trotz aller Bemühungen, wie Zerschneiden der bereits auf Hochglanz polierten und zur Erhöhung der Empfindlichkeit (W. Hallwachs[4]) mit feinstem Schmirgelpapier Hubert supérieur 0000 behandelten Platten, nicht beseitigt werden. Um diese Fehlerquelle nach Möglichkeit zu eliminieren, wurde aus je zehn Messungsreihen das Mittel genommen. Von den zahlreichen Versuchen sprachen alle für eine Beeinflussung der Empfindlichkeit durch wirksames Licht und gibt Tabelle II von den Resultaten ein beiläufiges Bild. Hier bedeutet *t* die Belichtungszeit; die anderen Kolonnen geben die Empfindlichkeit der darüberstehenden Substanz in Prozenten an.

---

[1] W. Hallwachs, Wied. Ann., *33*, 310 (1888).

[2] A. Righi, C. R., *107*, 559 (1888).

[3] E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *112*, IIa, 974 (1903).

[4] W. Hallwachs, Phys. Zeitschr., *5*, 489 (1904).

Tabelle I.

t (Minuten)	Prozente	t (Minuten)	Prozente
Frisch amalgamiert..	100	30 bis 60..........	Im Dunkeln aufgehoben
0 bis 5..........	85	60 » 65..........	90
5 » 10....	74	65 » 70..........	80
10 » 15.........	66	70 » 75..........	74
15 » 20..........	59	75 » 80....... ..	69
20 » 25..........	53	80 » 85..........	66
25 » 30..........	50	85 » 90..	62

Hier wurde die Ermüdung durch Bogenlicht mit eingesetztem Quarzfenster hervorgebracht.

Tabelle II.

t (Minuten)	Zn blank		Zn amalgamiert	
	gelbes Glas	blaues Glas	gelbes Glas	blaues Glas
0...................	100	100	100	100
0 bis 5............	92	89	88	83
5 » 10.............	85	80	79	72
10 » 15.............	79	72	71	62
15 » 20.............	74	65	65	55
20 » 25.............	69	58	60	48
25 » 30..	65	53	56	43
30 » 35.............	62	47	53	40
35 » 40.............	59	42	50	36
40 » 45.............	55	38	47	32
45 » 50.............	53	34	45	29
50 » 55.............	51	30	43	27
55 » 60.............	49	28	42	25

Bei frisch amalgamierten Zn-Platten zeigt sich in den ersten 2 bis 3 Stunden ein öfter mit Schwankungen (E. v. Schweidler[1]) durchzogenes Ansteigen der Empfindlichkeit; alte Platten hingegen zeigen sich häufig nach einer Bearbeitung mit feinem Polierpapier in ganz bedeutender Weise unempfindlicher, behalten diesen Wert oft Stunden, ja Tage lang, um dann erst ganz langsam zu ermüden. Eine gleiche Beobachtung findet sich bei E. v. Schweidler. Dort werden Prozesse angeführt, die neben der Belichtung die Empfindlichkeit herabsetzen, wie Erwärmen in einer Flamme, in einem Bade von Wasser, Petroleum oder Benzol oder im Trockenkasten, ferner Abspülen in einem kräftigen Strahle reinen kalten Wassers und nachfolgendem Trocknen, einfaches Abspülen mit Äther oder Benzol, schließlich auch Putzen einer amalgamierten Zn-Platte mit Schmirgel. Ferner weist v. Schweidler darauf hin, daß hier keine Erholung mehr eintritt und seine Resultate im Gegensatz mit denen von v. Hoor[2] stehen, der ein Wiederansteigen der herabgesetzten Empfindlichkeit fand. Darüber angestellte Versuche zeigten, daß es sich hier wahrscheinlich um keinen Gegensatz handelt, sondern nur um eine zeitliche Verschiedenheit, indem nämlich bei frisch hergestellten Oberflächen, wenn sie den letztgenannten Einwirkungen unterworfen werden, sich wohl eine Erholung zeigt, bei alten aber nicht. Daraus erklärt sich auch ganz einfach das Ansteigen einer frisch hergestellten, amalgamierten Zn-Platte, deren Empfindlichkeit eben durch das notwendige Abwaschen zur Entfernung der Säure und nachfolgendes Bürsten und Trocknen herabgemindert wurde.

Wenn man eine Zn-Platte auf Hochglanz poliert, einen Tropfen Quecksilber mit einem Tropfen äußerst schwach angesäuerten Wassers mit feinstem Schmirgelpapier in die Platte sehr sorgfältig einreibt mit nachfolgendem tüchtigen Abwaschen, Bürsten und neuerlichem Polieren mit Plüsch, so erhält man Platten, welche einem Spiegel wenig nachstehen und sich lange Zeit (ich habe eine derartige Platte über ein Jahr auf-

---

[1] E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *112*, IIa, 974 (1903).

[2] M. v. Hoor, diese Sitzungsberichte, *97*, 719 (1888).

gehoben und der Spiegel war nach Ablauf dieser Zeit nicht blind geworden) in diesem Zustand erhalten. Auf ihr lichtelektrisches Verhalten geprüft, zeigen sich derartige Platten überraschend unempfindlich, steigen ungefähr 1 bis 2 Stunden an und bleiben dann in ihrer Empfindlichkeit trotz stundenlanger Belichtung mit allem möglichen Licht nahezu konstant. Wenn man die anderweitig sehr häufig angeführte Beobachtung, daß auf Hochglanz polierte Platten durch Abreiben mit feinem Schmirgelpapier ihre Empfindlichkeit erhöhen, beachtet, so läßt sich unter Hinzuziehung der modernen Theorie, welche annimmt, daß die von der Platte absorbierte wirksame Lichtenergie dazu verwendet wird, um die bereits mit einer intramolekularen Geschwindigkeit ausgerüsteten negativen Elektronen in Freiheit zu setzen (Lenard;[1] in engem Zusammenhange damit stehen, vor Aufstellung der Theorie ausgeführte Experimente von Hallwachs,[2] Stoletow,[3] Bichat und Blondlot,[4] v. Hoor,[5] Cantor[6]), diese Erscheinung dahin erklären, daß mit wachsendem Reflexions- und daraus resultierendem geschwächten Absorptionsvermögen, die lichtelektrische Empfindlichkeit naturgemäß sinken muß. Dieselbe Erklärung ist dann auch für eine abgeschmirgelte amalgamierte Zn-Platte heranzuziehen.

Um die Metalle Zn, amalgamiertes Zn und Aluminium auf einen Gefäßeinfluß zu prüfen, wurden die früher erwähnten sechs Gefäße mit verschiedenem Volumen alle mit gleichfarbigen, und zwar rötlichgelben Fenstern versehen, um die ermüdende Wirkung des Lichtes zu beseitigen, und durch 8 Stunden auf ihre lichtelektrische Empfindlickeit auf die im Anfang erwähnte Weise jede zweite Stunde geprüft. Nachstehende Tabelle III gibt die aus je 20 Versuchsreihen berechnete Wahrscheinlichkeit (W.) eines Gefäßeinflusses.

---

[1] P. Lenard, diese Sitzungsberichte, *108*, IIa, 1649 (1899), auch Ann. d. Phys., *2*, 359 (1900) und *8*, 149 (1902).

[2] W. Hallwachs, Wied. Ann., *33*, 310 (1888), und *37*, 666 (1889).

[3] A. Stoletow, C. R., *106*, 1593 (1888).

[4] E. Bichat und R. Blondlot, C. R., *106*, 1349 (1888).

[5] M. v. Hoor, diese Sitzungsberichte, *97*, 719 (1888).

[6] M. Cantor, diese Sitzungsberichte, *102*, 1188 (1893).

Tabelle III.

	W.
Zink	$^{9}/_{20}$
Amalgamiertes Zink	$^{1}/_{2}$
Aluminium	$^{3}/_{5}$

Ein mit blankem Zink durch 2 Monate fortgesetzter Versuch, wobei sich die eine Platte in einer ganz kleinen gläsernen Stöpselflasche, die andere in einem großen Glaskasten (unbenützter chemischer Herd) befand und alle 24 Stunden die Empfindlichkeiten bestimmt wurden, lieferte kein für einen Gefäßeinfluß sprechendes Resultat.

Lichtelektrische Ermüdung und Kontaktpotential.

Buisson[1] fand, daß sich die Kontaktpotentialdifferenz der meisten Metalle durch Belichtung verändert, und zwar von einem Teile des Spektrums (bis zirka $\lambda = 310\ \mu\mu$) derart, daß das Metall elektronegativer wird, das heißt, in der Spannungsreihe sich vom Zink der Kohle nähert. Für $\lambda < 310\ \mu\mu$ tritt bei amalgamiertem Zn eine Umkehrung ein. Diese Versuche wurden zunächst für Zn, amalgamiertes Zn und Aluminium in folgender Weise wiederholt: Das eine Quadrantenpaar eines Elektrometers in der vereinfachten Form von Nernst und Dolezalek wurde mit der auf ihre kontaktelektrischen Veränderungen zu untersuchenden, rasch einzusetzenden Platte (Durchmesser 9·4 *cm*) eines Luftkondensators in Verbindung gebracht, während die andere Kondensatorplatte aus oxydiertem Cu einerseits an die Erde gelegt, andrerseits auf ein durch einen Stöpselwiderstand variables Potential geladen werden konnte. Von der oxydierten Cu-Platte konnte aus darüber angestellten Versuchen angenommen werden, daß ihr Kontaktpotential bereits einen stationären Wert erlangt hat. Falls die

[1] H. Buisson, C. R., *130*, 1298 (1900).

lichtelektrische Empfindlichkeit mit der Kontaktpotentialvariation in irgend einem Zusammenhang steht (E. v. Schweidler,[1] Hallwachs[2]), zeigte bereits Hallwachs,[2] daß sich oxydiertes Cu hinsichtlich jener nur langsam ändert und so während der Versuchsdauer auch in dieser Richtung als konstant betrachtet werden kann. Die Kontaktpotentialdifferenz ließ sich in dieser Anordnung nach der Kompensationsmethode messen, also so, daß man den Widerstand des auf die Platte fließenden Zweigstromes so lange variierte, bis das mit der festen Zn-Platte verbundene Elektrometer beim Aufklappen des Kondensators keinen Ausschlag gab. Zum Zwecke der Untersuchung kamen die Platten in einen abgeleiteten Metallkasten mit aufgesetzter, gegen Licht verschließbarer Quarzlinse. Hierauf wurden sie je 10 Minuten dem Lichte einer Bogenlampe durch rotes, gelbes, grünes und blaues Glas, Blau- und Violettkohle und einer Heräus'schen Quarzquecksilberdampflampe ausgesetzt oder auch während dieser Zeit im Dunkeln in diesem Kasten immer in geerdetem Zustande belassen, um dann in den Kondensator zur Messung unter roter Beleuchtung eingesetzt zu werden. Das Schmirgeln und Amalgamieren wurde anfangs im vollständig verdunkelten Zimmer vorgenommen, um die Platte vor ihrer chromatischen Belichtung nicht mit dem Lichte anderer Farben in Berührung zu bringen; als sich aber später die Unwirksamkeit des roten Lichtes zeigte, wurde, wie schon angedeutet, bei dieser Beleuchtung gearbeitet. Ursprünglich geschah die Belichtung in dem mit einer gegen Licht verschließbaren Quarzlinse versehenen Erdschutzkasten des Kondensators selbst, doch zeigte sich bald, daß durch die infolge lichtelektrischer Zerstreuung (in diesem Falle also positiver Elektrisierung der ungeladenen Platten) auftretenden Gasladungen unkontrollierbare Fehler entstehen. Es mußte also die Platte aus dem Kondensator herausgenommen werden und wurde in den oben erwähnten Metallkasten zu Belichtungszwecken eingesetzt, die Belichtung selbst aber, um Einströmen der geladenen Lampengase oder des Ozons der Quecksilberlampe in den Kondensator-

---

[1] E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *112*, IIa, 974 (1903).

[2] W. Hallwachs, Physik. Zeitschr., *5*, 489 (1904).

schutzkasten zu verhindern, überhaupt im Nebenzimmer vorgenommen.

Die Tabellen Nr. IV, V und VI geben eine Übersicht über die Resultate. Die Zahlen zeigen die Kontaktpotentialdifferenzen in Prozenten an und sind Mittelwerte aus je fünf Beobachtungen wegen der Bogenschwankungen. Das Kontaktpotential selbst hat man bei einiger Übung mit Hilfe verschieden feiner Schmirgel, natürlich innerhalb der auftretenden Änderungen, völlig in der Hand, und zwar steigt die Spannungsdifferenz im allgemeinen mit der Politur. Den Bogenschwankungen gegenüber ist es ziemlich unempfindlich, nicht so die lichtelektrische Empfindlichkeit.

In den Tabellen bedeutet *t* die Zeit der Belichtung in Minuten, D. Dunkelkeit, R., G., Gr. und Bl. Bogenlicht durch rotes, gelbes, grünes und blaues Glas, Blk. und Vk. Bogenlicht von einer Blau- und Violettkohle, Hg. Quecksilberlicht. Tabelle IV bezieht sich auf blankes, V auf amalgamiertes Zn und VI auf Aluminium.

Tabelle IV.

t (Minuten)	D.	R.	G.	Gr.	Bl.	Blk.	Vk.	Hg.
0.........	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0
0 bis 10...	96·0	96·0	96·0	96·0	96·0	95·9	95·0	94·2
10 » 20...	94·2	94·2	94·1	94·1	94·0	93·7	93·5	91·5
20 » 30...	93·2	93·1	93·2	93·1	92·8	92·5	92·4	89·5
30 » 40...	92·5	92·4	92·3	92·3	91·8	91·5	91·4	88·5
40 » 50...	92·2	92·2	92·1	92·0	91·5	91·2	90·8	87·6
50 » 60..	92·0	92·0	91·9	91·8	91·3	91·0	90·5	87·2

Tabelle V.

t (Minuten)	D.	R.	G.	Gr.	Bl.	Blk.	Vk.	Hg.
0.........	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0
0 bis 10..	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	99·7	105·0	104·5
10 » 20...	100·0	100·0	100·0	100·0	99·4	98·9	104·1	106·1
20 » 30...	99·8	99·9	99·9	99·8	98·9	98·2	104·4	106·2
30 » 40...	99·7	99·8	99·8	99·7	98·5	97·5	104·6	106·3
40 » 50...	99·6	99·7	99·7	99·6	98·2	97·0	104·8	106·4
50 » 60...	99·6	99·6	99·6	99·6	98·0	97·4	105·0	106·5

Tabelle VI.

t (Minuten)	D.	R.	G.	Gr.	Bl.	Blk.	Vk.	Hg.
0.........	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0	100·0
0 bis 10...	97·2	97·3	97·2	97·3	96·5	96·4	96·4	96·0
10 » 20...	95·5	95·4	95·4	95·6	94·0	93·0	92·9	92·3
20 » 30...	94·3	94·2	94·3	94·5	92·4	90·1	89·9	88·5
30 » 40...	93·2	93·3	93·2	93·3	91·0	88·0	87·3	85·1
40 » 50...	92·1	92·2	92·2	92·3	89·5	86·2	85·0	82·5
50 » 60...	91·0	91·1	91·0	91·2	88·2	85·0	83·0	80·0

Eine Durchsicht der Tabellen zeigt, daß rotes, gelbes und auch grünes Licht bei diesen Metallen das Kontaktpotential fast gar nicht beeinflußt, daß hingegen die brechbareren und lichtelektrisch wirksamen Strahlen das Metall, wie Buisson[1] fand, elektronegativer machen und daß im tiefvioletten Teile des Spektrums bei amalgamiertem Zn eine Umkehrung eintritt. Ferner nimmt das Herabsinken des elektropositiven Charakters dieser Metalle mit der Brechbarkeit der Strahlen zu. Auf die Tabelle VI für Aluminium wie überhaupt auf alle Versuche mit diesem Metall ist keine besondere Verläßlichkeit, da sich Aluminium äußerst schwer behandeln läßt; am besten stellt man hier noch eine gute Oberfläche mit grobem Schmirgelpapier oder mit einer feinen Feile her.

Amalgamiertes Zn wird in den ersten 1 bis 3 Stunden immer elektropositiver, um dann nach Erreichung eines Maximalwertes zu sinken. Eine analoge Erscheinung zeigte sich bei der lichtelektrischen Empfindlichkeit. In Tabelle Nr. I und II befindet sich die Platte bereits in abfallender Kurve. Eine auffallende Erscheinung zeigen die früher erwähnten polierten, amalgamierten Zn-Platten. Nach Erreichung eines Maximalwertes behalten sie diesen sehr lange trotz fortgesetzter Belichtung mit sichtbarem Lichte. In mehreren Fällen trat nach vielen Stunden bei einer Beleuchtung mit Quecksilberlicht ein

---

[1] H. Buisson, Journ. de phys. (3), *10*, 597 (1901).

Elektronegativwerden auf, um dann in der Dunkelheit einem Ansteigen Platz zu machen. Nach sehr langer Zeit zeigte sich noch eine kleine Wirkung von Quecksilberlicht in letzterem Sinne, aber kein Ansteigen mehr (Tabelle VII).

Tabelle VII.

Maximalwert des Kontaktpotentials in Prozenten, erreicht nach $1^{1}/_{2}$ Stunden	100·0
15 Stunden im Dunkeln gelagert	100·0
2 Stunden mit Bogenlicht durch blaues Glas belichtet	100·0
15 Minuten Quecksilberlicht	83·3
3 Stunden im Dunkeln aufgehoben	92·0
Weitere 24 Stunden im Dunkeln	92·0
20 Minuten Quecksilberlicht	90·0
3 Stunden im Dunkeln	90·0
24 Stunden im Dunkeln	90·0

Für die Ermüdung in dichteren Gasen weist Lenard[1] darauf hin, daß die mit geringen Geschwindigkeiten ausgestrahlten Elektronen infolge Absorption bereits innerhalb sehr dünner Schichten gebremst werden und so zur Ausbildung einer elektrischen Doppelschichte (Gas—Metall) Veranlassung geben, die durch ihr Feld weiteren Elektronenemissionen feindlich gegenüber tritt. Eine Erweiterung dieser Ansicht findet sich bei v. Schweidler,[2] daß bei frisch hergestellten Oberflächen sich Doppelschichten entgegengesetzten Vorzeichens allmählich ausbilden und so die Erholungs- und Kräftigungsvorgänge bedingen. Der Gedanke einer kontaktelektrischen Erklärung der Empfindlichkeitsvariationen findet sich auch in reservierter Fassung bei Hallwachs[3] und die Beobachtungen von Buisson[4] sprechen nicht dagegen. Weitere Beiträge liefern

[1] Ph. Lenard, Ann. d. Phys., *8,* 149 (1902).

[2] E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *112,* IIa, p. 974 (1903).

[3] W. Hallwachs, Physik. Zeitschr., *5,* 489 (1904).

[4] H. Buisson, C. R., *130,* 1298 (1900) und Journ. de phys. (3), *10,* 597 (1901).

die Untersuchungen Wulf's,[1] daß Platin, durch Beladung mit Wasserstoff elektropositiver gemacht, zugleich lichtelektrisch empfindlicher wird, ebenso die Angaben von Nothdurft[2] für Platinmoor, wie überhaupt die experimentelle Erfahrung, daß mit dem elektropositiven Charakter auch die lichtelektrische Empfindlichkeit wächst. Nothdurft fand auch die zu erwartende Umkehrung, daß Sauerstoffbeladung die lichtelektrische Empfindlichkeit herabsetzt.

Im Folgenden gelangten direkte Kontrollversuche zwischen den Änderungen des Kontaktpotentials und der lichtelektrischen Empfindlichkeit zur Durchführung. Das Ganze bestand in einer kombinierten Messung vom Kontaktpotential in der angegebenen Weise mit dem Kondensator und einer sich unmittelbar anschließenden Empfindlichkeitsmessung an einem Exner'schen Elektroskop mit Spiegelablesung. Zur Hervorbringung des Hallwachseffektes wurde hier eine Nernstlampe wegen ihrer größeren Konstanz gegenüber der Magnesiumbeleuchtung verwendet. Für die Messung selbst wurden alle bereits angeführten Vorsichtsmaßregeln peinlich berücksichtigt. Tabelle VIII für blankes Zn, Tabelle IX für amalgamiertes Zn und Tabelle X für Aluminium geben in Prozenten die Mittelwerte aus fünf Versuchen für das Kontaktpotential (K.) und die lichtelektrische Empfindlichkeit (E.).

---

[1] Th. Wulf, Ann. d. Phys., *9*, 946 (1902).

[2] O. Nothdurft, Dissertation, Freiburg i. B.; Le Bon's schwarzes Licht und Hallwachseffekt.

Tabelle VIII.

t (Minuten)	D.		Bl.		Blk.		Vk.		Hg.	
	K.	E.	K.	E.	K.	E.	K.	E.	K.	E.
0	100·0	100	100·0	100	100·0	100	100·0	100	100·0	100
0 bis 5	97·9	91	97·7	88	96·2	86	96·2	85	94·8	84
5 » 10	94·9	84	94·8	80	94·5	76	94·4	74	92·1	72
10 » 15	93·7	79	93·2	73	93·0	68	93·0	65	90·5	63
15 » 20	92·9	76	92·3	67	92·1	61	92·1	59	88·9	57
20 » 25	92·0	73	91·8	64	91·5	57	91·4	54	88·0	52
25 » 30	92·0	70	91·5	61	91·0	55	91·0	51	87·8	49

Tabelle IX.

t (Minuten)	D.		Bl.		Blk.		Vk.		Hg.	
	K.	E.	K.	E.	K.	E.	K.	E.	K.	E.
0	100·0	100	100·0	100	100·0	100	100·0	100	100·0	100
0 bis 5	100·0	94	100·0	92	99·1	91	105·0	107	106·2	109

5 bis 10	100·0	90	99·8	86	98·7	83	105·0	111	106·0	114
10 » 15	99·7	86	99·1	81	98·2	77	104·8	113	105·6	116
15 » 20	99·5	83	98·3	77	97·8	72	104·9	113	105·8	120
20 » 25	99·3	81	98·2	74	97·5	68	105·0	113	106·3	124
25 » 30	99·2	79	98·0	72	97·0	66	105·0	113	106·0	130

Tabelle X.

t (Minuten)	D.		Bl.		Blk.		Vk.		Hg.	
	K.	E.	K.	E.	K.	E.	K.	E.	K.	E.
0	100·0	100	100·0	100	100·0	100	100·0	100	100·0	100
0 bis 5	98·5	93	97·2	91	96·9	88	97·0	87	96·6	85
5 » 10	96·0	88	95·3	83	94·4	79	94·3	77	94·0	74
10 » 15	94·6	82	93·2	76	92·0	71	91·5	69	90·2	65
15 » 20	93·6	78	92·0	70	89·8	65	89·8	62	87·6	58
20 » 25	93·0	75	91·0	65	88·0	59	87·0	56	85·1	53
25 » 30	92·7	72	91·5	62	86·6	55	85·3	52	83·0	49

Alle hierüber angestellten Versuche zeigten, daß Kontaktpotentialänderungen und lichtelektrische Empfindlichkeit nebeneinander einhergehen, auch für das Umkehrungsgebiet einer amalgamierten Zn-Platte in der Weise, daß bei normalem Gange dem elektropositiveren Charakter eine größere lichtelektrische Empfindlichkeit entspricht; nur reagiert das Kontaktpotential auf dieselbe Einwirkung bedeutend schwächer als die lichtelektrische Empfindlichkeit. Übrigens ist es nicht ausgeschlossen, mit einem hochempfindlichen Elektrometer auch für das Kontaktpotential die bei der lichtelektrischen Empfindlichkeit auftretenden Bogenschwankungen nachzuweisen, was man daraus schließen kann, daß man eben mit Schmirgeln das Kontaktpotential innerhalb der Elektrometerempfindlichkeit dirigieren kann, die lichtelektrische Empfindlichkeit sich aber auf diese Weise unmöglich nur angenähert beherrschen läßt. Eine gute Übersicht über die Parallelität dieser beiden Phänomene erhält man auch bei länger fortgesetzten Messungsreihen (Tabelle XI).

Tabelle XI.

t (Stunden)	α) Zn blank		β) Zn amalgamiert		γ) Aluminium	
	K.	E.	K.	E.	K.	E.
0	100·0	100	100·0	100	100·0	100
1	92·0	59	106·0	117	97·1	86
2	86·5	45	109·1	128	94·8	75
3	81·0	36	106·5	112	92·0	66
4	77·0	30	101·0	99	90·0	58
5	72·5	25	96·5	88	87·0	52
6	68·5	22	92·6	79	86·2	46
7	65·0	20	88·5	71	84·9	41
8	62·0	18	85·0	64	82·0	37
9	59·1	16	80·5	58	81·0	33
10	57·0	15	77·3	54	80·1	31
11	55·2	14	74·0	50	80·0	29
12	54·0	13	71·1	47	79·0	26

Kurven zur Tabelle XI.

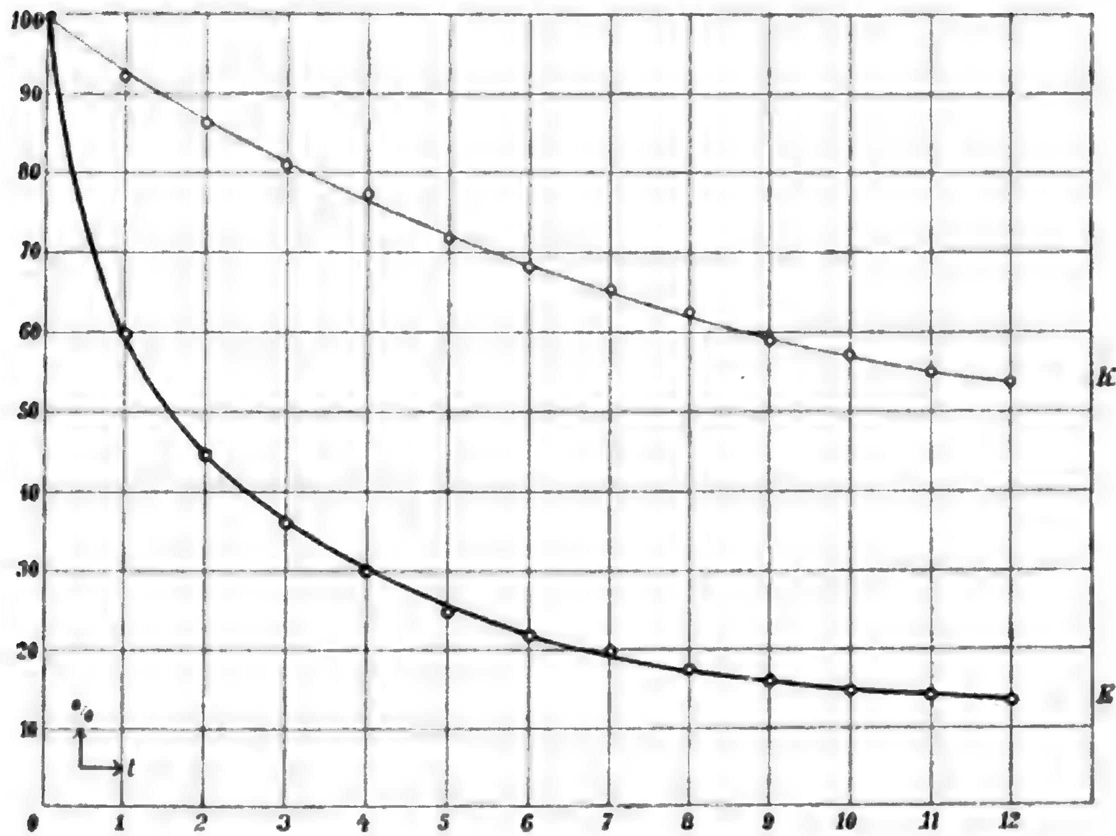


Fig. 2. Blankes Zn. *K* Kontaktpotential, *E* Empfindlichkeit.

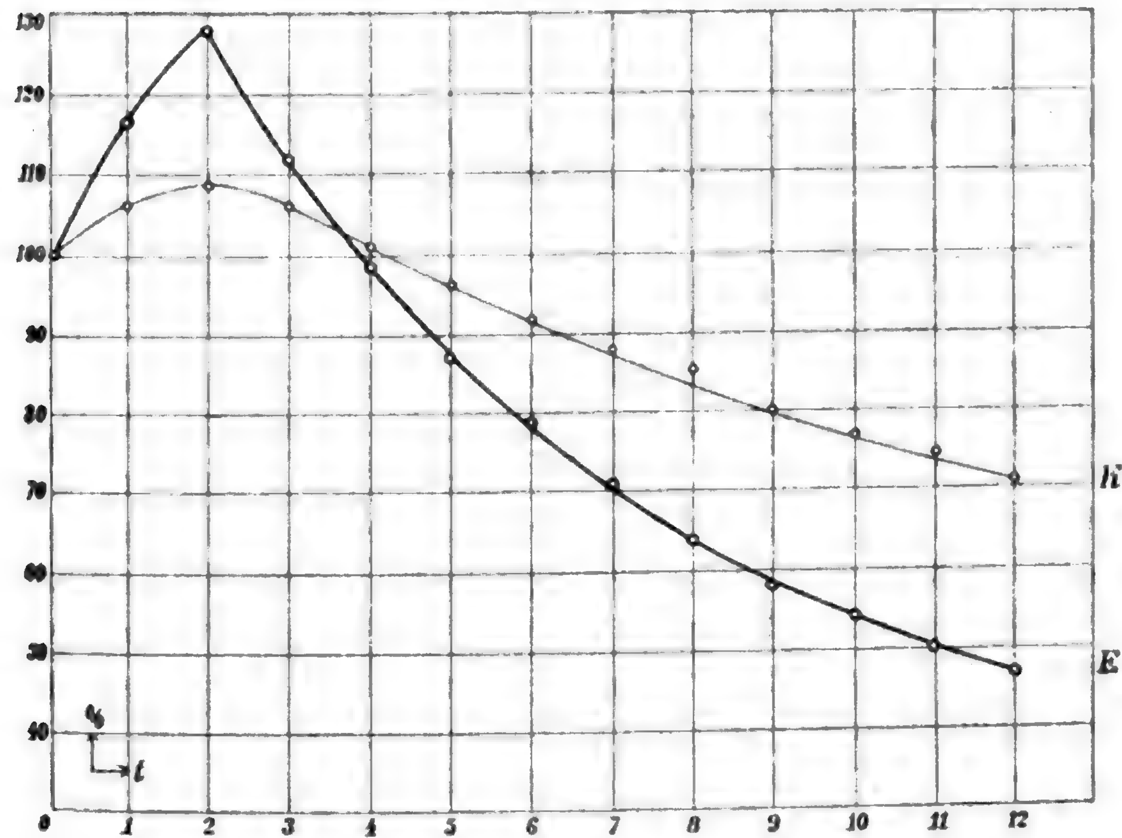


Fig. 3. Amalgamiertes Zn. *K* Kontaktpotential, *E* Empfindlichkeit.

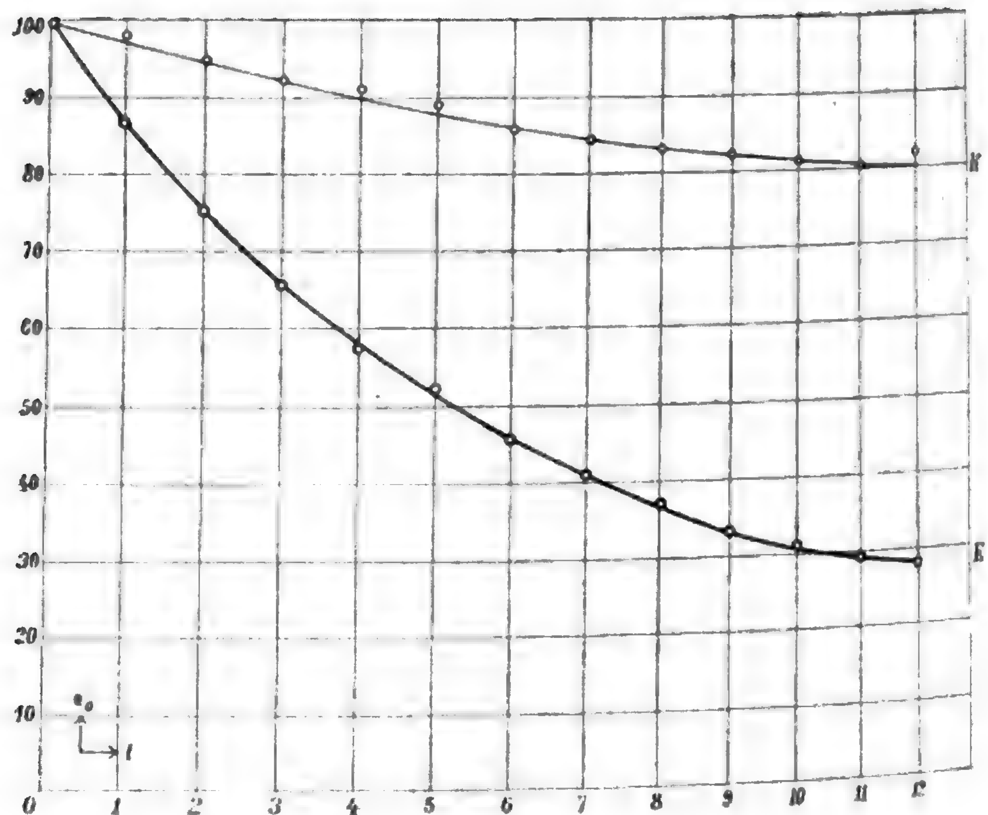


Fig. 4. Aluminium. *K* Kontaktpotential, *E* Empfindlichkeit.

Beeinflussung der Empfindlichkeit im Lichte und durch Licht verschiedener Wellenlängen.

Schließlich wurden noch Versuche angestellt, welche den Zweck hatten, eine Beeinflussung der lichtelektrischen Empfindlichkeit im Lichte verschiedener Wellenlängen zu eruieren. Die Messungen geschahen wieder mit letzterwähntem Elektroskop und der Nernstlampe unter Dazwischenschaltung farbiger Gläser. Die Ermüdung wurde durch Bogenlicht hervorgebracht (Tabelle XII). Um bei offenem Fenster nicht durch Luftströmungen (E. Bichat und R. Blondlot[1]) gestört zu werden, wurde die Platte durch eine Quarzlinse im geschlossenen Raume untersucht.

---

[1] E. Bichat und R. Blondlot, C. R., *106*, 1349 (1888).

Tabelle XII.

t (Minuten)	Zn Tageslicht durch geschlossenes Fenster	Zn Tageslicht durch offenes Fenster	Zn Nernstlampe mit blauem Glase
	Empfindlichkeit in Prozenten		
0	100	100	100
0 bis 5	85	91	88
5 » 10	75	86	80
10 » 15	68	82	74
15 » 20	63	80	71

Offenbar ist also die Ermüdung für den sichtbaren Teil des Spektrums viel größer als für die kurzwelligen Lichtstrahlen, wie bereits v. Schweidler vermutet und Nothdurft bestätigt hat. Endlich war noch getrennt zu untersuchen, welches Licht am stärksten ermüdend wirkt. Hier zeigte sich bei gelbem, grünem und blauem Glase nahezu kein Unterschied, wohl aber im Vergleich zu kurzwelligem Lichte, so daß man diesem hauptsächlich die Ermüdung zuzuschreiben hat. Eine Tabelle soll hier nicht besonders angeführt werden, da dieser Gang bereits aus den Tabellen VIII, IX und X gut ersichtlich ist.

Schluß.

Zusammenfassend sind die erhaltenen Resultate folgende: Die lichtelektrische Ermüdung wird in primärer Weise durch wirksames (relativ kurzwelliges) Licht hervorgerufen, mit zunehmender Brechbarkeit der Strahlen im allgemeinen gesteigert. Die Existenz eines Gefäßeinflusses konnte bei den untersuchten Metallen nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden. Falls er aber existiert, so spielt dieser nur eine untergeordnete Rolle.

Das Kontaktpotential wird durch Licht verändert in der Weise, daß die kurzwelligen Strahlen den elektropositiven

Charakter eines Metalles stärker herabdrücken als die langwelligen. Für amalgamiertes Zn zeigt sich die von Buisson konstatierte Umkehrung von einer bestimmten Wellenlänge an. Die Stellungsänderung in der Spannungsreihe durch Belichtung ist von einer Variation der lichtelektrischen Empfindlichkeit begleitet, und zwar entspricht der Periode des Elektronegativerwerdens fast ausnahmslos eine Ermüdung, der des Elektropositiverwerdens eine Erhöhung der lichtelektrischen Empfindlichkeit. Diese beiden Phänomene laufen nebeneinander, nur ist die lichtelektrische Empfindlichkeit bedeutend reaktionsfähiger als das Kontaktpotential; eine völlig quantitative Abhängigkeit dieser beiden Erscheinungen ist ziemlich unwahrscheinlich.

Was die lichtelektrische Empfindlichkeit betrifft, so wird sie im (gegenüber) langwelligen Lichte stärker variiert als im kurzwelligen.

Anmerkung. Um Zweideutigkeiten auszuschließen, sei bemerkt, daß der Ausdruck »Beeinflussung der Empfindlichkeit im Lichte« so zu verstehen ist, daß nach einer durch Licht von konstanter Intensität und Wellenlänge hervorgebrachten Ermüdung (z. B. 5 Minuten Bogenlicht) der Hallwachseffekt im Lichte verschiedener Wellenlängen geprüft wurde, während bei den Versuchen über die »Beeinflussung durch Licht....« die ermüdende Belichtung in Bezug auf ihre Wellenlänge variiert, hingegen die den Hallwachseffekt hervorrufende Lichtquelle (Magnesiumband, Nernstlampe) konstant gehalten wurde.

Bestimmung des Peltiereffektes Konstantan-Eisen bei 20° C.

von

Ernst Lecher,

k. M. k. Akad.

Aus dem physikalischen Institut der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. November 1906.)

Gelegentlich einer ungefähren Bestimmung der Peltierwärme für die Kombination Eisen-Konstantan ergaben sich für verschiedene Stromstärken so widersprechende Resultate, daß ich mich bemüßigt sah, die Fehlerquellen eingehender zu untersuchen. Es zeigte sich zwar, daß nach Abänderung der Beobachtungsmethode alle Widersprüche verschwanden und daß die zur Erklärung der ursprünglichen (unrichtigen) Resultate herangezogenen Mutmaßungen falsch waren. Gleichwohl scheint mir eine dieser (unrichtigen) Mutmaßungen und die Art ihrer Widerlegung einer eingehenderen Mitteilung wert.

Zunächst hätte man daran denken können, daß eine Abhängigkeit des Peltiereffektes von der Stromstärke in ähnlicher Weise vorhanden wäre wie bei Eisen-Silber. Ich habe seinerzeit[1] darauf hingewiesen, daß die neutrale Temperatur dieser Kombination, für welche der Peltiereffekt gleich Null wird, ein wenig von der Stromstärke abhängt. Der Grund hiefür dürfte aber wohl im Thomsoneffekt zu suchen sein, der diese Art von Messungen etwas stört. Das kann aber bei Eisen-Konstantan nicht der Fall sein, da ja der Thomsoneffekt in beiden Metallen

[1] E. Lecher, diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. II, p. 186 (1906).

dem Sinn und der Größenordnung nach gleich ist.[1] Eine Fehlerquelle dieser Art schien also sehr unwahrscheinlich. Hingegen ist folgende Mutmaßung, so abenteuerlich dieselbe im ersten Momente erscheint, nicht von vornherein abzuweisen. Es stellte sich nämlich bei Überlegung der einschlägigen Verhältnisse die merkwürdige Tatsache heraus, daß noch nie die Abhängigkeit des Peltiereffektes von der Stromrichtung untersucht worden ist. Es wurde stets angenommen, daß bei Umkehrung der Stromrichtung der Peltiereffekt sein Vorzeichen wechselt, der absoluten Größe nach aber genau gleich bleibe.

Bei derartigen Beobachtungen tritt ja immer auch Joule'sche Wärme auf. Hatte man dann für eine bestimmte Stromstärke den gemessenen Totaleffekt in der einen Stromrichtung mit α und in der anderen Stromrichtung mit β bestimmt, so setzte man stets

$$\alpha = i^2A+iB$$
$$\beta = i^2A-iB.$$

Aus der Differenz dieser zwei gemessenen Werte ergibt sich dann in bekannter Weise der Peltiereffekt B.[2] Dabei ist also angenommen, daß bei der Stromumkehr dieses B gleich bleibt. Das ist ja von vornherein sehr wahrscheinlich, gleichwohl hielt ich es infolge der eingangs erwähnten Versuche für meine Pflicht, diese Gleichheit direkt durch das Experiment zu zeigen, bevor ich den absoluten Wert des Peltiereffektes bestimmte.

Ein neues thermoelektrisches Kalorimeter.

Als solches diente ein langes zylindrisches Gefäß aus dünnem Glase mit einem lichten Durchmesser von 23 *mm* (*n* in Fig. 1). Dasselbe ist bis zur Höhe x (etwa bis 15 *mm* vom Boden aufwärts) mit Petroleum gefüllt. In diesem Glaszylinder befindet sich zunächst ein Rührer, ähnlich wie im Beckmannschen Apparat zur Bestimmung der Gefrierpunktserniedrigung.

---

[1] E. Lecher, diese Sitzungsberichte, Bd., CXIV, Abt. IIa, p. 1659 (1905).

[2] Sämtliche Arten, den Peltiereffekt zu messen, von Peltier angefangen bis zu Jahn und Battelli, geschahen stets in dieser Weise.

An den flachen, zylindrischen Eisenring *S* sind zwei Metalldrähte befestigt, die am unteren Ende den eigentlichen Rührer tragen. Dieser, ein flacher horizontaler Ring aus Messing, liegt unten am Boden des Glasgefäßes auf. Etwas über *S* befinden sich die Pole *M* eines Elektromagneten, welcher durch einen nach je einer Sekunde erfolgenden kurzen Stromschluß den eigentlichen Rührer um etwa 3 *mm* stoßweise in die Höhe zieht.

Zur Temperaturmessung dienten zehn Stück Thermoelemente aus Eisen-Konstantan, Drahtdicke 0·5 *mm*. In Fig. 1 sind nur zwei Paare *t* gezeichnet. Die Montierung dieser Drähte geschieht in folgender Weise. Zunächst wird eine dünne Glasröhre *s* von außen mit zehn zur Achse parallelen Eisendrähten belegt. Die Befestigung geschieht mit Schellack.[1] Hierauf wird knapp über diese Röhre eine zweite dünne Glas-

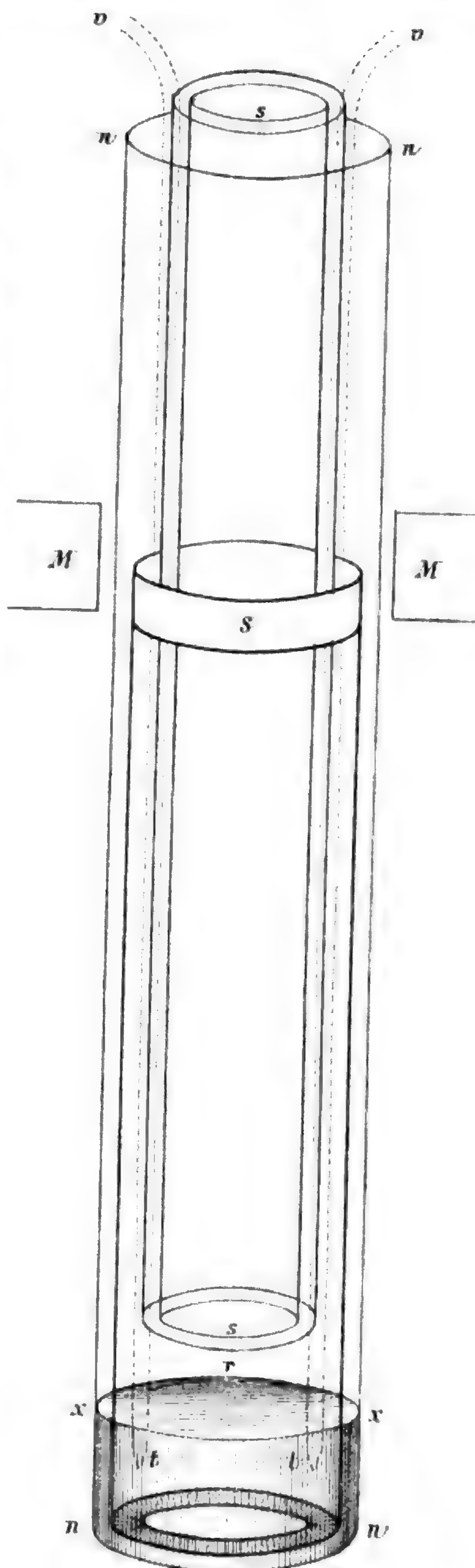


Fig. 1.

[1] Für höhere Temperaturen empfiehlt sich ein Gemisch von Mennige und Wasserglas.

röhre r geschoben und auch diese gleichmäßig und parallel zur Achse mit zehn Konstantandrähten bespannt. Außen wird das Ganze mit einem dünnen Seidenband umwickelt (in der Figur nicht gezeichnet).[1] Dann verlötet man unten je zwei entsprechende Drähte in t so, daß die zehn Lötstellen möglichst symmetrisch um die Achse der Röhre stehen. Ebenso wird für die neuen Lötstellen oben die Verbindung besorgt, so daß das Ganze zehn hintereinander geschaltete Thermoelementchen bildet. Diese Thermosäule kann bequem in das eigentliche Kalorimetergefäß u gebracht und mittels eines Korkes am oberen Ende dieses Gefäßes (nicht gezeichnet) in beliebiger Höhe befestigt werden.

Als Kalorimeterflüssigkeit verwendete ich Petroleum, welches so hoch stand, daß sich die Lötstellen t etwa 4 *mm* unter der Oberfläche befanden. Diese Lötstellen sind möglichst sparsam mit Silber verlötet und die Drähte sind, wie in der Figur gezeichnet, so auseinander gebogen, daß die Flüssigkeit dieselben von allen Seiten umspült. Der ringförmige Rührer berührt bei seiner Bewegung niemals diese Thermosäule; irgend ein kleines Korkteilchen in der Flüssigkeit zeigt aber, in welch energischer Weise die Lötstellen beim Rühren umflutet werden.

Der ganze mittlere Teil dieses Kalorimeters ist frei, so daß man die zu untersuchende Drahtkombination bequem durch das 8 *mm* weite Glasrohr s einführen kann.

Die oberen Lötstellen sind vollständig im Kitt vergraben und überdies noch mit Watte umwickelt.

Der untere Teil von u bis hinauf zum Magneten M hängt in einem weiteren, nicht gezeichneten Glasgefäß. Der ganze Apparat ist dann so in Watte vergraben, daß diese Watte nach jeder Richtung eine Dicke von etwa 30 *cm* hat. Die Bewegungen eines mit der Thermosäule verbundenen Galvanometers (von Du Bois-Rubens) sind dann sehr gering und regelmäßig.

Ich glaube, daß dieser Apparat für sehr viele elektrische Messungen, besonders für solche thermoelektrischer Natur dem

[1] Statt dieses Seidenbandes kann eventuell eine dritte Glasröhre genommen werden.

Eiskalorimeter vorzuziehen ist. Er ist empfindlicher, genauer und vor allem viel bequemer. Auf die Eichung und Behandlung dieses thermoelektrischen Kalorimeters komme ich noch zurück.

Experimentelle Trennung des Jouleeffektes vom Peltiereffekt.

Methode der experimentellen Anordnung. In Fig. 2 sind f und f_1 zwei Eisendrähte, k und k_1 zwei Konstantandrähte (Durchmesser etwa 2 *mm*). F und K sind zwei größere Stücke Eisen, beziehungsweise Konstantan, in der Fig. 2 in natürlicher Größe gezeichnet. Aus ebenderselben Figur erhellt

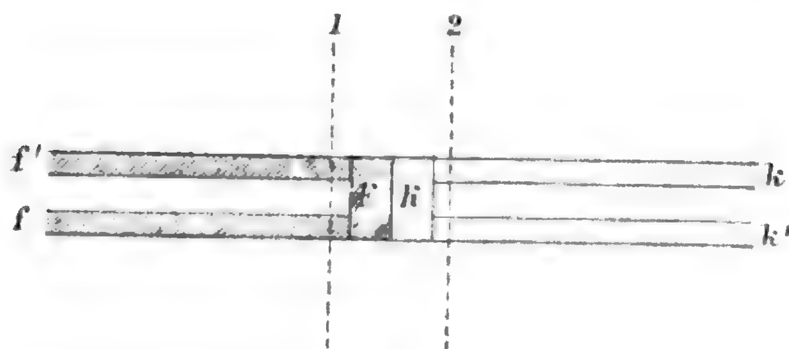


Fig. 2.

auch, wie diese Metalle miteinander verlötet sind. Der Übersichtlichkeit wegen ist diese Figur gestreckt gezeichnet. In Wirklichkeit sind die Eisendrähte um die punktiert gezeichnete Linie 1 als Achse um 90° nach vorwärts gebogen, ebenso die Konstantandrähte um die punktiert gezeichnete Linie 2. Die vier Drähte f, f_1, k, k_1 gehen also ganz knapp und parallel nebeneinander und sind gegenseitig durch schellackiertes Seidenband isoliert. Diese ganze stabförmige Vorrichtung kann leicht in das früher geschilderte Kalorimeter geschoben und oben durch einen Kork in passender Höhe fixiert werden; F und K sind genau in der Mitte des Petroleums.

Nun sind sechs zusammengehörige kalorimetrische Messungen notwendig, wobei wir stets denselben Strom während einer stets gleichen Zeitdauer wirken lassen.

1. Wir leiten den Strom von f über F nach f_1; gemessen wird die erzeugte Joule'sche Wärme J_f.

2. Wir leiten den Strom von k über K nach k_1. Die hier erzeugte Joule'sche Wärme werde mit J_k bestimmt.

3. Wir leiten den Strom von f über F und K nach k. Die erzeugte Wärme besteht aus der Joule'schen Wärme im Eisendraht f, z. B. j_f, und der in k, z. B. j_k, und der Peltierwärme Π_{FK}.

4. Der Strom fließt jetzt in umgekehrter Weise wie unter 3, die erzeugte Wärme ist nun $j_f + j_k + \Pi_{KF}$.

5. Wir leiten den Strom von f_1 über F und K nach k_1. Die gemessene Wärme ist hier $j_{f_1} + j_{k_1} + \Pi_{FK}$.

6. Der Strom fließt jetzt in umgekehrter Weise wie in 5; die erzeugte Wärme ist hier $j_{f_1} + j_{k_1} + \Pi_{KF}$.

Diese sechs Messungen entsprechen den sechs ersten Vertikalreihen der Tabellen auf p. 9. Nun ist infolge der Anordnung, da F und K gegen f und k einen verschwindenden Widerstand haben,

$$j_f + j_{f_1} = J_f$$

und

$$j_k + j_{k_1} = J_k.$$

Die Summierung der Versuchsresultate 3 und 5 ergibt einen bestimmten numerischen Wert N und wir haben dann

$$J_f + J_k + 2\Pi_{FK} = N.$$

Daraus berechnet sich Π_{KF} für diese Stromstärke.

Die Summierung der Versuchsresultate 4 und 6 ergeben einen anderen bestimmten numerischen Wert N_1 und wir haben hier die Beziehung

$$J_f + J_k + 2\Pi_{KF} = N_1$$

und daraus berechnet sich Π_{KF} für diese Stromstärke. So erhält man den Peltiereffekt für die Stromrichtung kf und ebenso für die entgegengesetzte fk und kann experimentell diese Größen voneinander sondern. Eine Ungleichheit müßte sich bei dieser Methode zeigen.

Indem man die verwendete Stromstärke ändert, bekommt man auch die Abhängigkeit des Peltiereffektes von der Stromstärke.

Eine Eichung des Kalorimeters ist für diese Versuche nicht nötig (über eine solche siehe p. 1518), da es sich ja hier nur um die Frage der Gleichheit von Π_{KF} und Π_{FK} handelt.

Ein ganz besonderes Augenmerk beansprucht die Anbringung der Korrektur.

Methode der Berechnung. Die eben beschriebenen sechs verschiedenen Stromschaltungen sind mittels einer kleinen Schaltvorrichtung an irgend einem vom Kalorimeter entfernten Platze bequem und rasch auszuführen. Die im Kalorimeter befindliche Thermosäule ist dauernd mit dem Galvanometer verbunden und letzteres ist selbstverständlich so aufgestellt, daß der den Peltiereffekt erzeugende Hauptstrom keine direkte Wirkung auf die Nadel ausübt. Etwa 10 Minuten nach Ingangsetzung des Rührwerkes ist die Stellung der Galvanometernadel konstant in dem Sinne, daß eine eventuelle Weiterverschiebung des Nullpunktes sehr langsam und regelmäßig geschieht. Um aber bei den verschiedenen Versuchen die Galvanometernadel halbwegs von gleicher Anfangslage aus zur Messung zu verwenden, ist in diesen Galvanometerkreis noch ein sehr schwacher Zweigstrom eines galvanischen Hilfselementes eingeschaltet, welches in ähnlicher Weise, wie ich dies an anderer Stelle[1] auseinandergesetzt habe, die Galvanometerstellung beliebig zu ändern gestattet.

Ist nun die Galvanometernadel auf diese Weise in die Mitte des Gesichtsfeldes gebracht und eine gewisse Konstanz eingetreten, so wird alle halben Minuten nach dem Schlage einer Signalglocke die Stellung des Galvanometers registriert, zunächst etwa 3 Minuten als Vorperiode. Dann erfolgt die wirksame Stromeinleitung durch weitere 3 Minuten und dann muß noch eine Nachperiode von etwa 5 Minuten beobachtet werden.

Das Kalorimeter besitzt einen sehr geringen Wasserwert und es führen eine Anzahl von wärmeleitenden Drähten in dasselbe; darum fallen die Korrekturen für die Wärmeverluste ziemlich groß aus und müssen mit möglichster Genauigkeit bestimmt werden. Ein bequemes experimentelles Hilfsmittel

[1] E. Lecher, diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, p. 1604 (1905).

zur Verkleinerung dieser Korrektur bietet da der Peltiereffekt selbst, der je nach der Stromrichtung abkühlt oder erwärmt. Man kann so noch vor Beginn des Versuches die Anfangstemperatur ziemlich rasch und beliebig einstellen, so daß der Anfangs- und Endwert des eigentlichen Versuches möglichst gleichweit vom Nullpunkt abstehen. Trotzdem wurden dann alle Beobachtungen eines einzelnen Versuches in ein kleines Diagramm eingezeichnet. Es wurden für die Vorperiode und Nachperiode das Mittel je zweier Galvanometerablesungen als Abszissen aufgetragen und als Ordinaten die entsprechende Galvanometeränderung, und zwar Anstieg (Wärmeaufnahme) als positiv, hingegen Abnahme (Wärmeabgabe) als negativ. Das ergibt, wenn der Versuch richtig ist, eine gerade Linie. In dieser Linie liegen alle regelmäßigen Störungen, welche den Galvanometernullpunkt langsam verschieben, d. h. nicht nur die Änderungen der Temperatur des Kalorimeters selbst, auch Temperaturänderungen in den oberen Lötstellen oder thermoelektrisch wirkende Temperaturänderungen im übrigen Schließungskreis, magnetische Störungen u. s. w. Aus diesem Diagramm kann man dann für die einzelnen arithmetischen Mittel des Hauptversuches die Wärmekorrektionen finden.[1]

Eine gründliche Einhaltung dieser Vorsichtsmaßregel ist unerläßlich. Denn es vergehen etwa 2 Minuten nach Beendigung des Hauptversuches (nach Abstellung des wirkenden Stromes), bevor die regelmäßige Nachperiode beginnt. Das kommt daher, daß die durch den Jouleeffekt erwärmten Drähte *f* und *k* ihre Wärme nur langsam abgeben.[2]

Eine weitere Korrektur ist nötig, wenn man mit verschiedenen Stromstärken arbeitet. Dann muß wegen der Verschiedenheit der Größenordnungen der kalorischen Wirkungen die Empfindlichkeit des Galvanometers durch Vorschaltwiderstände geändert werden, wenn man die Ausschläge in den

---

[1] Diese Art der Korrektion schließt sich in der Hauptsache der von L. Pfaundler beschriebenen an. Siehe Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 9. Aufl. (1898), II, 2, p. 332.

[2] Eine Vernachlässigung dieser Vorsichtsmaßregeln war die Ursache der eingangs erwähnten merkwürdigen Resultate der Vorversuche.

experimentell zulässigen Grenzen erhalten will. Um solche verschiedene Ablesungen miteinander vergleichen zu können, war Vorsorge für eine Schaltung getroffen, welche das mit den entsprechenden Widerständen belastete Galvanometer nach Abschaltung der Thermosäule direkt an zwei Punkte des Hauptstromes (mit kleiner Potentialdifferenz) als Zweigleitung anschalten ließ. Durch Einführung dieser Korrektur wurde es möglich, stets mit ein und demselben Galvanometer zu arbeiten und den in der siebenten Vertikalreihe der folgenden Tabellen angegebenen Reduktionsfaktor zu bestimmen. Alle elektrischen Messungen basieren dann auf der Angabe des einen Präzisionsampèremeters im Hauptstrom.

Resultate. Die folgende erste Tabelle bezieht sich auf eine Stromstärke von zirka 0·5 Ampère.

Die ersten sechs Vertikalreihen geben die Wärmemengen entsprechend den sechs verschiedenen, auf p. 1510 aufgestellten Stromschaltungen. Die Maßeinheit ist eine willkürliche. Unter dem Schlagworte »Reduktionsfaktor« befindet sich der Faktor, mit welchem die in gleicher Horizontalreihe stehenden Kalorien zu multiplizieren sind, um trotz wechselnder Empfindlichkeit des Galvanometers direkt vergleichbare Werte zu erhalten.

Die zwei letzten Vertikalreihen ergeben dann den reduzierten Peltiereffekt für die zwei Stromrichtungen; infolge der Schwierigkeit der Messungen ist die Übereinstimmung der einzelnen Werte keine besonders große. Dieselben resultieren ja aus sechs verschiedenen kalorimetrischen Messungen.

Stromverlauf						Reduktionsfaktor	Π_{FK}	Π_{KF}
ff_1	kk_1	$fFKk$	$kKFf$	$f_1F_1K_1k_1$	$k_1K_1F_1f_1$			
0·50	3·00	13·00	-8·80	11·90	-9·05	1·13	+24·18	-24·12
0·60	2·90	12·40	-9·20	11·85	-8·60	1·11	+23·03	-23·64
0·67	2·63	12·55	-9·00	12·40	-8·80	1·10	+23·81	-23·21
0·61	2·66	12·55	-8·90	11·60	-8·60	1·10	+22·97	-22·85
0·55	2·70	12·60	-8·80	11·90	-8·50	1·10	+23·37	-22·60
0·60	2·60	12·50	-8·80	12·00	-8·70	1·10	+23·43	-22·77

Das Mittel für die positive Stromrichtung ist hier 23·46 und für die negative Stromrichtung 23·36, eine überraschend gute Übereinstimmung, welche zeigt, daß der Peltiereffekt mit Umkehrung der Stromrichtung sich genau umkehrt.

Noch besser stimmen die folgenden Messungen, welche sich auf eine Stromstärke von 1 Ampère beziehen.

Stromverlauf						Reduktionsfaktor	Π_{FK}	Π_{KF}
ff_1	kk_1	$fFKk$	$kKFf$	$f_1F_1K_1k_1$	$k_1K_1F_1f_1$			
2·06	6·40	15·70	−6·85	15·73	− 7·30	1·00	+22·97	−22·61
2·25	7·15	16·32	−7·43	15·70	− 7 19	1·00	+22·62	−24·02
2·20	6·45	16·30	−7·26	15·55	− 6·30	1·00	+23·20	−22·21
1·65	7·15	15·65	−7·12	15·30	− 7·08	1·01	+22·37	−23·23
1·65	6·38	15·81	−7·00	15·37	− 6·41	1·01	+23·39	−21·65
2·3	9·6	23·63	−12·7	22·85	−11·2	0·68	+23·51	−24·34

Hier sind die beiden in Betracht kommenden Mittelwerte 23·01 vollständig gleich. Bei den großen Abweichungen der Einzelwerte ist diese vollständige Übereinstimmung natürlich nur eine zufällige.

Dies erhellt aus folgender weiterer Überlegung. In der ersten Versuchsreihe wurde der Reduktionsfaktor durch eine Abzweigung von 0·5 Ampère gewonnen, in der zweiten von 1 Ampère. Wir erhalten somit für 0·5 Ampère als Mittelwert des Peltiereffektes 23·41 und für 1 Ampère statt 2.23·41 als Mittelwert 2.23·01. Die Abhängigkeit des Peltiereffektes von der Stromstärke stimmt somit nur auf 1·7%.

Bei Versuchen mit kleinen Stromstärken wurde der Ausschlag schon zu schwach, bei großen Stromstärken aber erfolgte eine zu stürmische Erwärmung der kalorimetrischen Flüssigkeit, wodurch die Resultate zu ungenau werden.

Anwendung einer anderen Methode. Um daher die Proportionalität des Peltiereffektes mit der Stromstärke genau prüfen zu können, bediente ich mich noch einer andern Versuchsordnung.

Ich machte eine Thermosäule (Fig. 3) von Eisen (punktiert gezeichnet) und Konstantan (volle Linie) in der in der Fig. 3 angedeuteten Weise. An den ungeraden Lötstellen 1, 3, 5 waren die 2 *mm* dicken Drähte möglichst reinlich mit wenig Silberlot aneinandergelötet. An den andern Lötstellen 2, 4, 6 war jeder der beiden Drähte zunächst zu einer flachen engen Spirale aufgerollt und es wurden diese Spiraldrähte mit sehr viel Silberlot aneinandergelötet (in Fig. 3 schematisch angedeutet). Beim Durchleiten eines Stromes durch dieses System war also in den Kontakten 2, 4 u. s. w. die Stromdichte gering, die Masse hingegen sehr groß. Sendete man einen Strom durch diese Säule, die aus 10 Eisen- und 10 Konstantandrähten bestand (in der Figur sind nur je drei gezeichnet), so fand eine Temperaturänderung nur in 1, 3, 5 statt, die Temperaturänderung in 2, 4, 6 war, wie ein Vorversuch zeigte, ganz zu vernachlässigen. Ein einfacher Kommutator gestattete entweder i und i_1, mit einer Akkumulatorenbatterie oder g und g_1 mit dem Galvanometer zu verbinden. Letztere Leitung erhielt durch Abzweigung eines kleinen Hilfsstromes von einer galvanischen Hilfsbatterie die Stellung des Galvanometers auf dem Nullpunkt, da man durch Änderung dieses Hilfsstromes alle unerwünschten und unvermeidlichen Thermoströme der Leitung kompensieren konnte. Dieser Hilfsstrom wurde zunächst so dosiert, daß eine Umwechslung der Leitung ii_1 gegen gg_1 bei nicht eingeschalteter Akkumulatorenbatterie ohne Einfluß auf die Galvanometernadel blieb. Dann wurde durch ii_1 während einer halben Minute ein Strom gesendet und nach Umlegung

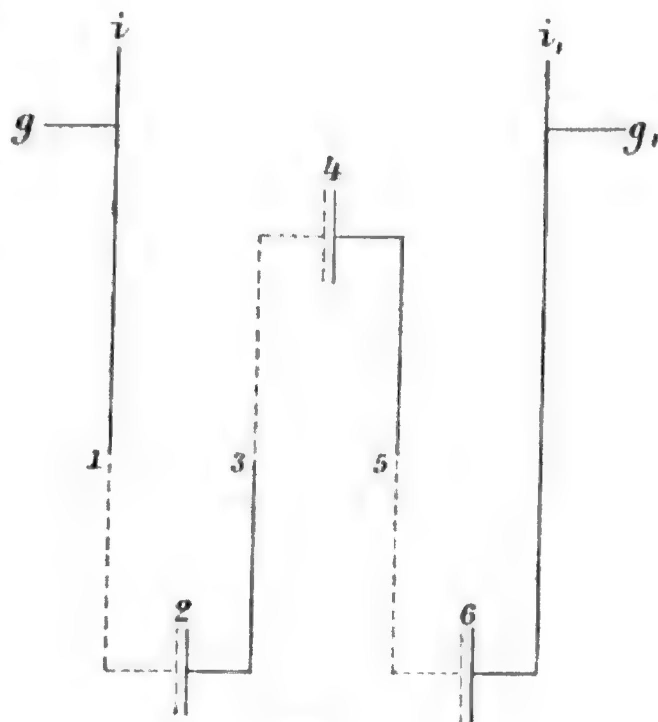


Fig. 3.

auf gg_1 der ballistische Ausschlag des Galvanometers gemessen. Diese Umschaltung geschah ganz analog wie in meiner Arbeit über den Thomsoneffekt.[1] Auch hier will ich von vielen Messungen, die ich gemacht, des Beispiels wegen nur eine mitteilen.

Nach Einwirkung eines Stromes von 1 Ampère durch eine halbe Minute erhielt ich nach dem Umlegen als Galvanometerausschlag

—13·8, 13·9, 13·8, 13·9, 14·0, 14·0, Mittel 13·90

und für die entgegengesetzte Stromrichtung

+19·0, 19·3, 19·3, 19·1, 19·2, 19·0, Mittel 19·15.

Das logarithmische Dekrement des Galvanometers war im Mittel 13·6. Um die Empfindlichkeit des Galvanometers zu bestimmen, wurde ein Zweigstrom des Hauptstromes von 1 Ampère in das Galvanometer gesendet und man erhielt dann im Mittel 14·62 als dauernden Ausschlag.

Dann wurde das Galvanometer empfindlicher gemacht und dieselbe Bestimmung mit einem Strom von 0·1 Ampère ergab in der einen Richtung

—14·9, 15·0, 15·0, 14·8, 14·9, 14·8, Mittel 14·9

und für die entgegengesetzte Stromrichtung

+15·8, 16·0, 15·9, 15·9, 16·0, 15·8, Mittel 15·9.

Das logarithmische Dekrement des Galvanometers war jetzt 1·59 und ein in gleicher Weise wie früher (mit dem gleichen Shunt) abgezweigter Teil des Hauptstromes von 0·1 Ampère ergab im Mittel einen dauernden Galvanometerausschlag von 14·49. Die erste Versuchsreihe mit 1 Ampère ergibt

—13·9 für den Jouleeffekt weniger dem Peltiereffekt

und

+19·15 für den Jouleeffekt mehr dem Peltiereffekt.

[1] E. Lecher, diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, p. 1604 (1905).

Dem doppelten Peltiereffekt entspricht also ein ballistischer Ausschlag von 33·05.

Die zweite Versuchsreihe mit 0·1 Ampère ergibt

—14·90 für Jouleeffekt weniger dem Peltiereffekt

und in entgegengesetzter Richtung

+15·90 für Jouleeffekt mehr dem Peltiereffekt.

Es entspricht also hier dem doppelten Peltiereffekt ein ballistischer Ausschlag von 30·80. Doch sind noch die Korrektionen wegen der Änderung der Empfindlichkeit und Dämpfung des Galvanometers anzubringen. Da bei der Empfindlichkeitsprobe des Galvanometers im zweiten Falle ein zehnmal schwächerer Strom statt 14·62 nur 14·49 gab, so war das Galvanometer im letzteren Falle 9·92mal so empfindlich. Dies liefert dann mit Berücksichtigung der logarithmischen Dekremente für den Peltiereffekt

bei 1 Ampère.....33·05.1·154.9·92 = 378·4

und für den Peltiereffekt

bei 0·1 Ampère.....30·80.1·234 = 38·0.

Diese Werte sind in willkürlichen Einheiten gegeben und es ist der erste Wert bis auf nicht 1% gleich dem zehnfachen zweiten Werte.

Es ist also der Peltiereffekt auch der Stromstärke genau proportional.

Die Berechnung des Jouleeffektes aus diesen Versuchen ist unmöglich, da derselbe bei der Stromstärke von 0·1 Ampère zu klein ist, als daß er genau bestimmt werden könnte.[1]

---

[1] Die in Fig. 3 geschilderte Anordnung wurde noch bei sehr empfindlichem Galvanometer mit ganz kleinen Stromstärken beschickt. Man erhielt da mit 0·02 Ampère als Ausschlag für den Peltiereffekt etwa 4 *cm* auf der Ablesungsskala. Weil hier bei 0·02 Ampère der Jouleeffekt schon unmerkbar war, konnte man auch mit dieser Anordnung die Gleichheit der Erwärmung und Abkühlung durch den Peltiereffekt direkt zeigen, denn es kam infolge der eigentümlichen Ausgestaltung der Lötstellen nur die Erwärmung oder nur die Abkühlung zur Wirkung. Diese Methode ist wegen der notwendigen großen Empfindlichkeit des

Absoluter Wert des Peltiereffektes.

Die bisherigen Zahlen lieferten nur relative, von Fall zu Fall miteinander vergleichbare Werte. Da aber der Peltiereffekt nach beiden Richtungen gleich und der Stromstärke proportional, so ist der absolute Wert durch Anwendung der bisherigen Methoden leicht zu erhalten.

In das eingangs geschilderte thermoelektrische Kalorimeter wurde eine einzige Lötstelle von Eisen-Konstantan (Dicke der Drähte 2 *mm*) gebracht. Um eine Eichung auf absoluten Wert vornehmen zu können, führen zwei weitere Eisendrähte (2 *mm* Durchmesser) ins Petroleum, deren Enden durch einen kurzen, etwa 3 bis 5 *mm* langen, dünnen Konstantandraht miteinander verbunden sind. Überdies ist eine Schaltung möglich, welche den Widerstand dieses dünnen Drahtes im Kalorimeter bestimmen läßt (Thomson'sche Schaltung).

Es wurden nun folgende Versuchsreihen ausgeführt:

1. Ein Strom von 0·1 Ampère wird während 3 Minuten durch den dünnen Konstantandraht geleitet und die erzeugte Joulewärme im Kalorimeter durch den Galvanometeranstieg gemessen. Die Anbringung der Korrektion wegen Vor- und Nachperiode geschieht in der p. 1512 geschilderten Weise. Das Endresultat sei q.

2. Es erfolgt eine Messung des Widerstandes dieses dünnen Drahtes, der mit $w\ \Omega$ bestimmt wird.

Ist auf diese Weise die ganze Vorrichtung auf absolute Werte geeicht, so läßt man dann einen Strom von 1 Ampère durch die eigentlichen Peltierlötstellen gehen.

3. Man erhält so in der einen Stromrichtung die Joulewärme mehr dem Peltiereffekt, und

---

Galvanometers nicht sehr genau. Die Übereinstimmung läßt sich nur bis auf etwa 5% bringen.

Geht durch die Anordnung Fig. 3 ein sehr schwacher Wechselstrom, dessen Joulewirkung unmerkbar klein ist, so erfolgt selbst nach einer Einwirkung dieses Stromes durch längere Zeit kein Ausschlag, weil Abkühlung und Erwärmung durch den Peltiereffekt sich aufheben. Doch ist auch die Genauigkeit dieser Resultate viel kleiner als jener, die auf p. 1513 angegeben sind.

4. nach Stromumkehr die Joulewärme weniger dem Peltiereffekt.

Diese vier Bestimmungen wurden nun zu wiederholten Malen und in verschiedener Reihenfolge gemacht und ergaben im Mittel:

1. $10 \cdot 48 \pm 0 \cdot 3$
2. $1 \cdot 39\ \Omega \pm 0 \cdot 0005$
3. $15 \cdot 3 \pm 0 \cdot 4$
4. $5 \cdot 9 \pm 0 \cdot 3$.

Sämtliche kalorimetrische Ausschläge gelten für eine Wirkungszeit von 3 Minuten. Daraus berechnet sich der Peltiereffekt für 1 Sekunde und 1 Ampère in folgender Weise.

Aus Versuchsreihe 3 bestimmt man die erzeugten Grammkalorien mit

$$0 \cdot 24 i^2 w t = 0 \cdot 24 . 10^{-2} . 1 \cdot 39 . 180 = 3 \cdot 336 . 10^{-3} . 180.$$

Diese Wärme erzeugt nach Versuchsreihe 1 einen Ausschlag $10 \cdot 48$ im Galvanometer. Somit ist die Wärme welche 1 *cm* Ausschlag entspricht, gegeben mit $\frac{3 \cdot 336 . 10^{-3} . 180}{10 \cdot 48}$. Nach den Versuchsreihen 3 und 4 ergibt die Peltierwärme durch die Einwirkung eines Stromes von 1 Ampère während 180 Sekunden einen Ausschlag $\frac{15 \cdot 3 + 5 \cdot 9}{2}$. Der Ausschlag für die Einwirkung von nur 1 Sekunde wäre dann $\frac{10 \cdot 6}{180}$. Diese Zahl, mit obigem Reduktionsfaktor multipliziert, liefert $3 \cdot 37 . 10^{-3}$ Grammkalorien als Peltiereffekt für 1 Coulomb.

Als Gesamtergebnis dieser experimentellen Studie ergibt sich also:

1. Es wurde für die Messung von Peltierwärmen und ähnlichen kleinen Effekten ein neues thermoelektrisches Kalorimeter gebaut, das ein ebenso genaues wie bequemes Arbeiten gestattet.

2. Es wurde die Annahme, daß der Peltiereffekt bei Umkehr des erzeugenden Stromes sein Zeichen wechsle, ohne daß eine Änderung seines numerischen Betrages eintrete, zum ersten Male geprüft, und zwar für die Kombination Eisen-Konstantan.

3. Eine absolute Messung des Peltiereffektes dieser Metallkombination lieferte bei 20° C. den Wert

$$3 \cdot 4 . 10^{-3} \text{ Grammkalorien pro Coulomb.}$$

Trotz der aufgewendeten Sorgfalt dürfte dieser Wert nur auf etwa 4 Prozent genau sein, da zu viele Einzelmessungen ganz kleiner Wärmeeffekte in das Schlußresultat eingehen. Analoge Fehlergrenzen werden derzeit wohl allen Peltiermessungen anhaften.

Auf theoretische Weise schätzte ich schon früher[1] letztere Größe mit ungefähr $7 \cdot 10^{-3}$, wobei ich aber die Bemerkung hinzufügte, daß diese Zahl aller Wahrscheinlichkeit nach zu groß sein dürfte.

---

[1] E. Lecher, diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa, p. 188 (1906).

Über das Wesen metallischer und elektrolytischer Leitung

von

Dr. **Rudolf v. Hasslinger.**

Aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Deutschen Universität in Prag.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1907.)

Bis vor kurzer Zeit war man bestrebt, eine strenge Klassifikation in Metalle und Nichtmetalle durchzuführen. Bei dieser Klassifikation handelt es sich zunächst nur um Elemente, jedoch kann man mit einer gewissen Berechtigung auch von Verbindungen mit metallischen und nichtmetallischen Eigenschaften reden. Denn wenn auch den meisten Verbindungen nichtmetallische Eigenschaften zukommen, so gibt es doch auch zahlreiche mit ausgesprochen metallischen Eigenschaften; so sei hier nur an Silbersulfid, Eisenoxyduloxyd etc. erinnert. Freilich sind die metallischen Eigenschaften, die man an Verbindungen konstatieren kann, mehr physikalischer Natur. So ist es insbesondere das Aussehen, also eine optische Eigenschaft, welche in vielen Fällen bereits eine Unterscheidung zwischen Metallen und Nichtmetallen ermöglicht. Weiter bildet das Verhalten der Körper dem elektrischen Strome gegenüber ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal dieser beiden Körperklassen. Speziell diese beiden Kriterien sind es, die nicht nur auf Elemente Anwendung finden können, sondern die auch eine Unterscheidung von Verbindungen in solche mit mehr metallischen und in solche mit mehr nichtmetallischen Eigenschaften ermöglichen.

Bekanntlich unterscheidet man zwischen metallischen oder Leitern erster Klasse und elektrolytischen oder Leitern zweiter Klasse. Als wichtigster Unterschied zwischen diesen beiden Arten der Elektrizitätsleitung gilt, daß in den Leitern erster

Klasse bei Stromdurchgang kein nachweisbarer Transport von Materie stattfindet, hingegen in Leitern zweiter Klasse ein Transport von Elektrizität immer auch mit einem Transporte von Masse verbunden sein muß. Dieser Transport von Materie findet in der Weise statt, daß an jeder Elektrode ein anderer Körper ausgeschieden wird. Die Mengen der an den Elektroden ausgeschiedenen Körper hängen bekanntlich in allen bisher beobachteten Fällen nur von zwei Konstanten ab, nämlich von der Elektrizitätsmenge und von dem elektrochemischen Äquivalente des betreffenden Körpers. Eine Ausnahme dieses Gesetzes wurde bisher experimentell noch nicht sichergestellt, obwohl nach einer solchen schon vielfach gesucht worden ist. Alle scheinbaren Abweichungen ließen sich auf andere Ursachen zurückführen. Auf diese sowie auf einige andere damit im unmittelbaren Zusammenhange stehende Eigentümlichkeiten der elektrolytischen Leitung haben wir später noch zurückzukommen.

Versucht man aber auf Grund der bekannten Unterscheidungsmerkmale eine strenge Einteilung der Stoffe in Metalle und Nichtmetalle zu treffen, so wird man bald auf Schwierigkeiten stoßen, indem die Eigenschaften einiger Körper deren Einreihung als Metall, beziehungsweise Nichtmetall zweifelhaft erscheinen lassen. Es sei in dieser Richtung, um ein Beispiel zu geben, nur an Antimon, Arsen und Tellur erinnert. Die genannten Elemente geben flüchtige Wasserstoffverbindungen, trotzdem sie, wenigstens in einer Modifikation, zweifellos metallisches Aussehen besitzen und verhältnismäßig gute Leiter erster Klasse des elektrischen Stromes sind. Andrerseits ist doch das Natrium, ein Element, dessen metallische Natur zweifellos feststeht, in flüssigem Ammoniak löslich, ohne dabei eine Veränderung zu erfahren.[1]

Während weiters bei allen Metallen die Leitfähigkeit mit der Temperatur abnimmt, zeigen die Nichtmetalle, sofern dieselben überhaupt leiten, in denselben Temperaturintervallen im allgemeinen eine Zunahme der Leitfähigkeit mit der Temperatur. Aber auch hier wäre eine besonders auffallende Ausnahme,

[1] Ruff und Geisel, Berl. Ber., *39*, 821 (1906).

nämlich die Kohle, zu erwähnen. Während bei derselben alle Anzeichen eine zweifellos metallische Leitung ergeben, ist der Temperaturkoeffizient der Kohle ein negativer. Bei dieser Unsicherheit, zu welcher Klasse einzelne Körper zu zählen sind, liegt die Frage nahe, ob denn der metallische Zustand etwas den Körpern, welche ihn besitzen, Inhärentes, etwas Unabänderliches sei oder ob Fälle bekannt sind, daß ein Nichtmetall in ein Metall übergeht oder umgekehrt. Besonders interessante Betrachtungen in dieser Richtung wurden von Martin[1] veröffentlicht. Folgt man diesen und erwägt man die Frage von einem allgemeinen Standpunkte aus, so kann man zunächst an dem periodischen System der Elemente bemerken, daß in den einzelnen Gruppen zweifellos mit dem Wachstum des Atomgewichtes auch ein Zuwachs der metallischen Eigenschaften der Elemente verbunden erscheint. Es erweckt dies geradezu den Anschein, als ob es sich um einen mit dem Anwachsen des Atomgewichtes erfolgenden stufenweisen Übergang von Nichtmetallen zu Metallen handeln würde. Diese Beziehungen erscheinen besonders ausgeprägt in den Gruppen: C, Si, Ge, Sn, Pb, dann N, P, As, Sb, dann O, S, Se, Te; aber auch in den übrigen Gruppen gilt dasselbe.

Nun ist es aber eine bekannte Tatsache, daß in ähnlicher Weise, wie sich die Eigenschaften von im periodischen System benachbarten Elementen mit steigendem Atomgewicht ändern, auch die Eigenschaften bei ein und demselben Element durch Temperaturerhöhung beeinflußt werden. So wird beispielsweise die Farbe der Elemente O, S, Se, Te mit steigendem Atomgewicht dunkler und nähern sich die beiden letzteren wenigstens unter gewissen Umständen bereits sehr den Metallen. Greift man eines dieser Elemente heraus, z. B. den Schwefel, und untersucht sein Verhalten bei Temperaturerhöhung, so findet man, daß, während der Schwefel bei gewöhnlicher Temperatur hellgelb ist, beim Erhitzen seine Farbe immer dunkler wird, um beim Siedepunkt bereits nahezu schwarz zu erscheinen. Ähnliche Beispiele ließen sich noch mehrere anführen; so etwa noch das Verhalten des Kohlenstoffes. Diejenige Modifikation

[1] Chem. News, *86*, 295 (1902); *87*, 162 (1903).

des Kohlenstoffes, welche zweifellos die meisten metallischen Eigenschaften aufweist, nämlich der Graphit, bildet sich aus den anderen Modifikationen durch genügend hohes Erhitzen; ein Verfahren, welches ja auch technische Anwendung gefunden hat (Achesongraphit). In gleicher Weise wie diese Eigenschaften ändert sich auch die Wertigkeit der einzelnen Elemente sowohl im periodischen System mit steigendem Atomgewicht wie bei den einzelnen Elementen mit steigender Temperatur. Um aus den vielen Beispielen, die sich für dieses Verhalten geben ließen, nur eines herauszugreifen, sei an das Eisen erinnert. Während bei gewöhnlicher Temperatur Eisen in seiner dreiwertigen Form die beständigsten Verbindungen bildet und aus der zweiwertigen Form leicht in die dreiwertige übergeht, z. B. Oxydulverbindungen in Oxydverbindungen, so geht umgekehrt bei hohen Temperaturen z. B. das Oxyd des dreiwertigen Eisens leicht in das Oxydul über. Übrigens bedarf es für dieses Verhalten gar nicht erst der Anführung von Beispielen, da ja die Beständigkeit einer Verbindung, beziehungsweise die Möglichkeit zu deren Entstehung für bestimmte Temperaturen sich aus der für die meisten Fälle bekannten Bildungswärme der betreffenden Verbindungen ergibt.

Ist es aber einerseits richtig, daß ein Zuwachs des Atomgewichtes in einer Reihe des periodischen Systems einen Zuwachs der metallischen Eigenschaften der betreffenden, in dieser Reihe aufeinanderfolgenden Elemente bedingt und daß andernteils bei demselben Element die metallischen Eigenschaften mit der Temperatur zunehmen, so ist es, wie schon von Martin ausgesprochen wurde, möglich anzunehmen, daß alle Elemente einer Reihe des periodischen Systems dadurch auf einen gleichen Grad metallischer Eigenschaften gebracht werden können, daß man ihre Temperaturen entsprechend verschieden wählt. Natürlich ist dabei keine Rücksicht darauf genommen, ob diese Elemente unter den gegebenen äußeren Verhältnissen überhaupt noch als feste Körper existieren können. Ist es aber zutreffend, daß man die metallischen Eigenschaften eines Elementes durch Temperatursteigerung in der angegebenen Weise erhöhen kann, dann ist ein Metall nichts anderes als ein Element, dessen Temperatur zu hoch ist, um

die Eigenschaften eines Nichtmetalles zu besitzen, und umgekehrt ein Nichtmetall eine Substanz, deren Temperatur zu niedrig ist, um metallische Eigenschaften zu haben. Nach dieser Auffassung, welche, wie erwähnt, bereits von Martin' ausgesprochen wurde, wären also der metallische und der nichtmetallische Zustand nichts weiter als Zustandsänderungen, die die Elemente durchlaufen, wenn die Temperatur vom absoluten Nullpunkt an steigt. Für die Richtigkeit dieser Vermutung spricht besonders die vorhin erwähnte Beständigkeit der metallischen Modifikation bei hohen Temperaturen derjenigen Elemente, bei welchen solche Modifikationen überhaupt vorkommen. Natürlich kann die eben ausgesprochene Ansicht nichts anderes als eine bloße Hypothese sein.

Nichtsdestoweniger glaube ich behaupten zu können, daß dieselbe mit keiner bekannten Tatsache in Widerspruch steht. Einige der Folgerungen, welche sich aus dieser Hypothese ergeben, mögen hier noch kurz Erwähnung finden. So müßten z. B. alle Substanzen, die bei gewöhnlicher Temperatur Metalle sind, in der Nähe des absoluten Nullpunktes oder bei demselben zu Nichtmetallen und damit wahrscheinlich zu Nichtleitern des elektrischen Stromes werden. Bei Erwärmung vom absoluten Nullpunkt aus müßten dann ihre metallischen Eigenschaften und damit wohl auch ihre Leitfähigkeit zunehmen. Über das weitere Verhalten der Leitfähigkeit gibt diese Hypothese noch keinen Aufschluß. Später soll aber versucht werden, für die bei weiterer Temperaturzunahme bei den Metallen bekanntlich tatsächlich erfolgende Abnahme der Leitfähigkeit eine Erklärung zu geben. Was aber über das Verhalten der Metalle bei tiefen Temperaturen experimentell festgestellt ist, entspricht der vorher erwähnten Hypothese. So haben Callendar und Dewar,[1] ferner Lord Kelvin[2] gezeigt, daß die anfangs durch Temperaturerniedrigung zunehmende Leitfähigkeit der Metalle ein Maximum erreiche, von wo aus dieselbe bei weiterer Temperaturabnahme vermindert wird. Beim absoluten Nullpunkt wird die Leitfähigkeit somit wahrscheinlich den Wert Null annehmen.

[1] Philos. Mag., 1899, 217.
[2] Philos. Mag., 1902, Nach.

Ein besonders interessantes Beispiel für die Existenz eines solchen Maximums der Leitfähigkeit bietet der Kohlenstoff. Wie erwähnt nimmt die Leitfähigkeit der Kohle, obzwar ihrer Art nach zweifellos metallisch, mit steigender Temperatur zu und bildet so eine Ausnahme gegenüber den Metallen. Dieses Verhalten wurde aber bisher nur innerhalb verhältnismäßig enger Temperaturgrenzen untersucht. Nach der vorhin erwähnten Hypothese wäre jedoch anzunehmen, daß die Kohle ein Körper ist, welcher zwar metallische Leitfähigkeit besitzt, bei gewöhnlicher Temperatur aber nicht wie die anderen Metalle das Leitfähigkeitsmaximum bereits überschritten hat, sondern daß das Leitfähigkeitsmaximum dieses Körpers sich bei einer Temperatur befindet, welche über den Temperaturen, bei denen bisher das Verhalten der Leitfähigkeit der Kohle geprüft wurde, liegt.

Dies ist um so eher wahrscheinlich, als ja die Kohle das erste Glied einer Reihe des periodischen Systems ist, in welcher die nächstfolgenden Glieder schon deutlich ausgeprägte metallische Eigenschaften bei gewöhnlicher Temperatur zeigen, und man nach den früheren Auseinandersetzungen somit zu der Annahme berechtigt ist, daß Kohle erst bei hohen Temperaturen sich ganz wie ein Metall verhalten werde. Um über das Verhalten der Kohle in dieser Richtung Aufschluß zu erhalten, habe ich den Widerstand eines Kohlefadens bei verschiedenen Temperaturen untersucht. Die Versuchsanordnung war folgende: In einem Stromkreise war ein Ampèremeter und eine Kohlefadenglühlampe hintereinander geschaltet. Die Erwärmung des Kohlefadens erfolgte durch den gleichzeitig zur Messung verwendeten Strom. Bei wechselnder Stromstärke und somit also auch bei verschiedener Temperatur des Kohlefadens wurde die an den Enden des Kohlefadens herrschende Spannung gemessen und so aus Stromstärke und Spannung der Widerstand des Fadens berechnet. Die aus den so gewonnenen Werten für Stromstärke und Spannung erhaltenen Widerstandsgrößen sind in der folgenden Tabelle enthalten und zeigen, daß bei der Kohle tatsächlich, wie nach der eben entwickelten Hypothese vorauszusetzen war, ein Maximum der Leitfähigkeit existiert. Die hier angegebenen Werte sind sowohl bei steigender

wie bei fallender Temperatur beobachtet worden; eine bleibende Änderung des Widerstandes des Kohlefadens, etwa durch Zerstäubung, erscheint somit ausgeschlossen.

Widerstand eines Kohlefadens in Ohm.

Temperatur	Ohm
Dunkel rotglühend	188
Rotglühend	154
Hell rotglühend	141
Gelbglühend	133
Fast weißglühend	129
Weißglühend	129
Sehr hell weißglühend	149

Es wurde bereits früher erwähnt, daß man gegenwärtig gewohnt ist, einen scharfen Unterschied zwischen metallischen und elektrolytischen Leitern zu machen. Man nimmt an, daß alle diejenigen Substanzen, welche den Strom leiten, ohne daß mit dem Strome ein Transport von Materie verbunden wäre, metallisch leiten, wohingegen als elektrolytische Leiter solche Körper bezeichnet werden, bei denen mit dem Stromdurchgang auch ein Transport von Materie stattfindet.

Die Unterscheidung zwischen metallischen und elektrolytischen Leitern ist nun aber keinesfalls so einfach, wie es nach dem Vorhergehenden scheinen könnte. Es ist nämlich das Auftreten von Zersetzungsprodukten keinesfalls immer leicht experimentell konstatierbar, da bisweilen die eventuell entstehenden Zersetzungsprodukte so schnell wieder verschwinden, daß an ein Fassen derselben gar nicht zu denken ist. Ein Beispiel für einen solchen Fall, wo der sogenannte Reststrom die eigentliche Elektrolyse fast vollständig verdeckt, bieten die in den Nernst-Lampen als Glühkörper verwendeten Stäbchen aus Erdalkalioxyden. Obzwar dieselben, wie von Nernst[1] und Bose[2] nachgewiesen, zweifellos elektrolytisch leiten, können Nernst-Lampen viele Hunderte von Stunden mit

[1] Zeitschr. für Elektrochem., *6*, 41 (1899).
[2] Drude's Ann. der Phys., *9*, 164 (1902).

Gleichstrom brennen, ohne daß eine sichtbare Elektrolyse des Stäbchens in Erscheinung treten würde. Das an der Kathode ausgeschiedene Metall verbrennt bekanntlich sofort mit dem in der Umgebung befindlichen Sauerstoff wieder zu Metalloxyd, während an der Anode die entsprechende Menge Sauerstoff frei wird. Der ganze Effekt des Stromdurchganges durch diesen Elektrolyten ist somit, wenigstens bei der zur Anwendung kommenden hohen Temperatur, nichts anderes als ein Transport von Sauerstoff von der Anode zur Kathode. Zu dem Auftreten dieses Reststromes in solchem Ausmaße, daß die eigentliche Elektrolyse durch denselben vollständig verdeckt wird, ist, wie Bose gezeigt hat, selbst ein ganz minimaler Sauerstoffdruck hinreichend. Versucht man es aber, chemisch nicht mehr nachweisbare Mengen von Zersetzungsprodukten dadurch nachweisen zu wollen, daß man eine nach Stromdurchgang etwa auftretende Polarisation sucht, so stellen sich diesem Unternehmen mitunter auch bedeutende Schwierigkeiten entgegen. Diese sind dadurch bedingt, daß bei Stromdurchgang immer Peltiereffekte und damit Temperaturdifferenzen auftreten, die sich bei festen Körpern genügend lange erhalten können, um einen Polarisationsstrom vorzutäuschen, wo eine wirkliche Polarisation gar nicht vorhanden ist. Will man hingegen mit dem Aufsuchen einer Polarisation so lange warten, bis eventuell aufgetretene Temperaturdifferenzen verschwunden sind, so wird man meistenteils, selbst wenn eine Polarisation vorhanden war, dieselbe auch nicht mehr konstatieren können. Von verschiedener Seite wurde der Versuch gemacht, metallische und elektrolytische Leiter durch ihren Temperaturkoeffizienten zu unterscheiden. Wie schon früher erwähnt, haben fast alle Metalle einen negativen Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit, bei Elektrolyten hingegen nimmt im allgemeinen die Leitfähigkeit mit der Temperatur zu. Daß aber der Temperaturkoeffizient keine strenggültige Unterscheidung zwischen metallischer und elektrolytischer Leitfähigkeit ermöglichen kann, läßt sich leicht erweisen. Es wurde ja schon früher auf das Verhalten der Kohle, deren metallische Leitfähigkeit nicht zu bezweifeln ist, hingewiesen, welche bei gewöhnlichen Temperaturen einen mit der Temperatur abnehmenden Widerstand

aufweist. Daß hingegen bei Elektrolyten keinesfalls immer mit Temperaturzunahme eine Zunahme der Leitfähigkeit verbunden ist, ist ebenfalls erwiesen. Es wäre in dieser Richtung zunächst auf die Arbeit von Arrhenius[1] »Über die Dissoziationswärme und den Einfluß der Temperatur auf den Dissoziationsgrad der Elektrolyte« zu verweisen. Ferner sei hier die die Resultate von Arrhenius bestätigende Arbeit von Noyes und Coolidge[2] erwähnt. Endlich möge noch eine Abhandlung von Horton[3] angeführt werden, in welcher der Nachweis erbracht wird, daß die Leitfähigkeit einiger Oxyde nur bis zu einer bestimmten Temperatur eine Zunahme erfährt, dann aber mit steigender Temperatur abnimmt. Aus diesen Tatsachen geht unzweifelhaft hervor, daß man aus dem Temperaturkoeffizienten einen Schluß auf die Art der Leitfähigkeit zu ziehen keinesfalls berechtigt ist.

Eine Methode zur Unterscheidung von elektrolytischer und metallischer Leitfähigkeit, die dort, wo dieselbe überhaupt angewendet werden kann, immer durchaus verläßliche Resultate liefert, meines Wissens aber noch nicht gebraucht wurde, ist folgende:

Metalle zeigen bekanntlich solchen Medien gegenüber, in denen ihre Ionen existenzfähig sind (also Elektrolyten), eine Lösungstension. Diese äußert sich in dem Auftreten einer elektromotorischen Kraft zwischen Metall und der mit dem Metall in Berührung stehenden Substanz. Will man nun etwa bei einer Metallverbindung die Art ihrer Leitfähigkeit untersuchen, so braucht man dieselbe nur einerseits mit einer Elektrode aus demjenigen Metall, welches ihren einen Bestandteil bildet, andernteils mit einem unangreifbaren Metall als zweite Elektrode zu verbinden. Im Falle die untersuchte Substanz ein Elektrolyt ist, wird man eine elektromotorische Kraft zwischen den beiden Metallelektroden nachweisen können. Leitet aber die zu untersuchende Verbindung metallisch, so wird man, vorausgesetzt, daß die Temperatur aller verschiedenen Teile der ganzen Anordnung die gleiche ist, keine elektromotorischen

[1] Zeitschr. für physik. Chemie, *4*, 96 (1889).
[2] Proc. Amer. Acad. of Arts and Scienc., *39*, 160 (1903/1904).
[3] L. c.

Kräfte zwischen den beiden Elektroden erhalten. Man kann somit aus dem Auftreten oder Fehlen einer elektromotorischen Kraft mit Sicherheit einen Schluß auf die Art der Leitfähigkeit des untersuchten Körpers ziehen. Ein weiteres Kriterium zur Unterscheidung der beiden Arten von Leitfähigkeit bilden nach Nernst[1] die optischen Eigenschaften. So steht im engsten Zusammenhange mit der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle ihre Undurchsichtigkeit.

Man kennt bekanntlich keine nichtmetallischen Körper, die erst in so dünnen Schichten durchsichtig werden wie die Metalle. Im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie ist die optische Undurchsichtigkeit der Körper im metallischen Zustande darauf zurückzuführen, daß sich Metalle, im Gegensatz zu Elektrolyten, auch gegenüber so schnellen elektrischen Schwingungen, wie es die Lichtschwingungen sind, immer noch als gute Leiter verhalten. Freilich läßt sich dieser Unterschied nicht vollständig durchführen, da ja die Absorptionsfähigkeit vielfach im weitesten Maße von der Wellenlänge bedingt ist. Nach dieser Auffassung erscheint z. B. die Annahme, daß der elektrische Lichtbogen metallisch leite, schon durch die auswählende Lichtemission und Absorption desselben vollkommen ausgeschlossen. Ebensowenig darf man bei der gut leitenden, bläulichen, durchsichtigen Lösung von metallischem Natrium in flüssigem Ammoniak metallische Leitung annehmen. Andernteils spricht schon die tiefschwarze Farbe, große Undurchsichtigkeit und der Metallglanz mancher Superoxyde und Sulfide für eine metallische Leitfähigkeit derselben.[2] Gerade die Art der Leitfähigkeit einiger solcher Metallverbindungen beansprucht ein besonderes Interesse, da man insbesondere bei diesen Körpern, welche teilweise metallische und teilweise nichtmetallische Eigenschaften besitzen, erwarten konnte, vielleicht Übergänge zwischen elektrolytischer und metallischer Leitfähigkeit zu finden. Durch die Auffindung solcher Übergänge konnte man aber wiederum hoffen, einen Aufschluß über das Wesen der metallischen Leitfähigkeit zu erhalten.

---

1 Zeitschr. für Elektrochem., *6*, 42 (1900).

2 Lorenz, Elektrochem. geschm. Salze, *2*, 173.

Zahlreiche Untersuchungen sind auch bereits von verschiedenen Autoren in dieser Richtung unternommen worden. So von Streintz, Guinchant und vielen anderen.

Alle diese Untersuchungen hatten aber bisher einen solchen Übergang zwischen metallischer und elektrolytischer Leitfähigkeit nicht erkennen lassen. Besondere Beachtung in dieser Richtung beanspruchen ferner diejenigen Körper, die Elemente sind und trotzdem elektrolytische Leitfähigkeit zeigen. Man ist nämlich gewöhnt anzunehmen, ein Element könne nur metallisch leiten, elektrolytische Leitfähigkeit hingegen nur bei solchen Körpern für möglich halten, welche Verbindungen sind.

Fast alle hier in Betracht kommenden Stoffe sind bei gewöhnlicher Temperatur feste Körper. Da dieselben trotzdem ein recht erhebliches Leitvermögen zeigen, hat man, wenn man eine Entscheidung darüber erhalten will, ob das Leitvermögen dieser Körper ein metallisches oder elektrolytisches ist, sich zunächst die Frage vorzulegen, ob denn ein fester Körper überhaupt elektrolytisch leiten kann. Diese Frage ist berechtigt, da es keinesfalls ohneweiters verständlich erscheint, daß feste Körper dissoziiert sein sollen, und vielleicht noch weniger, daß die Ionen in festen Körpern eine Beweglichkeit besitzen. Doch muß diese Frage in bejahendem Sinne beantwortet werden, da bei vielen festen Körpern eine elektrolytische Leitfähigkeit unzweifelhaft experimentell festgestellt worden ist. In dieser Richtung sei nur daran erinnert, daß schon Faraday im Jahre 1833 ein elektrolytisches Leitvermögen einiger fester Salze entdeckte. Im Jahre 1875 wurde von E. Wiedemann[1] das Leitvermögen von Bleichlorid, -bromid und -jodid eingehend untersucht und als elektrolytisch erkannt. Von den vielen anderen auf diesem Gebiet gemachten Untersuchungen seien hier noch erwähnt die Arbeiten von O. Lehmann[2] über das Verhalten des festen Jodsilbers. Bei diesen letzteren Untersuchungen wurde sogar elektrolytische Leitfähigkeit in einem so zweifellos festen Körper, wie es kristallisiertes Jodsilber ist, konstatiert. Endlich fanden Warburg und Tegetmeier,[3] daß der Berg-

---

[1] Pogg. Ann. d. Phys. *154*, 318 (1875).

[2] Wied. Ann., *24*, 1 (1885).

[3] Wied. Ann., *21*, 622 (1884).

kristall (Quarz) lediglich in der Richtung der Hauptachse leite, daß also in diesem Falle das Leitvermögen in der Richtung der Kristallachsen orientiert ist. Von Interesse ist es, daß Lorenz[1] darauf aufmerksam macht, daß in den untersuchten festen Elektrolyten eine Wanderung nur der Kationen nachweisbar ist, wohingegen die Anionen festliegen. Diese Erscheinung wäre eine auffallende Analogie zu der Annahme, daß in Metallen nur die negativen Elektronen den Stromdurchgang vermitteln sollen.

Nachdem es also möglich ist, daß ein fester Körper sowohl elektrolytische wie metallische Leitfähigkeit aufweist, möge im folgenden auf die Frage, welche Art von Leitfähigkeit in den einzelnen Fällen vorliegt, näher eingegangen werden. Über dieses Thema sind bereits sehr zahlreiche Untersuchungen veröffentlicht worden und sei über diese Arbeiten sowie über die vom Verfasser erhaltenen Resultate nach Elementen geordnet referiert.

Jod.

Was dieses Element betrifft, so ist zunächst eine Angabe von I. Inglis[2] zu erwähnen, wonach geschmolzenes Jod den Strom leiten soll. Später wollte Beetz[3] den Nachweis erbringen, daß die erhaltenen Spuren von Leitung auf Verunreinigungen zurückzuführen seien. In neuerer Zeit ist über dieses Thema eine ausgezeichnete Arbeit von Walden[4] erschienen. Walden beschäftigt sich freilich nicht mit der Leitfähigkeit des Jods für sich, sondern untersuchte die Leitfähigkeit von Lösungen dieses Körpers. Er fand, daß die molekulare Leitfähigkeit dieser Lösungen mit der Verdünnung wächst, was bekanntlich nach unseren Anschauungen nur bei einem Elektrolyten möglich ist. Aus diesem Grunde und wegen der Durchsichtigkeit der Lösungen erscheint eine metallische Leitfähigkeit ausgeschlossen. Um eine Erklärung dieser Erscheinung unter Anerkennung der elementaren Natur des Jods zu geben, nimmt

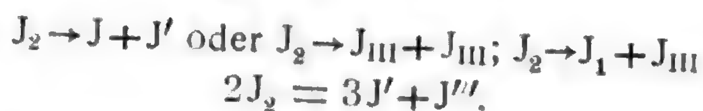
[1] Lorenz, Elektrochem. geschm. Salze, *3*, 300.

[2] Lorenz, Elektrochem. geschm. Salze, l. c.

[3] Pogg. Ann., *92*, 452.

[4] Zeitschr. für physik. Chemie, *43*, 386 (1903).

Walden an, daß die Moleküle von Jod eine elektrolytische Dissoziation erleiden, etwa nach folgendem Schema:



$$J_2 \rightarrow J + J' \text{ oder } J_2 \rightarrow J_{III} + J_{III};\ J_2 \rightarrow J_1 + J_{III}$$
$$2J_2 = 3J' + J'''.$$

Was die Möglichkeit einer solchen Dissoziation betrifft, so sei hier daran erinnert, daß Brom und Jod, neben dem ausgesprochen negativen Charakter, als Brom- und Jodanionen auch deutliche basische Eigenschaften besitzen. Außerdem erfahren bekanntlich die Brom- und Jodmoleküle leicht thermolytische Spaltung. Es ist also die Möglichkeit, daß sich das Jod tatsächlich in der vorhin erwähnten Weise in Ionen spaltet, und somit sein Leitungsvermögen trotz der elementaren Natur dieses Körpers wenigstens in dem angewendeten

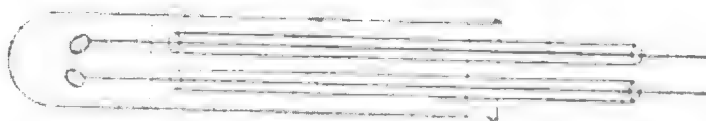


Fig. 1.

Lösungsmittel ein elektrolytisches ist, zweifellos vorhanden. Da man nach diesem Verhalten des in Lösung befindlichen Jodes erwarten konnte, daß eine genauere Untersuchung des Verhaltens von reinem festen und geschmolzenen Jod interessante Ergebnisse liefern werde, unternahm ich es, das elektrische Verhalten dieses Körpers einer genaueren Untersuchung zu unterziehen. Es wurde reinstes Jod von Merck, welches mehrfach sublimiert wurde, zu den Versuchen verwendet. Die Versuchanordnung ist durch die obenstehende Fig. 1 angedeutet.

Als Gefäß diente zunächst eine Glaseprouvette, welche mit etwa 10 *g* Jod beschickt wurde; in dieses Jod wurden zwei Elektroden aus Platin eingetaucht. Die Bestimmung des Widerstandes erfolgte in der Weise, daß die Stärke des Stromes, der bei Anlegung einer bestimmten elektromotorischen Kraft durch die Anordnung hindurch ging, gemessen wurde. Da es sich jedoch zeigte, daß sowohl die Platinelektroden nicht ganz unangreifbar dem Jod gegenüber waren, wie auch daß Spuren

des Glases in Lösung gingen, wurde später ein Gefäß aus Quarz und Elektroden aus reinem Kohlenstoff verwendet. Zunächst konnte mit dieser Anordnung festgestellt werden, daß auch das reinste erhältliche Jod bei 20° bereits ein zwar sehr geringes, aber immerhin doch merkliches Leitvermögen zeigt. Mit steigender Temperatur nimmt dann das Leitvermögen zu und zeigt insbesondere in der Nähe des Schmelzpunktes einen sprunghaften Anstieg. Die Resultate sind durch die nebenstehende Kurve zum Ausdruck gebracht.

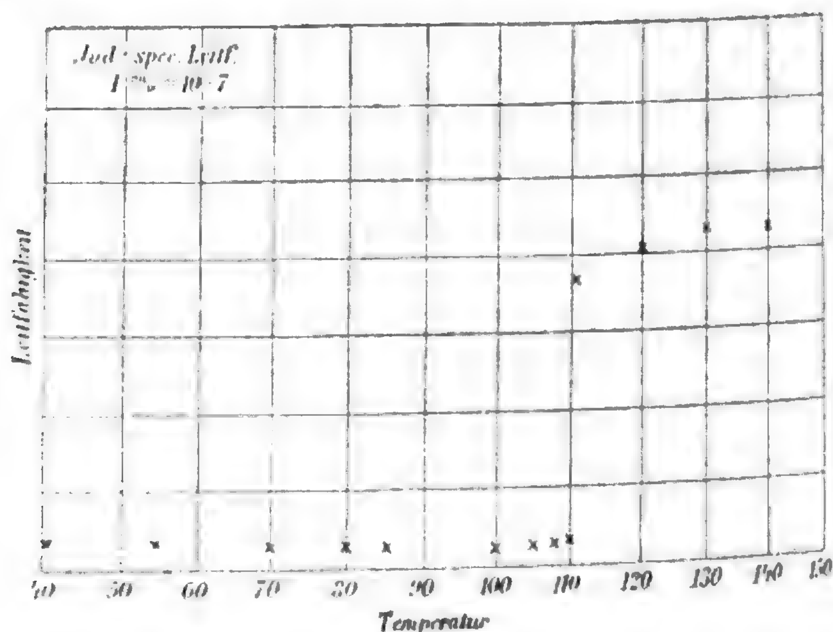


Fig. 2.

Sobald das Jod geschmolzen war und, wie aus der Kurve (Fig. 2) hervorgeht, eine immerhin beträchtliche Leitfähigkeit besaß, war es möglich, bei den von mir angewendeten Größen der Apparate doch einige Milliampère die Elektroden passieren zu lassen, um einen etwa auftretenden Polarisationsstrom nachweisen zu können.

Nimmt man an, daß die Leitfähigkeit eine elektrolytische ist und die Ionen etwas aus verschiedenwertigem Jod bestehen, wäre das Auftreten einer Polarisation möglich. Es konnte jedoch, solange das Jod flüssig war, nicht der geringste Polarisationsstrom entdeckt werden. War das Jod soweit erkaltet, daß es erstarrte, so zeigten sich nach Aufhören des Primärstromes, trotzdem derselbe jetzt bedeutend schwächer

war, Sekundärströme. Diese waren aber wahrscheinlich thermoelektrischer Natur und wurden vermutlich durch den vom Primärstrom hervorgerufenen Peltiereffekt verursacht. Denn wie ich mich überzeugen konnte, gibt Jod mit dem in Verwendung gestandenen Elektrodenmaterial thermoelektrische Spannungen von so bedeutender Größe, daß sie die zwischen Metallen beobachteten wohl um das Mehrtausendfache übertreffen.

Das flüssige Jod ist im stande, Jodide aufzulösen, und diese Lösung erfolgt, wie ich mich überzeugen konnte, unter Eintritt von elektrolytischer Dissoziation. Während sich diese Publikation in Arbeit befand, wurde aber über das Leitvermögen von Kaliumjodid, in flüssigem Jod gelöst, eine Arbeit von Lewis und Wheeler veröffentlicht, und so seien nur einige Resultate meiner Untersuchungen, soweit dieselben nicht in das Bereich der erwähnten Arbeit fallen, wiedergegeben. Zunächst wäre in dieser Richtung, was ja wohl ziemlich selbsverständlich ist, zu bemerken, daß selbst durch Spuren von Metalljodiden die Leitfähigkeit viel höhere Werte annahm. Durch diesen Umstand wird aber natürlich die Verläßlichkeit der mit reinem Jod erhaltenen Werte auch wiederum in Frage gestellt. Denn wenn auch mit aller Sorgfalt jede Verunreinigung ausgeschlossen wurde, so ist man doch nie ganz sicher, ob nicht doch minimale Verunreinigungen vorhanden waren. Es ist dies eine ähnliche Sache wie bei der Untersuchung der Leitfähigkeit des reinen Wassers. Da Jod aber ein Körper ist, in welchem sich Salze unter Eintritt elektrolytischer Dissoziation auflösen können, so ist zu erwarten, daß, wie jedes dissoziierende Lösungsmittel, auch das Jod ein, wenn auch geringes Eigenleitvermögen aufweisen werde. Freilich könnte das Jod, seiner elementaren Natur wegen, zu Zweifeln in dieser Richtung Anlaß geben. Doch dürfte die Tatsache, daß Jod in Lösung, wie von Walden nachgewiesen worden ist, elektrolytisches Leitvermögen zeigt, im Verein mit den hier angeführten Untersuchungsergebnissen wohl hinreichende Beweiskraft für das Vorhandensein elektrolytischer Leitfähigkeit des reinen Jodes besitzen. Ferner sei noch erwähnt, daß man Jod auch in Kombination mit verschiedenen Metallen als Elektrolyt gebrauchen kann und in solchen aus Jod, beziehungsweise natürlich der Lösung der

betreffenden Metalljodide in Jod und zwei verschiedenen Metallen bestehenden Ketten elektromotorische Kräfte auftreten. Weiter will ich noch bemerken, daß auch in einer Lösung eines Jodides in Jod absolut keine Polarisationserscheinungen nach Stromdurchgang gefunden werden konnten. Dies dürfte dadurch zu erklären sein, daß der Reststrom die auftretende Elektrolyse vollständig verdeckt. Das Zustandekommen des Reststromes wird in diesem Falle dadurch sehr erleichtert, daß das Lösungsmittel und das eine Produkt der Elektrolyse gleich sind und daß der an der Kathode ausgeschiedene Körper sehr leicht mit dem ja immer in genügender Menge in der Umgebung vorhandenen Jod sich wieder zu dem ursprünglichen Jodid verbindet. Es ist also dieser Fall in ähnlicher Weise aufzufassen wie die Erscheinungen an den Glühstiften der Nernst-Lampen. Es bietet somit die Stromleitung in reinem Jod, in einer Lösung eines Jodides in Jod, wie der Lösung von reinem Jod in einem anderen Lösungsmittel (Walden) genau das äußere Bild einer metallischen Leitfähigkeit, obzwar diese Leitfähigkeiten doch zweifellos elektrolytischer Natur sind.

Brom.

An der Lösung dieses Körpers konnte Walden zwar auch eine offenbar elektrolytische Leitfähigkeit konstatieren, mir jedoch gelang es, nur ganz geringe Spuren von Leitfähigkeit in der Nähe des Siedepunktes nachzuweisen. Ballard[1] bezeichnete seinerzeit das Brom direkt als Nichtleiter der Elektrizität. Daher konnte über dieses Element nichts weiter gefunden werden, was für einen Schluß auf die etwa vorhandene Leitfähigkeit maßgebend wäre.

Schwefel.

Dieser Körper, den man oft zu den Isolatoren rechnet, hat unter Umständen ein wenn auch kleines, doch leicht nachweisbares Leitvermögen. Daß bei Schwefel die etwa vorhandene Leitfähigkeit mit der Temperatur wachsen werde, war im Sinne der früher erwähnten Theorie von Nernst über den Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und optischem Verhalten ja von

[1] Ann. de Chim. et de Phys. 32, 345.

vornherein zu erwarten. Denn der Schwefel, der bei gewöhnlicher Temperatur hellgelb ist, wird mit steigender Temperatur immer dunkler, um bei seinem Siedepunkt eine nahezu schwarze Farbe anzunehmen.

Wie nun Fousserau[1] fand, zeigt der Schwefel tatsächlich eine mit wachsender Temperatur zunehmende Leitfähigkeit. Die Resultate Fousserau's konnte ich bestätigen. Die von mir gewählte Versuchsanordnung war genau entsprechend der zur Untersuchung der Leitfähigkeit des Jodes benützten. Als Elektrodenmaterial konnte sowohl Platin wie Kohle Verwendung finden, ohne daß sich die erhaltenen Werte dadurch geändert hätten. Auch machte es keinen Unterschied, ob das zur Untersuchung angewendete Gefäß aus Glas oder Quarz bestand. Um über die Art der Leitfähigkeit einen Aufschluß zu erhalten, wurde ein Versuch unternommen, ob bei Stromdurchgang eine Polarisationsgegenspannung eventuell zu finden sei. Sowohl im geschmolzenen, eben merklich leitenden Schwefel wie auch in nahe seinem oder bei seinem Siedepunkte befindlichen Schwefel konnte eine Polarisationsspannung von etwa 0·3 Volt konstatiert werden. Nach Aufhören des Primärstromes ging die Spannung langsam zurück; im ganzen konnte diese Gegenspannung etwa bis 20 Sekunden nach Umwerfen der Wippe beobachtet werden. Dabei erwies es sich als gleichgültig, ob Pt- oder C-Elektroden verwendet wurden. Hier an eine durch den Peltiereffekt des Primärstromes hervorgerufene thermoelektrische Kraft zu denken, erscheint wohl vollkommen ausgeschlossen, da ja der Schwefel sich in flüssigem Zustande befindet, dadurch leicht beweglich ist und sich so kaum Temperaturdifferenzen an den Elektroden ausbilden können. Besonders wahrscheinlich wird dies durch den Umstand, daß eine ebenso große Polarisationsspannung auch in Schwefel, welcher sich im vollen Sieden befand, beobachtet werden konnte. Durch die hier fortwährend aufsteigenden Dampfblasen wird eine vortreffliche Rührung gewährleistet und es erscheint ganz sicher, daß eine durch den Peltiereffekt des ja ohnedies außerordentlich schwachen Stromes hervorgebrachte Tempera-

[1] C. R., 95, 216 (1882); J. d. phys., 2, 254 (1883).

turdifferenz sich nicht länger als höchstens vielleicht einige Tausendstel einer Sekunde würde erhalten können. Die Dauer der auftretenden Polarisationsspannung aber war auch im siedenden Schwefel nicht kleiner als sonst. Sollten aber etwa durch die Heizung Temperaturdifferenzen vorhanden sein, so könnte wiederum nicht die auftretende elektromotorische Kraft von der Richtung des vorher durchgeschickten Primärstromes abhängig sein, wie dies tatsächlich der Fall war. Vielleicht wäre hier der Gedanke naheliegend, an eine Verunreinigung des Schwefels durch irgend welche Sulfide zu denken. Solche Verunreinigungen sind ja auch in sehr reinem Schwefel leicht möglich. Daher habe ich direkt das Verhalten einer Lösung von Natriumsulfid in flüssigem Schwefel untersucht. Es zeigte sich, daß eine solche Lösung selbst bei geringer Konzentration, zirka 1%, bereits mehrere hundert Male besser leitet als der reine Schwefel. Genaue Zahlen über die Leitfähigkeit von Lösungen in geschmolzenem Schwefel will ich hier nicht angeben, da die diesbezüglichen Untersuchungen noch nicht abgeschlossen sind. Nur das eine sei hier erwähnt, daß eine Lösung eines Sulfides in Schwefel nicht die geringste Spur einer Polarisation mehr erkennen läßt. Nichtsdestoweniger ist die Leitfähigkeit derselben zweifellos elektrolytisch, denn wenn man eine genügende Stromdichte wählt und eine Lösung von Natriumsulfid im Schwefel vorliegt, kann man an der Kathode eine Feuererscheinung bemerken. Dieselbe rührt daher, daß an der Kathode Natrium ausgeschieden wird, welches bei der hohen Temperatur mit dem umgebenden Schwefel sofort wieder zu Sulfid verbrennt. Es liegen also die Verhältnisse hier ähnlich wie bei der Elektrolyse eines Jodides in flüssigem Jod; nämlich der Reststrom nimmt solche Dimensionen an, daß er die Elektrolyse vollständig verdeckt. Aus alledem kann man aber den Schluß ziehen, daß nicht nur die Leitung eines in geschmolzenem Schwefel gelösten Sulfides, sondern auch die Leitung im reinen Schwefel eine elektrolytische ist. Weiters ergibt sich aus der im reinen Schwefel auftretenden Polarisation, daß an den Elektroden verschiedene Körper frei werden.

Um was für Körper es sich hier handelt, kann nicht genauer gesagt werden; nach unseren bisherigen Kenntnissen

von der Sache wäre es vielleicht möglich anzunehmen, daß an den Elektroden Schwefel verschiedener Modifikationen ausgeschieden wird, beziehungsweise daß vielleicht die im leitenden Schwefel existierenden Schwefelionen verschiedene Wertigkeiten besitzen. Freilich ist die beobachtete Polarisationsspannung von etwa 0·3 Volt etwas groß, um durch diese Annahmen erklärt zu werden.

Zum Schlusse möchte ich noch erwähnen, daß Versuche, festzustellen, ob die Leitfähigkeit des Schwefels in irgend einer Weise von der Beleuchtung beeinflußt werde, wie dies bei dem dem Schwefel nahestehenden Selen der Fall ist, ein negatives Resultat ergeben haben. Die Untersuchung des Tellurs auf eine etwa auftretende Polarisation ist mit Schwierigkeiten verbunden. Solange dasselbe fest ist, leitet es zwar den Strom recht gut, gibt aber bei geringen Temperaturdifferenzen schon so bedeutende Thermoströme, daß man die nach Stromdurchgang zu beobachtenden Gegenströme sehr wohl auf die durch den Peltiereffekt hervorgebrachte Temperaturdifferenz zurückzuführen vermag. Denn im festen Tellur kann ja eine an den Elektroden auftretende Temperaturdifferenz keinesfalls so rasch zum Ausgleich kommen, um das Auftreten eines Thermostromes zu verhindern. Andere nichtmetallische Elemente wurden auf ihre Leitfähigkeit nicht untersucht. Einiges Interesse in dieser Richtung hätte vielleicht der Phosphor geboten. Derselbe leitet im festen Zustande sehr wenig, geschmolzen besser. Jedoch ist es sehr schwierig, den Phosphor rein, insbesondere frei von seinen eigenen Oxydationsprodukten zu erhalten. Und es würden ja ganz geringe Spuren von Oxydationsprodukten des Phosphors genügen, um eine elektrolytische Leitung des Phosphors vorzutäuschen. Hingegen mußten noch einige Metalloxyde und Sulfide einer genauen Untersuchung über die Art ihrer Leitfähigkeit unterzogen werden, da gerade bei diesen Körpern aus schon früher besprochenen Gründen bereits von verschiedener Seite der Versuch gemacht worden ist, einen näheren Aufschluß über die Art der Leitfähigkeit zu erlangen. So wollte, wie ebenfalls schon früher erwähnt, Guinchant feststellen, ob diese Verbindungen metallische oder elektrolytische Leitfähigkeit besitzen. Zu diesem Behufe bestimmte er

deren Temperaturkoeffizienten, ein Verfahren, das, wie schon gezeigt wurde, kein zu diesem Zwecke brauchbares Resultat liefert. Von anderen Autoren, die über dasselbe Thema arbeiteten, wäre insbesondere Streintz[1] zu erwähnen. Derselbe untersuchte die Leitfähigkeit vieler derartiger Substanzen, indem er zu seinen Versuchen Zylinder, welche aus dem Pulver der betreffenden Oxyde und Sulfide gepreßt waren, anwandte. Er wollte auch feststellen, ob sich nicht vielleicht bei einem dieser Körper ein Übergang zwischen metallischer und elektrolytischer Leitfähigkeit finden lasse. Doch konnte er in dieser Richtung zu keinem Resultat gelangen.

Was die Methode betrifft, nach welcher eine solche gemischte Leitfähigkeit nachzuweisen wäre, ist zunächst zu bemerken, daß es wohl auf den ersten Blick am einfachsten erscheint, die Gültigkeit des Faraday'schen Gesetzes für die in Frage kommenden Körper zu prüfen.

Es wurde aber schon früher erwähnt, daß gerade unter den Verhältnissen, unter denen bei solchen Körpern die Prüfung vorgenommen werden muß, der Reststrom sehr bedeutende Dimensionen annehmen kann. Wenn man somit in einem bestimmten Falle eine geringere Menge von Produkten der Elektrolyse findet, als dem Faraday'schen Gesetz entspricht, so kann man daraus noch nicht den Schluß ziehen, daß ein Teil des Stromes elektrolytische Arbeit verrichtet hat, ein anderer Teil hingegen metallisch geleitet wurde. Ebensowenig kann man hier aus dem Fehlen einer Polarisation auf metallische Leitung schließen, wie aus dem Auftreten eines Polarisationsstromes einen Schluß auf elektrolytische Leitung ziehen. Denn einesteils kann, wie wir schon früher gesehen haben, bei elektrolytischer Leitung Polarisation fehlen (Jodide in Jod, Sulfide in Schwefel), andernteils können, wie auch bereits besprochen, die hier sehr großen thermoelektrischen Kräfte leicht eine Polarisation vortäuschen. Die Anwendung der früher besprochenen Methode, den zu untersuchenden Körper zwischen zwei verschiedene Metalle zu bringen und zu untersuchen, ob eine elektromotorische Kraft auftritt, ist, richtig angewendet, auch hier brauchbar.

[1] Drude's Annalen, 9, 854 (1902).

Leitet der betreffende Körper rein metallisch, so darf, wie schon früher gezeigt, keine elektromotorische Kraft auftreten. Gibt es bei einer dieser Substanzen aber überhaupt eine gemischte Leitfähigkeit, so muß zwar eine elektromotorische Kraft auftreten, dieselbe aber wesentlich kleiner sein, als wenn man es mit einem bloß elektrolytisch leitenden Körper zu tun hätte. Gibt es Körper, welche unter gewissen Bedingungen metallisch, unter anderen elektrolytisch leiten, so muß, wenn man die Bedingungen entsprechend ändert, ein solcher Körper von der einen Leitfähigkeit zu der anderen übergehen. Dieser Übergang könnte nun entweder sprunghaft oder allmählich erfolgen. Erfolgt er sprunghaft, so muß er mit einem zu dieser Zeit auftretenden Widerstandsmaximum verbunden sein. Denn wenn die metallische Leitfähigkeit abnimmt, muß der Widerstand zunehmen, und zwar so lange, bis er bei verschwindender metallischer Leitfähigkeit ein Maximum erreicht; beginnt dann die elektrolytische Leitung, so wird dadurch der Widerstand wieder langsam sinken. Erfolgt aber der Übergang nicht sprungweise, sondern allmählich und kann metallische und elektrolytische Leitung eine Zeitlang nebeneinander existieren, so fallen die Gründe für eine derartige Widerstandsänderung fort und, wenn der Übergang von der einen Leitfähigkeit zu der anderen allmählich erfolgt, darf derselbe also nicht mit einer unstetigen Widerstandsänderung verbunden sein.

Die von mir an einigen Metalloxyden und Sulfiden erhaltenen Versuchsresultate seien im folgenden, nach den untersuchten Körpern geordnet, wiedergegeben.

Silbersulfid.

Das Material wurde durch Zusammenschmelzen von reinem Silber mit einem großen Überschuß von Schwefel hergestellt. Das Reaktionsprodukt wurde in einer Atmosphäre von Schwefeldampf erkalten gelassen. Nach dem Abkühlen stellte dasselbe eine feste, schwarzglänzende und etwas geschmeidige Masse dar. Diese ließ sich leicht mechanisch bearbeiten, hämmern, sägen und mit dem Messer schneiden. Ein stumpfer Gegenstand, unter Druck auf die Masse gestellt, sinkt nach einiger Zeit ein.

Bei etwas erhöhter Temperatur erweicht das Schwefelsilber zu einer ganz weichen, die Säge oder dergleichen verschmierenden Masse. Es besitzt bereits bei gewöhnlicher Temperatur ein ziemlich hohes Leitvermögen. Legt man an ein Stückchen Schwefelsilber zwei Platinelektroden an und läßt dann einen schwachen Strom hindurchgehen, während man die zwischen den Elektroden herrschende Spannung beobachtet, so findet man, daß dieselbe nach ganz kurzem Stromdurchgang sprungweise zuweilen bis über 200 Volt ansteigt, um dann fast momentan wieder auf ihren früheren Wert von einem bis wenige Volt zurückzukehren.

Dieses sprunghafte Ansteigen der Spannung rührt vom Schwefel her, der an der Anode ausgeschieden wird und den Stromdurchgang behindert. Wird dann durch das Hinaufschnellen der Spannung der Stromdurchgang doch erzwungen, so verbrennt der ausgeschiedene Schwefel mit sichtbarer kleiner Feuererscheinung. Nachdem sich dieser Vorgang mehrere Male wiederholt hat, sinkt die zwischen den Elektroden bestehende Spannung rasch auf einen Bruchteil ihres früheren normalen Wertes und die sprungweise Widerstandsänderung bleibt aus. Es rührt dies daher, daß sich zwischen den Elektroden eine Brücke von metallischem Silber gebildet hat. Diese soeben beschriebene Erscheinung tritt, wie ich mich überzeugen konnte, nicht nur bei gewöhnlicher, sondern auch bei erhöhter Temperatur, bei welcher das Schwefelsilber schon eine sehr hohe Leitfähigkeit (spez. W. 0·005) erlangt hat, auf. Aus dieser Schwefel- und Silberausscheidung muß man schließen, daß es sich bei diesem Körper um elektrolytische Leitung handelt. Um diesen Befund zu prüfen, wurde die schon mehrfach erwähnte Methode angewendet und die Kombination Silber-Schwefelsilber-Platin bei verschiedenen Temperaturen auf das Auftreten einer elektromotorischen Kraft untersucht. Sowohl mit Hilfe des Galvanometers wie des Elektrometers konnte bei gewöhnlicher Temperatur eine elektromotorische Kraft konstatiert werden. Bei 20° C. betrug deren Wert etwa 0·14 Volt, doch war derselbe, da nicht beide Elektroden umkehrbar sind, natürlich nicht vollständig konstant, sondern schwankte um einige Hundertstel Volt. Nichtsdestoweniger ließ sich konstatieren,

daß die elektromotorische Kraft mit steigender Temperatur wächst und mit fallender abnimmt. Von besonderem Interesse schien es, die Abnahme, welche der Wert der elektromotorischen Kraft mit fallender Temperatur zeigte, näher zu verfolgen. Es ist denkbar, daß diese Abnahme bloß bis zu einem Minimum fortschreitet, um sich dann in eine Zunahme umzukehren oder konnte der Wert der elektromotorischen Kraft dieser Kombination mit fallender Temperatur bis Null zurückgehen, um bei weiterer Temperaturabnahme mit entgegengesetzten Zeichen wieder zu erscheinen. Derartige Fälle sind ja für Elektrolyte bekannt. Endlich war noch die Möglichkeit vorhanden, daß die elektromotorische Kraft bis Null abnahm, ohne bei weiterer Temperaturabnahme von neuem zu erscheinen. Der Versuch zeigte nun, daß die zuletzt erwähnte Möglichkeit der Wirklichkeit entspricht. Zur Untersuchung wurde, um thermoelektrische Kräfte auszuschließen, die Kombination Cu-Ag-AgS-Pt-Cu verwendet und wurde Sorge getragen, daß der Temperaturfall zwischen der Versuchstemperatur und der Temperatur der Instrumente beiderseits nur in den aus dem gleichen Kupfer bestehenden Zuleitungsdrähten stattfinde. Die elektromotorische Kraft dieser Kombination nahm bis etwa —70° C. ab, um von dieser Temperatur bis zu —130° C., der tiefsten bei diesem Versuch erreichten Temperatur, auf Null zu bleiben.

Man muß aus diesem Fehlen einer elektromotorischen Kraft schließen, daß das Schwefelsilber bei so tiefen Temperaturen ein vollständig metallisches Leitvermögen besitze, bei höheren Temperaturen aber in einen Elektrolyten übergehe. Frägt man nun danach, ob dieser Übergang ein sprunghafter sei oder aber ob ein allmählicher Übergang zwischen metallischer und elektrolytischer Leitfähigkeit vorhanden ist und die beiden Arten von Leitfähigkeit eine Zeitlang koexistieren können, so muß, wie früher erörtert, aus den während dieses Überganges vorkommenden Widerstandsänderungen ein Aufschluß zu erhalten sein. Der Widerstand des Schwefelsilbers zeigte nun von 0 bis —130° nirgends eine sprunghafte Änderung, sondern erwies sich als gleichmäßig zunehmend. Nebenbei sei noch erwähnt, daß bei den tiefen Temperaturen die früher

beschriebenen, am warmen Schwefelsilber bei Stromdurchgang auftretenden Erscheinungen der Elektrolyse nicht mehr zu beobachten waren; eine Tatsache, die ebenfalls für das Verschwinden der elektrolytischen Leitfähigkeit bei den tiefen Temperaturen spricht. Durch das hier angeführte Tatsachenmaterial ist man den früheren allgemeinen Betrachtungen über die Möglichkeit einer gemischten Leitfähigkeit zufolge genötigt anzunehmen, daß bei Schwefelsilber eine Zeitlang metallisches und elektrolytisches Leitvermögen nebeneinander existieren. Von welcher Temperatur an das Leitvermögen ein rein elektrolytisches wird, konnte ich nicht konstatieren, da das einzige Kriterium, welches zu diesem Zwecke hätte herangezogen werden können, die Gültigkeit des Faraday'schen Gesetzes gewesen wäre. Wie aber schon früher erwähnt, ist eine Untersuchung in dieser Richtung mit nahezu unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft.

Schwefelkupfer.

Mit diesem Körper wurden schon von Hittorf[1] eingehende Versuche vorgenommen, um etwas über die Art seines Leitvermögens zu ermitteln. Zunächst gelang es Hittorf, festzustellen, daß das Leitvermögen verschiedener Stücke von Schwefelkupfer ein sehr verschiedenes ist und er wies ferner nach, diese Verschiedenheit sei darauf zurückzuführen, daß in dem Schwefelkupfer keine einheitliche Substanz vorliege, sondern daß dasselbe ein Gemisch von Kupfersulfid und Sulfür darstelle. Je nach dem Gehalt desselben an Sulfür ist das Leitvermögen ein besseres oder schlechteres. Ferner konnte Hittorf feststellen, daß, wenigstens bei höheren Temperaturen, durch den Strom eine Abscheidung von Schwefel und Kupfer eintritt. Bei längerem Stromdurchgange dürfte sich aber, nach den Angaben Hittorf's zu schließen, eine Brücke aus metallischem Kupfer bilden, ähnlich wie im Falle des Schwefelsilbers eine Brücke aus Silber beobachtet wurde.

Das zu den im folgenden beschriebenen Versuchen angewendete Schwefelkupfer wurde durch Zusammenschmelzen

[1] Pogg. Ann., 84, 1 (1851).

von reinem Kupfer mit einem großen Überschuß von reinem Schwefel hergestellt. Das Reaktionsprodukt wurde im Schwefeldampf erkalten gelassen. Es stellte eine schwarze, metallglänzende Masse dar; seine Härte war bedeutend größer als die des Silbersulfides; nichtsdestoweniger ließ sich dasselbe noch sehr gut mechanisch bearbeiten. Ein Stückchen Schwefelkupfer wurde nun zwischen zwei Platinelektroden der Einwirkung des elektrischen Stromes unterworfen. Bei gewöhnlicher Temperatur gelang es mir nicht, irgend ein Anzeichen von Elektrolyse wahrzunehmen. Auch die Untersuchung der Kette Kupfer-Schwefelkupfer-Platin ließ weder am Elektrometer noch am Galvanometer das Vorhandensein einer elektromotorischen Kraft erkennen. Die Temperatur betrug bei diesen Versuchen 20° C. Um das Verhalten des Schwefelkupfers bei höheren

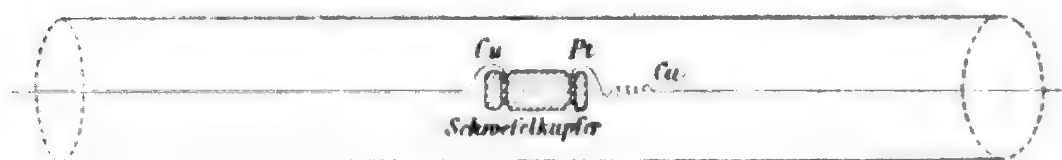


Fig. 3.

Temperaturen zu prüfen, wurde die Kombination Kupfer-Schwefelkupfer-Platin-Kupfer in einem elektrischen Röhrenofen in einer Atmosphäre von Schwefeldioxyd untersucht.

Selbstverständlich wurde auch hier Sorge getragen, daß der ganze Temperaturabfall zwischen dem Inneren des Ofens und der Temperatur der Meßinstrumente nur in den beiderseits aus dem gleichen Kupfer bestehenden Zuleitungsdrähten statthatte. Im übrigen ist die Versuchsanordnung wohl genügend deutlich aus der obenstehenden Skizze (Fig. 3) ersichtlich. Bei etwa 500° C. begann eine elektromotorische Kraft aufzutreten. Dieselbe stieg langsam mit der Temperatur an und erreichte bei 800° C. etwa 0·1 Volt. Eine genaue Messung ließ sich hier auch nicht durchführen, da man es, wie schon bemerkt, nicht mit einer reinen Substanz zu tun hat, außerdem noch aus den schon im Falle des Schwefelsilbers angeführten Gründen. Der Widerstand des Schwefelkupfers wies in diesem Temperaturintervall keine unstetige Änderung auf. Zahlen hier

anzugeben muß ich unterlassen, weil jedes untersuchte Stückchen Schwefelkupfer etwas andere Werte ergab. Es können somit hier leider nur die qualitativen Resultate gegeben werden, nämlich daß der Widerstand mit steigender Temperatur abnimmt und daß von zirka 500° C. an eine elektrolytische Leitfähigkeit auftritt. Nichtsdestoweniger genügen diese Resultate, um den Schluß zu ermöglichen, daß auch bei diesem Körper innerhalb eines mit etwa 500° beginnenden Temperaturintervalles eine gemischte Leitfähigkeit anzunehmen ist.

Eisenoxyduloxyd.

Das zu den Versuchen benutzte Material wurde entweder durch Oxydation von reinem Eisen oder durch Schmelzen von Eisenoxyd im elektrischen Ofen hergestellt. Letztere Methode dürfte die empfehlenswertere sein. Bei gewöhnlicher Temperatur ist der Widerstand des Eisenoxyduloxyds 0·02979 Ohm.[1] Die Leitfähigkeit dieses Körpers nimmt mit steigender Temperatur ebenso wie bei den anderen Sulfiden und Oxyden mit steigender Temperatur zu. Bei gewöhnlicher Temperatur konnte ich an diesem Körper nicht das geringste Zeichen einer Elektrolyse bemerken. Dieser Befund wird dadurch bestätigt, daß die »Chemische Fabrik Griesheim Elektron« aus diesem Material gefertigte Elektroden im größten Maßstabe zur Alkalichloridelektrolyse als Anoden verwendet.

Wäre die Leitfähigkeit dieses Körpers eine elektrolytische, so müßte bei dieser Art seiner Verwendung eine Zersetzung eintreten und sich Eisenchlorid bilden. Doch wurde von dem Auftreten einer solchen Erscheinung noch nichts bemerkt. Auch die Kombination Eisen-Eisenoxyduloxyd-Platin erwies sich bei gewöhnlicher Temperatur als frei von elektromotorischer Kraft. Zur Untersuchung bei höheren Temperaturen wurde, um thermoelektrische Effekte zu vermeiden, ähnlich wie in den früher beschriebenen Fällen die Kombination Platin-Eisenoxyduloxyd-Eisen-Platin verwendet. Die Versuchsanordnung ist genau der bei Schwefelkupfer beschriebenen analog. Nur

[1] D. R. P. 157122, Chemische Fabrik »Griesheim Elektron« (1904).

konnte hier von der Füllung des Röhrenofens mit einem besonderen Gase Abstand genommen werden, da sich ja das Eisenoxyduloxyd durch Glühen an der Luft nicht weiter verändert. Bei etwa 300° C.[1] trat eine natürlich auch inkonstante elektromotorische Kraft auf, deren Wert mit steigender Temperatur zunahm. Wenn sich freilich auch an diesem Körper aus denselben Gründen wie an den beiden früher behandelten Substanzen keine genauen Messungen anstellen ließen, so sollen, da man es hier wenigstens mit einer chemisch einheitlichen Substanz zu tun hat, durch nebenstehende Kurve (Fig. 4) die beobachteten Werte der elektromotorischen Kraft wieder-

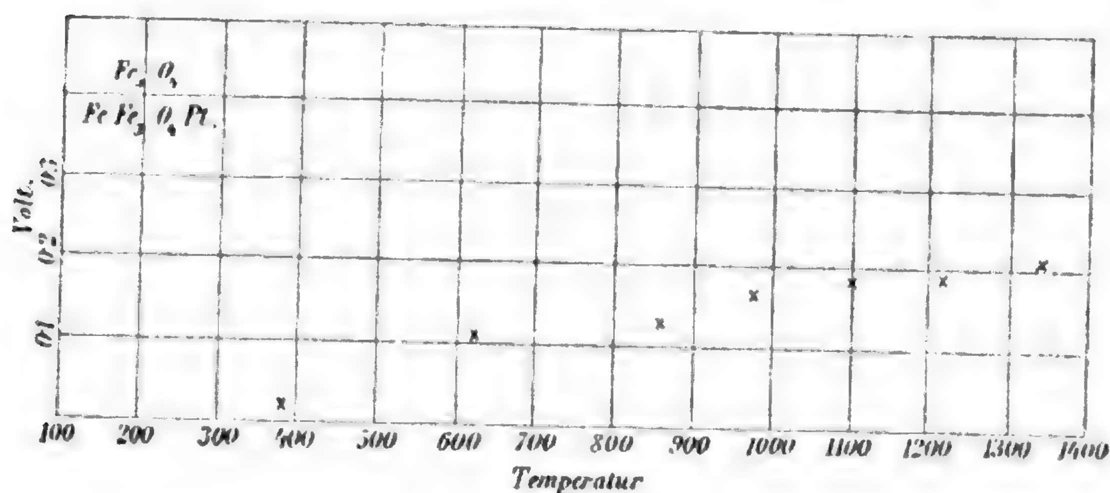


Fig. 4.

gegeben werden. Diese Kurve hat einesteils den Zweck, ein Bild davon zu geben, in welcher Art die elektromotorische Kraft der erwähnten Kombination mit der Temperatur wächst, andernteils eine ungefähre Anschauung über die Größe der Inkonstanz der hier wie auch bei den anderen Körpern beobachteten Werte zu vermitteln. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß aus diesen Versuchsresultaten hervorgeht, daß auch das Eisenoxyduloxyd bei höherer Temperatur eine elektrolytische Leitfähigkeit zeigt. Der Widerstand dieser Verbindung nimmt mit steigender Temperatur stetig ab. Es ist also auch hier anzunehmen, daß der Übergang zwischen metallischer und elektrolytischer Leitung ganz allmählich erfolgt.

---

[1] Alle hier ausgeführten Temperaturmessungen erfolgten thermoelektrisch mit einem Pt-Pt Rh-Element.

Einige andere in dieser Richtung untersuchte Oxyde und Sulfide boten für den hier vorliegenden Zweck kein besonderes Interesse, da an ihnen innerhalb des mir zugänglichen Temperaturintervalles kein Übergang zwischen den beiden Arten von Leitfähigkeit zu konstatieren war. Zur Untersuchung gelangten Cadmiumoxyd, Kobaltoxyd, Zinnsäure, Eisensulfid, Antimonsulfid u. a. Ein gewisses Interesse in dieser Richtung beansprucht jedoch das Tantaloxyd. Bei Zimmertemperatur leitet dasselbe den Strom, ohne daß man eine Zersetzung wahrnehmen könnte; bei höheren Temperaturen aber wird Tantalmetall allem Anschein nach elektrolytisch ausgeschieden. Da aber dieser Fall noch nicht vollständig aufgeklärt erscheint, so habe ich ein näheres Eingehen darauf an dieser Stelle vermieden.

Unter Berücksichtigung des ganzen im vorhergehenden gebrachten Tatsachenmaterials ersieht man, daß, wie es Übergänge zwischen Metallen und Nichtmetallen gibt, auch Übergänge zwischen metallischer und elektrolytischer Leitfähigkeit existieren. Wie manche Körper bei entsprechenden Temperaturen gleichzeitig metallische und nichtmetallische Eigenschaften besitzen, so gibt es, wie durch die hier angeführten Versuchsresultate festgestellt erscheint, Körper, die innerhalb bestimmter Temperaturgrenzen gleichzeitig metallische und elektrolytische Leitfähigkeit zeigen. Was die Art der Änderung des Leitvermögens mit der Temperatur betrifft, so ist der Sinn derselben bemerkenswert. Denn die metallische Leitfähigkeit geht mit steigender Temperatur in elektrolytische über, während doch die metallischen Eigenschaften der Körper mit steigender Temperatur zunehmen. Dieselbe Beziehung zwischen Temperatur und metallischen Eigenschaften muß man aber trotzdem auch für die Körper anerkennen, welche Übergänge der Art der Leitfähigkeit zeigen. Freilich verhalten sich die meisten von diesen Körpern wie Metalle, die noch nicht das Maximum ihrer Leitfähigkeit erreicht haben, also etwa wie Kohle bei Zimmertemperatur, denn bei den meisten dieser Körper nimmt die Leitfähigkeit mit der Temperatur zu.

Aber gerade durch die an diesen Substanzen beobachteten Erscheinungen könnte vielleicht ein Mittel geboten werden, um

nicht nur diese Erscheinungen selbst von einem einheitlichen Standpunkt aus zu erklären, sondern auch etwas über die Natur der metallischen Leitfähigkeit zu erfahren. Gegenwärtig pflegt man die elektrische Leitfähigkeit der Metalle durch die sogenannte Elektronentheorie zu erklären. Bekanntlich nimmt man an, daß masselose Teilchen, die Elektronen, Träger einer bestimmten elektrischen Ladung sind. Die positiven Elektronen sollen festliegen, während die negativen den Stromtransport in den Metallen vermitteln. Diese Elektronentheorie der Metalle verdankt ihre Entstehung wohl dem Umstande, daß bei Stromdurchgang durch Metalle niemals Elektrolyse beobachtet wurde und daß sich die Ionentheorie der Elektrolyse auf ihrem Anwendungsgebiet außerordentlich fruchtbar zeigte, ferner daß viele Tatsachen bekannt waren, die für die Ähnlichkeit der beiden Arten von Leitfähigkeiten sprachen. Die Elektronentheorie wurde zuerst von W. Weber und später von Giese[1] begründet. Von dem Genannten wurde wohl auch zuerst die Ansicht ausgesprochen, daß die Leitung der Elektrizität in Metallen nicht allzu verschieden von jener in Elektrolyten sei. Später wurde die Theorie in sehr eingehender Weise von Drude behandelt. Derselbe zeigte, daß sie sich mit allen bekannten Erscheinungen sehr wohl vereinen lasse. Die hier gewonnenen Versuchsresultate scheinen mir aber in Bezug auf die Ähnlichkeit der beiden Arten von Leitfähigkeit dafür zu sprechen, daß man in dieser Richtung noch einen Schritt weiter gehen könne, indem man zu der Annahme greift, daß metallische und elektrolytische Leitung sich nur dadurch unterscheiden, daß bei Elektrolyten die Ionen untereinander materiell verschieden, bei Metallen hingegen zwar auch Ionen existieren, diese aber materiell gleich sind und sich durch nichts anderes als durch ihre Ladung unterscheiden. Wie man im Falle des Jodes und von Lösungen der Jodide in Jod gesehen hat, bieten beide ganz das äußere Bild metallischer Leitung, trotzdem der Stromdurchgang, wie gezeigt wurde, auf Ionentransport beruht. Hätte das Jod nicht die Fähigkeit, Ionen anderer Körper in Lösung aufzunehmen, so würde sich dasselbe auch in der Kombination

[1] Wied. Ann., 37, 576 (1889).

mit zwei verschiedenen Metallen wie ein Metall verhalten und, überall gleiche Temperatur vorausgesetzt, keine elektromotorische Kraft zeigen. Ein derartiger Fall scheint beim Natrium vorzuliegen, dessen Lösung in flüssigem Ammoniak allem Anschein nach elektrolytisch leitet, während sich das Natrium in allen anderen Richtungen vollkommen als Metall benimmt. Die elektrolytische Leitfähigkeit der Lösung in flüssigem Ammoniak würde beweisen, daß das Natrium im stande ist, sowohl positive wie negative Ionen zu bilden und damit die Vermutung nahe rücken, daß auch im reinen Natrium solche Ionen vorhanden sind. Diese Vermutung erfährt eine Stütze durch das Resultat von Ruff und Geisel,[1] daß das Natrium in flüssigem Ammoniak als solches vorhanden ist, wie andrerseits die hohe Dielektrizitätskonstante des Natriums eine hohe dissoziierende Kraft desselben vermuten läßt. Eine solche hohe ionisierende Kraft müßte aber, wenn das Natrium selbst in Ionen zerfallen kann, auch eine bedeutende Dissoziation des reinen Natriums und damit eine hohe Leitfähigkeit bedingen; dies um so mehr, als die geringe Härte des Natriums den Schluß erlaubt, daß in demselben, ähnlich wie dies ja für »wachsweiche« feste Elektrolyte nachgewiesen ist, die Ionen eine große Beweglichkeit besitzen.

Verallgemeinert man diese speziell am Natrium gemachte Betrachtung, ein Vorgang, bei welchem man natürlich das Tatsachenmaterial wenigstens teilweise bereits verlassen muß und sich schon auf den Boden einer Hypothese begibt, so ist man zu der Annahme berechtigt, einen metallischen Leiter als Körper aufzufassen, der befähigt ist, Ionen aus dem gleichen Stoffe, aus dem er selbst besteht, zu bilden. Die hohe Leitfähigkeit der Metalle wäre dann so zu erklären, daß einesteils die Zahl der Ionen in denselben sehr groß, andernteils auch deren Beweglichkeit keine allzu geringe ist. Was die Zahl der Ionen betrifft, so wurde schon bemerkt, daß die Dielektrizitätskonstante der Metalle für die Annahme einer hohen dissoziierenden Kraft spricht. Auf eine nicht unbedeutende Beweglichkeit der Metallteilchen deutet nicht nur die meist recht bedeutende Duktilität

[1] Berl. Ber., 39, 821 (1906).

der Metalle, sondern auch der Umstand, daß Metalle ineinander zu diffundieren vermögen, hin. Daß feste Körper, die zweifellos elektrolytisch leiten, mitunter ein sehr hohes Leitvermögen zeigen können und somit überhaupt die Annahme der Ionenbeweglichkeit in festen Körpern durchaus plausibel ist, dafür wurden schon früher Beispiele gebracht.

Betrachtet man, was mit einem Metall, wenn dasselbe vom absoluten Nullpunkt an erwärmt wird, geschieht, speziell wie sich seine Leitfähigkeit mit der Temperatur ändern wird, so kommt man, wenn man sich an die soeben ausgesprochene Hypothese hält, zu folgenden Schlüssen: Beim absoluten Nullpunkt ist eine Dissoziation und damit eine Leitfähigkeit wohl als ausgeschlossen zu betrachten. Bei steigender Temperatur wird elektrolytische Dissoziation und damit Leitfähigkeit auftreten. Da bei steigender Temperatur anfangs sowohl die Dissoziation als die Beweglichkeit der Ionen zunehmen wird, so ist zunächst ein rasches Ansteigen der Leitfähigkeit zu erwarten. Mit weiterer Temperaturzunahme wird die Beweglichkeit der Ionen wohl stetig zunehmen. Was hingegen die Zahl der Ionen betrifft, sei hier auf die Entwicklungen von Arrhenius[1] für Elektrolyte verwiesen; je nach der Größe der Dissoziationswärme ist früher oder später wohl ein Zurückgehen des Dissoziationsgrades zu erwarten. Es ist also die Möglichkeit, daß die Leitfähigkeit eines Metalles ein Maximum erreiche und mit weiter zunehmender Temperatur wieder abnehme, durch die hier entwickelte Hypothese gegeben. Dieses Maximum wird natürlich für jedes Metall an einer anderen Stelle zu suchen sein, ebenso wie es auch denkbar wäre, daß für manche Metalle dieses Maximum überhaupt nicht existiere; näheres darüber läßt sich nicht sagen, da wir ja eine Vorstellung über die Größe der »Dissoziationswärme der Metalle« in dem hier gebrauchten Sinne nicht besitzen. Eine zweite Möglichkeit, wodurch bei Temperatursteigerung die Leitfähigkeit der Metalle vermindert werden könnte, wäre dann vorhanden, wenn die Metalle bei tiefen Temperaturen mehratomige Moleküle zu bilden vermögen, bei hohen Temperaturen hin-

[1] L. c.

gegen einatomig wären. Es wäre dann denkbar, daß zunächst die mehratomigen Moleküle elektrolytisch dissoziieren, bei denjenigen Temperaturen aber, wo das Metall durch die bloße Wärmewirkung einatomig würde, die Ionen ihre Existenzmöglichkeit verlieren. Doch auch dies muß vorläufig eine bloß theoretische Erwägung bleiben, da man aus den bisher bekannten Tatsachen nicht leicht einen Anhaltspunkt zur Beurteilung der soeben ausgesprochenen Vermutung beibringen kann. Denn das nächstliegende Mittel, nämlich die Heranziehung des Molekulargewichtes der Metalle, muß hier versagen, da, wenn die Annahme richtig ist, daß die mehratomigen Moleküle in sehr weitgehendem Maße elektrolytisch dissoziiert sind, das Molekulargewicht immer sehr nahe dem Atomgewicht gefunden werden muß. Eher könnte vielleicht die Tatsache, daß Metalldämpfe die Elektrizität nicht wesentlich anders leiten als andere Gase, zur Bestätigung der Ansicht dienen.

Eine weitere Tatsache, die für die Gleichheit der metallischen und elektrolytischen Leitfähigkeit spricht, ist die Gleichheit des Thomson- und des Peltiereffektes sowie überhaupt der thermoelektrischen Erscheinungen zwischen Metallen und Elektrolyten und Elektrolyten untereinander. Für die letzteren, nämlich die zwischen Elektrolyten auftretenden thermoelektrischen Erscheinungen, ist es, wie Nernst gezeigt hat, möglich, auf Grund der Ionentheorie eine vollständige, auch quantitative Ableitung zu geben. Da sich nun die zwischen Metallen und zwischen Metallen und Elektrolyten auftretenden thermoelektrischen Erscheinungen durch nichts unterscheiden, erscheint es plausibel, beide auf dieselbe Ursache zurückzuführen.

Auch der von mir beobachtete Übergang zwischen metallischer und elektrolytischer Leitfähigkeit und die dabei beobachtete Koexistenz der beiden Arten von Leitfähigkeit spricht für die Ionentheorie der Metalle. Denn wenn metallische Leitfähigkeit und das Vorhandensein von Ionen zeitlich zusammenfallen können, so kann man wohl annehmen, daß die metallische Leitfähigkeit auch eine Ionenleitfähigkeit sei. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnten Ionen in einem metallisch leitenden Körper nicht existieren, da sie ihre Ladung durch die metallische Verbindung, in der sich die Ionen befinden würden,

ausgleichen müßten. Nimmt man hingegen, wie dies für die Metalle geschehen ist, an, daß die in Betracht kommenden metallischen Leiter Lösungsmittel von hoher dissoziierender Kraft sind, die eine sehr bedeutende Eigenleitfähigkeit aufweisen, so könnte man sich die beobachteten Erscheinungen etwa in der Weise erklären, daß bei niederer Temperatur die betreffenden Oxyde und Sulfide ein höheres Molekulargewicht, als ihrer Formel entspricht, aufweisen, daß aber einige ihrer aus mehreren Einzelmolekülen bestehenden Moleküle in ähnlicher Weise, wie dies für die Metallatome angenommen wurde, unter Ionenbildung in einzelne Moleküle zerfallen. Die so gebildeten Ionen wären jedes für sich noch ein ganzes Molekül und würden sich durch nichts als durch ihre Ladung voneinander unterscheiden. Ein Körper mit solchen Ionen müßte natürlich vollkommen metallische Leitfähigkeit zeigen. Würden aber einzelne Moleküle in der Weise elektrolytisch dissoziieren, daß durch die Dissoziation eines einzigen Moleküles Ionen entstehen, so wären diese Ionen natürlich materiell nicht mehr untereinander gleich, sondern würden den Ionen der gewöhnlichen Elektrolyte entsprechen und mit dem Eintritte dieser Art von Dissoziation müßten auch Merkmale elektrolytischer Leitung auftreten, da diese neugebildeten Ionen, die sich außer durch ihre Ladung auch noch materiell unterscheiden, wenigstens einen Teil des Stromtransportes übernehmen würden. Vielleicht könnte durch die bei Eintritt der elektrolytischen Leitung bestehende metallische Leitung auch das langsame Ansteigen der in den früher besprochenen Kombinationen beobachteten elektromotorischen Kräfte eine Erklärung finden. Man könnte nämlich annehmen, daß diese Kombination durch den metallischen Anteil an der Leitung der Elektrolytsubstanz eine Art Nebenschluß erhält. Für diese Auffassung kann derzeit keine weitere Stütze beigebracht werden, so daß der hier gemachte Versuch, die metallische Leitfähigkeit als Ionenleitung und die Metalle als Lösungsmittel von sehr bedeutender Eigenleitfähigkeit und hoher Dissoziationskraft, entsprechend ihrer hohen Dielektrizitätskonstante aufzufassen, vorläufig nichts weiter sein kann als eben ein Versuch. Denn wenn sich auch viele Tatsachen, speziell die früher

beschriebene gemischte Leitfähigkeit wohl besser damit erklären lassen, als dies die Elektronentheorie im stande sein dürfte, so ist doch keinesfalls ein Beweis für diese Erklärung gegeben. Insbesondere beziehen sich die hier gemachten Betrachtungen ja nur auf ein verhältnismäßig kleines Gebiet und es bleibt in dieser Richtung noch vieles zu tun übrig. Insbesondere dürften zur näheren Aufklärung Untersuchungen über die Leitfähigkeit von Lösungen von Salzen in elementaren Lösungsmitteln, wie auch Untersuchungen darüber, ob Metalle im stande sind, Metallsalze unter Eintritt elektrolytischer Dissoziation zu lösen, wesentlich beitragen. Daß Metalle überhaupt in der Lage sind, in bestimmten Fällen ihre Oxyde, Sulfide, Phosphide, Silicide, Carbide, vielleicht auch noch andere Verbindungen zu lösen, ist längst bekannt. Über den Zustand dieser Verbindungen in der metallischen Lösung hingegen ist so gut wie gar nichts bekannt.

Zusammenfassung der Resultate.

Im Anschluß an frühere Arbeiten über den metallischen und nichtmetallischen Zustand sowie über elektrolytische und metallische Leitfähigkeit, insbesondere über elektrolytische Leitfähigkeit elementarer Körper und unter Zugrundelegung einer Anzahl eigener Versuchsresultate, speziell über Körper mit gemischter Leitfähigkeit, wurde es versucht, die metallische Leitung durch eine Erweiterung der Ionentheorie zu erklären.

Die wichtigsten Versuchsresultate sind:

Der Widerstand der Kohle, der anfangs mit steigender Temperatur abnimmt, erreicht ein Minimum und nimmt dann mit zunehmender Temperatur zu.

Geschmolzener Schwefel, welcher eine geringe Leitfähigkeit besitzt, läßt bei Stromdurchgang Polarisationserscheinungen erkennen.

Schwefel kann als ionisierendes Lösungsmittel für andere Körper dienen. Elementares Jod läßt bezüglich seines elektrischen Verhaltens sowohl Eigenschaften eines metallischen wie eines elektrolytischen Leiters erkennen.

Silbersulfid zeigt bei gewöhnlicher Temperatur elektrolytische Leitfähigkeit, nimmt jedoch bei tiefen Temperaturen rein metallisches Leitvermögen an.

Schwefelkupfer erweist sich bei gewöhnlicher Temperatur als metallischer Leiter, beginnt jedoch bei höherer Temperatur elektrolytisch zu leiten.

Ähnlich wie Schwefelkupfer erwies sich auch Eisenoxyduloxyd bei gewöhnlicher Temperatur als metallischer Leiter, bei hohen Temperaturen jedoch zeigte dasselbe elektrolytische Leitfähigkeit.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXV. BAND. X. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Beitrag zur Theorie der Linde'schen Luftverflüssigungsmaschine

von

Dr. **Justus Rožič.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1907.)

In der Zeitschrift für komprimierte und flüssige Gase, Jahrgang VII (1903), erschien ein Artikel aus der Feder Pictet's, betitelt: »Die Theorie der Apparate zur Herstellung flüssiger Luft mit Entspannung«. In dieser Abhandlung gibt Pictet von der Linde'schen Luftverflüssigungsmaschine eine Erklärung, die abweichend ist von der, die Linde selbst bei Veröffentlichung seiner Maschine im Jahre 1895 publiziert hat. Es erschien seitdem keine Widerlegung in der genannten Zeitschrift. Ja, im Herbste 1905 hielt Pictet auf der Naturforscherversammlung in Meran einen Vortrag, in welchem er denselben Gegenstand behandelte und seine Behauptungen über die Linde'sche Maschine aufrecht zu erhalten suchte. Von den versammelten Physikern erklärten sich einige gegen seine Ausführungen. Von einer eingehenden Diskussion wurde wegen Mangel an Zeit Abstand genommen.

Da dieser verdienstvolle Physiker unterdessen von neuem in derselben Zeitschrift seinen Standpunkt verteidigte und so nochmals an das Urteil seiner Fachgenossen appellierte, folgte ich einer Aufforderung des Herrn Hofrates Prof. Pfaundler, die strittige Frage von anderer Seite her zu untersuchen.

Ich will zunächst den Gegensatz der beiden Theorien kurz erläutern. Zu diesem Zwecke will ich nachstehend den

Vorgang der Kompression und Entspannung mit Linde's Worten wiedergeben:

Das durch einen Kompressor vom Drucke p_1 auf den Druck p_2 und mittels eines »Kühlers« (z. B. durch Brunnenwasser) auf die Temperatur t_1 gebrachte Gas durchläuft das innere Rohr eines Gegenstromapparates und strömt alsdann durch die Mündung eines Drosselventils aus, wobei es sich um einen gewissen Betrag τ abkühlt. Mit der Temperatur $t_1-\tau$ wird es nun in dem ringförmigen, durch die beiden Rohre des Gegenstromapparates gebildeten Zwischenraume dem komprimierten Gase entgegengeführt und überträgt auf dasselbe die erlangte Temperaturerniedrigung, so daß fortdauernd die Temperaturen t_1 und $t_1-\tau$ sinken, bis Beharrungszustand eintritt — sei es durch eine kompensierende Wärmezufuhr von außen, sei es durch innen frei werdende Wärme (bei der Verflüssigung). Das Gas kehrt, nachdem es den Rücklauf durch den Gegenstromapparat vollendet hat, mit dem Drucke p_1 und einer Temperatur t_1' zum Kompressor zurück, welche der Temperatur t_1 um so näher liegt, je vollkommener der Gegenstromapparat den Wärmeaustausch vollzieht (Wiedem. Ann. Bd. 57, p. 328).

Wenn das Gas, welches kondensiert werden soll, Luft ist, geht der Vorgang tatsächlich so vor sich; nach einiger Zeit erhält man flüssige Luft in dem Sammelgefäße.

Als Ursache der Abkühlung ist von Linde die innere Arbeit angegeben worden, welche die Luft leisten muß, um die Distanz der Moleküle voneinander zu vergrößern, wenn sie sich von einem Volumen v auf ein größeres Volumen V ausdehnt.

Pictet behauptet dagegen, daß es gar keine innere Arbeit bei der Luft gebe und daß die tatsächlich eintretende Abkühlung auf eine äußere Arbeitsleistung der sich ausdehnenden Luft, indem dieselbe den äußeren Luftdruck zurückschieben muß, zurückzuführen sei.

Nun wissen wir, daß bei der Linde'schen Maschine im Sammelgefäße der Atmosphärendruck herrscht und die Luft, welche durch das Drosselventil ausströmt, sich Platz verschaffen, die Luft, die schon darin ist, hinausdrängen, also eine

Arbeit leisten muß, und zwar nach der Ansicht Pictet's auf Kosten der Wärme. Da liegt der Irrtum Pictet's.

I. Um diesen Irrtum klar zu widerlegen, will ich einen Prozeß, wie er in der Linde'schen Maschine, natürlich viel komplizierter, vor sich geht, für ein geschlossenes System durchführen.

Man denke sich einen Zylinder C mit einem Kolben K in einer Kammer AB; an dem einen Ende des Zylinders sei ein Hahn H.

Über diesen Zylinder sei ein zweiter gestülpt, der mit zwei Zuleitungsröhren versehen ist. Die gestrichelten Wände

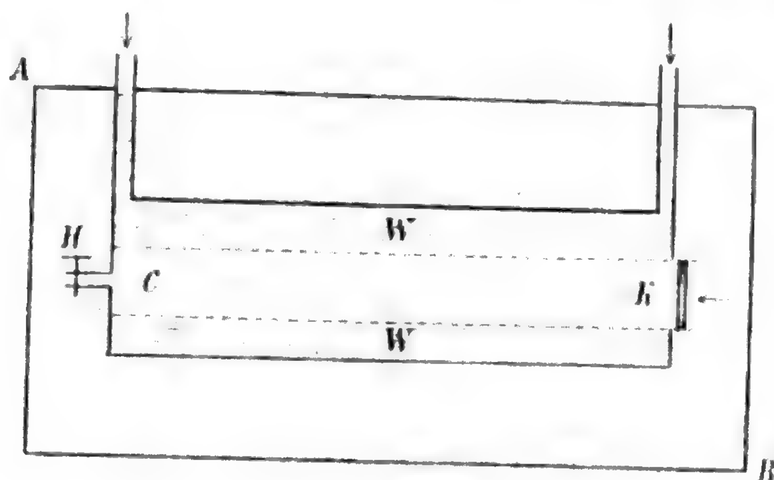


Fig. 1.

des inneren Zylinders sind aus einem sehr guten Wärmeleiter, die ausgezogenen Linien bedeuten dagegen sehr schlechte Leiter. Das Volumen der Kammer, die mit einem idealen Gase gefüllt ist, sei im Verhältnis zum Volumen des Zylinders sehr groß. Die Temperatur des Gases in der Kammer und im Zylinder sei $t°$. Um den inneren Zylinder fließe Wasser W von derselben Temperatur $t°$. Das Anfangsvolumen des im Zylinder eingeschlossenen Gases sei v_1 und der Druck p_1, derselbe Druck herrsche in der Kammer; dann haben wir Gleichgewicht und der Kolben ist in Ruhe.

Man lasse nun auf den Kolben eine Kraft wirken, welche ihn in den Zylinder hineinschiebt. Das Gas wird komprimiert und, wenn die Kompression langsam genug vor sich geht, wird sich die Temperatur des Gases nicht ändern, weil jede Temperaturerhöhung durch das Kühlwasser hintangehalten

wird. Die Kompression findet also isothermisch statt. Die dabei geleistete Arbeit ist, wenn der Enddruck im Zylinder p_2 ist,

$$A = p_1 v_1 . \lg_n \frac{p_2}{p_1}.$$

Es ist nun interessant, festzustellen, woher diese Arbeit stammt. Im ersten Augenblick wird es den Anschein haben, als hätte der Kompressor, d. i. die Kraft, die man an den Kolben angesetzt hat, allein diese Arbeit ausgeführt und so scheint sich auch Pictet die Sache vorgestellt zu haben. Dem ist aber nicht so!

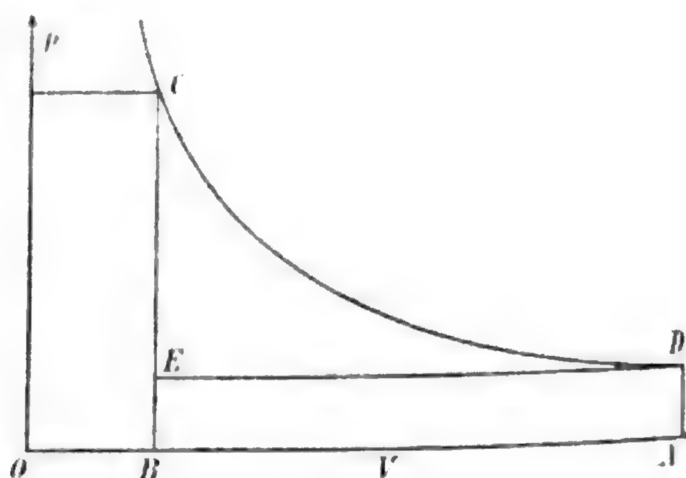


Fig. 2.

Dies läßt sich an der Hand der vorstehenden Skizze sehr leicht beweisen. Da die Kompression isothermisch vor sich geht, so ist die Zustandskurve eine Isotherme, für ein ideales Gas eine gleichseitige Hyperbel. Die bei dieser Kompression geleistete Arbeit wird durch die Fläche $AB\widehat{CD}$ dargestellt.

Nun kann man diese Fläche in zweckmäßiger Weise in zwei Teile zerlegen:

Rechteck $ABED$ und Fläche $E\widehat{DC}$.

Die Fläche $ABED$ stellt die Arbeit des Gases vom Drucke p_1 in der Kammer dar. (Wir hindern das äußere Gas an der Arbeit gar nicht; wir haben hier denselben Fall wie bei der Luftpumpe; die Luft eines zu evakuierenden Rezipienten hilft beim Auspumpen mit. Wenn man verhindern wollte, daß der Druck p_1 mithilft, so müßte man hinter dem Kolben eine

feste Wand anbringen und der Raum zwischen dieser Wand und dem Kolben müßte beim Vorschreiten des Kolbens leer bleiben.) Dabei wird angenommen, daß der Druck p_1 in der Kammer sich nicht merklich ändere, so daß DE als gerade und parallel mit AB angesehen werden kann.

Diese Fläche und dadurch dargestellte Arbeit ist:

$$A_G = p_1(v_1 - v_2).$$

Der Kompressor muß den übrigen Teil der Arbeit leisten; diese entspricht der Fläche DEC

$$A_K = p_1 v_1 \lg_n \frac{p_2}{p_1} - p_1(v_1 - v_2).$$

Die ganze Arbeit A verwandelt sich aber in Wärme und erwärmt das Kühlwasser, welches hinausfließt und die Temperatur der Kammer nicht alteriert.

Hier ist schon etwas Wichtiges zu bemerken: In dem Wasser, welches mit einer höheren Temperatur ausströmt, als es eingeströmt ist, erhalten wir außerhalb der Kammer eine größere Energiemenge, als unser Kompressor in die Kammer eingeführt hat. Das Plus rührt von der Leistung des Gases beim Drucke p_1 in der Kammer her. Es hat sich von der Temperatur T auf die Temperatur T' abgekühlt, welche bekanntlich folgendermaßen berechnet werden kann, wenn sich der Druck um dp_1 geändert hat:

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{p_1}{p_1 - dp_1}\right)^{0 \cdot 2907}$$

(adiabatische Ausdehnung und adiabatische Kompression).

Wenn man nun den Kolben festhält und den Hahn H öffnet, so wird das Gas ausströmen, den Druck in der Kammer wieder erhöhen und die ursprüngliche Temperatur wird sich in der Kammer wieder herstellen. Das Gas jedoch, welches ausströmt, wird eine Temperaturerniedrigung zeigen, entsprechend der Arbeit, die es geleistet hat. Das wäre der Vorgang, wie ihn Pictet sich vorstellt. Betrachtet man jedoch den Druck in dem Volumen v_2, so sieht man, daß er abnimmt. In der Linde'schen Maschine ist aber der Druck in der inneren

Röhre konstant; also ist dieser Vorgang nicht auf die Linde'sche Maschine anwendbar; falls man ihn aber anwendet, so ist es klar, daß man zu falschen Konklusionen kommen muß.

Wir müssen unsere ideale Maschine so einrichten, daß während des Ausströmens des Gases aus dem Volumen v_2 der Druck p_2 erhalten bleibt, d. h. wir müssen in dem Maße mit dem Kolben nachrücken, als das Gas ausströmt. Wenn das letzte Gasmolekül durch den Hahn hinausgekommen ist, muß der Kolben am Hahn angelangt sein. Während das Gas ausströmt, müssen wir mit dem Kompressor fortwährend Arbeit leisten. Da uns hiebei der Druck p_1 noch mithilft, so leistet der Kompressor allein die Arbeit

$$(p_2 - p_1) v_2,$$

das Gas in der Kammer leistet $p_1 v_2$. Das komprimierte Gas leistet hingegen bei der Expansion die Arbeit

$$p_1 v_1.$$

Es fragt sich nun, ob diese Arbeiten

$$(p_2 - p_1) v_2 + p_1 v_2 \quad \text{und} \quad p_1 v_1$$

gleich sind oder ob die Gleichung

$$p_2 v_2 - p_1 v_2 + p_1 v_2 = p_1 v_1$$

besteht.

Weil wir ein ideales Gas haben und $p_1 v_1 = p_2 v_2$ ist, so ist die dem Gas zugeführte Arbeit gleich der, welche das Gas geleistet hat, es ist also kein Grund vorhanden, daß eine Temperaturerniedrigung eintrete. Damit ist aber bewiesen, daß die Theorie Pictet's unrichtig ist. Es wird uns nie gelingen, mit der Linde'schen Maschine ein ideales Gas zu kondensieren.

II. Betrachten wir jedoch den Fall der unvollkommenen Gase, der am meisten Wichtigkeit beansprucht, weil ja die Luft, um die es sich in unserem Falle handelt, kein ideales Gas ist.

Für die Abkühlung infolge innerer Arbeit haben Joule und Thomson eine Formel aus ihren Messungen abgeleitet:

$$\Delta T = \frac{\alpha}{T^2} \Delta p.$$

ΔT ist die Temperaturerniedrigung, α ist eine von Gas zu Gas variable Konstante, T die absolute Temperatur, Δp ist der Unterschied zwischen den Drucken vor und nach der Entspannung. Diese Formel ist eine empirische und hat keine theoretische Unterlage.

Ich will nun, gestützt auf die van der Waals'sche Formel, die Abkühlung berechnen, welche ein Gas erfährt, wenn es durch die Linde'sche Maschine nach der beschriebenen Weise den Weg macht.

Wir haben zunächst:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = C = pv + \frac{a}{v} - bp - \frac{ab}{v^2}.$$

Da bp ein Korrektionsglied ist und klein gegenüber den andern Gliedern, so kann man mit geringer Vernachlässigung $bp = b\frac{C}{v}$ setzen. Wir haben dann die van der Waals'sche Gleichung in der Form:

$$pv + \frac{a}{v} - \frac{Cb}{v} - \frac{ab}{v^2} = C.$$

Daraus folgt

$$p = \frac{C}{v} - \frac{a}{v^2} + \frac{Cb}{v^2} + \frac{ab}{v^3},$$

der Druck, der in irgend einem Stadium auf dem Gas lastet.

Der Enddruck ist:

$$p_n = \frac{C}{v_n} - \frac{a - Cb}{v_n^2} + \frac{ab}{v_n^3}.$$

Um das Gas vom Volumen v_0 auf v_n zu bringen, braucht man eine äußere Arbeit

$$A = \int_{v_0}^{v_n} p\,dv.$$

Man sieht sofort, daß diese Arbeit bei verschiedenen Gasen verschieden ausfallen wird.

Wir haben für die Temperatur von 0° C. drei Haupttypen zu unterscheiden:

I. Kohlensäure, II. Luft, III. Wasserstoff.

Die Isotherme des unvollkommenen Gases schneidet im ersten Falle die des idealen Gases nicht. Sie bleibt immer unterhalb. Beim dritten Typus bleibt sie immer oberhalb. Beim

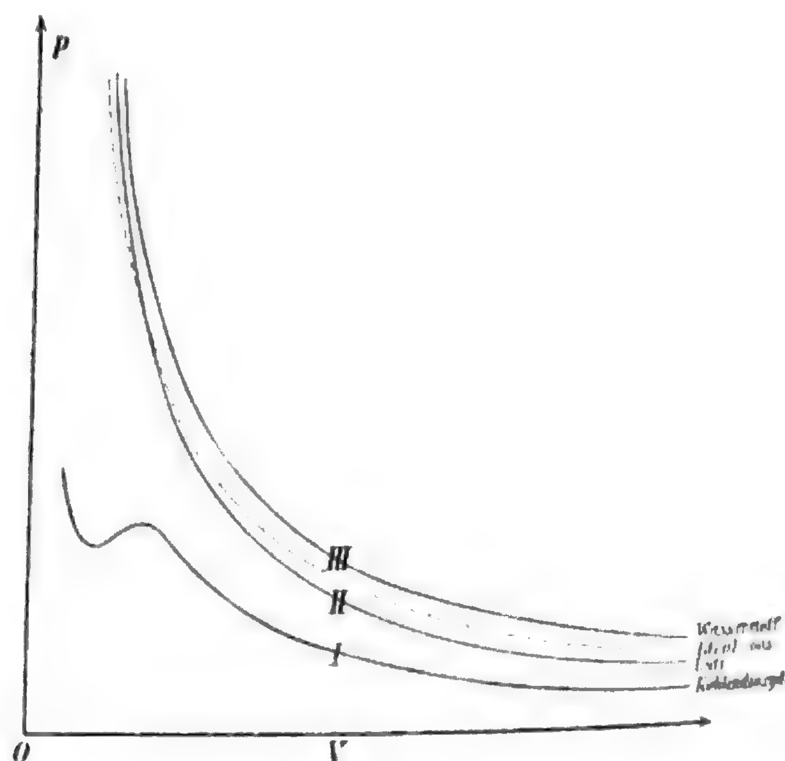


Fig. 3.

zweiten jedoch schneidet sie die ideale bei einem bestimmten Volumen. Um dieselbe Kompression hervorzubringen, wird man bei der Kohlensäure eine kleinere, beim Wasserstoff eine größere Arbeit leisten müssen wie beim idealen Gase. Für die Luft wird diese Arbeit verschieden ausfallen, je nachdem eine größere oder kleinere Kompression ausgeführt werden soll. In der Zeichnung ist die Differenz der Arbeiten durch die Fläche zwischen den Isothermen dargestellt. Die Wärmemenge, die dabei frei wird, ist aber in allen drei Fällen dieselbe.

Um den Druck p_n in der inneren Röhre der Linde'schen Maschine auf derselben Höhe zu erhalten, während das Gas am Drosselventil ausfließt, muß man eine Arbeit

$$A_1 = p_n v_n$$

leisten und dieselbe dem Gase zuführen. Wenn sich nun das Gas ausdehnt und dabei eine Temperaturerhöhung oder Erniedrigung erleidet, so wird das Volumen beim Enddruck p_0

$$v_1 = v_0(1+\alpha t)$$

sein, wobei t positiv oder negativ sein kann. Die Arbeit, die das Gas leistet, um den äußeren Druck p_0 zu überwinden, ist

$$A_2 = p_0 v_1 = p_0 v_0(1+\alpha t) = C + C\alpha t.$$

Die innere Arbeit zur Distanzvergrößerung der Moleküle ist

$$A_3 = -\int_{v_0(1+\alpha t)}^{v_n} \frac{a-Cb}{v^2}\,dv + \int_{v_0(1+\alpha t)}^{v_n} \frac{ab}{v^3}\,dv =$$

$$= \frac{a-Cb}{v_n} - \frac{a-Cb}{v_0(1+\alpha t)} - \frac{1}{2}ab\left[\frac{1}{v_n^2} - \frac{1}{v_0^2(1+\alpha t)^2}\right].$$

Wenn αt klein bleibt (bei Luft wird αt höchstens 0·18), so kann man mit geringer Vernachlässigung $\frac{1}{1+\alpha t}$ durch $1-\alpha t$ und $\frac{1}{(1+\alpha t)^2}$ durch $1-2\alpha t$ ersetzen. Es ist dann

$$A_3 = \frac{a-Cb}{v_n} - \frac{a-Cb}{v_0}(1-\alpha t) - \frac{ab}{2}\left[\frac{1}{v_n^2} - \frac{1-2\alpha t}{v_0^2}\right].$$

Die Differenz der Energien, die dem Gase zugeführt werden und vom Gase geleistet werden, wird sich als Abkühlung oder Erwärmung des Gases kundgeben.

$$A_1 - A_2 - A_3 = \frac{M.c_v.t}{J}.$$

M ist die Masse des Gases,
c_v die spezifische Wärme bei konstanten Volumen,
t Temperaturänderung,
$\frac{1}{J}$ Wärmeäquivalent.

Setzt man die Werte von A_1, A_2 und A_3 ein, so erhält man nach einer kleinen Umformung des Ausdruckes

$$t = \frac{-\frac{2(a-Cb)}{v_n} + \frac{a-Cb}{v_0} + \frac{ab}{2}\left[\frac{3}{v_n^2} - \frac{1}{v_0^2}\right]}{\frac{Mc_v}{J} - C\alpha + \frac{(a-Cb)\alpha}{v_0} - \frac{ab\alpha}{v_0^2}}.$$

Wenn $a = b = 0$ ist, so ist der Zähler gleich Null, also auch $t = 0$. Ein ideales Gas kühlt sich nicht ab. Ist a gegenüber b sehr klein, dann überwiegt das Glied $C.b$ über a, t wird positiv!

Bei der Luft tritt Abkühlung ein, wenn nicht das Volumen v_n allzu klein wird. Bei einem bestimmten v_n wird der Zähler Null und mit ihm t.

Man kann das v_n und damit p_n, bei welchem das eintritt, aus

$$-2(a-Cb)v_n - \frac{a-Cb}{v_0}v_n^2 + 3.\frac{ab}{2} - \frac{abv_n^2}{2v_0^2} = 0$$

berechnen. Es ist dies bei

$$v_n = \frac{2(a-Cb) \pm \sqrt{4(a-Cb)^2 - 6ab\left(\frac{a-Cb}{v_0} - \frac{ab}{2v_0^2}\right)}}{2\left[\frac{a-Cb}{v_0} - \frac{ab}{2v_0^2}\right]}.$$

Von größerem Interesse ist jedoch die Frage, wann ein Maximum von t eintritt. (Hier ist der absolute Wert gemeint.)

$|-t|$ wird ein Maximum, wenn der Zähler ein Minimum wird, da der Nenner für eine bestimmte Temperatur konstant ist.

$$K.\frac{dt}{dv} = 2(a-Cb)\frac{1}{v_n^3} - \frac{3ab}{v_n^3} = 0.$$

$$v_n = \frac{3ab}{2(a-Cb)}.$$

Zu v_n läßt sich der dazu gehörige Druck p_n berechnen, bis zu welchem man in der Praxis gehen darf, um die größtmögliche Abkühlung zu erreichen.

Linde sagte über die Berechnung der Abkühlung: »Die Angaben, welche von Thomson und Joule für die Abkühlung ausströmender atmosphärischer Luft gemacht wurden, wonach dieselbe beträgt:

$$t = 0{\cdot}276(p_n - p_0)\left(\frac{273}{T}\right)^2,$$

finden sich durch die vorliegenden Versuche innerhalb weiter Grenzen bestätigt, insbesondere bezüglich der Abhängigkeit der Abkühlung t von der Ausflußtemperatur T« (Wied. Ann., 57).

Ich glaube hier bemerken zu müssen, daß diese »weiten« Grenzen nicht zu weit gehen. Pictet wendet diese Formel auf die absolute Temperatur 132° an und erhält

$$t = (250-1)\,0{\cdot}276\left(\frac{273}{132}\right)^2 = 294°.$$

Mit Recht fragt hier Pictet, wie es möglich ist, daß eine so kolossale Differenz, die mit allen Erfahrungen vollständig im Widerspruche steht, nicht sofort bei Gelehrten, die an Arbeiten und Untersuchungen auf diesem Gebiete gewöhnt waren, Zweifel erregt hat?

Die vorliegende, aus der van der Waals'schen Gleichung abgeleitete Formel berücksichtigt auch die Abhängigkeit von der Temperatur, obwohl dies mehr versteckt ist. Es liegt im C. C hängt von der Temperatur ab. Mit steigender Temperatur wird C größer. Wenn man aber in der Abkühlungsformel C wachsen läßt, so wird t kleiner.

Zusammenfassung.

I. Die Verflüssigung der Luft in der Linde'schen Maschine erfolgt durch Verbrauch innerer Arbeit; Pictet irrt, indem er sie der Ableistung einer äußeren Arbeit zuschreibt.

II. Die Formel von Thomson und Joule, welche Linde zur Berechnung der Abkühlung verwendet, hat keine allgemeine Gültigkeit, besonders für Gase vom Typus der Luft. An ihre Stelle ist die vorliegende zu setzen oder eine andere aus einer genaueren Zustandsgleichung abzuleiten.

Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen

von

August Grau und **Franz Russ.**

Aus dem Technologischen Gewerbemuseum in Wien.

(Mit 4 Tafeln und 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1906.)

Einleitung und Thema.

Die Bildung von Stickoxyd aus den Elementen der Luft im elektrischen Flammenbogen gehört heute zu den technisch bedeutsamsten Reaktionen, weil damit einer der gangbaren Wege, den atmosphärischen Stickstoff nutzbar zu verwerten und somit der drohenden Salpeternot zu begegnen, gewiesen ist. Die hervorragende Wichtigkeit dieser praktisch nur bei sehr hohen Temperaturen verlaufenden Reaktion gab den Anstoß zu einer Reihe von Experimentaluntersuchungen und theoretischen Überlegungen, die gerade in letzter Zeit von verschiedener Seite zusammenfassend behandelt wurden, so daß auf eine vollständige Wiedergabe der Literatur an dieser Stelle verzichtet werden kann.[1]

Die ersten Arbeiten auf dem Gebiete der elektrischen Luftverbrennung hatten ein Tatsachenmaterial ergeben, das ohne Kenntnis der in dieses Gebiet fallenden späteren Untersuchungen

---

[1] Vergl. z. B. den Vortragszyklus über die Aktivierung von Stickstoff auf der XIII. Hauptversammlung der Deutschen Bunsengesellschaft. Zeitschrift für Elektrochemie, *12*, 525 (1906); ferner Brode, »Über die Oxydation des Stickstoffes in den Hochspannungsflammen«, Halle a. d. S., 1905.

sich nur schwierig zusammenfassen ließ. Es lag dies an der Anwendung rein empirischer Arbeitsmethoden. Von den Arbeiten dieser Gruppe ist jedenfalls jene von Mac Dougall und Howles[1] die fruchtbringendste gewesen. Von wissenschaftlichen Grundsätzen ausgehend, haben zuerst Muthmann und Hofer[2] das Problem der Luftverbrennung einer experimentellen Untersuchung unterzogen, welche in erster Linie auf die Ermittlung des Stickoxydgleichgewichtes in der Hochspannungsflamme hinzielte. Wenn sich auch späterhin ergab, daß die gefundene Beziehung zwischen Temperatur und Stickoxydgleichgewicht den wahren Werten nicht entsprach, so hat dennoch diese Arbeit überaus aufklärend gewirkt, indem hier zum ersten Male die Vorgänge im Flammenbogen vom Standpunkte der Thermodynamik betrachtet wurden. Durch eine Arbeit von Nernst,[3] auf die wir weiter unten zu sprechen kommen, war das Stickoxydgleichgewicht bis 3200° T auf Grund experimenteller Ergebnisse ermittelt worden. Das Gleichgewicht bei noch höheren Temperaturen, wie sie z. B. im elektrischen Flammenbogen vorliegen können, ließ sich hienach rechnerisch ermitteln, insoweit dies unsere mangelhaften Kenntnisse über die physikalischen Konstanten der Gase bei hohen Temperaturen gestatten. Diese Arbeit erhielt eine wertvolle Ergänzung durch die Untersuchungen Jellinek's[4] über die Zersetzungsgeschwindigkeit von Stickoxyd und Abhängigkeit derselben von der Temperatur. Brode[5] hat eine zusammenfassende Darstellung der bisherigen Verfahren der elektrischen Luftverbrennung gegeben und auf Grund eigener Versuche eine Reihe wertvoller Schlüsse gezogen.

Auf Grund der Nernst'schen Ergebnisse und auf Grund der durch Versuche an Flammenbogen gewonnenen Resultate (wobei die aus der Technik der Luftverbrennung herangezogenen Zahlen

---

[1] Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society (IV.), 44 (1900).

[2] Ber. der Deutschen chem. Ges., *36*, 438 (1903).

[3] Göttinger Nachrichten, 1904, Heft 4. — Zeitschrift für anorg. Ch., *49*, 213 (1906).

[4] Zeitschrift für anorg. Ch., *49*, 229 (1906).

[5] L. c., 1905.

nicht immer die verläßlichsten waren), schritt man an die Berechnung der theoretischen Ausbeute an Stickoxyden für die Einheit der aufzuwendenden elektrischen Arbeit.[1] Diese Rechnungen basieren auf der Annahme einer nur thermischen Wirkung des Flammenbogens und führen zu Ergebnissen, welche bisher von der Technik nicht erreicht werden konnten.

Experimentelle Untersuchungen über das Ausbringen von Stickoxyd für die Einheit der aufzuwendenden elektrischen Energie sind bisher nicht veröffentlicht worden. Aber gerade diese Beziehung ist es, welche für die industrielle Verwertung der Luftverbrennung in erster Linie in Betracht kommt. Von diesem Gesichtspunkt aus wurde die vorliegende Arbeit in Angriff genommen.

Der Weg, den wir einschlugen, basierte auf den bisherigen Kenntnissen der Ermittlung von Gasgleichgewichten und wir versuchten dieselben auf die Vorgänge in der Hochspannungsflamme zu übertragen.

Die Theorie der Stickoxydbildung und die sich hieraus ableitenden Grundsätze für die industrielle Luftverbrennung sind auf Grund der oberwähnten experimentellen Arbeiten in ausgezeichneter, zusammenfassender Weise von F. Haber[2] gegeben worden.

Wir können uns daher im folgenden um so eher kurz fassen, da durch ähnliche Betrachtungen von Biltz,[3] Bodenstein,[4] Guye,[5] Foerster[6] u. a. die Verknüpfung zwischen Theorie und Technik der Luftverbrennung in die weiteste Öffentlichkeit drang.

Der Luftverbrennung liegt die Reaktion



$$N_2 + O_2 \rightleftarrows 2\,NO$$

zu Grunde.

---

[1] Haber, Thermodynamik technischer Gasreaktionen, p. 250.

[2] Thermodynamik technischer Gasreaktionen. München und Berlin 1905.

[3] Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, *2*, 205 (1905).

[4] Zeitschrift für angew. Chemie, *19*, 14 (1906).

[5] Chemische Industrie, *29*, 85 (1906).

[6] Zeitschrift für Elektrochemie, *12*, 529 (1906).

Die Bildung des Stickoxyds aus seinen Elementen ist ein endothermer Prozeß, dessen Wärmetönung nach Berthelot



$$N + O = NO - 21600 \text{ cal.}$$

beträgt.

Zwei Beziehungen sind es nun, die das Stickoxydgleichgewicht überblicken lassen. Das Gleichgewicht bei einer Temperatur ist durch das Massenwirkungsgesetz geregelt, das in unserem Falle die Gestalt annimmt:

$$\frac{C_{NO}}{C_{N_2}^{1/2} \cdot C_{O_2}^{1/2}} = k \quad \text{oder} \quad \frac{p_{NO}}{p_{N_2}^{1/2} \cdot p_{O_2}^{1/2}} = k,$$

wo C und p die Konzentrationen, beziehungsweise Partialdrucke der reagierenden Stoffe und k die Gleichgewichtskonstante sind. Wir beziehen im folgenden die Gleichgewichtskonstante nach einem Vorschlage Haber's auf die Bildung von einem Mol. NO, weil hiedurch dieselbe übersichtlichere Werte annimmt.

Die zweite Beziehung ermöglicht, die Änderung der Gleichgewichtskonstanten mit der Temperatur auf rechnerischem Wege zu ermitteln, und zwar auf Grund der van't Hoff'schen Näherung

$$\frac{d \ln k}{dT} = -\frac{Q}{RT^2},$$

in welcher Q die Wärmetönung der Reaktion, R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur bedeuten.

Die Verknüpfung beider Beziehungen gestattet nun, bei Vernachlässigung der Änderung der Wärmetönung mit der Temperatur, durch wenige bei verhältnismäßig niederen Temperaturen ausgeführten Gleichgewichtsbestimmungen das Gleichgewicht auch bei höheren Temperaturen kennen zu lernen.

Diesen Weg hat Nernst[1] eingeschlagen, indem er bei Temperaturen zwischen 1800° T und 2200° T die Gleichgewichtskonstante der Luftverbrennung im Iridiumofen experi-

[1] Göttinger Nachrichten, 1904, Heft 4. — Zeitschrift für anorg. Chemie, *49*, 213 (1906).

mentell festlegte. Doch ist zu bemerken, daß er bei seinen Versuchen das Gleichgewicht nicht erreichen konnte. Dessen Kenntnis erhielt er aber durch eine Überlegung, zu der er die Werte der Reaktionsgeschwindigkeiten (Bildungs- und Zerfallsgeschwindigkeit) benützte. Für die Ermittlung des Gleichgewichtes bei 3000° zog er die Explosionsversuche von Bunsen über stickstoffhaltiges Knallgas heran. Haber hat an die Nernst'schen Zahlen eine weitere Überlegung geknüpft, welche zu höheren negativen Wärmetönungen bei Ansteigen der Temperatur führt, woraus weiterhin folgt, daß die spezifische Wärme des Stickoxyds größer als die seiner Bestandteile ist, was auch durch Regnault's Bestimmungen gestützt wird. Haber empfiehlt daher am Schlusse seiner Betrachtung den Ausdruck

$$A = Q - RT \ln \frac{p_{NO}}{p_{N_2}^{1/2} \cdot p_{O_2}^{1/2}} + 2 \cdot 45\, T,$$

wobei A im Gleichgewichte Null ist. Dieser Ausdruck wird den Nernst'schen Beobachtungen am meisten gerecht.

An dieser Stelle sei auf das Nernst'sche Wärmetheorem[1] verwiesen, das die Berechnung eines chemischen Gleichgewichtes aus thermischen Messungen gestattet, wodurch die bisher von der Theorie verlangte eine analytische Bestimmung zur Festlegung der Gleichgewichtskonstanten bei einer beliebigen Temperatur entfällt. Im Falle des Stickoxydgleichgewichtes ist die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung nur annähernd, was nach Nernst auf die Unsicherheit der Kenntnis der Dampfspannungskurve des Stickoxyds zurückzuführen ist.

Die experimentelle Ermittlung des Stickoxydgleichgewichtes im elektrischen Flammenbogen begegnet großen Schwierigkeiten.

Die Form, in welcher der Flammenbogen zur Untersuchung bisher benützt wurde, war die zwischen horizontalen Elektroden brennende Hochspannungsflamme, wie dies Fig. 1 darstellt.

---

[1] Göttinger Nachrichten, 1906, Heft 1, p. 26.

Die großen Temperaturunterschiede zwischen Flamme und umgebender Luft reißen dieselbe nach aufwärts, so daß selbst in einem geschlossenen Gefäße sehr bedeutende Luftströmungen stattfinden. Ermittelt man die Gaszusammensetzung nach dem Abstellen der Flamme oder so, daß man während des Brennens der Flamme die durch diese geströmte Luft absaugt, so liegen die gefundenen Werte unter den wahren Gleichgewichtswerten, und zwar entsprechen sie jenen Temperaturen, bei denen das Gleichgewicht »hängen« geblieben ist. Während so das Gleichgewicht zu Ungunsten der wahren Werte verschoben wird, tritt aber ein zweiter wesentlicher Faktor hinzu, der die auf diesem Wege ermittelten Werte den wahren Werten nähert. Es ist dies die Diffusion, deren Einfluß auf das chemische Gleichgewicht Nernst[1] in einer Arbeit: »Chemisches Gleichgewicht und Temperaturgefälle« einen allgemeinen quantitativen Ausdruck verlieh. Diese Nernst'sche Betrachtung hat Haber[2] auf das Stickoxydgleichgewicht in der Hochspannungsflamme übertragen. Auf Grund seiner Betrachtungen ergibt sich, daß jede Kühlung der Flamme eine Erhöhung der Stickoxydkonzentration hervorruft, wie dies auch experimentell von Brode[3] festgestellt wurde. Denn in diesem Falle wird die Diffusion, welche das Stickoxyd aus der Flamme, Luft aber in die Flamme treibt, bei den niederen Werten der Zerfallgeschwindigkeit bewirken, daß die Zusammensetzung im Abkühlungsgebiete dem in der Flamme nahe kommt. Wird eine Kühlung der Flamme unterlassen, so werden die gefundenen Zusammensetzungen von den in der Flamme vorhandenen um so mehr abweichen, je geringer das Temperaturgefälle ist. Nun sind alle Beobachtungen mit Ausnahme des einen oder anderen Versuches von Brode ohne Kühlung der Flamme vorgenommen worden, so daß zu erwarten war, daß diese Werte unter den wahren Werten liegen.

Es handelte sich bei unseren Versuchen zunächst um die Ermittlung des Stickoxydgleichgewichtes in der Flamme selbst

[1] Boltzmann-Festschrift (1904), p. 905.
[2] Thermodynamik, p. 246.
[3] Brode, p. 53.

bei verschiedenen Temperaturen. Es wäre in jeder Beziehung wichtig gewesen, für die im Flammenbogen herrschenden Temperaturen sichere Werte zu erhalten, um aus diesen und der Änderung der Gleichgewichtskonstanten die Frage nach der thermischen Wirkung des Bogens zu entscheiden.

Die Beziehung zwischen Temperatur und aufzuwendender elektrischer Arbeit hätte dann in Verknüpfung mit der erstgenannten Beziehung ein Bild der Ökonomie der Luftverbrennung gegeben. Nachdem aber die verschiedensten Methoden der Temperaturbestimmung an einem auch durch Luminiszenz leuchtenden Bogen keineswegs sichere Resultate ergeben und Differenzen von 100° bis 200° in der Temperaturbestimmung schon eine bedeutende Verschiebung des Stickoxydgleichgewichtes in diesen Temperaturgebieten hervorrufen, wurde dieser Weg nicht betreten. Es wurde vielmehr die sekundäre Stromstärke und Spannung, beziehungsweise der aufzuwendende Effekt als meßbare, veränderliche Größe eingeführt.

Die Anforderungen, welche die Theorie an die experimentelle Ermittlung von Gasgleichgewichten stellt, ergeben sich aus den Nernst'schen[1] Betrachtungen und sie gehen dahin, die Gase aus der Flamme selbst mit Hilfe eines womöglich kapillaren und gekühlten Rohres abzusaugen, wobei die Geschwindigkeit des Absaugens bis zu jener Grenze getrieben werden muß, jenseits welcher sich die Gaszusammensetzung nicht mehr ändert. Wir mußten aber bald nach den ersten Versuchen, die wir an einem horizontalen Bogen unternahmen, erkennen, daß kurze Bögen, wie sie bisher verwendet wurden, der experimentellen Ermittlung des Gasgleichgewichtes nicht zugänglich sind, infolge Zurückweichens des Bogens vor dem gekühlten Kapillarrohr. Auch wird durch das Flackern des Bogens unverbrannte Luft mitgesaugt.

Da wir über einen Transformator höherer Spannung verfügten, gelang es uns leicht, Bogen größerer Länge zu erzeugen, welche aber ebenfalls aus den vorstehend angeführten Gründen für eine exakte experimentelle Behandlung der uns vorschwebenden Fragen untauglich waren.

[1] Boltzmann-Festschrift, l. c.

Die Einführung eines Kunstgriffes ließ sodann eine sehr einfache Behandlung des Bogens zu. Wir beobachteten zunächst, daß bei vertikaler Stellung der Elektroden die Flamme, wie zu erwarten, nur wenig abgelenkt wird, da die nach aufwärts gerichtete Luftströmung dieselbe in ihrer Stabilität unterstützt. Indem wir dann den Bogen zunächst in ein 9 *mm* weites Quarzrohr einschlossen, erhielten wir eine vollkommen ruhige Flamme, wie dies Fig. 2 zeigt und an der die einzelnen, bereits von Brode angeführten Zonen vollkommen klar zu unterscheiden waren. An Stelle des Quarzrohres konnte ein wassergekühltes Glasrohr gesetzt werden.

Wie Haber[1] bei der Ermittlung des Wassergasgleichgewichtes in der Bunsenflamme zeigte, so konnte auch hier ebenso leicht eine wassergekühlte Platinkapillare eingeführt werden, mit deren Hilfe sich das Gas aus den verschiedenen Zonen der Hochspannungsflamme absaugen ließ. Diese Anordnung, welche wir im experimentellen Teile näher beschreiben werden, stellt eigentlich einen durch Innenheizung auf sehr hohe Temperaturen geheizten Ofen, beziehungsweise Reaktionsraum dar, welcher zur Durchführung von Gasreaktionen benützt werden kann und noch den besonderen Vorteil besitzt, daß die Ofenwände infolge ihrer niederen Temperatur keinen Einfluß auf die Gasreaktion ausüben, gasundurchlässig und durchsichtig sind, was unter Umständen besonders wertvoll sein kann. (Tafel 3 und 4.)

[1] Zeitschrift für anorg. Chemie, *38*, 17 (1904).

Experimenteller Teil.

A. Elektrische Messungen.

1. Der zur Verbrennung der Luft verwendete elektrische Flammenbogen wurde von dem Strom eines Hochspannungstransformators erzeugt, welcher eine Kapazität von 8 Kilowatt besaß. Durch die vorhandene Unterteilung der primären und sekundären Wicklung konnte der Transformator infolge der geänderten Umsetzungsverhältnisse mit Spannungen von 25.000, 50.000 und 100.000 Volt arbeiten.

Nachdem die Primärspannung des Wechselstromes 100 Volt betrug, so ergeben sich die Umsetzungsverhältnisse mit 1 : 250, 1 : 500 und 1 : 1000.

Entsprechend bemessene, in den Niederspannungskreis eingeschaltete Widerstände gestatteten die jeweilig verwendete Spannung zu variieren und die Sekundärstromstärke auf einem bestimmten konstanten Wert zu erhalten.

2. Der zwischen zwei horizontalen Elektroden gebildete Flammenbogen (Fig. 1) stellt sich so dar, als ob zwei durch horizontal liegende Einlochbrenner austretende Gasflammen gegeneinander gerichtet wären. Diese Erscheinung hat ihren Grund in dem Überdrucke des infolge der hohen Temperatur an den Elektroden gebildeten Elektrodendampfes gegen das umgebende Gas. Infolge dieses Überdruckes ergießt sich der Dampfstrom von beiden Elektroden in den zwischen ihnen gebildeten Raum.[1]

An diesem Flammenbogen lassen sich die bereits von Muthmann und Hofer und Brode beschriebenen charakteristischen drei Zonen deutlich unterscheiden.

Es ist wahrscheinlich, daß die Temperatur des innersten Bogenkernes höher ist als die der außerhalb liegenden, ihn umgebenden Mäntel. Da die im Flammenbogen sich einstellende Stickoxydkonzentration von der Temperatur desselben abhängt, so müßte die Konzentration an Stickoxyd im Bogenkerne größer sein als in den ihn umschließenden Zonen.

---

[1] Dewar, Proceedings of the Royal Society, 1882, XXXIII, 262.

Um dieses Gleichgewicht zu ermitteln, wurde versucht, das im Bogenkerne befindliche Gas mit Hilfe einer wassergekühlten Platinkapillare abzusaugen.

3. Da jedoch der zwischen horizontalen Elektroden brennende Flammenbogen (Fig. 1) durch die Luftströmungen stark flackerte, wodurch eine genaue Einstellung der Kapillare in die gewünschte Zone einerseits und genaue elektrische Messungen andrerseits unmöglich waren, so wurden Versuche mit vertikal gestellten Elektroden vorgenommen.

Obwohl dieser vertikale Bogen eine bedeutende Verbesserung der früheren Versuchsanordnung darstellte, so war er doch gegen seitlich auftretende Luftströmungen noch sehr empfindlich. Um auch diese auszuschließen, wurde der Bogen von einem nicht zu weiten (in unserem Falle 9 *mm*) Quarzrohr umgeben (Fig. 2).

Jetzt waren seitliche Luftströmungen vermieden; die erwärmte, nach aufwärts steigende Luft wirkte stabilisierend auf den Bogen und derselbe entwickelte sich zu einem konstanten Gebilde.

Da sich das Rohr durch die hohe Temperatur bedeutend erhitzte, so daß es stellenweise zu einer Entglasung und somit Trübung desselben kam, solche Röhren auch bedeutendere Beträge erfordern, wir aber wegen Beobachtung der Vorgänge im Bogen auf durchsichtiges Material bedacht sein mußten, so versuchten wir, den Bogen in Glas einzuschließen. Die Wahrnehmung, daß Glas bei diesen Temperaturen zum Elektrizitätsleiter wird, sowie das Verhalten des Flammenbogens, kalten Körpern auszuweichen, veranlaßte uns, das Rohr mit einem zweiten zu umgeben und das Innenrohr durch fließendes Wasser zu kühlen.

Diese Glasgefäße, welche behufs Einführung der Kapillare in den Bogen eine seitliche Öffnung besaßen, bewährten sich sehr gut.

Wurden die beiden einander gegenüberstehenden Gefäßöffnungen durch Stöpsel, welche die Elektroden durchließen, geschlossen und in dem unteren Stöpsel ein Luftzuführungsrohr eingepaßt, so konnte durch die seitlich luftdicht eingesetzte

und in das Bogeninnere hineinragende, gekühlte Platinkapillare das Gas aus dem Bogen abgesaugt werden (Fig. 3 und Tafel 3 und 4).

Das absolut ruhige Verhalten des so eingeschlossenen Bogens sowie die genaue Ermittlung der Länge desselben ließ die elektrischen Messungen als ziemlich verläßlich erscheinen.

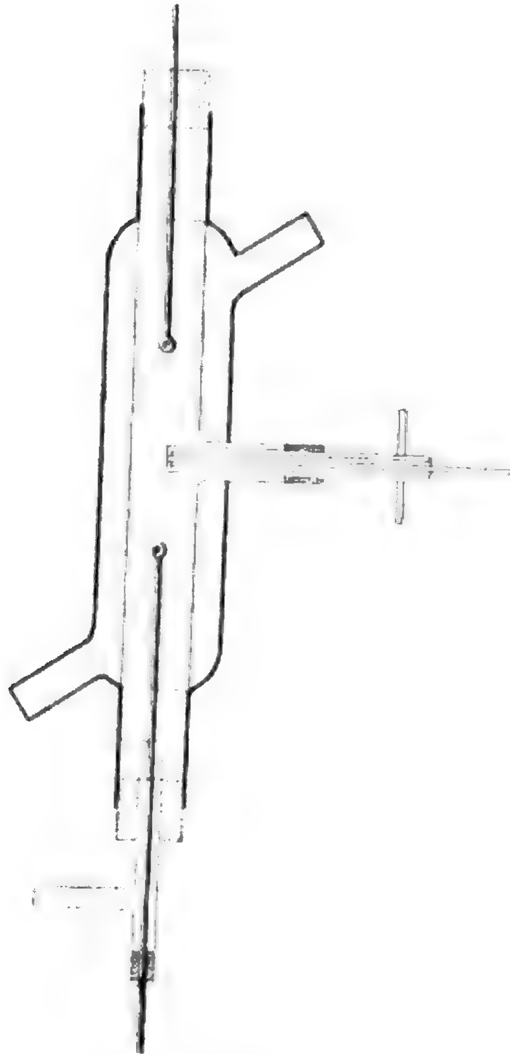


Fig. 3.

4. Guye und Monasch[1] haben die Beziehung zwischen Bogenlänge und Elektrodenspannung bei verschiedenen Stromstärken bis zu Elektrodenentfernungen von 11 *mm* für Metallelektroden ermittelt und gefunden, daß sich diese Beziehungen

[1] Eclairage Elect., *34*, 305 (1903). — Monasch, Der elektrische Lichtbogen, *76* bis *78*, Berlin 1904.

in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem durch gerade Linien darstellen lassen, wenn man die Spannungen als Ordinaten und die Elektrodenentfernungen als Abszissen aufträgt.

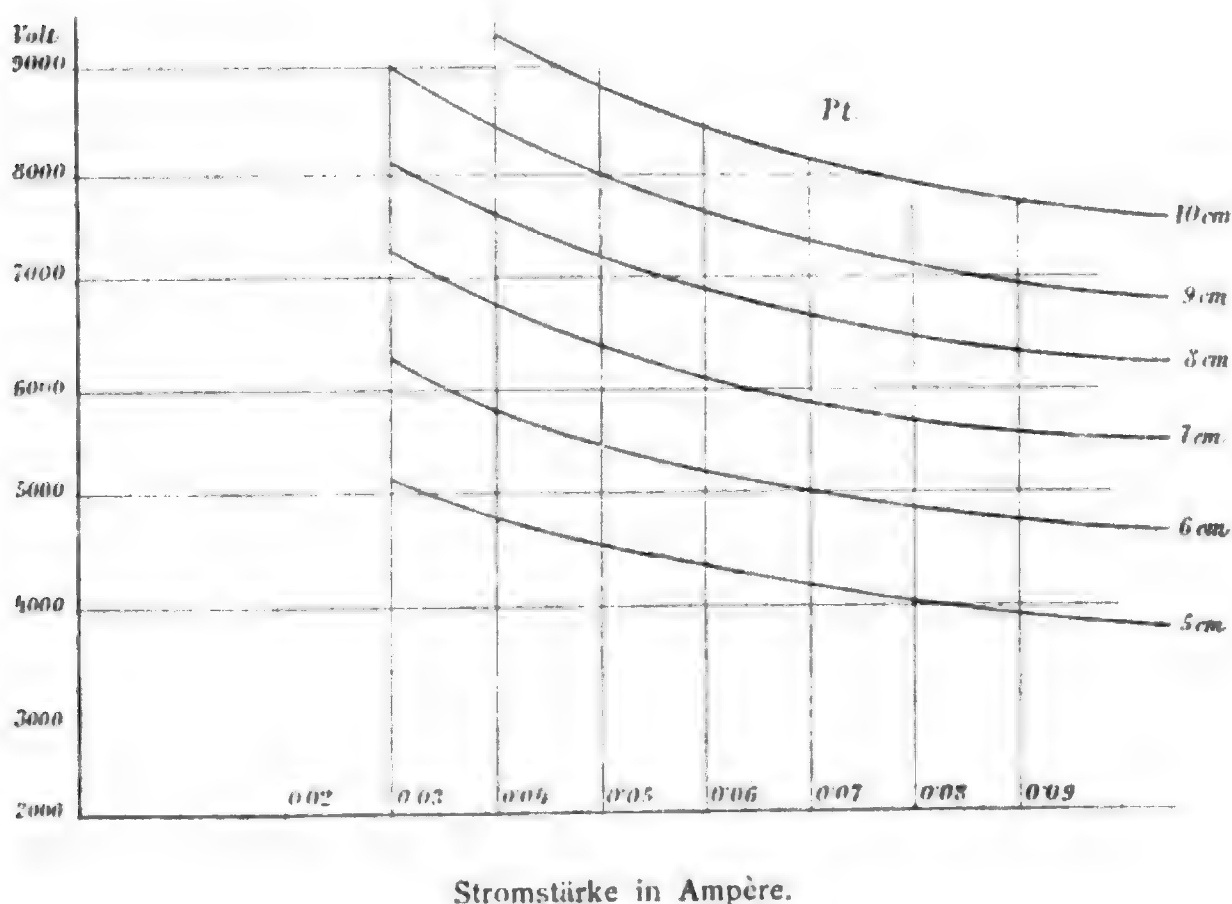
Die Absicht, bei unseren Versuchen Flammenbogen von 40 bis 100 *mm* Länge zu verwenden, veranlaßte uns, da die vorhin angeführten Versuche sich nur auf Bogenlängen von 11 *mm* erstreckten, Messungen bei größeren Elektrodenentfernungen und mit verschiedenem Elektrodenmaterial durchzuführen, um feststellen zu können, ob die von Guye und Monasch bei Bogen bis zu 11 *mm* zwischen Metallelektroden gefundene Gesetzmäßigkeit auch für diese langen Bogen besteht und welche Differenzen die verschiedenen Materialien verursachen würden.

5. Entsprechend der Entwicklung der vorliegenden Arbeit wurden diese Messungen zuerst an horizontal gestellten Elektroden durchgeführt, und zwar mit Elektroden aus Platin, Nickel, Kupfer, Silber und Zink.

Zu diesem Zwecke waren auf einem Grundbrette zwei vertikale Glassäulen befestigt, welche an ihren oberen Enden je ein geschlitztes, horizontal liegendes Messingrohr trugen, in welchem ein mit einer isolierenden Handhabe versehener Messingstab verschoben werden konnte. Die einander zugekehrten Enden der Messingstäbe waren mit Schraubengewinden versehen, welche die Verbindung mit den Ansatzstücken herstellten, in welchen die jeweiligen Elektroden eingesetzt waren. Die Elektroden hatten 4 *cm* Länge und 2 *mm* Durchmesser und bestanden, wie bereits bemerkt, aus Platin, Nickel, Kupfer, Silber und Zink. Die Entfernung der beiden Elektrodenenden, welche halbkugelförmig abgerundet waren, wurde mittels Schublehre bestimmt.

Diese beiden Elektroden waren an die Hochspannungswicklung des Transformators angeschlossen und es wurden die Spannung an den Elektroden mittels eines elektrostatischen Voltmeters, welches bis 15000 Volt reichte, und die Stromstärke im Hochspannungskreise mit einem besonders konstruierten Ampèremeter, welches einen Meßbereich von 0·01 bis 0·1 Ampère hatte, und Stromänderungen von 0·001 Ampère im oberen Bereiche der Skala abzulesen gestattete, ermittelt.

Die Messungen wurden für die verschiedenen angegebenen Materialien sowie für die verschiedenen Elektrodenentfernungen von 50 bis 100 *mm* durchgeführt. Diese Meßresultate sind in den nachfolgenden Tabellen zusammengestellt. Aus den so erhaltenen Werten wurden die sogenannten charakteristischen Kurven oder statistischen Charakteristiken, wie sie Simon



Stromstärke in Ampère.

Fig. 4.

nennt, entwickelt, wobei die Stromwerte als Abszissen, die zugehörigen Spannungen als Ordinaten in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eingetragen wurden (Fig. 4 zeigt diese Verhältnisse bei Platin).

Aus dem Verlaufe der Kurven ergibt sich, daß bei immer mehr anwachsendem Strome die zugehörigen Spannungswerte fallen und somit, bei entsprechender Erhöhung des Stromes, in den Bereich der sogenannten »Niederspannung« gelangen können.

Tabelle 1.

Bogen zwischen horizontalen Platinelektroden.

(Fig. 4 und 5.)

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter					
	5	6	7	8	9	10
0·03 Ampère	5050	6250	7200	8050	9000	—
0·04	4800	5800	6700	7600	8400	9200
0·05	4600	5550	6400	7200	8000	8800
0·06	4400	5300	6100	6900	7700	8500
0·07	4250	5050	5850	6600	7300	[illegible]
0·08	4100	4900	5650	6400	7100	7850
0·09	4000	4800	5550	6250	6950	7700
0·10	3900	4700	5450	6150	6850	7600

Tabelle 2.

Bogen zwischen horizontalen Silberelektroden.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter					
	5	6	7	8	9	10
0·04 Ampère	4700	5600	6500	7300	8250	9200
0·05	4450	5300	6150	6950	7750	8650
0·06	4250	5000	5850	6550	7300	8150
0·07	4100	4800	5550	6250	6950	7700
0·08	3900	4600	5250	5950	6650	7400
0·09	3800	4400	5050	5650	6350	7100
0·10	3650	4250	4850	5500	6200	6900

Tabelle 3.

Bogen zwischen horizontalen Kupferelektroden.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter					
	5	6	7	8	9	10
0·04 Ampère	4900	5800	6700	7500	8250	9050
0·05	4700	5550	6350	7200	7900	8600
0·06	4450	5300	6150	6900	7550	8300
0·07	4250	5100	5900	6650	7300	8000
0·08	4150	4950	5700	6400	7050	7700
0·09	4000	4750	5500	6200	6800	7450
0·10	3900	4600	5300	6000	6550	7300

Tabelle 4.

Bogen zwischen horizontalen Nickelelektroden.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter					
	5	6	7	8	9	10
0·04 Ampère	4800	5650	6500	7350	8100	8850
0·05	4550	5350	6250	7050	7800	8550
0·06	4300	5100	5950	6800	7550	8250
0·07	4100	4900	5700	6500	7250	7950
0·08	3900	4650	5500	6300	7000	7700
0·09	3800	4500	5300	6100	6800	7400
0·10	3650	4350	5100	5850	6500	7200

Es muß noch bemerkt werden, daß die in den Tabellen angegebenen Werte die Mittel aus mehreren Versuchsreihen darstellen. Werden bei einer und derselben Stromstärke die Elektrodenentfernungen als Abszissen, die Spannungen als Ordinaten eingetragen, so erhält man für die Beziehung zwischen Spannung und Elektrodenentfernung gerade Linien (Fig. 5 zeigt diese Beziehung bei Platinelektroden).

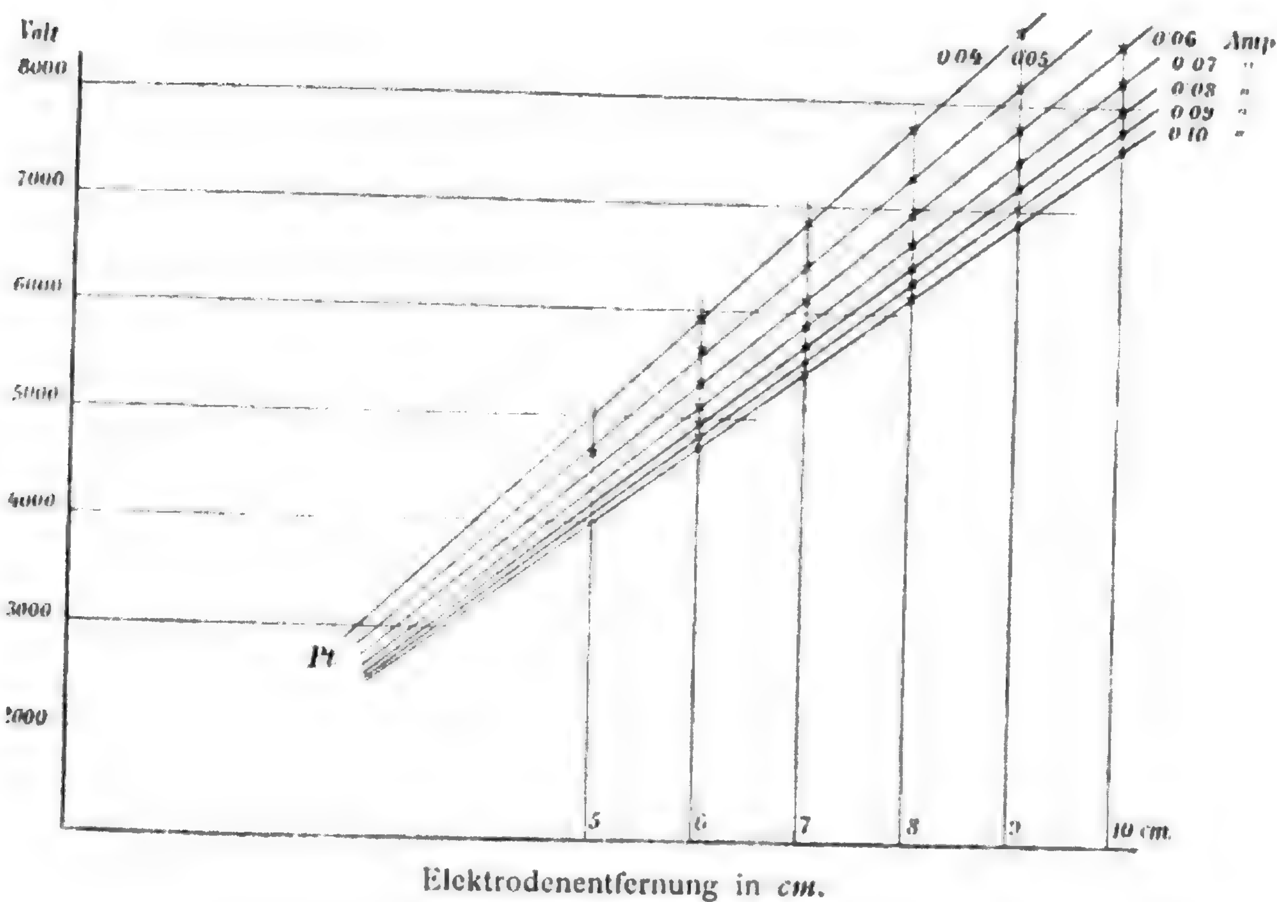
Tabelle 5.

Bogen zwischen horizontalen Zinkelektroden.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter					
	5	6	7	8	9	10
0·04 Ampère	4700	5600	6400	7150	7900	8800
0·05	4400	5250	6100	6800	7550	8400
0·06	4150	5000	5750	6500	7250	8000
0·07	3900	4700	5500	6200	6900	7650
0·08	3750	4500	5200	5900	6600	7300
0·09	3550	4250	4900	5650	6300	6950
0·10	3350	4000	4650	5400	6000	6600

Wenn man die in den Tabellen 1, 2, 3, 4, 5 erhaltenen Werte graphisch darstellt, so sieht man, daß bei ein und derselben Stromstärke die bei den verschiedenen Elektrodenmaterialien erforderlichen Spannungen verschieden sind und daß sich diese Verschiedenheit um so stärker ausdrückt, je größer die Elektrodenentfernung und je stärker der Strom ist. In Fig. 6 sind die für 0·04 und 0·10 Ampère bei den verschiedenen Materialien notwendigen Spannungswerte herausgehoben und zur Darstellung gebracht. Platin erfordert die höchsten und Zink die niedersten Spannungswerte. Zwischen diesen liegen die Linien für die anderen Materialien (Cu, Ni, Ag).

Bei einer Stromstärke von 0·04 Ampère zeigt der Linienzug für Silber gegenüber den anderen eine Unregelmäßigkeit, indem der einem 5 *cm* langen Bogen entsprechende Spannungswert unterhalb des sich ergebenden bei Verwendung von Nickelelektroden liegt, während bei den höheren Stromwerten die den Silberelektroden zugehörigen Spannungswerte immer unter diejenigen, die sich bei Verwendung von Nickelelektroden ergeben, zu liegen kommen.



Elektrodenentfernung in *cm*.

Fig. 5.

Wenn man jedoch bedenkt, daß das Flackern des langen, horizontalen Lichtbogens eine ruhige Einstellung des elektrostatischen Voltmeters unmöglich machte und daß daher die Instrumentenablesung auf 100 Volt nur durch Schätzung gewonnen werden konnte, so kann aus diesen Resultaten nur der Schluß gezogen werden, daß bei den zur Untersuchung gelangten fünf Elektrodenmaterialien die Platinelektroden die höchsten und die Zinkelektroden die niedrigsten Spannungswerte bei gleichen Stromstärken aufweisen und daß die bei den

anderen drei Materialien notwendigen Spannungen zwischen diesen beiden Grenzen eingeschlossen sind.

Ob die Aufeinanderfolge in der Größenanordnung der erforderlichen Spannungen durch die Reihe Pt, Cu, Ni, Ag, Zn dargestellt ist oder ob das Silber ein unregelmäßiges Verhalten durch Spratzen zeigt, soll hier nicht entschieden werden.

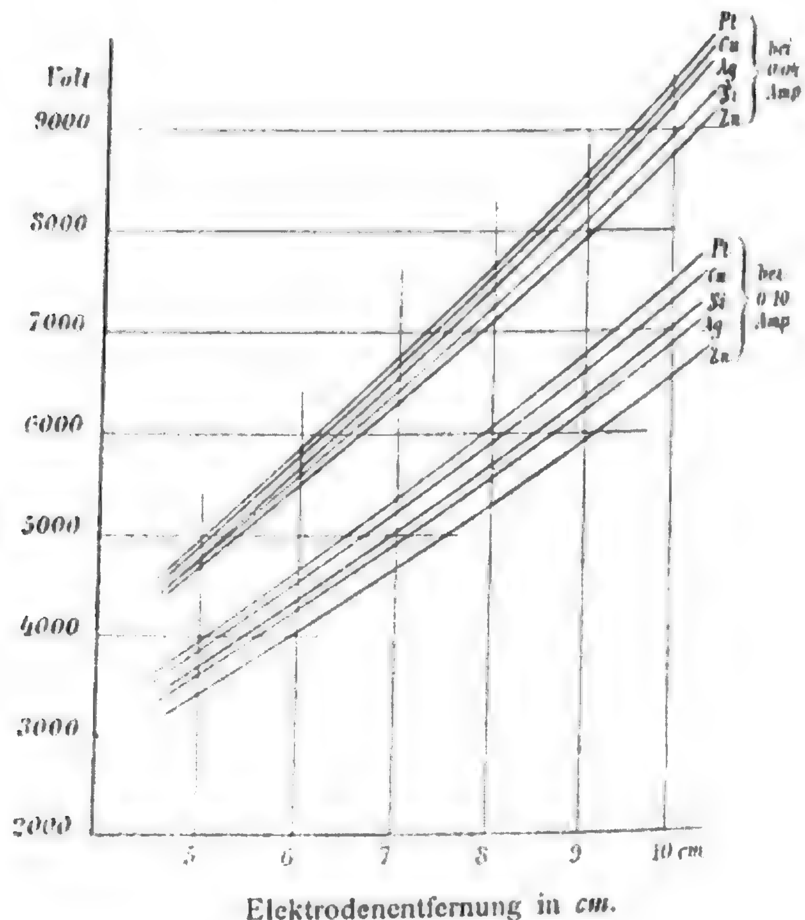


Fig. 6.

6. Das Bestreben, den Flammenbogen behufs genauer Messungen und exakter Einstellung der Kapillare in das Bogeninnere zu stabilisieren, führte zu den Versuchen mit vertikalem Bogen. Nachdem bei dieser Anordnung bei derselben Elektrodenentfernung die Länge des Bogens kürzer ist als die bei horizontal angeordneten Elektroden, so war zu erwarten, daß sich unter sonst gleichen Verhältnissen niedrigere Spannungswerte ergeben werden.

Die Meßresultate an den vertikalen Bogen in freier Luft bestätigen auch diese Erwartungen.

Tabelle 6.

Vertikaler Bogen zwischen Platinelektroden in freier Luft.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter					
	5	6	7	8	9	10
0·03 Ampère	4200	4950	5650	6300	6900	7500
0·04	3750	4450	5100	5750	6300	6850
0·05	3400	4050	4650	5250	5750	6250
0·06	3150	3700	4250	4800	5250	5750
0·07	2850	3400	3900	4400	4850	5300
0·08	2650	3150	3650	4100	4500	4900
0·09	2500	2950	3400	3850	4200	4550

Die mit Silber- und Nickelelektroden durchgeführten Versuche zeigen ein ähnliches Verhalten.

Die Versuche konnten nur bis zu Stromstärken von 0·07 Ampère durchgeführt werden, nachdem die obere, von den heißen Gasen des Flammenbogens umspülte Elektrode bei 0·07 Ampère zu einer Kugel von über 3 *mm* Durchmesser abschmolz und bei weiterer Steigerung der Stromstärke ein Abtropfen des Materials zu gewärtigen war.

Tabelle 7.

Vertikaler Bogen zwischen Silberelektroden in freier Luft.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter			
	5	6	7	8
0·03 Ampère	4050	4800	5500	6200
0·04	3650	4200	4950	5550
0·05	3400	3900	4450	5000
0·06	3200	3650	4100	4550

Tabelle 8.

Vertikaler Bogen zwischen Nickelelektroden in freier Luft.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter				
	5	6	7	8	9
0·03 Ampère	4200	4900	5500	6100	6800
0·04	3750	4400	5000	5550	6150
0·05	3400	4000	4550	5050	5600
0·06	3150	3650	4150	4600	5150

Nachdem das relative Verhalten der Elektrodenmaterialien bei vertikalem Bogen dasselbe war wie beim horizontalen, so konnte auf die Ausdehnung der messenden Versuche für die Materialien Kupfer und Zink verzichtet werden.

7. Um auch die letzte seitliche Luftströmung, welche doch häufig ein Flackern des Bogens verursachte und die Messung beeinträchtigte, auszuschließen, wurde der Flammenbogen, wie bereits früher bemerkt, in ein Quarzrohr von 8·5 *cm* Länge und 9 *mm* Durchmesser eingeschlossen.

Der Bogen zeigte eine überraschende Stabilität (Fig. 2), doch konnten die Messungen nur bis zu Bogenlängen von 7 *cm* ausgeführt werden, da das Quarzrohr vom Rand aus einen Sprung hatte, durch den bei der Bogenbildung die Entladung nach auswärts erfolgte.

Vergleicht man die bei den im Quarzrohr eingeschlossenen Flammenbögen bei gleicher Stromstärke erhaltenen Spannungswerte mit denjenigen, welche sich bei den vertikalen Bogen in freier Luft ergeben, so sieht man, daß die bei den eingeschlossenen Bogen erhaltenen Werte etwas höher sind. Das dürfte seinen Grund in der durch das Quarzrohr bedingten Verengung des Querschnittes des Flammenbogens und eventuell in der besseren Abkühlung haben.

Tabelle 9.

Vertikaler Bogen zwischen Platinelektroden im Quarzrohre.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter		
	5	6	7
0·03 Ampère	4350	5050	5900
0·04 »	3950	4600	5400
0·05	3650	4250	5000
0·06	3400	3900	4600
0·07	3150	3650	4250
0·08	2950	3400	3900
0·09	2800	3200	3700

Tabelle 10.

Vertikaler Bogen zwischen Silberelektroden im Quarzrohre.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter	
	5	6
0·03 Ampère	4150	4900
0·04	3750	4500
0·05	3400	4050
0·06	3150	3750

Tabelle 11.

Vertikaler Bogen zwischen Nickelelektroden im Quarzrohre.

Spannung in Volt bei	Elektrodendistanz in Zentimeter	
	5	6
0·04 Ampère	3750	4500
0·05	3400	4150
0·06	3200	3850

8. Nachdem Strom und Spannung im Hochspannungskreise direkt gemessen werden, so lassen sich die im Flammenbogen unmittelbar zur Wirksamkeit kommenden Voltampères durch Multiplikation der beiden gemessenen Größen leicht ermitteln. Der tatsächliche, im Flammenbogen verbrauchte Effekt stimmt jedoch mit den Voltampères keineswegs überein, sondern ist bedeutend kleiner. 1892 hat Heubach[1] bei Wechselstromlichtbögen niederer Spannung bei Verwendung von Homogenkohlen einen Unterschied zwischen den Voltampères und dem tatsächlich gemessenen Effekt in Watt gefunden und aus diesen Abweichungen auf eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung geschlossen, wobei er für $\cos\varphi$ die Werte 0·715 bis 0·846 ermittelte.

Duddell und Marchant[2] haben diese Erscheinung bei verschiedenen Periodenzahlen studiert und aus den Versuchsergebnissen den Schluß gezogen, daß es sich nicht um eine wirkliche Phasenverschiebung handelt, sondern daß die Ursache dieser Erscheinung in einer Deformation der Strom- und Spannungskurven zu suchen sei.

Th. Simon[3] hat dieses Verhalten durch seine Untersuchungen über die Lichtbogenhysteresis aufzuklären versucht.

Bei Lichtbogen zwischen Metallelektroden mit hoher Spannung haben Guye und Monasch für Kupferelektroden die scheinbaren und tatsächlichen Watt bis zu Bogenlängen von 10 *mm* für verschiedene Stromstärken bestimmt. Es ergibt sich für das Verhältnis $\frac{\text{Watt}}{\text{Voltampère}}$ nahezu 0·6.

9. Da es uns wichtig erschien, zu sehen, ob diese Beziehung bei den bedeutend längeren und eingeschlossenen Flammenbogen zwischen Platinelektroden — denn Platin war das Material, welches wir seines hohen Schmelzpunktes und

[1] J. Heubach, Arbeitsverbrauch und Phasenverschiebung im Wechselstromlichtbogen. Elektrotechnische Zeitschrift, 1892, p. 460.

[2] Duddell und Marchand, Inst. El. Ing., *28*, 86 (1899).

[3] Phys. Zeitschrift, 6. Jahrg., p. 297 bis 319. Untersuchungen über die Dynamik der Lichtbogenvorgänge und über Lichtbogenhysteresis.

seiner Unangreifbarkeit wegen bei den späteren Versuchen verwendeten — Gültigkeit besitzt, so ergab sich d e Notwendigkeit, Effektmessungen an den Flammenbogen vorzunehmen.

Das zuerst herangezogene Weston-Wattmeter für Stromstärken bis 2 Ampère erwies sich als zu unempfindlich, denn damit der Lichtbogen beim Einschalten der Spannungsspule nicht zum Erlöschen kommt, mußten über 200.000 Ohm vorgeschaltet werden, was eine bedeutende Verringerung der Empfindlichkeit des Instrumentes zur Folge hatte, wodurch keine befriedigenden Messungen erhalten werden konnten.

Es wurde daher für diese Messung ein Spiegel-Wattmeter in Aussicht genommen.

10. Bevor jedoch dieses zur Verfügung stand, wurden Effektbestimmungen nach der Drei-Voltmetermethode durchgeführt. Zu diesem Zwecke wurden 20 Glühlampen für 230 Volt in Serie zum Bogen geschaltet, dann die Spannung E_1 an diesen 20 Lampen, die Spannung am Bogen E_2 und die Gesamtspannung E_3, sowie die Stromstärke J gemessen und hieraus die Leistung in Watt nach dem Ausdrucke

$$L = \frac{J}{2W}(E_3^2 - E_1^2 - E_2^2)$$

berechnet, wobei W den Widerstand der 20 vorgeschalteten Lampen bedeutet.

Bei einer Bogenlänge von 4 *cm* ergab sich:

Tabelle 12.

Stromstärke in Ampère	E_1	E_2	E_3	W in Ohm	Voltampère	Watt	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltamp.}}$
	in Volt						
0·071	3230	2350	4950	45493	166·85	93·9	0·56
0·08	3550	2240	5150	44375	179·2	100·3	0·55
0·091	3900	2100	5350	42850	191·1	105·0	0·55

Die nach der Drei-Voltmetermethode erhaltenen Werte können wohl keinen Anspruch auf große Genauigkeit erheben,

zeigen aber immerhin, daß der erhaltene Wert für C nicht viel von 0·6, dem von Guye und Monasch gefundenem Werte, differiert.

Nachdem von den drei zur Spannungsmessung verwendeten elektrostatischen Voltmetern eines nur bis 3000 Volt, das zweite nur bis 5000 Volt verwendbar war, so war die Messung höherer Spannungen und somit auch die Verwendung größerer Bogenlängen als 4 *cm* nicht durchführbar. Es wurde nun an die Ermittlung des Effektes mittels des Spiegel-Wattmeters geschritten.

Damit der Lichtbogen nicht zum Erlöschen gebracht wurde, mußte die zu ihm in Parallelschaltung liegende Spannungsspule des Wattmeters einen genügend großen Vorschaltewiderstand besitzen. Es wurde der Spannungsspule ein Flüssigkeitswiderstand vorgeschaltet. Derselbe bestand aus zwei U-Röhren, welche mit der Magnanini-Nernst'schen Widerstandslösung (181 *g* Mannit, 62 *g* Borsäure, 1 *l* Wasser) gefüllt und in Serie geschaltet waren.

Das so vorgerichtete Wattmeter wurde geeicht.

Die für drei verschiedene Bogenlängen erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle verzeichnet.

Tabelle 13.

Stromstärke in Ampère	Spannung in Volt am Bogen	Voltampère	Watt	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltamp.}}$
Bogenlänge von 4·5 *cm*				
0·106	2150	227·90	152·58	0·66
Bogenlänge von 5 *cm*				
0·106	2300	243·8	149·94	0·61
Bogenlänge von 5·5 *cm*				
0·100	2650	265	154·35	0·58

Da durch die Metallzuführungen zur beweglichen Spule des Wattmeters die Ruhelage des Instruments nicht vollständig konstant war, so konnte sich dieser Einfluß bei den kleinen erhaltenen Ausschlägen in nicht zu vernachlässigender Weise bemerkbar machen. Zieht man noch die bei der Bestimmung der Spannung sich ergebenden Unregelmäßigkeiten in Betracht, so dürften die Abweichungen des Wertes für C erklärbar sein.

Jedenfalls kann aus diesen Versuchen gefolgert werden, daß der von Guye und Monasch erhaltene Wert für $C = 0 \cdot 6$ auch für die von uns verwendeten langen Bogen Gültigkeit hat.

B. Chemische Messungen.

I. Abschnitt:

Das Stickoxydgleichgewicht in der Hochspannungsflamme.

In diesem Abschnitte werden jene Versuche beschrieben, die zur Ermittlung des Stickoxydgleichgewichtes im Flammenbogen dienten, und weiterhin solche, die die Verschiebung des Gleichgewichtes mit der Änderung der Stromstärke, beziehungsweise der elektrischen Arbeit des Bogens dartun.

1. Versuchsanordnung und Analyse.

Der in einem Quarz- oder Glasrohr (Fig. 2 und 3) eingeschlossene elektrische Flammenbogen stellt prinzipiell einen durch Innenheizung auf hohe Temperatur gebrachten Reaktionsraum dar. Für die experimentelle Ermittlung eines Gasgleichgewichtes im Flammenbogen lassen sich demnach Nernst's[1] Betrachtungen »Zur Theorie der Devill'schen Versuchsanordnung« direkt anwenden. Danach müssen die beiden folgenden Bedingungen in erster Linie erfüllt werden:

1. Die Strecke ab (Fig. 7) muß hinreichend lang sein, damit das Gas Zeit hat, sich ins Gleichgewicht zu setzen.

2. Die Abkühlungsperiode bc muß hinreichend kurz sein, der Temperaturunterschied tt^1 demnach sehr groß, damit das

[1] Boltzmann, Festschrift, p. 905 (1904).

Gleichgewicht sich nicht wieder verschiebt. Um dies zu erreichen, ist es vorteilhaft, *ab* groß und womöglich erweitert, *bc* hingegen kapillar zu nehmen, um große Geschwindigkeiten zu erzielen und das Wärmegefälle zu vergrößern.

Der Flammenbogen entspricht dem Reaktionsraum *ab*. Dieser kann verhältnismäßig klein genommen werden, da die Bildungsgeschwindigkeit des Stickoxyds aus seinen Elementen bei den hier herrschenden Temperaturen überaus groß ist. Ist doch die Zeit, die erforderlich ist, damit in Luft von Atmosphärendruck bei 2900° *T* sich die Hälfte des möglichen Stickoxyds bildet, nach Nernst und Jellinek[1] $3 \cdot 45 . 10^{-5}$ Sekunden. Die Temperatur der Hochspannungsflamme dürfte im allgemeinen

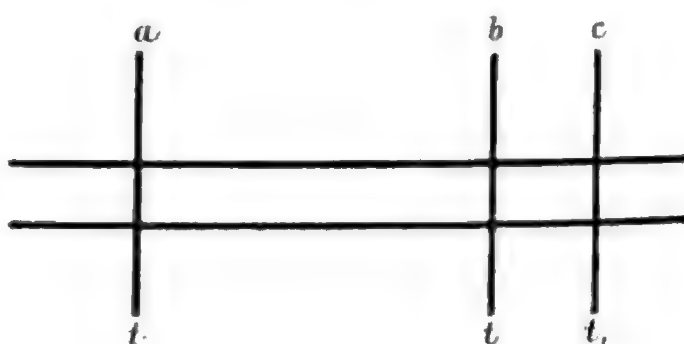


Fig. 7.

höher liegen. Vom chemischen Gesichtspunkte aus würde man demnach mit kurzen Bogen ausreichen.

Wesentlich hingegen ist es, der Bedingung 2 gerecht zu werden, so zwar, daß die Abkühlung möglichst rasch in jenes Temperaturgebiet durchgeführt wird, in welchem die Zerfallgeschwindigkeit des Stickoxydes praktisch nicht mehr in Betracht kommt.

Dies ist nach Untersuchungen Jellinek's[2] sicher bei 1300° *T* der Fall. Es handelt sich experimentell nun darum, daß das Temperaturgebiet von über 3000° *T* bis 1300° *T* mit großer Geschwindigkeit durchlaufen wird. Zu diesem Zwecke wurde eine durch fließendes Wasser gekühlte Platinkapillare in die

---

[1] Zeitschrift für Elektrochemie, *12*, 529 (1906).

[2] Zeitschrift für anorgan. Chemie, *49*, 272 (1906).

Flamme eingeführt und mit deren Hilfe das Gas der Flamme entnommen. Trotz des so gebildeten großen Temperaturgefälles wird eine Verschiebung des Gleichgewichtes zu befürchten sein. Einer solchen Erniedrigung wird man kaum entgehen können, doch wird sich dieselbe durch Vergrößerung der Absaugegeschwindigkeit verringern lassen. Auch lassen sich je nach Wahl der Geschwindigkeit dann Zonen verschiedener Temperatur absaugen. Es läßt sich durch die erhaltenen Stickoxydkonzentrationen nachweisen, daß der innersten Zone der Flamme die höchste Temperatur zukommt.

Es wäre anscheinend zweckmäßig gewesen, die Platinkapillare selbst als obere Elektrode zu benützen, wodurch die Anordnung an Einfachheit gewonnen hätte. Wir sahen aber bei den ersten Versuchsreihen hievon ab. Wir ordneten die Kapillare vielmehr horizontal in die Flamme ragend an, um auf diese Weise auch Gasproben aus verschiedenen Tiefen der Flamme entnehmen zu können.

Die Versuchsanordnung, die bei den in diesem Abschnitte beschriebenen Versuchen beibehalten wurde, ist in Fig. 8 gezeichnet.

A ist ein wassergekühltes Glasgefäß mit einem seitlich angeschmolzenen Ansatz, in welchem die wassergekühlte Platinkapillare mittels Gummischlauches eingedichtet war. Das Glasrohr war 18 *cm* lang und hatte einen lichten Durchmesser von 16 *mm*. Die 2 *mm* starken Elektroden waren aus Platin. Die Platinkapillare war derjenigen, welche Haber[1] bei der Bestimmung des Wassergasgleichgewichtes benutzte, nachgebildet. Die Kapillaröffnung betrug zirka 1 *mm*.

Zur Bestimmung der Stickoxydkonzentration wurde das Gas aus der Flamme in die mit Quecksilber gefüllte Kugel *K* durch Senken der Niveaukugel *N* eingezogen. Indem der Schlauch, der die beiden Kugeln verband, durch einen Quetschhahn führte, welcher einen mit Teilung versehenen Schraubenkopf besaß, konnte die Absaugegeschwindigkeit innerhalb gewisser Grenzen variiert werden. Die Verbindung zwischen Platinkapillare und der Kugel *K* war durch eine Glaskapillare

[1] Zeitschrift für anorgan. Chemie, *38*, 17 (1904).

von 2 *mm* Durchmesser hergestellt. Das kapillare Platinrohr ragte an der der Kugel *K* zugewandten Seite noch zirka 1 *cm* über den Kühlmantel heraus. Dieser Teil wurde in die etwas erweiterte Glaskapillare geschoben und die aneinanderstoßenden Glas- und Platinteile mittels Gummischlauches gedichtet. In der Folge erwies sich diese Dichtung als unvollkommen, so daß wir gezwungen waren, die Verbindungsstelle außerdem in

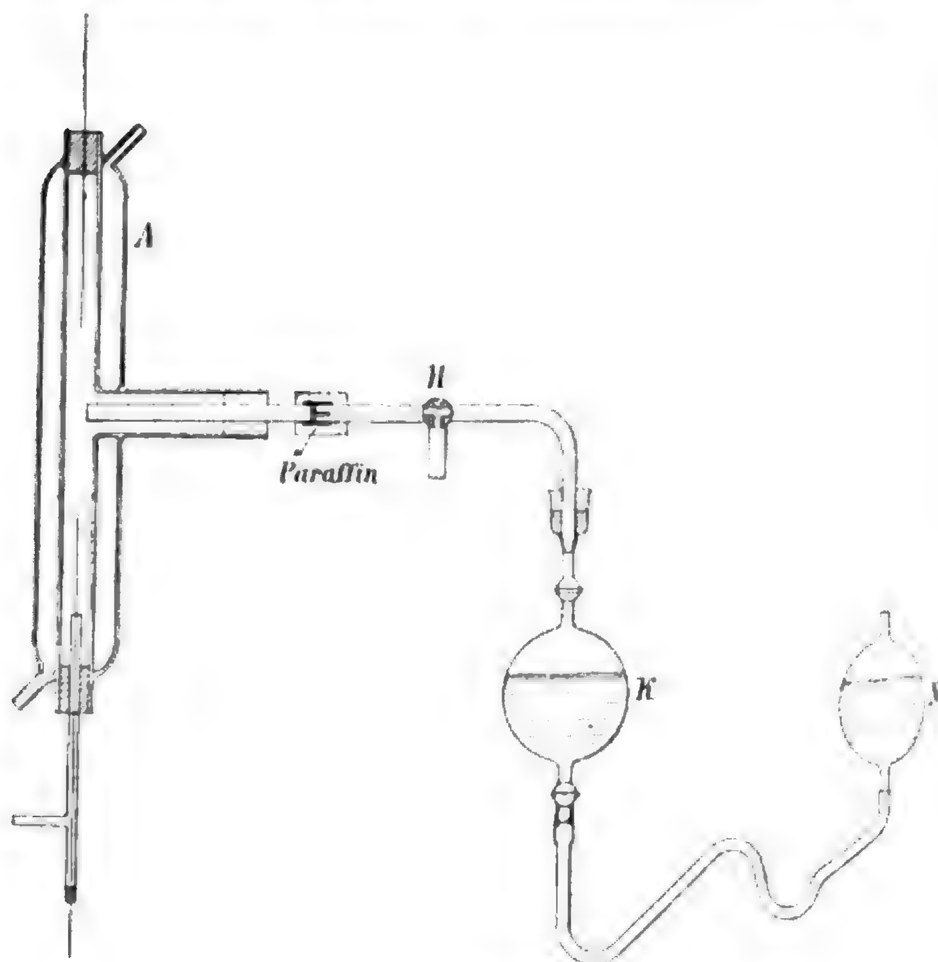


Fig. 8.

Paraffin zu betten. Das Glasrohr war durch eine Schliffverbindung mit der Kugel *K* verbunden. Diese Verbindung war noch durch Quecksilber gedichtet. Das Glasrohr trug einen Dreiweghahn *H*, der bei angeschalteter Kugel eine Verbindung der Kapillare mit außen gestattete. Diese Einrichtung war notwendig, damit die beim Einschalten des Bogens sich ausdehnende Luft ins Freie gelassen werden konnte. Nachdem ein stationäres Brennen des Flammenbogens eingetreten war, wurde durch Drehen des Hahnes die Verbindung Kapillare—Kugel

hergestellt und das Gas in die Kugel K eingesogen, nachdem durch kurzes Heben der Niveaukugel die kapillaren Teile der Apparatur mit dem Flammengase ausgespült wurden.

Über dem Quecksilber befanden sich behufs Absorption des Stickstoffperoxyds zirka 20 cm^3 einer $^n/_1$ Kalilauge. Die bisher übliche Absorption der nitrosen Gase durch Wasser erschien uns nicht einwandfrei.[1] Nachdem 200 bis 300 cm^3 Gas eingesogen waren, wurde der Hahn H geschlossen, die Schliffverbindung gelöst und das Gas mit der Lauge zirka eine Viertelstunde geschüttelt. Nach vollzogener Absorption wurden 100 cm^3 des Gasrestes in eine Gasbürette nach Hempel[2] für exakte Gasanalyse gedrückt. Dies erfolgte einfach in der Weise, daß ein in den Schliff passendes, mit Quecksilber gefülltes kapillares Glasrohr direkt mit der Gasbürette verbunden und die Niveaukugel N gehoben wurde.

Die Bestimmung des Sauerstoffes im Gasreste erfolgte durch eine alkalische Pyrogallollösung, auf deren Darstellung wir einen besonderen Wert legten, da sonst leicht Fehler in der Bestimmung auftreten können. Versuche, bei denen wir die Absorption des Sauerstoffes mittels Phosphor durchführten, zeigten eine vollkommene Übereinstimmung mit den durch Pyrogallol erhaltenen Werten.

Es war erwünscht, die Ablesungen auf $^1/_{10}$ cm^3 genau durchführen, beziehungsweise 0·05 cm^3 noch schätzen zu können. Da unser Ablesungsgebiet bei Anwendung von Luft als Ausgangsmischung nur zwischen den Teilstrichen 79 bis 100 der Bürette lag, so wurde, um eine genaue Ablesung mit einer leichten Handhabung der Bürette zu vereinen, der erste 75 cm^3 fassende Teil der Bürette birnenförmig erweitert und die letzten drei Viertel derselben in $^1/_{10}$ cm^3 geteilt.

Der Gehalt des nitrosen Gases an Stickoxyd in Volumprozenten (x) wurde gemäß

$$x = \frac{2090 - 100\,p}{100 - \frac{3}{2}p}$$

---

[1] Vergl. hiezu Tabelle 23 auf p. 54.

[2] Hempel, Gasanalytische Methoden, 3. Aufl. (1900), p. 49.

berechnet, wobei p die Volumprozente Sauerstoff in dem nach der Absorption des Peroxyds verbleibenden Gasrest bedeuten.

Diese Methode haben wir einer Überprüfung unterzogen. Sie gibt bei Anwendung von $^{n}/_{1}$ KOH als Absorptionsmittel ganz zuverlässige Werte. Wir verweisen diesbezüglich auf den Abschnitt über die Analyse nitroser Gase.

2. Kapillarstellung.

Bei dem im Quarz- oder Glasrohr eingeschlossenen Flammenbogen von 3 bis 6 *cm* Länge und 0·1 Ampère Stromstärke läßt sich deutlich ein inneres blaues Band von 2 bis 3 *mm* Breite und ein äußerer fahlgelber Flammenmantel von zirka 1·5 *mm* Dicke unterscheiden. Vor der Kapillaröffnung ist ein dünner, blauer Streifen zu beobachten. Die Ursache dürfte darin gelegen sein, daß die Flamme kalte Gegenstände, welche die Leitfähigkeit mindern, flieht. Trotzdem kann man es durch Anwendung verschiedener Absaugegeschwindigkeiten erreichen, daß bestimmte Teile der Flamme in die Kapillare eingesogen werden.

Wenn die Stromstärke auf 0·2 Ampère gesteigert wird, erscheint die Flamme hellblau. Gleichzeitig schmelzen beide Elektroden insolange ab, bis sich Kügelchen von zirka 3 *mm* Durchmesser bilden. Bei dieser Stromstärke verstäuben beträchtliche Mengen von Platin, die sich als Spiegel an den kühlen Teilen des Rohres absetzen.

Aus diesen Gründen haben wir bei unseren späteren Versuchen die Stromstärke nur selten über 0·1 Ampère gesteigert.

Wir haben uns zunächst durch einige Versuche über die Bedeutung der Kapillarstellung orientiert. Die Versuche wurden an einem 5·4 *cm* langen Bogen durchgeführt. Die Kapillare war 2 *cm* unterhalb der oberen Elektrode angeordnet. Die Stromstärke betrug bei allen Versuchen 0·1 Ampère. Die Geschwindigkeit des Absaugens variierte zwischen 0·03 und 0·05 *l* pro Minute. Folgende kleine Tabelle vereinigt die gefundenen Werte.

Tabelle 14.

Versuch Nr.	Stellung der Kapillaröffnung	Gasrest O	Gasrest N	Prozent NO
1	Außerhalb des Flammenbogens	18·6	81·4	3·2
2	Außerhalb des Flammenbogens	18·6	81·4	3·2
3	In der Mitte des Bogens	17·6	82·4	4·5
4	Am Rande der inneren Zone	17·8	82·2	4·4
5	Außerhalb des Flammenbogens. Die Kapillare durchschneidet den Bogen.	19·0	81·0	2·65

Bei Versuch 1 und 2 befand sich die Kapillaröffnung zirka 2 *mm* außerhalb des Bogens. Die so ermittelten Werte differieren um zirka 29% gegenüber den durch direktes Absaugen aus der Flammenmitte gewonnenen (Versuch 3). Bei Versuch 4 war die Kapillaröffnung um zirka 3 *mm* gegenüber Versuch 3 verschoben. Eine merkliche Differenz in der Bestimmung ist nicht vorhanden. Bei Versuch 5 war die Kapillare quer durch den Bogen gelegt, so zwar, daß die Kapillaröffnung knapp außerhalb des Bogens zu stehen kam. Der Bogen sucht dem gekühlten Rohr auszuweichen und legt sich alle paar Sekunden um, so daß er die Kapillare umspült. Die bei dieser Kapillarstellung vorgenommenen Versuche, durch Anwendung größerer Absaugegeschwindigkeiten den Bogen in die Kapillare zu lenken, mißlangen, wahrscheinlich, weil die bei diesen Versuchen in Anwendung gekommenen Geschwindigkeiten zu gering waren. Der sehr niedere Wert von Versuch 5 zeigt, daß wenige Millimeter außerhalb des Flammenbogens, trotz Kühlung der Flamme durch ein eingelegtes wasserdurchflossenes Rohr, das primär gebildete Stickoxyd zu mehr als 40% zersetzt ist. Der Zerfall dürfte in der größeren Entfernung der Kapillaröffnung vom Bogen gegenüber Versuch 1 begründet sein.

3. Abhängigkeit von der Absaugegeschwindigkeit.

3*a*. Um die Abhängigkeit der Stickoxydkonzentration von der Absaugegeschwindigkeit zu ermitteln, wurde letztere innerhalb der durch die Versuchsanordnung zulässigen Grenzen geändert. Der die beiden Kugeln *K* und *N* verbindende Schlauch wurde mehr oder weniger abgeklemmt, wodurch das die Kugel *K* füllende Quecksilber rascher oder langsamer abfloß. Aus dem Volumen der Kugel und der Zeit, in der sie sich entleerte, wurde die Geschwindigkeit berechnet.

Die Bogenlänge betrug bei allen Versuchen 4·7 *cm*, die Stromstärke 0·1 Ampère. Die Kapillare war 1·5 *cm* unterhalb der oberen Elektrode, in die mittlere Zone reichend, angeordnet. Die Luft war ungetrocknet, der Bogen von einem geschlossenen Glasrohr umgeben.

Die nachfolgende Tabelle vereinigt die Beobachtungen.

Tabelle 15.

Versuch Nr.	Geschwindigkeit in Liter pro Minute	Gasrest		Prozent NO
		O	N	
6	zirka 0·02	17·7	82·3	4·4
7	0·04	17·6	82·4	4·5
8	0·05	17·6	82·4	4·5
9	0·30	17·7	82·3	4·4
10	0·30	17·7	82·3	4·4

Bei Versuch 7 befindet sich das blaue Band zirka 1 *mm* vor der Kapillaröffnung. Bei der Geschwindigkeit des Versuches 9 wird es bereits in die Kapillare eingezogen.

Das Ergebnis dieser Versuche ist, daß Änderungen der Absaugegeschwindigkeit zwischen 1·2 bis 18 *l* pro Stunde die Gaszusammensetzung nicht beeinflussen. Höhere Geschwindigkeiten konnten bei der vorliegenden Versuchsanordnung nicht erzielt werden. Doch bemerken wir vorgreifend, daß

durch weitere Steigerung der Geschwindigkeit eine Änderung der Gaszusammensetzung erfolgte. Die Einzelheiten sind im II. Abschnitte einzusehen. An dieser Stelle geben wir nur die ermittelten Werte, die bei einem 3 *cm* langen Bogen und 0·1 Ampère gewonnen wurden. Man erkennt, daß eine Steigerung der Geschwindigkeit auf 32 *l* pro Stunde eine Steigerung der Stickoxydkonzentration im abgekühlten Gase bewirkt und daß jenseits dieser Geschwindigkeit ein Abfallen der Stickoxydkonzentration eintritt. Ganz ähnliche Erscheinungen wurden einerseits auch an einem 5 *cm* langen Bogen, bei dem ein Ansteigen des NO bis 5·6% gemessen wurde, und andrerseits bei einem mit 0·19 Ampère betriebenen, 3 *cm* langen Bogen beobachtet, bezüglich deren wir auf den II. Abschnitt verweisen.

Tabelle 16.

Versuch Nr.	Liter pro Stunde	Prozent NO
39	11	4·16
40	30	4·99
41	44	4·56
42	53	3·1

Man könnte daher annehmen, daß die Stickoxydkonzentration im Innersten der Flamme mindestens über 5% liegt und der in Tabelle 15 bestimmte Wert von 4·5% zu tief ist. Da aber größere Geschwindigkeiten jedenfalls eine Abkühlung des Bogens zur Folge haben, wodurch die Leitfähigkeit desselben vermindert wird, mußte zur Erhaltung einer konstanten Stromstärke im Bogen die Spannung und somit auch die aufzuwendende elektrische Energie steigen.

3 *b*. Ein Ansteigen der Bogenspannung bei zunehmender Luft- und somit Absaugegeschwindigkeit wurde bei allen in dieser Richtung angestellten Versuchen unzweifelhaft festgestellt.

Tabelle 17.

Abhängigkeit der Bogenspannung von der Absaugegeschwindigkeit.

Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Spannung in Volt	Stromstärke in Ampère
1. Bogenlänge 4 *cm* (Kapillare als obere Elektrode)		
Sehr gering	2100	
73	2180	0·091
170	2400	
Sehr gering	2050	
73	2100	0·1
170	2300	
24	1400	
140	1560	0·2
140	1500	0·218
2. Bogenlänge 5 *cm* (Platinkapillare seitlich in den Bogen ragend)		
Sehr gering	2050	
20	2150	0·106
80	2350	
84	2350	
3. Bogenlänge 5·5 *cm* (Platinkapillare seitlich in den Bogen ragend)		
20	2650	0·1
76	3300	

Es ist zu bemerken, daß diese Versuche mit der im II. Abschnitte beschriebenen Versuchsanordnung durchgeführt wurden.

Um zu entscheiden, ob das Ansteigen der Spannung nicht auch gleichzeitig mit einer entsprechenden Erniedrigung des Stromes verbunden ist (Widerstandsvergrößerung des Bogens durch Abkühlung), wurde die folgende kleine Versuchsreihe an einem 5 *cm* langen Bogen durchgeführt.

Nummer des Versuches	Spannung in Volt	Strom in Ampère	Voltampère	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde
1	2220	0·1085	240·87	22
2	2375	0·099	235·13	30
3	2500	0·097	242·50	45
4	2575	0·0945	243·34	57

Es geht daraus hervor, daß bei zunehmender Absaugegeschwindigkeit die Zunahme der Spannung mit einem Abfallen der Stromstärke derart verbunden ist, daß die Zahl der Voltampère konstant bleiben dürfte.

Es war nun naheliegend, sich zu überzeugen, ob mit zunehmender Luftgeschwindigkeit auch der aufzuwendende Effekt ansteigt. Das uns zur Verfügung stehende Instrument war ein Spiegel-Wattmeter von Siemens & Halske älterer Konstruktion. Da die gemessenen Effekte sich in den Grenzen zwischen 163 bis 224 Watt bewegten und die Ausschläge am Wattmeter 10 bis 14 *mm* betrugen und halbe Millimeter nur durch Schätzung gewonnen werden konnten, andrerseits auch die Ruhelage um zirka $^1/_2$ *mm* schwankte (elastische Nachwirkung der Aufhängung), so ist klar, daß gemessene Differenzen von 5 bis 7 Watt nicht mit Bestimmtheit als bloß durch die Änderung der Luftgeschwindigkeit erklärt werden konnten. So ergaben sich z. B.

1. bei einer Geschwindigkeit von zirka 75 *l* pro Stunde, 2350 Volt Bogenspannung, 0·106 Ampère Stromstärke, 10·2 *mm* Ausschlag im Wattmeter, entsprechend 165 Watt;

2. bei 120 *l* pro Stunde, 2450 Volt, 0·106 Ampère, 10·5 *mm* Ausschlag, entsprechend 170 Watt.

Wir beabsichtigen, diese Erscheinung mit empfindlicheren Meßeinrichtungen zu verfolgen und werden hierüber zu einem späteren Zeitpunkte berichten. Augenblicklich soll die Beantwortung der Frage, ob mit zunehmender Luftgeschwindigkeit auch der Effektverbrauch ansteigt, offen gelassen werden.

Das Ansteigen der ermittelten Stickoxydkonzentration mit steigender Geschwindigkeit und das Abfallen derselben bei noch höheren Luftwerten kann auch anderweitig erklärt werden. Es wurde bereits früher die Beobachtung vermerkt, daß knapp vor der Kapillaröffnung eine blaue Zone auftritt, wenn die Absaugegeschwindigkeit geringe Werte besitzt und daß dieser Zone eine gewisse Zwischentemperatur zukommt, bei der das Gleichgewicht hängen bleiben dürfte. Bei steigender Geschwindigkeit verschwindet dieser blaue Streifen, weil bei konstanter Kapillarstellung immer mehr die inneren Zonen des Bogens eingesogen werden, denen eine höhere Temperatur zukommt. Bei sehr hohen Absaugegeschwindigkeiten kann es vorkommen, daß der von der Kapillaröffnung entfernte, entgegengesetzte äußere Flammenrand miteingesogen wird. In solchen Fällen muß die Kapillare insolange verschoben werden, bis die gewünschte Zone eingesogen wird, eine Manipulation, die nach einiger Übung leicht gelingt.

Faßt man den Flammenbogen als aus einer Reihe von Temperaturschichten bestehend auf, wobei der innersten Schichte die höchste Temperatur, den äußeren immer geringere Temperaturen zukommen, so kann das Ansteigen und Abfallen der NO-Werte mit steigender Absaugegeschwindigkeit auf das Einsaugen von Flammenschichten verschieden hoher Temperatur zurückgeführt werden und dies um so mehr, wenn man auf Grund der Nernst'schen Zahlen annimmt, daß eine Steigerung der NO-Konzentration von 4·5 auf 5·5% einer Temperaturerhöhung von zirka 250° C. entspricht.

Allerdings muß betont werden, daß das Abfallen der NO-Konzentration bei zunehmender Geschwindigkeit auch durch das Abkühlen des Bogens erklärt werden kann, wie im II. Abschnitt gezeigt werden wird.

Wir können daher den in Tabelle 15 gefundenen Wert von 4·5% NO als im Abkühlungsgebiete hängen bleibend bei einem Bogen von 4·7 *cm* Länge, 0·1 Ampère und einem Wattverbrauch von 136 Watt nur innerhalb der Luftgeschwindigkeiten von 1·2 bis 18 *l* pro Stunde annehmen.

Diesen Wert können wir unter Beibehaltung der genannten physikalischen Größen unseren weiteren chemischen Messungen zu Grunde legen, die zur Ermittlung der Gleichgewichtskonstanten dienten. Die letztgenannte Größe berechnet sich auf Grund einer Gaszusammensetzung von

NO	4·5	Volumprozent
O..............	18·65	»
N	76·85	»
	100·00	

und der Beziehung

$$k = \frac{C_{N_2}^{1/2} \cdot C_{O_2}^{1/2}}{C_{NO}}$$

zu

$$k = 8 \cdot 5. \qquad (1)$$

Wir fügen hier noch zwei Versuche bei, die den Wert von 4·5% NO bei 0·1 Ampère in einem 4·7 *cm* Bogen festigen sollten.

Versuch 11.

Es erschien nicht ausgeschlossen, daß durch die starke Kühlung der Glaswand durch fließendes Wasser eine Abkühlung des Bogens eintreten kann, wodurch zu niedere NO-Werte gefunden werden. Wir haben daher unter denselben Bedingungen einen Versuch in einem 12 *mm* weiten, von Luft umgebenen Quarzrohr durchgeführt. Die Kapillare war ebenfalls 1·5 *cm* von der oberen Elektrode entfernt. Der Bogen 4·7 *cm*, 0·1 Ampère.

Gasrest: 17·56% O, 82·44% N; somit 4·5% NO.

Versuch 12.

Bei diesem Versuche war die Kapillare als obere Elektrode benützt und so gestellt, daß tunlichst alles Gas aus der mittleren Zone eingesogen werde, was aber nicht vollkommen gelang,

da der Bogen ein wenig flackerte. Dies erklärt auch den etwas niederen Wert. Der Bogen brannte im gekühlten und verschlossenen Glasgefäß.

Gasrest: 82·2% N, 17·8% O; somit 4·2% NO.

4. Änderung der Gaszusammensetzung der Ausgangsmischung und Zerfall von Stickoxyd.

Wir suchten den Wert $k = 8\cdot5$ weiterhin durch Änderung der Zusammensetzung der Ausgangsmischung zu prüfen. Zu diesem Zwecke wurde das Gaszuführungsrohr an der unteren Elektrode (Fig. 8) mit einem Gasometer in Verbindung gebracht, der das Gasgemisch über Glyzerin als Sperrflüssigkeit enthielt.

Die Gasmischung wurde stets schwefelsäuretrocken der Verbrennung zugeführt. Besondere Sorgfalt wurde den Verbindungsstellen Korkstöpsel—Glas und Glas—Platinkapillare gewidmet, die in Paraffin eingebettet waren.

Vor und nach jeder Verbrennung wurde das die Kapillare durchstreichende Gas analysiert. Die Entnahme dieser Gasproben erfolgte in derselben Weise wie bei den früheren Versuchen. Die Absaugegeschwindigkeit wurde in denselben Grenzen wie bei den Versuchen in Tabelle 15 gehalten. Auch waren alle übrigen Bedingungen dieselben, um vergleichende Werte zu gewinnen.

Versuch 13.

Gaszusammensetzung im Gasometer:

47·2% O, 52·8% N. (1)

Nach $5^1/_2$ stündigem Durchleiten ergab eine mittels Platinkapillare gezogene Gasprobe:

47·1% O, 52·9% N. (2)

Der Bogen wurde dann gebildet und 250 cm^3 Gas mit 0·125 *l* pro Minute abgesogen.

Gasrest: 45% O, 55% N.

Der Gehalt an NO $= x$ wurde nach

$$x = \frac{4710-100p}{100-\frac{3}{2}p}$$

berechnet:

$$x = 6 \cdot 46\% \text{ NO}.$$

Versuch 14.

Wiederholung von 13.

Gasrest: 45% O, 55% N; somit wieder 6·46% NO.

Nach Beendigung dieses Versuches wurde mittels der Platinkapillare wiederum eine Gasprobe entnommen. Diese ergab:

$$53 \cdot 0\% \text{ N}, \ 47 \cdot 0\% \text{ O}. \qquad (3)$$

Die Differenz gegenüber (2) ist geringfügig und beeinträchtigt das Resultat nur unwesentlich. Für die Berechnung der Gleichgewichtskonstanten wurde der NO-Gehalt aus der Zusammensetzung (2) der Ausgangsmischung ermittelt.

Aus den Versuchen 13 und 14 ergibt sich die Zusammensetzung im Gleichgewichte zu

$$49 \cdot 67\% \ N_2, \ 43 \cdot 87\% \ O_2, \ 6 \cdot 46\% \ NO,$$

und hieraus

$$\frac{C_{N_2}^{1/2} \cdot C_{O_2}^{1/2}}{C_{NO}} = K = 7 \cdot 2.$$

Die bei einer Ausgangsmischung von 47·1% O und 52·9% N ermittelte Konstante liegt um 15·3% unter der bei Luft gefundenen. Rechnet man die Zusammensetzung des Flammengases bei Luft als Ausgangsmischung aus dem Werte $k = 7 \cdot 2$, so erhält man NO $= 5 \cdot 2\%$ gegenüber 4·5%, die gefunden wurden.

Einem Stickoxydgehalt von 5·2% im Flammengas bei Luft als Ausgangsmischung entsprächen 17% O im Gasrest, während die experimentell bestimmten 4·5% NO 17·6% O im Restgase ergaben. Eine Differenz von 0·6%, die bei unseren Bestimmungen (da wir stets um 100 cm^3 Gas unter-

suchten) zirka $0 \cdot 6\ cm^3$ beträgt, liegt wohl außerhalb der gasanalytisch möglichen Fehler. Wir mußten daher die Verschiebung der Gleichgewichtskonstanten mit der Änderung der Ausgangsmischung an Sauerstoff weiterhin prüfen.

Von Gasmischungen viel höherer Sauerstoffkonzentration wie bei Versuch 13 und 14 auszugehen, ist bei Bestimmung des Stickoxydgehaltes auf Grund der Gasanalyse des Restgases unrichtig, nachdem Analysenfehler von $0 \cdot 1\%$ sowohl im Gasrest als auch in der Ausgangsmischung die nach der Beziehung

$$x = \frac{a - 100\,p}{100 - \frac{3}{2}\,p}$$

berechneten NO-Werte um einige Prozente verschieben. Diese Fehler werden um so größer, je mehr sich die Ausgangsmischung der Zusammensetzung $66 \cdot 66\%$ O, $33 \cdot 33\%$ N nähert, bei welcher die Stickoxydkonzentration unbestimmt wird. Bei solchen Gaszusammensetzungen müßte das gebildete Stickstoffperoxyd durch Absorption mit Schwefelsäure und Zersetzung der nitrosen Säure im Nitrometer bestimmt werden.

Wir haben daher weiterhin einen Versuch mit einer sauerstoffärmeren Mischung als Luft durchgeführt.

Versuch 15.

Ausgangsmischung: $15 \cdot 4\%$ O, $84 \cdot 6\%$ N.
Gasrest: $12 \cdot 7\%$ O, $87 \cdot 3\%$ N; somit $3 \cdot 3\%$ NO. $k = 10 \cdot 1$.

Die hier ermittelte Gleichgewichtskonstante liegt um $18 \cdot 8\%$ über der bei Luft erhaltenen.

Es zeigt sich, daß mit steigendem Sauerstoffgehalt der Ausgangsmischung die Gleichgewichtskonstante fällt. Nun erschien es von Interesse, den *k*-Wert durch Zerlegung von Stickoxyd zu bestimmen.

Versuch 16.

Das Stickoxyd wurde nach Emich[1] aus nitroser Säure und Quecksilber dargestellt und ebenfalls über Glyzerin ab-

[1] Monatshefte für Chemie, *13*, 73 (1892).

Sperrflüssigkeit aufbewahrt. Die Versuchsanordnung war hier dieselbe wie bei den früheren, mit Sauerstoffgemischen durchgeführten Versuchen. Vor Einsetzung des Flammenbogens wurde das den Apparat füllende Gas analysiert und mit der Entladung erst begonnen, nachdem es sich gasanalytisch als reines Stickoxyd erwies.

$4\cdot 7$ *cm* Bogen, $0\cdot 1$ Ampère, Kapillarstellung wie früher, Geschwindigkeit des Absaugens $1\cdot 4$ *l* pro Stunde.

Gasrest nach der Absorption des NO_2: $48\cdot 1\%$ O, $51\cdot 9\%$ N. NO berechnet nach

$$\frac{5000-100\,p}{100-\frac{3}{2}\,p} = 6\cdot 83\%\ \mathrm{NO}. \qquad k = \mathbf{6\cdot 84}.$$

Versuch 17.

Wiederholung von Versuch 16 bei einer Absaugegeschwindigkeit von zirka 28 *l* pro Stunde.

Gasrest: $48\cdot 0\%$ O, $52\cdot 0\%$ N; somit NO $= 7\cdot 14\%$. $k = \mathbf{6\cdot 50}$.

Berücksichtigt man, daß die Differenz von $0\cdot 3\%$ im NO-Wert durch eine Differenz von $0\cdot 1\%$ des Sauerstoffgehaltes im Gasrest bedingt ist, so wird man die Übereinstimmung beider Versuche als gut bezeichnen müssen. Wir nehmen für die weitere Betrachtung den Mittelwert NO $= 7\cdot 0\%$.

Im Gleichgewichte sind dann

$$\begin{array}{r} 46\cdot 5\%\ \mathrm{O} \\ 46\cdot 5\%\ \mathrm{N} \\ 7\cdot 0\%\ \mathrm{NO} \\ \hline 100\cdot 0 \end{array}$$

und

$$k = \mathbf{6\cdot 67}.$$

Folgende kleine Tabelle faßt die Ergebnisse zusammen.

Es ist ersichtlich, daß die augenscheinliche Abweichung vom Massenwirkungsgesetz auch bei der Zerlegung des Stickoxyds gefunden wurde und daß die Richtung der Abweichung in dem durch die ersten drei Versuche erwarteten Sinne lag.

Tabelle 18.

Sauerstoffgehalt der Ausgangsmischung	C_{NO}	k
15·4	3·3	10·1
20·9	4·5	8·5
47·1	6·5	7·2
Stickoxyd	7·0	6·7

Mac Dougall und Howles[1] haben bei einem Versuche mit einer Mischung von 2 Teilen Sauerstoff und 1 Teil Stickstoff fast doppelt soviel Salpetersäure als bei Luft als Ausgangsmischung erhalten, wenn sie ihre Gasmischung der Einwirkung ihres kurzen, zwischen horizontalen Elektroden brennenden Hochspannungsbogens aussetzen. Haber[2] hat aber bereits hingewiesen, daß die Begünstigung der Reaktionsgeschwindigkeit durch Massenwirkung hier nicht ins Gewicht fällt, da die Reaktionsgeschwindigkeit der Stickoxydbildung bei den hier herrschenden Temperaturen ungeheuer groß ist und eine Verdoppelung der Ausbeute aus Massenwirkungen nur verständlich wäre, wenn das Gleichgewicht bei Verwendung der sauerstoffreicheren Mischung ganz wesentlich früher in Abkühlungsgebiete hängen bliebe, wozu jeder Grund fehlt. Es ist vielmehr das Gegenteil zu erwarten, da die Zerfallgeschwindigkeit dem Quadrate des Stickoxydgehaltes proportional ist.

Haber führt die Erhöhung der Ausbeute daher auf eine (unbeabsichtigte) Änderung des Bogens zurück Wir hingegen vermuteten, daß durch Anreicherung des Gases an Sauerstoff eine Temperaturerhöhung des Bogens eintritt, die sich ihrerseits durch eine Erhöhung der aufzuwendenden Watt bei gleicher Stromstärke kenntlich machen müßte. Diese Vermutung hat

[1] Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. *44*, IV, 13 (1900).

[2] Thermodynamik, 254.

sich bestätigt, wie dies aus den nachfolgenden Messungen ersichtlich ist.

Die Versuchsanordnung war, da es sich hiebei um zeitlich ausgedehnte Versuche handelte, der im II. Abschnitte beschriebenen gleich. Der Bogen hatte in allen Fällen eine Länge von 4·7 *cm*.

Es wurden folgende Gasmischungen verglichen:

1. Luft,
2. 51·6% O, 48·4% N,
3. 69·5% O, 30·5% N (vergl. Tabelle 19).

Tabelle 19.

Zeit in Minuten	Spannung in Volt	Stromstärke in Ampère	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde
1. Luft				
0	2500	0·106	170	59
10	2475	0·106	165	59
25	2475	0·106	170	59
35	—	0·106	—	58·8
45	2475	0·106	—	58·5
55	2425	0·106	170	58·0
75	2450	0·106	170	58·0
2. 51·6% O, 48·4% N				
0	2770	0·108	208·6	57
32	—	—	211·8	59·5
52	2800	0·108	208·6	58
67	2820	0·106	—	60
3. 69·5% O, 30·5% N				
0	2900	0·104	223·5	64
15	2950	0·104	218·7	63
25	2900	0·108	220·3	63

Aus diesen Versuchen ergibt sich, daß mit zunehmendem Sauerstoffgehalte der Ausgangsmischung bei gleicher Bogenlänge und nahezu konstanter Stromstärke der Wattverbrauch zunimmt. Die damit zugeführte größere Energiemenge dürfte in der Erhöhung der Temperatur ihr Äquivalent finden. Aber aus der gemessenen Watterhöhung die Steigerung der Stickoxydkonzentration zu berechnen, erscheint auf Grund der an früherer Stelle gemachten Ausführungen über die Genauigkeit der Wattmeterangaben nicht berechtigt.

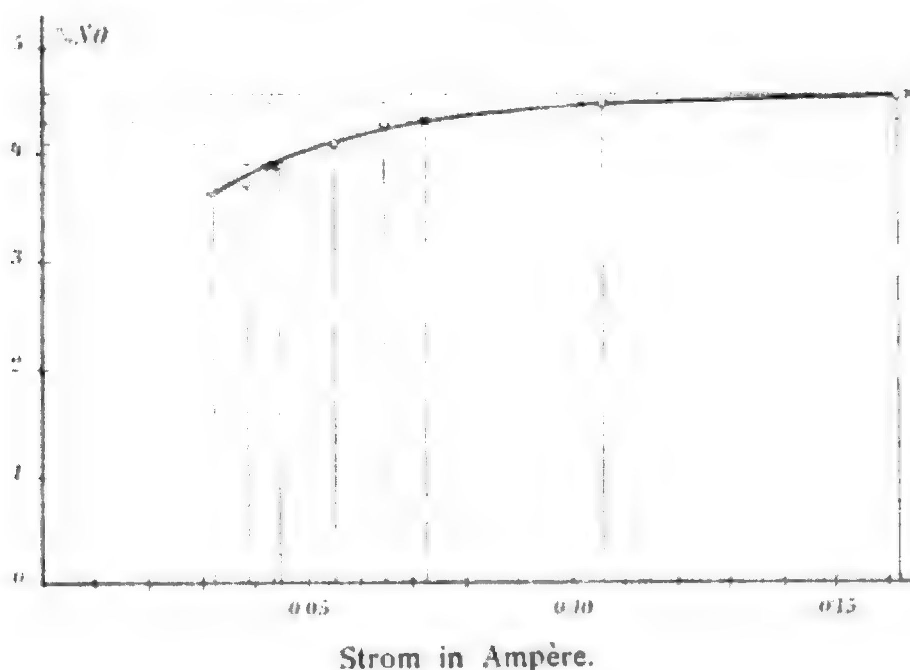
Die an dieser Versuchsreihe beobachtete Spannungserhöhung zwischen Luft und einer sauerstoffreicheren Mischung bei gleicher Geschwindigkeit deutet auf eine Widerstandsvergrößerung des Bogens mit zunehmender Sauerstoffkonzentration.

Die Spannungserhöhung zwischen den zwei Sauerstoffgemischen kann zum Teile durch die verschiedene Sauerstoffkonzentration, zum Teile durch die Erhöhung der Geschwindigkeit begründet werden.

5. Abhängigkeit des Stickoxydgleichgewichtes in der Flamme von der Stromstärke.

Wir haben diese Frage bei einem 4·7 *cm* langen Bogen eingehend geprüft und daran anschließend durch wenige Versuche an einem 3 *cm* langen Bogen uns überzeugt, daß eine Abhängigkeit zwischen Stickoxydgleichgewicht und Stromstärke besteht. Die Versuchsanordnung war die gleiche wie in den früher besprochenen Fällen. Die Luft war durch Lauge gestrichen und wurde dem Bogen schwefelsäuretrocken zugeführt. Gleichzeitig wurde die Spannung bei ansteigender Stromstärke gemessen. Die Voltampère wurden berechnet. Aus diesen wurden nach der Formel $E.J.\cos\varphi$ ($\cos\varphi = 0\cdot6$) die effektiven Watt ermittelt. Nachdem uns zu diesem Zeitpunkte kein Spiegel-Wattmeter zur Verfügung stand, konnte eine direkte Ermittlung des Wattverbrauches nicht erfolgen. In der letzten Kolumne sind noch die Temperaturen nach Nernst verzeichnet, die den gefundenen Stickoxydkonzentrationen entsprechen würden. Die folgenden Tabellen 20 und 21 vereinigen die Meßresultate. (Fig. 9.)

Die Abhängigkeit von der Stromstärke macht sich dahin geltend, daß bis zu zirka 0·1 Ampère die Stickoxydkonzentration wächst, um bei höheren Werten der Stromstärke sehr geringfügig anzusteigen. Das würde besagen, daß der Mehraufwand an elektrischer Arbeit, der jenseits 136 Watt auftritt, nicht mehr zur Erhöhung der Flammentemperatur benutzt wird, sondern als strahlende Energie für die Stickoxydbildung verloren geht. Es läßt sich dies auch an der sichtbaren Veränderung des Bogens beobachten. Jenseits 0·1 Ampère verschwindet die Erscheinung der rotbraun umrandeten Flamme. Der Bogen wird hellblau und leuchtend.



Strom in Ampère.

Fig. 9.

Die Abhängigkeit der Stickoxydkonzentration von der Stromstärke wurde an dieser Stelle nur bei geringen Absaugegeschwindigkeiten ermittelt. Bei erhöhter Luftzufuhr ergibt sich ein analoges Verhalten, indem bei einem 3 *cm*-Bogen bei 30 *l* stündlicher Geschwindigkeit bei 0·1 Ampère 4·99% NO und bei 0·19 Ampère 5% NO ermittelt wurden (vergl. die Versuche Nr. 40 und 44 in Tabelle 23).

Für die Technik der Luftverbrennung ist diese Erscheinung von der größten Bedeutung. Eine ähnliche Beobachtung haben bereits Mac Dougall und Howles[1] gemacht, als sie ihren

[1] L. c.

Tabelle 20.

Ermittlung der Abhängigkeit der Stickoxydkonzentration von der Stromstärke.
Bogenlänge 4·7 *cm*. Kapillare 16 *mm* von der oberen Elektrode entfernt.

1. Vers. Nr.	2. Ampère	3. Volt	4. Gasrest Prozent O	Prozent N	5. Prozent NO	6. Mittel	7. Volt/Ampère	8. Watt berechnet	9. Temperatur nach Nernst
18	0·0324	4250	18·23	81·77	3·67	3·67	137·7	82·6	zirka 3000° *T*
19	0·0324	4250	18·23	81·77	3·67		137·7	82·6	
20	0·0388	3750	18·3	81·7	3·58				
21	0·0388	3750	18·2	81·8	3·71	3·71	145·5	87·3	3000
22	0·0388	3750	18·2	81·8	3·71				
23	0·0444	3600	18·11	81·89	3·83				
24	0·0444	3600	18·0	82·0	3·97	3·90	159·8	95·9	3050
25	0·055	3300	17·9	82·1	4·11				
26	0·055	3300	17·88	82·12	4·10	4·1	181·5	108·9	3100
27	0·065	2850	17·70	82·30	4·35				
28	0·065	2900	17·82	82·18	4·20	4·3	186·9	112·1	3150
29	0·073	2800	17·76	82·24	4·28				
30	0·073	2750	17·94	82·06			202·6	121·6	
—	0·106	2150	aus früheren Versuchen						
31	0·1633	1800	17·7	82·3	4·35	4·45	227·9	136·5	3200
32	0·1633	1800	17·54	82·46	4·55	4·45	293·9	176·3	

Tabelle 21.

Bogenlänge 3 *cm*. Kapillare in der Mitte.

Versuch Nr.	Ampère	Gasrest		Prozent NO	Mittel
		Prozent O	Prozent N		
33	0·043	18·02	81·98	3·95	3·94
34	0·043	18·04	81·96	3·92	
35	0·073	17·77	82·23	4·27	4·27
36	0·1633	17·55	82·45	4·55	4·55

Bogen einmal mit 172 Watt und ein andermal mit 302 Watt brannten. Sie erhielten in beiden Fällen aus gleichen Luftmengen nahezu dieselben Mengen an Salpetersäure. Es wäre zu bemerken, daß Brode[1] bei Nernststiften als Elektroden eine Zunahme der Stickoxydkonzentration bei fallender Stromstärke und fallenden Watt angibt.

Faßt man die Steigerung der Stickoxydkonzentration mit zunehmender Stromstärke, respektive Watt als nur durch die Wirkung der Wärme verursacht auf, so würde der Erhöhung der Stickoxydkonzentration von 3·7 auf 4·45% NO auf Grund der Nernst'schen Werte eine Steigerung der Flammentemperatur von 3000 auf 3200° absolut entsprechen. Um diese Temperaturerhöhung durchzuführen, war ein Aufwand von 54 Watt erforderlich.

Aus diesen Versuchen ergibt sich keine Abhängigkeit zwischen Stickoxydkonzentration und Bogenlänge. Anderweitige diesbezügliche Beobachtungen finden sich im Abschnitt II.

[1] L. c., p. 49.

II. Abschnitt.

Ausbeutebestimmungen.

Die in diesem Abschnitte beschriebenen Versuche wurden von dem Gesichtspunkt aus in Angriff genommen, das Ausbringen an Stickoxyd für die Einheit der aufzuwendenden elektrischen Energie experimentell festzulegen. Um zufällige Änderungen der Versuchsbedingungen möglichst zu vermeiden, mußte jeder einzelne Versuch zeitlich ausgedehnt werden und das gebildete Stickoxyd nach dessen Überführung in Peroxyd quantitativ absorbiert werden. Solche Versuchsdaten, die erst ein Bild über die Ökonomie der elektrischen Luftverbrennung geben, sind bisher der Öffentlichkeit nicht übermittelt worden.

Wir haben solche Versuche an Flammenbögen von 3 *cm* und 5 *cm* Länge durchgeführt. Der Ofen, in welchem wir die Luft verbrannten, war identisch mit dem im I. Abschnitt beschriebenen.

1. Die Versuchsanordnung.

Folgende Größen mußten der Messung zugänglich sein: 1. die dem Bogen zugeführte Luftmenge, 2. das während der Versuchsdauer gebildete Stickoxyd, 3. die elektrische Energie.

Die Versuchsanordnung (Fig. 10) bestand aus folgenden Teilen: dem Gasmesser, der Trocknung, dem Ofen, dem Mischraum und der Absorption. Die zu verbrennende Luft wurde durch die Apparatur mit Hilfe einer kräftigen Wasserstrahlpumpe hindurchgesaugt. Sie trat zunächst in einen nassen Gasmesser, der zeitweilig nachgeeicht wurde, sodann in einen mit Natronkalk beschickten Turm und von hier aus zwecks Trocknung in einen mit Bimsstein und Schwefelsäure gefüllten Turm. An Stelle des letzteren wurde manchmal eine mit Schwefelsäure beschickte Waschflasche genommen. Von hier trat die Luft in den Ofen und durch die wassergekühlte Platinkapillare in eine zirka 5 *l* fassende dreihalsige Woulff'sche Flasche. Die Hälse trugen einfach durchbohrte Gummistöpsel, die, soweit sie mit dem in der Flasche sich bildenden Stickstoff-

peroxyd in Berührung kamen, mit dünnem Asbestpapier beklebt waren. Diese Flasche diente als »Mischraum«, um bei verhältnismäßig großen Luftgeschwindigkeiten die Überführung des Stickoxydes in das Peroxyd zu ermöglichen. Der mittlere Tubus trug ein kapillares Glasrohr mit Hahn. Das Glasrohr konnte mittels einer Schliffverbindung mit einer Glaskugel verbunden werden, die ihrerseits mit einem Niveaugefäß in Verbindung stand. Zweck dieser Anordnung war es, die Entnahme von Gasproben während des Versuchsganges zu ermöglichen, um die auf gasanalytischem Wege gewonnenen Resultate mit den durch Absorption ermittelten zu vergleichen.

An das Mischgefäß schloß sich die aus mindestens fünf Waschflaschen bestehende Absorptionsanlage an. Die ersten drei Flaschen waren mit je 300 *cm*³ zirka $^n/_1$ NaOH gefüllt. Diese Flaschen waren unter sich und mit dem Mischraume durch Glasschliffe verbunden. Die beiden letzten Waschflaschen enthielten konzentrierte Schwefelsäure. Hinter der letzten Absorptionsschlange befand sich ein kleineres, zirka 3 *l* fassendes Glasgefäß. Dieses sollte eventuell nicht absorbiertes Stickstoffperoxyd durch dessen Färbung erkennen lassen und war daher zur Hälfte mit weißem Papier beklebt. Von dieser Flasche aus wurde das Gas zur Wasserstrahlpumpe befördert.

Infolge des kapillaren Querschnittes der Platinröhre war in dem hinter der Kapillare befindlichen System ein Minderdruck vorhanden, dessen Größe mit der Luftgeschwindigkeit variierte. Vor dem Ofen herrschte nahezu Atmosphärendruck. Um die hier auftretenden geringen Druckdifferenzen gegenüber der Atmosphäre zu messen, war ein Manometer eingeschaltet.

2. Über die Analyse nitroser Gase.

Von **F. Russ.**

Für die quantitative Ermittlung des im Flammenbogen gebildeten Stickoxyds war der Gesichtspunkt maßgebend, das gesamte gebildete Stickoxyd der analytischen Bestimmung zuzuführen. In letzter Linie kommt es darauf an, das durch

die Wechselwirkung des Luftsauerstoffes mit dem Stickoxyd entstehende Stickstoffperoxyd zu absorbieren und in dieser Lösung eine Bestimmung durchzuführen. Die Absorption kann entweder durch Schwefelsäure oder durch Lauge erfolgen. Die Absorption der nitrosen Gase durch Wasser allein kommt wohl für eine exakte Bestimmung nicht in Betracht.

Bei der Bedeutung, welche der Analyse der nitrosen Gase der Luftverbrennung zukommt, erschien es uns notwendig, beide Methoden einem Vergleiche zu unterziehen und die so erhaltenen Werte mit den durch die Gasanalyse gewonnenen zu vergleichen.

a) Bestimmung des Stickoxydes aus dem nach der Absorption des Peroxydes rückbleibenden Gasreste.

Da aber auch die gasanalytische Methode, die wir bei den im I. Abschnitte beschriebenen Versuchen anwandten, durch zwei in jüngster Zeit erschienene Publikationen von Lunge und Berl einerseits und von Le Blanc andrerseits tangiert wird, so soll an dieser Stelle die Prüfung der von uns angewandten Methode gegeben werden.

Bei der Entnahme der Gasproben gingen wir so vor, daß wir 200 bis 400 *cm*³ Gas der Flamme durch langsames Absaugen entnahmen, das Stickstoffperoxyd durch zirka $^{n}/_{1}$ Lauge absorbierten und im Gasrest den Sauerstoff bestimmten. Der Prozentgehalt an Stickoxyd (x) im Flammengas ergab sich dann aus der Beziehung:

$$x = \frac{2090 - 100\,p}{100 - \frac{3}{2}\,p},$$

wenn p den Prozentgehalt an Sauerstoff in dem nach der Absorption des Peroxydes verbleibenden Gasreste bedeutet.

Diese Berechnungsweise setzt voraus, daß die Absorption des Stickstoffperoxydes durch viel verdünnte Lauge zu gleichen Molen Nitrat und Nitrit nach



$$2\,NO_2 + 2\,NaOH = NaNO_3 + NaNO_2 + H_2O$$

erfolgt. Würde mehr Nitrat als Nitrit gebildet werden, so müßte ein Teil des Luftsauerstoffes zur Oxydation des Nitrites verbraucht werden, während im Falle einer Mehrbildung von Nitrit gegenüber Nitrat ein Plus an Sauerstoff im Gasreste wahrnehmbar sein müßte. Im ersten Falle würde die Analyse des Gasrestes zu hohe, im zweiten Falle zu niedere Werte für das im Flammengas befindliche Stickoxyd liefern.

Zur Prüfung der Methode wurde so vorgegangen, daß in die vorhin beschriebenen trockenen und mit Luft gefüllten Glaskugeln von 242 und 398 *cm*³ Inhalt abgemessene Raumteile reinen Stickoxydes, das nur durch Zerlegen nitroser Säure durch Quecksilber nach Emich gewonnen wurde, eingepreßt wurden. Nach Abkühlen der Kugel durch fließendes Wasser wurden zirka 20 *cm*³ $^n/_1$ KOH einfließen gelassen und an die Analyse des Gasrestes geschritten, nachdem die während der Absorption sich bildenden weißen Nebel verschwunden waren.

1. Zu 242 *cm*³ Luft wurden 16·6 *cm*³ NO gegeben. Zur Oxydation von 16·6 *cm*³ NO zu NO_2 sind 8·3 *cm*³ Sauerstoff erforderlich, so daß der nach der Absorption des NO_2 verbleibende Gasrest aus $\left(\frac{242 \times 20 \cdot 9}{79 \cdot 1} - 8 \cdot 3\right) = 42 \cdot 28\, cm^3$ O und 191·42 *cm*³ N zu bestehen hätte. Der Sauerstoffgehalt im Gasrest berechnet sich demnach zu 18·08%. Experimentell wurden 18·0% O gefunden. Es wurden einige solcher Bestimmungen durchgeführt. Folgendes sind die Resultate:

Tabelle 22.

Lauge als Absorptionsmittel.

Versuch Nr.	Kubikzentimeter Luft	Kubikzentimeter NO	Im Gasrest	
			Prozent O ber.	Prozent O gef.
1	242	16·6	18·1	18·0
2	242	20·3	17·4	17·2
3	398	20·0	18·8	18·7
4	242	20·6	17·2	17·2

Auf Grund dieser Versuche ergibt sich, daß die Absorption des Stickstoffperoxydes durch viel verdünnte Lauge zu gleichen Molen Nitrat und Nitrit führt und die aus der Analyse des Restgases nach obiger Formel berechneten Stickoxydkonzentrationen einwandfrei sind. Dies steht in Übereinstimmung mit Versuchen, die Herr B. Larsen mit mir durchgeführt hat, wonach alkalische Nitritlösungen durch längeres Einleiten von Sauerstoff nicht oxydiert werden.

Inzwischen haben Lunge und Berl[1] angegeben, daß bei der Absorption von gasförmigem Stickstoffperoxyd durch Lauge bei Gegenwart von Sauerstoff mehr Nitrat als Nitrit entsteht. Le Blanc[2] hat ähnliche Beobachtungen mitgeteilt, die allerdings die Verschiebung des Verhältnisses zu Gunsten des Nitrates nicht so groß als bei Lunge erscheinen lassen. Nach unseren Erfahrungen konnte geschlossen werden, daß eine solche Oxydation der alkalischen Nitritlösung nur sehr langsam vor sich gehen könne. Es wurde daher der nachfolgende Versuch ausgeführt.

In eine Glaskugel von 1119·2 *cm*³ Inhalt, die den vorher verwendeten gleich war, wurden zu 1119·2 *cm*³ Luft von 17° C. 98·6 *cm*³ Stickoxyd von 17·2° C. aus einer exakten Hempelbürette eingepreßt und unter Abkühlen der Kugel zirka 80 *cm*³ $^n/_1$ KOH einfließen gelassen. Das nach Emich dargestellte Stickoxyd war vorher durch Verbrennen mit Wasserstoff in einer Drehschmidt'schen Kapillare auf seine Reinheit untersucht worden.

Nachdem die bei der Absorption sich bildenden weißen Nebel verschwunden waren, wurde durch die obere Schliffverbindung eine Gasprobe gezogen, während durch den unteren Hahn gleichzeitig $^n/_1$ KOH mittels eines Niveaugefäßes eingepreßt wurde.

1. Diese Gasanalyse gab 17·6% O.
2. Nach weiteren $2^1/_2$ Stunden wurde in der gleichen Weise eine Gasprobe entnommen, die abermals 17·6% O gab.
3. 5 Stunden nach der ersten Gasprobe 17·2% O.
4. $20^1/_2$ Stunden nach der ersten Gasprobe 16·6% O.

[1] Z. angew. Ch., *19*, 807 (1906).
[2] Z. f. Elekt. Ch., *12*, 541 (1906).

Demnach erfolgt die Oxydation des Nitrits sehr langsam. Es muß aber bei diesem Versuch berücksichtigt werden, daß im Laufe der Gasentnahmen zirka 400 *cm*³ $^{n}/_{1}$ Lauge in das Gefäß traten. Die Luftlöslichkeit in der Lauge wurde nicht in Rechnung gezogen. Bei Wasser als Absorptionsmittel enthält die in demselben gelöste Luft bei Temperaturen zwischen 15 und 20° C. nach Winkler[1] 34·15% O. Es ist nicht ausgeschlossen, daß eine Änderung des O-Gehaltes in der Gasphase durch die größere Löslichkeit des Sauerstoffes dem Stickstoff gegenüber in verdünnter Lauge bedingt ist.

Es wurde bereits hingewiesen, daß uns die Anwendung der Formel

$$x = \frac{2090 - 100\,p}{100 - \frac{3}{2}\,p}$$

nicht verläßlich erschien, falls die Absorption des Stickstoffperoxydes mit Wasser statt mit Lauge in der üblichen Weise durchgeführt wird. Denn nach noch nicht abgeschlossenen Versuchen des Herrn Dr. A. Mandl im hiesigen chemischen Laboratorium ist der Reaktionsverlauf zwischen Stickstoffperoxyd und Wasser ein recht komplizierter. Sowohl Lunge als Le Blanc zeigten, daß bei Wasser als Absorptionsmittel eine Verschiebung des Verhältnisses zwischen Nitrat und Nitrit zu Gunsten des Nitrates eintritt. Wir haben daher die Absorption mit Wasser in derselben Weise, wie sie oben bei der Absorption mit Lauge beschrieben ist, durchgeführt. Wir vermerken hier die noch ungeklärte Erscheinung, daß die Bestimmung des Sauerstoffes im Gasrest, sei es durch Phosphor oder durch Pyrogallol, mindestens eine Stunde währte, ehe zwei Bürettenablesungen übereinstimmten.

Die zu verschiedenen Zeiten aus der Kugel entnommenen Gasproben stimmten im Gegensatze zur Absorption mit Lauge nicht überein. Je länger der Gasrest mit der wässerigen Lösung in Berührung stand, um so mehr Sauerstoff wurde ihm entzogen, was jedenfalls auf eine Oxydation der salpetrigen Säure

[1] Landolt-Börnstein-Meyerhoffer, Tabellen, p. 605.

zurückzuführen ist. Die Oxydationsgeschwindigkeit scheint gering zu sein. Dieser Umstand erklärt, daß die auf diesem Wege von andern Seiten gefundenen Analysenergebnisse untereinander schlecht übereinstimmen. Folgende Versuche wurden durchgeführt:

Tabelle 23.

Wasser als Absorptionsmittel.

Versuch Nr.	Kubikzentimeter Luft	Kubikzentimeter NO	O berechnet	O gefunden
1	242	38·6	14·0	12·5
2	242	18·2	17·8	17·8
				11·8
3	398	68·3	13·5	9·7
4	242	19·2	17·6	17·5
5	242	34·8	14·8	14·2
				13·0

In zwei von fünf Versuchen besteht zwischen Rechnung und Beobachtung Übereinstimmung. Hier wurden die Gasproben bald nach der Absorption entnommen. Bei Versuch 3 und 5 sind je zwei Werte angegeben. Der zweite Wert bezieht sich auf Gasproben, die 150 Minuten nach den ersten entnommen wurden. Demnach wird der Gasphase zeitlich Sauerstoff entzogen. Die Fehler in der Bestimmung des Stickoxydes würden bei vollständiger Oxydation der salpetrigen Säure 20% betragen und jeweils von der Zeit nach der Absorption abhängig sein.

Aus diesen Gründen erachten wir die durch Absorption mit Wasser gefundenen Stickoxydkonzentrationen als zu hoch.

b) Schwefelsäure als Absorptionsmittel.

Für die Bestimmung selbst verdünnter nitroser Gase führt die Methode von Lunge der Absorption mit Schwefelsäure und Zerlegung der nitrosen Säure durch Quecksilber im Nitrometer zu sicheren Werten.

Wir haben die Methode zunächst so überprüft, daß wir in mit Hähnen verschließbaren Glaskugeln von 300 bis 400 *cm*³ Inhalt, wie sie bei der Analyse im Abschnitt I verwendet wurden, und ebensolchen von zirka 1 *l* Inhalt soviel Kubikzentimeter reinen Stickoxydes, das wir durch Zersetzen von Nitrose durch Quecksilber nach Emich erhielten, aus einer Hempel'schen Gasbürette für exakte Gasanalyse in die Glaskugel preßten, daß das Gas um 4% NO enthielt. Indem wir konzentrierte Schwefelsäure vom spezifischen Gewichte 1·84 in die Glaskugel einfließen ließen und schüttelten, absorbierten wir das gebildete Stickstoffperoxyd. Wir beobachteten hiebei, daß 10 *cm*³ Säure pro Minute zirka 5·5 *cm*³ NO_2 absorbierten. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist demnach gering. Die nitrose Säure wurde, nachdem die Glaskugel mehrmals mit konzentrierter Schwefelsäure nachgewaschen war, im Lunge'schen Nitrometer zersetzt. Wir fanden die Angabe von Nernst[1] bestätigt, daß die nitrose Säure ungemein heftig an Glaswänden zurückgehalten wird, wodurch bei kleinen Gasquantitäten erhebliche Fehler eintreten können. Wegen der Löslichkeit des im Nitrometer zersetzten NO in Schwefelsäure (Löslichkeit 3 bis 3·5%) ist diese in Rechnung zu ziehen.[2] Dann allerdings erhält man auch bei zirka 4prozentigen Gasen richtige Werte. Für die Ermittlung von Gasproben ziehen wir die Absorption mit Lauge und Analyse des Gasrestes der einfacheren Ausführung wegen der Absorption mit Schwefelsäure vor.

Bei zeitlich ausgedehnten Versuchen, bei denen in der Zeiteinheit viele Liter Gas durch die Schwefelsäure geleitet werden, ist infolge der nicht zu hohen Reaktionsgeschwindigkeit zwischen Stickstoffperoxyd und Schwefelsäure eine unvollständige Absorption zu befürchten, wenn man nicht die Absorptionsanlage unverhältnismäßig groß wählen will. Wir führen zur Beurteilung der Absorption mit Schwefelsäure zwei Versuche eingehend an.

In einem Falle, wo die Geschwindigkeit des Luftstromes 75 *l* pro Stunde betrug, findet man eine vollkommene Überein-

---

[1] Z. anorg. Ch., l. c.

[2] Vergl. hiezu Tower, Z. anorg. Ch., *50*, 382.

stimmung zwischen den durch Schwefelsäure einerseits und den durch die Gasanalyse nach der Methode auf p. 1620 ermittelten NO-Werten andrerseits. Bei einer Geschwindigkeit von 95 *l* pro Stunde trat aber bereits eine Differenz von 25% im Resultat auf.

Wir geben bei beiden Analysen auch die für die analytische Beurteilung unwesentlichen Daten, um einer Wiederholung an anderer Stelle vorzubeugen.

Zur Absorption der nitrosen Gase befanden sich hinter der Mischflasche drei Waschflaschen, die mit je 300 cm^3 konzentrierter Schwefelsäure gefüllt waren, dann abermals ein Mischgefäß, um eventuell vorhandenes NO zu NO_2 zu oxydieren und hinter diesem Gefäße zwei weitere Waschflaschen mit je 100 cm^3 konzentrierter Schwefelsäure gefüllt. Hinter diesen beiden Flaschen befand sich eine größere, leere und getrocknete Flasche zur Beobachtung der Farbe der abziehenden Gase.

Versuch 37.

Geschwindigkeit: 75 *l* pro Stunde (beziehungsweise 67·3 *l* von 0° C. und 760 *mm*).

Dauer des Versuches: 180 Minuten.

Gesamtluftmenge: 235 *l* von 20·6° C. und 751·5 *mm*.

Wattverbrauch: 165 Watt konstant.

I. Gasanalysen aus dem Mischgefäß entnommen, gaben zu den Zeiten

81 Minuten	102 Minuten	147 Minuten	180 Minuten	nach Versuchsbeginn
3·9	3·6	3·6	3·8	% NO

Gasanalysedurchschnitt: 3·72% NO.

II. Analyse der Nitrose ergab 8·7 *l* NO von 25° C. und 751 *mm* oder 3·73%.

Die Waschflaschen 1, 3, 4, 5 vereinigt und auf 1000 cm^3 verdünnt, 50 cm^3 in eine Bürette gegeben. Von dieser abgelassen:

1. 5·15 cm^3 im Nitrometer zersetzt, geben 35·75 cm^3 NO von 25·5° C. und 751 *mm*.

II. 5·0 *cm*³ im Nitrometer zersetzt, geben 35·0 *cm*³ NO von 25·5° C. und 751 *mm*.

Daher in 1000 *cm*³ der Nitrose 7000 *cm*³ NO von 25° C. und 751 *mm*.

Die Waschflasche 2, enthaltend 300 *cm*³ Nitrose: 4·8 *cm*³ geben 28·3 *cm*³ NO von 25° C. und 751 *mm*.

Daher in 300 *cm*³ der Nitrose 1768 *cm*³ NO von 25·0° C. und 751 *mm*.

Im ganzen 8·7 *l* NO oder **3·73% NO.**

Versuch 38.

Geschwindigkeit: 98 *l* pro Stunde (beziehungsweise 90·0 *l* von 0° C. und 760 *mm*).

Dauer des Versuches: 310 Minuten.

Gesamtluftmenge: 514 *l*. Temperatur zu Beginn 21·6° C., zu Ende 22·0° C. Barometerstand 743·5 *mm*.

Wattverbrauch nach

5 Minuten	125 Minuten	160 Minuten	300 Minuten
168	168	168	168 Watt

I. Gasanalysen nach

50 Minuten	188 Minuten	292 Minuten
3·98	3·97	3·99% NO

Im Mittel 3·98% NO.

II. Analyse der Nitrose.

Aus jeder der ersten drei Absorptionsflaschen je 50 *cm*³ mittels Bürette abgemessen und auf 1 *l* aufgefüllt.

I. 25 *cm*³ dieser Lösung gaben 57·1 *cm*³ NO von 25° C. und 749 *mm*.

II. 20 *cm*³ dieser Lösung gaben 45·1 *cm*³ NO von 24° C. und 754 *mm*.

Aus Analyse I folgt: 2·284 *l* in 1000 *cm*³ oder 13·704 *l* in den 900 *cm*³ der Waschflaschen, beziehungsweise 12·37 *l* von 0° C. und 760 *mm*.

Aus Analyse II folgt: 2·255 *l* in 1000 *cm*³ oder 13·530 *l* in 900 *cm*³ der Waschflasche, beziehungsweise 12·34 *l* von 0° C. und 760 *mm*.

In den ersten drei Waschflaschen somit 12·35 *l* NO von 0° C. und 760 *mm*.

Die vierte Flasche enthielt 0·3123 *l* NO von 0° C. und 760 *mm*.

Die fünfte Flasche enthielt 0·2455 *l* NO von 0° C. und 760 *mm*.

Im ganzen wurden 12·9 *l* NO von 0° C. und 760 *mm* bestimmt, die aus 465·3 *l* Luft (0·760 *mm*) entstanden.

Das entspricht 2·77% NO. Die Gasanalyse ergab rund 4%. Es mußten somit 5·9 *l* NO von der Schwefelsäure unabsorbiert geblieben sein. In der Tat war das letzte Glasgefäß während des ganzen Versuches schwach rot gefärbt. Es wurde ferner in jeder Flasche eine Einzelbestimmung ausgeführt. Von der Gesamtmenge im Betrage von 12·9 *l* NO wurden von den einzelnen Flaschen absorbiert:

Flasche Nr.	Kubikzentimeter Schwefelsäure	Prozent des Gesamtbetrages an NO
1	300	72·5
2	300	17·8
3	300	5·6
4	100	2·3
5	100	1·8

Wir haben noch in zwei andern Fällen Differenzen zwischen den durch Gasanalyse und den durch Schwefelsäureabsorption bestimmten Werten gefunden, die, bei niederen Geschwindigkeiten durchgeführt, geringer waren.

Um die Absorption mittels Schwefelsäure auch bei höheren Geschwindigkeiten als 75 *l* pro Stunde durchzuführen, ohne daß die Absorptionsanlage zu umfangreich wird, wäre es notwendig gewesen, von der Gashauptleitung aus (z. B. hinter der Mischflasche) einen Nebenschluß abzuziehen und durch diesen eine bestimmte Gasmenge der Schwefelsäure in langsamem Strome zur Absorption zuzuführen. Wir haben gelegentlich auch solche Bestimmungen durchgeführt und sie führten, mit den durch Gasanalyse gewonnenen verglichen, zu einer sehr guten Übereinstimmung.

Wir können das Resultat unserer mit Schwefelsäure als Absorptionsmittel durchgeführten Versuche dahin zusammenfassen, daß diese Methode stets dann verläßliche Werte liefert, wenn auf die geringe Reaktionsgeschwindigkeit zwischen verdünnten nitrosen Gasen und konzentrierter Schwefelsäure Rücksicht genommen wird. Eine genaue Messung dieser Geschwindigkeit wäre erwünscht.

c) Lauge als Absorptionsmittel.

Da die Reaktionsgeschwindigkeit zwischen nitrosen Gasen und Lauge sichtlich größer ist als jene mit Schwefelsäure, haben wir die Absorption durch Lauge jener durch Schwefelsäure anfänglich vorgezogen. Im Laufe der auf diesem Wege ausgeführten Bestimmungen haben wir aber eine Reihe von Beobachtungen gesammelt, die uns veranlassen, der Absorption durch Schwefelsäure den Vorzug zu geben. Wir schicken diese Beobachtungen voran. Eine vollständige Absorption der nitrosen Gase durch Natronlauge allein gelingt nicht. Eine Rotfärbung der Gase nach der Laugenabsorption ist nicht zu beobachten. Trotzdem nimmt noch konzentrierte Schwefelsäure Stickoxyde in einer durch Permanganat bestimmbaren Form auf. Rechnet man den durch Permanganat bestimmten Anteil als NO, so gelangt man durch Hinzufügen desselben zu dem durch Natronlauge absorbierten Anteil zu einer guten Übereinstimmung mit den auf gasanalytischer Grundlage gewonnenen Werten. Dieser von der Schwefelsäure absorbierte Anteil kann aber keineswegs Stickoxyd gewesen sein, da dessen Löslichkeit in konzentrierter Schwefelsäure 3 bis 3·5 Volumprozent beträgt und wir bei unseren Versuchen vielmals größere Mengen an NO in der Schwefelsäure bestimmten, als dieser Löslichkeit entsprechen. Wir bemerken vorgreifend, daß dieser von der Lauge nicht absorbierte Anteil in den meisten beobachteten Fällen zirka 1% des gesammten NO betrug. Da nun unsere nitrosen Gase um 4% NO enthielten, so würde die die Lauge verlassende Luft noch zirka 0·04% an NO, beziehungsweise NO_2 enthalten. Ein solch geringer Gehalt an Peroxyd entzieht sich wohl der Beurteilung durch Färbung. Wir müssen demnach zunächst annehmen, daß die Lauge die nitrosen Gase bei den in Betracht gezogenen Geschwindigkeiten bis auf 1% absorbiert. Erklärungen für diese Erscheinung, die von dem Gesichtspunkt eines Nitrit-Nitrat-Stickoxydgleichgewichtes auszugehen hätten, das erst kürzlich von Abegg[1] am Falle der Selbstzersetzung von Silbernitrit behandelt wurde, könnten erst nach weiterem

[1] Zeitschrift für Elektrochemie, *12*, 592 (1906).

Studium dieser Reaktion gegeben werden. Wir führen zur Beurteilung der Methode zwei Versuche an, die wir an einem 3 *cm* langen Bogen durchführten.

Die ersten drei Waschflaschen waren mit je 200 cm^3 zirka $^n/_1$ NaOH, die zwei folgenden Waschflaschen mit zirka 200 cm^3 konzentrierter Schwefelsäure beschickt. Die letzteren gestatteten durch eingelegte Glasspiralen (Hugershoff-Waschflaschen) eine sehr innige Berührung zwischen Gas und Flüssigkeit. Nach jedem Versuch wurde die gesamte Lauge auf 1000 cm^3 verdünnt und zweimal je 50 cm^3 dieser Lösung mit Eisen und Zink, beziehungsweise mit Devardas' Legierung zu Ammoniak reduziert, das in vorgelegter $^n/_{10}$ Schwefelsäure aufgefangen wurde. (Ein Rücktitrieren der unverbrauchten Lauge führt nach unseren Erfahrungen wegen der Zerstörung des Indikators zu unsicheren Werten.)

Die Reagenzien wurden auf ihren Stickstoffgehalt untersucht. Derselbe kam bei den in dieser Arbeit beschriebenen Versuchen außer Betracht. Immerhin muß betont werden, daß bei sehr verdünnten Lösungen der fast stets vorhandene Stickstoffgehalt des Reduktionsmittels erhebliche Fehler verursachen kann.

Zur Bestimmung des durch Schwefelsäure absorbierten Anteils konnte die Bestimmung mittels des Nitrometers nicht herangezogen werden, da infolge Auswaschens der Waschflaschen mit Schwefelsäure das Gesamtvolumen der Nitrose zu sehr anstieg, wodurch die Zersetzung eines aliquoten, wenig NO enthaltenden Teiles im Nitrometer zu ungenau ausgefallen wäre. Es wurde daher die nitrose Säure aus einer Bürette in vorgelegtes $^n/_{100}$ $KMnO_4$ bis zur Entfärbung desselben einfließen gelassen und das NO aus dem Permanganatverbrauch berechnet.

Versuch 40 (siehe p. 1640).

Luftgeschwindigkeit: 32 *l* pro Stunde.

Dauer des Versuches: 130 Minuten.

Gesamtluftmenge: 69·33 *l* von 15° C. und 759 *mm*, beziehungsweise 65·63 *l* von 0° C. und 760 *mm*.

I. Gasanalysen: Nach 90 Minuten 5·0% NO, nach 125 Minuten 5·0% NO.

II. Analyse der Lauge. Vorhanden 1000 *cm*³.

50 *cm*³ zu NH_3 reduziert. Diese verbrauchten 72·0 *cm*³ $^n/_{10}$ Schwefelsäure, $J = 1·022$. Demnach 3228·5 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm*.

III. Analyse der Nitrose. Vorhanden 250 *cm*³.

14·49 *cm*³ $^n/_{100}$ $KMnO_4$ verbrauchten 16·4 *cm*³ Nitrose. 250 *cm*³ Nitrose enthalten demnach 0·03317 *g* NO oder 24 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm*.

Im ganzen bestimmt 3228·2 + 24·8 = 3253·3 *cm*³ NO (0° C. und 760 *mm*).

Im Gasgleichgewicht sind 65629—3253·3 *cm*³ Luft neben 3253·3 *cm*³ NO.

In 65·63 *l* Gas 3·26 *l* NO, entsprechend **4·99% NO,** die mit dem gasanalytisch ermittelten **5·0% NO** übereinstimmen.

Der durch Schwefelsäure absorbierte Anteil (24·8 *cm*³) des gesamten Stickoxyds (32·53 *cm*³) beträgt **0·76%**.

IV. Wir haben ferner bei diesem wie bei einer Reihe späterer Versuche das Verhältnis von Salpetersäure zu salpetriger Säure in der Absorptionslauge bestimmt. Die Bestimmung des Nitrits erfolgte durch Einfließen der alkalischen Lösung in vorgelegtes saures $^n/_{10}$ $KMnO_4$. Die Gesamtsäure war durch die Reduktionsbestimmung bereits bekannt.

Es wurden ermittelt in der Lauge: 3·9208 *g* HNO_2 oder 0·083 *g* Mole HNO_2.

Die Gesamtsäure entsprach 0·147 *g* Molen, daher 0·064 *g* Mole HNO_3.

Molekulares Verhältnis $\mathbf{HNO_3 : HNO_2 = 1 : 1·3}$.

Versuch 41 (siehe p. 1640).

Luftgeschwindigkeit: 45 *l* pro Stunde.

Dauer des Versuches: 120 Minuten.

Gesamtluftmenge: 90 *l* von 15·3° C. und 758 *mm*, beziehungsweise 83·74 *l* von 0° C. und 760 *mm*.

I. Gasanalysen: Nach 77 Minuten 4·7% NO, nach 107 Minuten 4·6% NO, im Mittel 4·65% NO.

II. Analyse der Lauge. Vorhanden 1000 cm^3.

50 cm^3, zu NH_3 reduziert, verbrauchten 84·5 cm^3 $^{n}/_{10}$ Schwefelsäure, demnach 3789·0 cm^3 NO von 0° C. und 760 *mm*.

III. Analyse der Nitrose. Vorhanden 251 cm^3.

14·49 cm^3 $^{n}/_{100}$ $KMnO_4$ verbrauchten 12·1 cm^3 Nitrose. 250 cm^3 Nitrose enthalten demnach 0·04515 *g* NO oder 33·7 cm^3 NO von 0° C. und 760 *mm*.

Im ganzen bestimmt 3789·0 + 33·7 = 3822·7 cm^3 NO (0° C. und 760 *mm*).

Im Gasgleichgewicht sind (83·74—3·82) = 79·92 *l* Luft neben 3·82 *l* NO.

In 83·74 *l* Gas 3·82 *l* NO, entsprechend **4·56%** NO, während gasanalytisch **4·65% NO** bestimmt wurde.

Der durch Schwefelsäure absorbierte Anteil (33·7 cm^3) des gesamten Stickoxyds (3822·7 cm^3) beträgt **0·88%**.

IV. Bestimmung der salpetrigen Säure in der Lauge: In 1000 cm^3 4·705 *g* HNO_2 oder 0·100 *g* Mole HNO_2.

Die Gesamtsäure entsprach **0·169** *g* **Molen**; Differenz 0·069 *g* Mole HNO_3.

Molekulares Verhältnis: $\mathbf{HNO_3 : HNO_2 = 1 : 1{\cdot}45}$.

Weitere analytische Daten bezüglich der Laugenabsorption finden sich in den nachfolgend beschriebenen Versuchsreihen. Die Übereinstimmung zwischen den durch Gasanalyse und den durch Absorption bestimmten Werten ist im allgemeinen zufriedenstellend. Eine vollkommene Übereinstimmung beider Zahlen (und dies gilt natürlich ebenso für die durch Schwefelsäureabsorption ermittelten Werte) ist schon deshalb wenig wahrscheinlich, da die gasanalytisch bestimmten Konzentrationen Momentanproben entstammen. Immerhin zeigt die geringe Abweichung beider Bestimmungsmethoden, daß die hier verwendete Form des Flammenbogens ein sehr konstantes Gebilde ist.

Wir geben an dieser Stelle eine Übersicht der Bestimmungen, aus denen ersichtlich ist, wie viel des Gesamtstickoxyds von der Lauge und wie viel von der nachgeschalteten Schwefelsäure absorbiert wird.

Die Geschwindigkeit ist in Litern Luft von 0° und 760 *mm* pro Stunde angegeben.

Tabelle 24.

Geschwindigkeit	Es wurden absorbiert in Liter NO			
	insgesamt	durch Lauge	durch Schwefelsäure	durch Schwefelsäure in Prozent
7·38	0·788	0·777	0·011	1·39
11·04	1·152	1·148	0·014	1·25
13·44	1·303	1·287	0·016	1·23
16·08	1·113	1·100	0·013	1·17
26·04	1·867	1·852	0·015	0·83
29·15	3·273	3·252	0·021	0·64
30·28	2·012	1·992	0·020	0·98
30·30	3·253	3·228	0·025	0·76
40·86	3·823	3·789	0·034	0·88
51·98	3·846	3·819	0·027	0·70
52·8	2·418	2·390	0·028	1·15
57·74	3·330	3·296	0·034	1·02
69·36	4·816	4·780	0·036	0·74
86·88	3·156	3·119	0·037	1·17
			Im Mittel	0·99

Eine Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeit und den absorbierten Anteilen ist nicht zu beobachten. Im Durchschnitt absorbiert die Lauge 99% der gesamten nitrosen Gase.

Wir haben ferner bei einigen Versuchen, die mit Lauge als Absorptionsmittel durchgeführt wurden, das molekulare Verhältnis von Nitrat zu Nitrit in der alkalischen Lösung bestimmt. Die Einzelheiten sind bei den angeführten Versuchen einzusehen. Folgende Tabelle 25 zeigt die Resultate.

Es tritt hier als auffällige Erscheinung die Mehrbildung von Nitrit gegenüber Nitrat auf. Nach Beendigung der hier angeführten, aber noch nicht bekannten Versuche hat Le Blanc[1] auf dieselbe Erscheinung hingewiesen. Er fand, daß die im

[1] Zeitschrift für Elektrochemie, *12*, 541 (1906).

elektrischen Flammenbogen gewonnenen nitrosen Gase sich gegenüber verdünnter Lauge als Absorptionsmittel anders verhalten, als die auf dem gewöhnlichen chemischen Wege gewonnenen nitrosen Gase. Während letztere bei der Absorption nahezu gleiche Mole Nitrat und Nitrit bilden, eher etwas mehr Nitrat entstehen lassen, tritt bei den ersteren eine starke Verschiebung zu Gunsten des Nitrits auf.

Tabelle 25.

Versuch Nr.	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Mole $HNO_3 : HNO_2$
40	32	1 : 1·3
44	32	1 : 1·38
41	45	1 : 1·45
45	63	1 : 1·79
46	94	1 : 2·82

Le Blanc gibt ferner an, daß das Verhältnis zu Gunsten des Nitrits erheblich gesteigert wird, wenn das Gas, statt aus der Glaskugel, in der es sich gebildet hat, entnommen zu werden, direkt aus der Flamme gesaugt wird. Aus den beiden daselbst angeführten Versuchen:

1.) 6·20 *mg* Nitrat, 71·85 *mg* Nitrit,
2.) 2·85 *mg* Nitrat, 43·30 *mg* Nitrit,

ergeben sich die molekularen Verhältnisse bei

1.) zu zirka 1 : 7,
2.) zu zirka 1 : 15.

Die in Tabelle 25 niedergelegten Werte zeigen ein rasches Ansteigen des Nitritgehaltes mit steigender Geschwindigkeit.

Die Stromstärke, beziehungsweise der Wattverbrauch des Bogens scheint keinerlei Einfluß auf dieses Verhältnis auszuüben, denn die beiden ersten Versuche, die bei gleicher Geschwindigkeit, aber einmal mit 0·1 Ampère und das zweite

Mal mit 0·19 Ampère durchgeführt wurden, zeigen eine auffällige Übereinstimmung in der Verteilung von Nitrat und Nitrit.

Le Blanc hat die näheren Arbeitsbedingungen, bei denen er zu so hohen Nitritgehalten kam, nicht angegeben.

Die Mehrbildung von Nitrit mit steigender Geschwindigkeit könnte zunächst so gedeutet werden, daß der nitritbildende Bestandteil des Gases mit Lauge rascher reagiert als der nitratbildende Anteil. Diese Deutung lehnt sich an die Le Blanc'sche Auffassung an, nach welcher folgende Reaktionen auftreten sollen:

1. $2\,NO + O_2 \rightarrow 2\,NO_2$,
2. $NO + NO_2 \rightarrow N_2O_3$,
3. NO_2 + Lauge → Nitrat + Nitrit,
4. N_2O_3 + Lauge → Nitrit.

Diese Auffassung setzt voraus, daß die Reaktionen 2 und 4 rascher verlaufen als 1 und 3.

Nernst[1] hat im Anschluß an Le Blanc's Beobachtungen die Möglichkeit der Bildung von N_2O_3 bei hohen Temperaturen in Betracht gezogen, das, im Abkühlungsgebiete hängen bleibend, die Mehrbildung von Nitrit erklären würde.

Nachdem aber Lunge und Berl[2] gezeigt haben, daß Gemische von Stickoxyd und Stickstoffperoxyd beim Einleiten in Lauge mehr Nitrit als Nitrat bilden, läßt sich die Mehrbildung von Nitrit bei der Reaktion der Flammengase mit Lauge, insolange kein größeres Versuchsmaterial vorliegt, zwangloser erklären. Da Nitratlösungen durch Stickoxyd nicht reduziert werden, hingegen Gemische von Stickstoffperoxyd und Stickoxyd mit Lauge unter Mehrbildung von Nitrit reagieren, so hat man es im letzteren Falle offenbar mit einer gekoppelten Reaktion zu tun.

Die Mehrbildung von Nitrit durch Flammengase gegenüber dem normalen Reaktionsverlauf bei chemisch gewonnenem Peroxyd ließe sich so erklären, daß neben Stickstoffperoxyd noch unverbundenes Stickoxyd vorhanden ist. Das würde besagen, daß die Reaktion $NO + O \rightarrow NO_2$ zur Zeit der Absorption nicht abgelaufen ist. Die Kinetik dieser Reaktion wurde kürzlich von

[1] Zeitschrift für Elektrochemie, *12*, 545 (1906).

[2] Zeitschrift für angew. Chemie, *19*, 857 (1906).

Lunge und Berl[1] gemessen. Auf Grund dieser Messung hätte wohl die Zeit, in welcher die Gase unser Mischgefäß durchstreichten, bevor sie zur Absorption gelangten, genügen müssen, um sie in Stickstoffperoxyd zu verwandeln. Wenn aber die Gase mit großer Geschwindigkeit direkt aus der gekühlten Platinkapillare in die Lauge treten, ist die Zeit zur praktisch vollständigen Bildung von Peroxyd nicht gegeben. In einem solchen Falle wird eine wesentliche Mehrbildung von Nitrit zu erwarten sein.

Ein zweiter Faktor, von dem die Gegenwart von Stickoxyd und Sauerstoff neben Peroxyd abhängt, ist die Temperatur. Mit steigender Temperatur findet eine Dissoziation des Peroxyds in Stickoxyd und Sauerstoff statt. Nun läßt sich aus den Dampfdichtebestimmungen Richardson's[2] über das Dioxyd angeben, daß unter Atmosphärendruck bei 184° C. erst 5% des Dioxyds gespalten sind. Solche Temperaturen waren aber in unserem Mischraum sicher nie vorhanden. Wir haben nur beobachtet, daß mit steigender Geschwindigkeit eine Erhöhung der Temperatur der die Kapillare verlassenden Gase eintrat, während die Temperatur im Mischraum selten mehr als 2° C. gegenüber der Außentemperatur anstieg. Hingegen war im Mischraum stets Minderdruck vorhanden, dessen Größe mit steigender Geschwindigkeit wuchs. Wir haben gelegentlich solche Druckmessungen bei einem 5 *cm* langen Flammenbogen durchgeführt und hiebei auch den Druck knapp vor dem Flammenbogen bestimmt. Die folgende Tabelle vereinigt die Beobachtungen.

Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Temperatur		Druck in *mm* Hg	
	der Gasuhr	im Mischraum	vor dem Bogen	im Mischraum
70	15·5	17·0	—20	—104
86	15·8	17·0	—23	—172
102	16·0	18·0	—26	—216

[1] L. c.

[2] W. Nernst, Theoretische Chemie, IV. Aufl., 439.

Mit wachsender Geschwindigkeit fand ein starkes Abfallen des Druckes im Mischraum statt. Da aber Druckverringerung die Reaktion



$$2\,NO + O_2 \rightleftarrows 2\,NO_2$$

zu Ungunsten der Dioxydbildung beeinflußt, erscheint die Gegenwart von NO neben NO_2 und somit die Mehrbildung von Nitrit gegenüber Nitrat gedeutet.[1]

Kürzlich haben F. Fischer und H. Marx[2] auf den Umstand hingewiesen, daß in der Regulierung der Windgeschwindigkeit die Möglichkeit vorliege, neben Stickoxyd so viel Ozon zu erzeugen, daß bei der Absorption durch Wasser keine salpetrige Säure, sondern nur Salpetersäure entsteht. Sie haben wohl beim Anblasen von glühenden Nernststiften durch Luft mit steigender Geschwindigkeit das Auftreten von Ozon nachweisen können, während dieser Nachweis beim Anblasen eines Lichtbogens mit Luft noch zu erbringen wäre. (Die Beurteilung des Auftretens von Ozon durch den Geruchsinn ist nach unseren Erfahrungen unsicher, da sehr verdünnte nitrose Gase einen ähnlichen Reiz ausüben.)

Das Auftreten von Ozon neben Stickoxyd bei höheren Geschwindigkeiten müßte eine Mehrbildung von Nitrat zur Folge haben. Innerhalb der in Tabelle 25 angeführten Geschwindigkeiten trat aber das Gegenteil ein. Die Zerfallgeschwindigkeit des Ozons ist eben so groß, daß dasselbe bei jenen Luftgeschwindigkeiten, die noch eine merkliche Bildung von Stickoxyd gestatten, nicht »hängen« bleibt.

Aus der gefundenen Mehrbildung von Nitrit gegenüber Nitrat könnte vielleicht geschlossen werden, daß die Ergebnisse der im I. Abschnitt durchgeführten Versuche, bei denen die Bestimmung des Stickoxyds auf Grund des Sauerstoffgehaltes im Gasreste vorgenommen wurde, fehlerhaft sind, da eine Mehr-

[1] v. Jüptner (Lehrbuch der Physikalischen Chemie, II, 101 [1904]) hat auf Grund numerischer Rechnungen geschlossen, daß die Reaktion $N_2O_4 \rightleftarrows 2\,NO_2$ bei niederen Drucken von einer zweiten unbekannten Nebenreaktion begleitet ist, welch letztere mit steigendem Drucke sich verringert und schließlich unberücksichtigt bleiben kann. Die Natur dieser Nebenreaktion konnte aber nicht eindeutig entschieden werden.

[2] Berichte, 39, 2564 (1906).

bildung von Nitrit diese Werte als zu niedrig erscheinen lassen könnte. Aus Tabelle 25 ergibt sich aber, daß bei den niederen Geschwindigkeiten der im I. Abschnitt verzeichneten Versuche das Verhältnis Nitrat zu Nitrit nicht weit von 1 verschieden sein kann. Auch konnte innerhalb der bei diesen Versuchen angewandten Geschwindigkeiten (1·2 bis 18 *l* pro Stunde) keine Änderung der Gaszusammensetzung konstatiert werden. Außerdem stimmen diese Gasanalysen mit den später bei gleichen Geschwindigkeiten ausgeführten Lösungsanalysen überein.

Die Gegenwart von Stickoxydul war auf Grund unserer Analysen nicht zu erkennen. Es konnte demnach nicht in merklicher Menge dem Stickoxyd beigemengt sein. Die Zerfallsgeschwindigkeit des Stickoxyduls wurde von Hunter[1] gemessen. Dieselbe ist auch unterhalb 1000° C. beträchtlich, so daß es selbst im Falle seiner Bildung bei hohen Temperaturen im Abkühlungsgebiete zum größten Teile zersetzt wäre. Die Koexistenz merkbarer Quantitäten von Stickoxydul und Stickoxyd neben Stickstoff und Sauerstoff bei hohen Temperaturen ist nach Nernst[2] wenig wahrscheinlich, da auf Grund der Explosionsversuche von Mallard und Le Chatelier die Molekularwärmen von Stickstoff und Sauerstoff für sich allein und miteinander gemengt bis zu Temperaturen über 2000° sehr nahe gleich sind, was, falls sich beträchtliche Mengen Stickoxydul im Augenblicke der Explosion gebildet hätten, nicht der Fall sein könnte.

3. Messungen an einem 3 *cm* langen Bogen.

Wir führen nun die an einem 3 *cm* langen Flammenbogen ausgeführten Messungen an, bei denen die Luftgeschwindigkeit pro Stunde zwischen den Grenzen 13 und 94 *l* geändert wurde. Die Versuche wurden einmal mit 0·1 Ampère und ein zweites Mal mit 0·19 Ampère Stromstärke durchgeführt. Daran schlossen sich drei Versuche, bei denen die Stromstärke 0·07 Ampère betrug. Die Ausbeuten wurden in Kilogrammen HNO_3 pro Kilowattjahr angegeben. Bedeuten *A* die

[1] Zeitschrift für physik. Chemie, 53, 441 (1905).

[2] Ebenda.

Prozente Stickoxyd der verbrannten Luft, L die Geschwindigkeit in Litern trockener Luft von 0° C. und 760 *mm*, W der in Kilowatt ausgedrückte Energieverbrauch, so wurden pro Kilowattstunde $\frac{A \times L}{100}$ *l* NO von 0° C. und 760 *mm* gewonnen.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr ist dann

$$\frac{A \times L}{100} \cdot 24 \times 365 \, l \, \mathrm{NO}$$

oder in Kilogrammen HNO_3:

$$\text{Ausbeute} = \frac{A \times L}{100} \cdot \frac{1}{W} \cdot \frac{63 \times 24 \times 365}{22 \cdot 4 \times 1000}$$
$$= \frac{A \times L}{100} \cdot \frac{551880}{W . 22400}.$$

a) Stromstärke 0·1 Ampère.

Die Spannung bei geringen Luftgeschwindigkeiten war 1620 Volt. Die Volt-Ampères betrugen 162. Der gemessene Effektverbrauch war 108 Watt. Wir müssen an dieser Stelle betonen, daß die Wattmessung zwischen 98 und 108 Watt schwankte.

Der Wert von 108 Watt stellt den Höchstbetrag eines mit 0·1 Ampère betriebenen, 3 *cm* langen Bogens dar. Wir legten diesen Wert unseren Rechnungen zu Grunde.

Die Ausbeute in Kilogrammen HNO_3 pro Kilowattjahr beträgt dann

$$\frac{A \times L}{100} \cdot \frac{551880}{0 \cdot 108 \times 22400} = 2 \cdot 281 \, A . L.$$

Wir führen die einzelnen Versuche an.

Versuch 39.

Geschwindigkeit: 12 *l* pro Stunde.
Dauer des Versuches: 150 Minuten.
Luftmenge: 30 *l* von 16° C. und 756 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 27·68 *l*, Geschwindigkeit 11·04 *l* pro Stunde.

Die 144 Minuten nach Beginn entnommene Gasprobe gibt 4·3% NO.

Die Analyse der Lösung ergibt **4·16% NO.**

1. Lauge. Vorhanden 1000 *cm*³.

50 *cm*³, zu NH_3 reduziert, verbrauchen 25·4 *cm*³ $^n/_{10}$ Schwefelsäure. Demnach 1·524 *g* NO.

2. Nitrose. Vorhanden 250 *cm*³.

10 *cm*³ $^n/_{100}$ $KMnO_4$, J = 0·01449, verbrauchten 29·4 *cm*³ Nitrose. 250 *cm*³ Nitrose enthalten 0·01851 *g* NO.

Insgesamt 1·543 *g* oder 1152·1 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm*.

Im Gasgleichgewichte 26·53 *l* Luft neben 1·152 *l* NO oder 4·16%.

Der durch Schwefelsäure absorbierte Anteil beträgt 1·25% des Gesamtstickoxydes.

Die in Kilogrammen HNO_3 pro Kilowattjahr ausgedrückte Ausbeute beträgt 2·281 × 4·16 × 11·04 = **104·8 *kg* HNO_3.**

Versuch 40.

Geschwindigkeit: **32 *l*** pro Stunde.

Dauer des Versuches: 130 Minuten.

Luftmenge: 69·33 *l* von 15° C. und 759 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 65·63 *l*, Geschwindigkeit 30·30 *l* pro Stunde.

Die Gasanalysen ergeben im Durchschnitt 5% NO.

Die Analyse der Lösung **4·99% NO.**

Bezüglich der analytischen Daten verweisen wir auf p. 1631.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **344·8 *kg* HNO_3.**

Versuch 41.

Luftgeschwindigkeit: **45 *l*** pro Stunde.

Dauer des Versuches: 120 Minuten.

Gesamtluftmenge: 90 *l* von 15·3° C. und 758 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 83·74 *l*, Geschwindigkeit 43·68 *l* pro Stunde.

Die Gasanalysen ergaben im Mittel 4·6% NO.

Aus der Analyse der Lösung wurde ermittelt **4·56% NO.**

Die analytischen Daten befinden sich auf p. 1631.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **454·3 *kg* HNO_3.**

Versuch 42.

Luftgeschwindigkeit: 57 *l* pro Stunde.
Dauer des Versuches: 83 Minuten.
Gesamtluftmenge: 78·8 *l* von 15° C. und 756 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 73·05 *l*, Geschwindigkeit 52·8 *l* pro Stunde.

Die Analyse der Lösung ergibt **3·10% NO.**

1. Lauge. Vorhanden 1000 cm^3.

50 cm^3, zu NH_3 reduziert, verbrauchen 53·3 cm^3 $^n/_{10}$ H_2SO_4.
In 1000 cm^3 demnach 3·2023 *g* NO oder 2·3899 *l* NO von 0° und 760 *mm*.

2. Nitrose. Vorhanden 250 cm^3.

14·49 cm^3 $^n/_{100}$ $KMnO_4$ verbrauchen 10·1 cm^3 Nitrose.
250 cm^3 Nitrose enthalten 0·0372 *g* oder 0·0277 cm^3 NO von 0° und 760 *mm*.
Insgesamt 2·418 *l* NO in 73·05 *l* Luft oder 3·10% NO.
Der durch Schwefelsäure absorbierte Anteil ist 1·15% des Gesamtstickoxydes.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **373·3 *kg* HNO_3.**

b) Stromstärke 0·19 Ampère.

Die Wattmessung ergab bei diesen Versuchen Werte, die zwischen 185 und 203 Watt lagen. Wir beziehen auch hier die Ausbeuten auf den höchstgemessenen Wert von 203 Watt. Darnach beträgt das Ausbringen in Kilogrammen HNO_3 pro Kilowattjahr:

$$\text{Ausbeute} = \frac{A.L}{100} \cdot \frac{551880}{0{\cdot}203 \times 22400} = 1{\cdot}213\, A.L,$$

wobei A die Prozente NO im Gasgleichgewicht und L die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierte Luftgeschwindigkeit bedeuten.

Versuch 43.

Luftgeschwindigkeit: 14·5 *l* pro Stunde.
Dauer des Versuches: 123 Minuten.
Gesamtluftmenge: 29·7 *l* von 16° und 760 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 27·55 *l*, Geschwindigkeit 13·44 *l* pro Stunde.

Die 112 Minuten nach Beginn entnommene Gasprobe zeigte 4·6% NO.

Aus der Analyse der Lösung ergaben sich **4·73%** NO.

1. Lauge. Vorhanden 1000 cm^3.

50 cm^3, zu NH_3 reduziert, verbrauchen 28·7 cm^3 $n/_{10}$ H_2SO_4.
In 1000 cm^3 1·7243 *g* NO oder 1·2869 *l* NO (0°, 760 *mm*).

2. Nitrose. Vorhanden 250 cm^3.

14·49 cm^3 $n/_{100}$ $KMnO_4$ verbrauchen 30·0 cm^3 Nitrose.
250 cm^3 Nitrose enthalten 0·01814 *g* NO oder 0·0155 *l* NO.
Insgesamt 1·303 *l* NO (0° C., 760 *mm*) in 27·55 *l* Gas oder 4·73% NO.
Der durch Schwefelsäure absorbierte Anteil des Gesamtstickoxydes ist 1·23%.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **77·14** *kg* HNO_3.

Versuch 44.

Luftgeschwindigkeit: 32 *l* pro Stunde.
Dauer des Versuches: 80 Minuten.
Gesamtluftmenge: 43 *l* von 13° C. und 759 *mm*.

Die auf 0° und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 40·38 *l*, Geschwindigkeit 30·28 *l* pro Stunde.

Eine 65 Minuten nach Versuchsbeginn entnommene Gasprobe ergab 5·5% NO.

Die Analyse der Lösung **4·98% NO.**

1. Lauge. Vorhanden 1000 cm^3.

50 cm^3, zu NH_3 reduziert, verbrauchen 44·46 cm^3 $n/_{10}$ H_2SO_4.
In 1000 cm^3 2·6676 *g* NO.

2. Nitrose.

14·49 cm^3 verbrauchten 8·2 cm^3 Nitrose.
In 250 cm^3 Nitrose 0·0265 *g* NO.
Insgesamt 2·6941 *g* NO oder 2·0116 *l* NO (0°, 760 *mm*) oder 4·98% NO.
Der durch Schwefelsäure absorbierte Anteil beträgt 0·98%.

3. Bestimmung der salpetrigen Säure in der Lauge.

In 1000 *cm*³ 2·4252 *g* HNO_2 oder 0·0516 *g* Mole HNO_2.
Die Gesamtsäure entsprach 0·0889 *g* Mole.
Differenz 0·0373 *g* Mole HNO_3.

Molekulares Verhältnis $\mathbf{HNO_3 : HNO_2 = 1 : 1 \cdot 38}$.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **182·9 *kg* HNO_3**.

Versuch 45.

Luftgeschwindigkeit: 63 *l* pro Stunde.
Dauer des Versuches: 80 Minuten.
Gesamtluftmenge: 84 *l* von 14·5° C. und 746 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 76·99 *l*, Geschwindigkeit 57·74 *l* pro Stunde.

Die Analyse der Lösung ergab **4·33 % NO.**

1. Lauge. Vorhanden 1000 *cm*³.

50 *cm*³, zu NH_3 reduziert, verbrauchen 73·5 *cm*³ $^n/_{10}$ H_2SO_4.
In der Lauge 4·4159 *g* NO oder 3·2957 *l* NO (0°, 760 *mm*).

2. Nitrose. Vorhanden 200 *cm*³.

14·49 *cm*³ $^n/_{100}$ $KMnO_4$ verbrauchen 9·5 *cm*³ Nitrose.
In der Nitrose 0·0458 *g* oder 0·0342 *l* NO.
Insgesamt 3·330 *l* NO in 76·99 *l* Gas oder 4·33 %.
Vom Gesamtstickoxyd absorbierte die Schwefelsäure 1·02 %.

3. Bestimmung der salpetrigen Säure in der Lauge.

In 1000 *cm*³ 4·4368 *g* HNO_2 oder 0·0944 *g* Mole.
Die Gesamtsäure entsprach 0·1470 *g* Mole.
Differenz 0·0526 *g* Mole HNO_3.

Molekulares Verhältnis $\mathbf{HNO_3 : HNO_2 = 1 : 1 \cdot 79}$.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **303·1 *kg* HNO_3**.

Versuch 46.

Luftgeschwindigkeit: 94 *l* pro Stunde von 13·5° C. und 759 *mm*.

Versuchsdauer: 60 Minuten.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luft-menge 88·09 *l*, Geschwindigkeit 88·09 *l* pro Stunde.

Die Analyse der Lösung ergab **3·58% NO.**

1. Lauge. Vorhanden 1000 *cm*³.

50 *cm*³ zu NH_3 reduziert, verbrauchen 69·55 *cm*³ $^n/_{10}$ H_2SO_4.
In der Lauge 4·1786 *g* oder 3·1186 *l* NO (0°, 760 *mm*).

2. Nitrose.

14·49 *cm*³ $^n/_{100}$ $KMnO_4$ verbrauchen 10·8 *cm*³ Nitrose.
In 250 *cm*³ Nitrose 0·0504 *g* oder 0·0367 *l* NO.
Insgesamt 3·156 *l* NO in 88·09 *l* Gas oder 3·58% NO.
Die Schwefelsäure absorbierte 1·17% des Stickoxydes.

3. Salpetrige Säure.

In 1000 *cm*³ Lauge 4·705 *g* HNO_2 oder		0·100 *g* Mole HNO_2.
Gesamtsäure		0·139 *g* Mole
	Differenz	0·039 *g* Mole HNO_3.

Molekulares Verhältnis $\mathbf{HNO_3 : HNO_2 = 1 : 2 \cdot 82}$.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **382·5 *kg* HNO_3.**

Eine wesentliche Erhöhung der Geschwindigkeit, die jedenfalls das Ausbringen erhöht hätte, konnte nicht erfolgen, da die Absorption der nitrosen Gase sichtlich nicht mehr quantitativ erfolgte und der sehr geringe Durchmesser der Platinkapillare bei den uns zur Verfügung stehenden Pumpen eine Erhöhung der Geschwindigkeit über 120 *l* nicht gestattete.

c) Stromstärke 0·07 Ampère.

Die bei geringen Luftgeschwindigkeiten ermittelte Spannung betrug 1880 Volt, die Voltampères waren 131·6. Der Energieverbrauch lag innerhalb der Grenzen von 79 und 86 Watt. Auch hier legen wir den Rechnungen den Höchstbetrag von 86 Watt zu Grunde.

Das Ausbringen in Kilogrammen HNO_3 pro Kilowattjahr beträgt 2·806 *A.L.*

Versuch 47.

Luftgeschwindigkeit: 8 *l* pro Stunde.
Versuchsdauer: 140 Minuten.
Gesamtluftmenge: 18·66 *l* von 16° C. und 756 *mm*.

Die reduzierten Daten sind: Luftmenge 17·21 *l*, Geschwindigkeit 7·38 *l* pro Stunde.

Die Analyse der Lösung ergab **4·58% NO.**

Insgesamt wurden bestimmt 0·788 *l* NO von 0° und 760 *mm*. Hievon entfielen auf die Lauge 0·777 *l* und auf die Schwefelsäure 0·011 *l* oder 1·39% des Gesamt-NO.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **95·2 *kg* HNO_3**.

Versuch 48.

Luftgeschwindigkeit: 17 *l* pro Stunde.
Versuchsdauer: 120 Minuten.
Gesamtluftmenge: 34 *l* von 10·4° C. und 757 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 32·21 *l*, Geschwindigkeit 16·08 *l* pro Stunde.

Die Analyse der Lösung ergab **3·46% NO.**

Insgesamt wurden 1·113 *l* NO von 0° und 760 *mm* bestimmt. Hievon absorbierte die Lauge 1·100 *l*, die Schwefelsäure 0·013 *l* oder 1·17%.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **165·1 *kg* HNO_3**.

Versuch 49.

Luftgeschwindigkeit: 28 *l* pro Stunde.
Versuchsdauer: 120 Minuten.
Gesamtluftmenge: 56 *l* von 14·5° C. und 757 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 51·1 *l*, Geschwindigkeit 26·04 *l* pro Stunde.

Die Analyse der Lösung ergab **3·58% NO.**

Es wurden insgesamt 1·867 *l* NO (0°, 760 *mm*) ermittelt. In der Lauge 1·852 *l* NO, in der Schwefelsäure 0·015 *l* oder 0·83%.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **261·4 *kg* HNO_3**.

Bei höheren Geschwindigkeiten als 28 *l* pro Stunde wurde in die Kapillare unverbrannte Luft miteingerissen, da der Bogen von 0·07 Ampère sehr schmal ist. Wir waren daher gezwungen, die Versuche an diesem Bogen abzubrechen.

Die an einem 3 *cm* langen Flammenbogen erhaltenen Ergebnisse werden nach den Versuchsdaten des 5 *cm* langen Bogens besprochen.

4. Messungen aus einem 5 *cm* langen Bogen.

Der Wattverbrauch schwankte zwischen 150 und 163 Watt Auch hier sind die Rechnungen auf der Grundlage des Höchstverbrauches von 163 Watt durchgeführt. Die Spannung betrug bei geringen Geschwindigkeiten 2450 Volt.

Die Ausbeute beträgt sodann in Kilogrammen HNO_3 pro Kilowattjahr 1·512 *A.L.*

Versuch 50.

Luftgeschwindigkeit: 31 *l* pro Stunde.
Versuchsdauer: 120 Minuten.
Gesamtluftmenge: 62 *l* von 13° C. und 760 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 58·30 *l*, Geschwindigkeit 29·15 *l* pro Stunde.

Die 66, beziehungsweise 106 Minuten nach Versuchsbeginn gezogenen Gasproben ergaben 5·4, beziehungsweise 5·5% NO. Im Mittel 5·45% NO.

Die Analyse der Lösung ergab 5·61% NO.

1. Lauge. Vorhanden 1000 cm^3.

50 cm^3, zu NH_3 reduziert, verbrauchten 72·6 cm^3 $n/_{10}$ H_2SO_4.
In 1000 cm^3 somit 4·356 *g* oder 3·252 *l* NO (0°, 760 *mm*).

2. Nitrose. Vorhanden 218 cm^3. Diese enthielten 0·027 *g* oder 0·02[illegible] *l* NO (0°, 760 *mm*).

Insgesamt 3·273 *l* NO, die in 58·30 *l* Gas enthalten waren.
Somit **5·61% NO.**
Die Schwefelsäure absorbierte 0·64% des Gesamt-NO.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt demnach 247·3 *kg* HNO_3.

Versuch 51.

Luftgeschwindigkeit: 56 *l* pro Stunde.
Versuchsdauer: 102 Minuten.
Gesamtluftmenge: 95·2 *l* von 16·5° C. und 762 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 88·38 *l*, Geschwindigkeit 51·98 *l* pro Stunde.

Eine 62 Minuten nach Versuchsbeginn entnommene Gasprobe zeigte 4·7% NO.

Die Analyse der Lösung ergab **4·53% NO.**

1. Lauge. Vorhanden 1000 cm^3.

50 cm^3, zu NH_3 reduziert, verbrauchten 88·5 cm^3 $^n/_{10}$ H_2SO_4.
In 1000 cm^3 somit 5·31 *g* oder 3·9682 *l* NO (0°, 760 *mm*).

2. Nitrose. Vorhanden 100·4 cm^3, welche 0·036 *g* NO oder 0·0269 *l* NO (0°, 760 *mm*) enthielten.

Insgesamt 3·995 *l* NO in 88·38 *l* Gas oder **4·53% NO.**
Die Schwefelsäure absorbierte 0·70% des Gesamt-NO.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **356 *kg* HNO_3.**

Versuch 52.

Luftgeschwindigkeit: 74·6 *l* pro Stunde.
Versuchsdauer: 81 Minuten.
Gesamtluftmenge: 100·71 *l* von 16° C. und 762 *mm*.

Die auf 0° C. und 760 *mm* reduzierten Daten sind: Luftmenge 93·68 *l*, Geschwindigkeit 69·36 *l* pro Stunde.

Eine 56 Minuten nach Versuchsbeginn entnommene Gasprobe zeigte 4·95% NO an.

Die Analyse der Lösung ergab **5·14% NO.**

1. Lauge. Vorhanden 1000 cm^3.

50 cm^3, zu NH_3 reduziert, verbrauchten 106·4 cm^3 $^n/_{10}$ H_2SO_4.
In 1000 cm^3 somit 6·384 *g* NO oder 4·7797 *l* NO (0°, 760 *mm*).

2. Nitrose. 116·0 cm^3 enthielten 0·04046 *g* oder 0·0364 *l* NO.

Insgesamt 4·816 *l* NO in 93·68 *l* Gas oder 5·14%.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **539 *kg* HNO_3.**

Es fällt auf, daß bei einer Geschwindigkeit von nahezu 75 *l* pro Stunde das Gas eine höhere Stickoxydkonzentration aufweist als bei 56 *l* Geschwindigkeit. Wir haben gelegentlich den Versuch 52 wiederholt und hiebei nur konzentrierte Schwefelsäure als Absorptionsmittel verwandt. Die diesbezüglichen Daten sind bereits in Versuch 37 (p. 1626) vermerkt.

Hienach wurden gasanalytisch 3·72, lösungsanalytisch 3·73% NO ermittelt, die einer Ausbeute von 391·2 *kg* HNO_3 pro Kilowattjahr entsprachen. Dieser niedere Wert ist auf Grund der nachfolgenden Versuche wenig wahrscheinlich.

Die sehr gute Übereinstimmung der auf gas- und lösungsanalytischem Wege bestimmten Werte in den Versuchen 37, 51 und 52 schließt Fehler in der analytischen Bestimmung aus. Wir müssen vielmehr vorläufig annehmen, daß bei den Versuchen 51 und 37 unverbrannte Luft mitgerissen wurde, welche Erscheinung sich der Beobachtung entzog.

Versuch 53.

Der hier verzeichnete Versuch erstreckte sich auf 281 Minuten. Die Luftgeschwindigkeit wurde zum Teil auf durchschnittlich 99, zum Teil auf 120 *l* pro Stunde gehalten. Die durchschnittliche Temperatur betrug 20·5° C. Der Barometerstand war 750 *mm*. Es wurden zahlreiche Gasproben entnommen. Die Absorption der nitrosen Gase erfolgte mittels Schwefelsäure, doch war dieselbe, wie zu erwarten, bei den hohen Geschwindigkeiten keine vollständige. Wir geben die Messungen in nachfolgender Tabelle 26 wieder.

In den ersten 19 Minuten betrug die Geschwindigkeit 92 *l* pro Stunde. Es gelangten somit $\frac{19}{60} \cdot 92 = 31$ *l* Luft zur Verbrennung. In den nächsten 92 Minuten bei einer Geschwindigkeit von 99 *l* pro Stunde $\frac{92}{60} \cdot 99 = 151 \cdot 8$ *l* und in den letzten 170 Minuten bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 122 *l* pro Stunde $\frac{170}{60} \cdot 122 = 345 \cdot 6$ *l* Luft.

Tabelle 26.

Zeit in Minuten nach Versuchsbeginn	Stromstärke in Ampère	Spannung in Volt	Watt	Gasprobe in Prozent NO	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde
11	0·106	—	165	—	92
19				3·7	
25	0·106	—	—	3·75	99
35	0·106	—	—	3·8	
55	0·106	—	—	3·7	
80	0·106	—	—	3·3	
111					
115	0·106	—	—	3·3	123
125	—	—	—	2·6	
140	0·106	2500	170	—	123
150	0·106	2475	165	—	
165	0·106	2475	170	2·9	120
175	0·106	—	—	—	
185	0·106	2475	—	3·3	122
195	0·106	2425	170	—	
200	—	—	—	3·2	123
205	0·106	2450	—	—	
215	0·106	2450	170	—	
220	—	—	—	3·2	121
240	0·106	2450	—	3·45	121
257	0·106	2450	170	—	

Die durchschnittliche Stickoxydkonzentration betrug in den drei Perioden

3·7, 3·65, 3·13% NO,

entsprechend

1·11, 5·55, 10·82 *l* NO

von 20·5° C. und 750 *mm*, insgesamt 17·48 *l* NO obiger Daten oder **15·75 *l* NO** (0°, 760 *mm*).

Nitrometrisch wurden 14·37 *l* NO (0°, 760 *mm*) in der nitrosen Säure bestimmt. Die Differenz ist auf die große Geschwindigkeit der durch die Schwefelsäure geführten Gase zurückzuführen.

Der Wattverbrauch betrug durchschnittlich 170 Watt.

In 281 Minuten wurden 15·75 *l* NO (0°, 760 *mm*) oder 44·3 *g* HNO_3 gebildet, wozu ein elektrischer Aufwand von 0·796 Kilowattstunden erforderlich war.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt demnach **487·5 *kg* HNO_3**.

Aus den Zahlen dieses Versuches lassen sich ferner die Ausbeuten bei 99, beziehungsweise 122 *l* pro Stunde Geschwindigkeit angenähert berechnen. Die auf 0° und 760 *mm* reduzierten Geschwindigkeiten betragen 88·76, beziehungsweise 109·28 *l* pro Stunde und die entsprechenden Stickoxydkonzentrationen sind 3·65, beziehungsweise 3·13% NO.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt, da der Wattverbrauch zu 170 statt zu 163 Watt gemessen wurde, 1·45 *A. L.*

Dieselbe ist bei 88·76 *l* Geschwindigkeit **470 *kg* HNO_3**, bei 109·28 *l* **496 *kg* HNO_3**.

Versuch 54.

Luftgeschwindigkeit 116 *l* pro Stunde von 15° C. und 759 *mm*, beziehungsweise 107·2 (0°, 760 *mm*).

Dauer des Versuches: 1 Stunde.

Zwei Gasanalysen ergaben übereinstimmend 3·2% NO.

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **508 *kg* HNO_3**.

Höhere Geschwindigkeiten als 120 *l* pro Stunde anzuwenden, gestattete unsere Versuchsanordnung nicht (vergl. p. 1644).

Zur Ergänzung führen wir noch einen bei einer niederen Geschwindigkeit durchgeführten Versuch an.

Versuch 55.

Luftgeschwindigkeit 19·5 *l* pro Stunde, 14·5° C., 759 *mm* (18·19 *l* pro Stunde, 0°, 760 *mm*).

Dauer des Versuches: 120 Minuten.

Gasanalyse 96 Minuten nach Versuchsbeginn: **5·1% NO.**

Die Ausbeute pro Kilowattjahr beträgt **140 *kg* HNO_3.**

5. Zusammenstellung der gewonnenen Ausbeuten.

In den folgenden Tabellen sind die Geschwindigkeiten in Litern trockener Luft (von 0° C. und 760 *mm*) pro Stunde

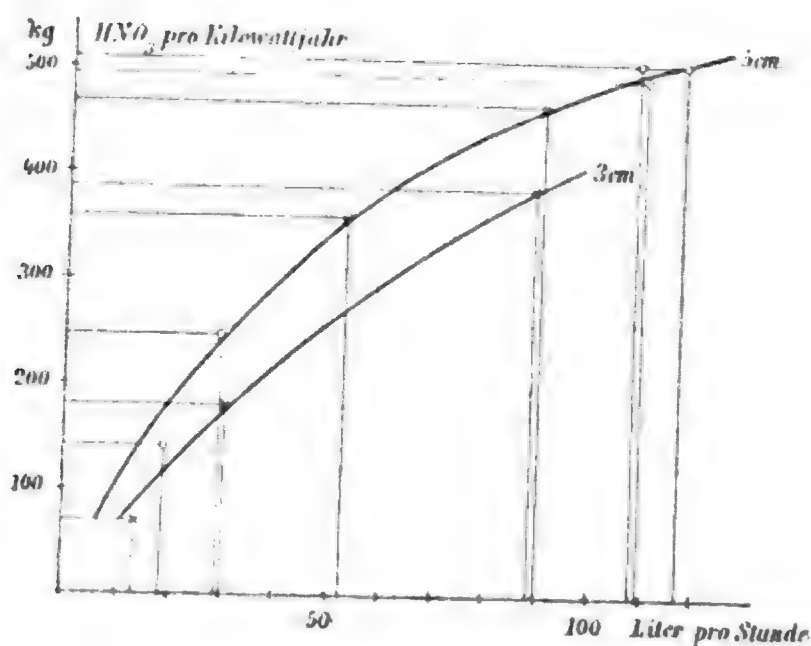


Fig. 11.

gegeben. Die Stickoxydkonzentrationen sind den Lösungsanalysen entnommen. Wo solche nicht durchgeführt wurden, sind die durch Gasanalyse ermittelten Durchschnittswerte eingesetzt und mit * bezeichnet. Das Ausbringen ist in Kilogrammen Salpetersäure pro Kilowattjahr ausgedrückt. Die Ziffern sind abgerundet gegeben.

Tabelle 27.

Der 3 *cm*-Bogen (siehe Fig. 11).

Versuch Nr.	Geschwindigkeit	Prozent NO	Kilogramm HNO_3 pro Kilowattjahr	
39	11	4·16	105	Strom 0·1 Ampère 108 Watt
40	30	4·99	345	
41	44	4·56	454	
42	53	3·1	373	
43	13	4·7	77	0·19 Ampère 208 Watt
44	30	5·0	183	
45	88	3·58	382	
47	7	4·58	95	0·07 Ampère 86 Watt
48	16	3·46	165	
49	26	3·58	261	

Tabelle 28.

Der 5 *cm*-Bogen (siehe Fig. 11).

Versuch Nr.	Geschwindigkeit	Prozent NO	Kilogramm HNO_3 pro Kilowattjahr	
55	18	5·1*	140	0·1 Ampère, 163 Watt;
50	29	5·61	247	
51	52	4·53	356	
[52	69	5·14	539]	
53	89	3·65*	470	bei Versuch 53: 170 Watt.
54	107	3·2*	508	
53	109	3·13*	496	

Wir vermerken zunächst, daß die im I. Abschnitte, p. 1614, vermerkte Abhängigkeit von der Stromstärke hier wiederum zum Ausdrucke kommt. Bei 0·1 Ampère und einer Geschwin-

digkeit von 30 *l* pro Stunde beträgt die Stickoxydkonzentration rund 5% und derselbe Wert tritt bei derselben Geschwindigkeit und nahezu doppelter Stromstärke wieder auf. Die Erhöhung der Stromstärke über 0·1 Ampère, beziehungsweise der Watt auf über 108 Watt übt keinerlei erhöhenden Einfluß auf die Stickoxydkonzentration aus. Dieser Wert von 5% NO entspricht jedenfalls dem Stickoxydgleichgewicht in einer 3 *cm* langen Hochspannungsflamme von 108 Watt und darüber. Auf Grund der Nernst'schen Zahlen entspräche diese Konzentration einer Temperatur von zirka 3350° C.

Das höchste Ausbringen an Salpetersäure pro Kilowattjahr beträgt 454 *kg* bei einem mit 108 Watt betriebenen Bogen. Bei dem mit 203 Watt gespeisten Bogen konnte das Maximum der Ausbeute nicht erzielt werden, da unsere Versuchsanordnung dem Erreichen höherer Geschwindigkeiten hinderlich war.

Die bei einem 5 *cm* langen Bogen höchstermittelte Stickoxydkonzentration beträgt 5·6% NO gegenüber 5% NO bei einem 3 *cm* langen Bogen. Zur Erzielung der letzteren war ein Aufwand von 108 Watt erforderlich. Aber auch bei einem Aufwand von 203 Watt war keinerlei Erhöhung der Konzentration auf über 5% ersichtlich, während bei einem 5 *cm* langen Bogen und einem Aufwand von 163 Watt die Stickoxydkonzentration auf 5·6% anstieg.

Es ist noch zu bemerken, daß die Absaugegeschwindigkeit bei den drei angeführten Versuchen dieselbe war, nämlich 30, 30 und 29 Liter pro Stunde. Nachdem auch alle übrigen Bedingungen die gleichen waren, muß eine Erhöhung der Stickoxydkonzentration mit wachsender Bogenlänge als wahrscheinlich bezeichnet werden, trotzdem bei geringen Absaugegeschwindigkeiten eine solche Abhängigkeit nicht gefunden wurde. Die Ursache der letzteren Erscheinung ist jedenfalls in einer teilweisen Zersetzung des gebildeten Stickoxyds infolge zu langsamer Abkühlung zu suchen.

Um die Frage nach der Abhängigkeit zwischen Stickoxydkonzentration und Bogenlänge zu entscheiden, wären Versuche mit noch längeren Bögen als 5 *cm* durchzuführen gewesen, die aber infolge betriebstechnischer Gründe leider gegenwärtig nicht durchgeführt werden konnten.

Das höchste Ausbringen an einem 5 *cm* langen Bogen betrug pro Kilowattjahr 539 *kg* HNO_3, ein Wert, der nach dem Verlaufe der Ausbeutekurve Fig. 11 zu hoch liegen dürfte. Aber auch die anderen Werte liegen höher als das Maximum der Ausbeute an einem 3 *cm* langen Bogen. Längere Bogen sind somit für das Ausbringen an Salpetersäure günstiger als kurze Bogen. Lange Bogen erscheinen schon deshalb vorteilhafter, weil ihr Energieverbrauch kurzen Bogen gegenüber ein verhältnismäßig geringerer ist, wie dies aus einem Vergleiche des Wattverbrauches bei einem 3 *cm* und einem 5 *cm* langen Bogen hervorgeht, bei denen der Energieverbrauch bei gleicher Stromstärke (0·1 Ampère) 108 Watt, beziehungsweise 163 Watt beträgt. Der erste Bogen verbraucht pro Zentimeter Bogenlänge 36 Watt, der zweite nur 32·6 Watt.

Es muß an dieser Stelle nochmals bemerkt werden, daß der Wattverbrauch an einem 5 *cm* langen Bogen zwischen 150 und 163 Watt schwankte. Das Ausbringen an Salpetersäure pro Kilowattjahr läge somit zwischen den Grenzen 570 und 518, oder rund um 545 *kg* HNO_3.

Durch eine kürzlich erschienene Schrift von Birkeland[1] über sein und Eyde's bekanntes Verfahren der Luftverbrennung gelangten die ersten verläßlichen Angaben aus der Technik der Luftverbrennung in die Öffentlichkeit.

Die vorher von anderen Seiten gegebenen hohen Zahlen über das Ausbringen an Salpetersäure und über die Konzentration der nitrosen Gase erleiden hiedurch eine erhebliche Reduktion.

Birkeland gibt für das effektive Ausbringen pro Kilowattjahr 500 bis 600 *kg* HNO_3 an (auf Grund der Gasanalysen und unter Berücksichtigung der Luftgeschwindigkeit berechnen sich sogar über 600 *kg* HNO_3). Die nitrosen Gase enthalten um 1% NO.

Ein wesentliches Ergebnis der an einem 5 *cm* langen Bogen gewonnenen Resultate ist, daß auch an feststehenden

---

[1] On the Oxidation of Atmospheric Nitrogen in Electric Arcs. A paper read before the Faraday Society, July 2, 1906. Transactions of the Faraday Society II. September 1906. — Vergl. auch Grandeau, La production électrique de l'acide nitrique avec les éléments de l'air, Paris 1906, und O. N. Witt, Chem. Industrie 1905.

Bogen ein Ausbringen erzielt werden kann, das die Technik der Luftverbrennung bisher nur durch Zerreißen ihrer Flammenbogen erreichte.

Faßt man die Wirkung des elektrischen Flammenbogens als eine nur thermische auf, so ließe sich mit Hilfe der Nernstschen Gleichgewichtswerte aus den gewonnenen Ergebnissen der Nutzeffekt berechnen. Unter der Annahme, 1. daß die Wärmetönung der Stickoxydbildung aus den Elementen im Betrage von 21600 cal. sich mit der Temperatur nicht ändert, 2. die mittlere spezifische Wärme der permanenten Gase der Formel $6\cdot8+0\cdot0006\,t$ entspricht, stellt sich die Rechnung bei z. B. einem 5 *cm* Bogen und der effektiven Ausbeute von 496 *kg* HNO_3 pro Kilowattjahr, wie folgt:

Die Konzentration des Gases betrug $3\cdot13\%$ NO. Diese entsprechen auf Grund der Nernst'schen Gleichgewichtswerte einer Temperatur von 2880 *T* oder 2607° C.

$3\cdot13$ *kg* Mole NO liefern $197\cdot2$ *kg* HNO_3.

Um diese Menge zu erhalten, müssen 100 Mole permanenter Gase auf 2607° C. erhitzt werden, wozu unter obiger Annahme eine Wärmemenge

$$w = 100(6\cdot8+0\cdot006\times2607)\ 2607 = 2179452 \text{ cal.} \quad (1)$$

erforderlich sind.

Außerdem sind zur Bildung von $3\cdot13$ *kg* Molen aus dessen Komponenten

$$3\cdot13\times21600 \text{ cal.} = 67608 \text{ cal.} \quad (2)$$

aufzuwenden.

Im ganzen somit 2247060 cal., mit welchen sich theoretisch $197\cdot2$ *kg* HNO_3 erzeugen ließen, oder pro Kilowattjahr ($7533\cdot9\,.\,10^3$ cal.)

$$661\cdot1\ kg\ HNO_3.$$

Es wurden statt der berechneten $661\cdot1$ *kg* HNO_3 496 *kg* oder 75% gefunden. Bei Versuch 54, bei dem das Ausbringen 518 *kg* HNO_3 pro Kilowattjahr, die Stickoxydkonzentration $3\cdot2\%$ betrug, berechnen sich theoretisch auf Grund einer den $3\cdot2\%$ NO entsprechenden Temperatur von 2627° C. $669\cdot3$ *kg* HNO_3.

Demnach wurden 77·4% der zugeführten elektrischen Energie als für die Erwärmung der Luft und die Bildung von Stickoxyd nutzbar gemacht.

Dieser Wert stellt sich günstiger, wenn statt des höchstbeobachteten Wattverbrauches der Mittelwert desselben der Rechnung zu Grunde gelegt wird. Dann würden 545 *kg* HNO_3 oder 81·4% des theoretischen Betrages gewonnen werden. Zu wesentlich höheren Werten aber als 600 *kg* HNO_3 dürfte man bei einem mit 0·1 Ampère betriebenen 5 *cm* langen Bogen nicht gelangen. Bei der Berechnung des Nutzeffektes wäre zu berücksichtigen, daß durch das Kühlwasser der Platinkapillare und des Glasmantels, durch Wärmeableitung und Zerstäubung der Elektroden und durch Strahlung Energie verloren geht.

Bei einem 3 *cm* langen Bogen ist der Nutzeffekt geringer. So entsprechen dem höchstbeobachteten Ausbringen von 454 *kg* HNO_3 nur 53% der aufgewendeten Energie. Auch dieses Verhalten läßt längere Bogen ökonomischer als kurze Bogen erscheinen.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß bei größeren Bogenlängen als wir sie anzuwenden in der Lage waren, das Ausbringen an Salpetersäure ansteigen wird.

Herr Bruno Larsen hat uns bei der Ausführung der Versuche in eifriger und dankenswerter Weise unterstützt.

Nachtrag während der Korrektur.

Aus einer jüngst erschienenen Patentschrift der Badischen Soda- und Anilinfabrik (franz. Patent Nr. 357.358) geht hervor, daß sich die Technik nunmehr auch langer, stabiler Flammenbogen bedient.

Inhaltsübersicht.

Einleitung und Thema.
Experimenteller Teil.
A. Elektrische Messungen.
1. Transformator.
2. Horizontaler Flammenbogen.
3. Vertikaler Flammenbogen. Einschluß desselben in ein Gefäß.
4. Beziehung zwischen Bogenlänge und Spannung.
5. Beziehung zwischen Stromstärke und Spannung und zwischen Bogenlänge und Spannung bei horizontalen Elektroden.
6. Dasselbe bei vertikalen Elektroden.
7. Dasselbe bei eingeschlossenem vertikalen Bogen.
8. Scheinbare und effektive Watt.
9. Effektbestimmung nach der Drei-Voltmetermethode.
10. Effektbestimmung mittels Wattmeters.

B. Chemische Messungen.
I. Abschnitt: Das Stickoxydgleichgewicht in der Hochspannungsflamme.
1. Versuchsanordnung und Analyse.
2. Kapillarstellung.
3. Abhängigkeit des Stickoxydgleichgewichtes und der Spannung von der Absaugegeschwindigkeit.
4. Änderung der Gaszusammensetzung der Ausgangsmischung und Zerfall von Stickoxyd; Ansteigen der Spannung und des Wattverbrauches mit zunehmendem Sauerstoffgehalte.
5. Abhängigkeit des Gleichgewichtes von der Stromstärke und dem Effekt.

II. Abschnitt: Ausbeutebestimmungen.
1. Versuchsanordnung.
2. Über die Analyse nitroser Gase.
a) Bestimmung des Stickoxyds aus dem nach der Absorption des Peroxyds verbleibenden Gasrest.
b) Schwefelsäure als Absorptionsmittel.
c) Lauge als Absorptionsmittel.
3. Messungen an einem 3 *cm* langen Bogen.
4. Messungen an einem 5 *cm* langen Bogen.
5. Zusammenstellung der gewonnenen Ausbeuten.



Bogen von 3 *cm* Länge und 0·1 Ampère.

Über Rotationen im elektrostatischen Drehfelde.

Ein Beitrag zur Frage der dielektrischen Hysteresis

von

Anton Lampa.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Dezember 1906.)

Einleitung.

Nachdem Steinmetz die Existenz einer dielektrischen Hysteresis behauptet hatte,[1] ist die Frage, ob eine solche wirklich besteht, wiederholt diskutiert worden. Zahlreiche Untersuchungen haben sich mit diesem Thema beschäftigt, eine vollständige Erledigung des Problems ist jedoch bis heute noch nicht erzielt. Die nachstehende Auseinandersetzung beabsichtigt, durch nähere Betrachtung der Arnò'schen Methode, die Hysteresis der Dielektrika zu untersuchen, zur Klärung der Frage beizutragen.

Als sichergestellte Tatsache darf betrachtet werden, daß einzelne Dielektrika bei zyklischer Induzierung Energie verbrauchen analog wie Eisen (und die anderen ferromagnetischen Substanzen) bei zyklischer Magnetisierung.[2] Der Energieverlust

[1] Elektrotechnische Zeitschrift, Bd. 13, Jahrg. 1892, p. 227 bis 228. Ferner Charles Proteus Steinmetz, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen. Deutsche Ausgabe. Verlag von Reuther und Reichard, Berlin 1900, p. 161 u. ff.

[2] Vergl. die Geschichte des Problems bei F. Beaulard in seiner Abhandlung: Sur l'hystérésis diélectrique. Journal de physique (3), Bd. 9, p. 422 bis 437 (1900). Ferner sind zu nennen Kleiner, Über die durch elektrische Polarisation in Isolatoren erzeugte Wärme. Vierteljahrsschr. der Züricher naturforsch. Gesellsch., Bd. 37, p. 322 bis 336 (1892). Benischke, Zur Frage der Wärmetönung durch dielektrische Polarisation. Diese Berichte, Bd. 102, Abt. IIa,

im Eisen hat zwei Ursachen: die Ausbildung von Wirbelströmen (Foucaultströmen) und die Hysteresis. Ähnlich wird man auch für den Energieverlust bei der zyklischen Induzierung eines Dielektrikums zwei Ursachen als möglich annehmen müssen. Erstens wird eine etwa vorhandene Leitfähigkeit des Dielektrikums zur Ausbildung von Ohm'schen Strömen, somit zur Produktion Joule'scher Wärme Veranlassung geben. Zweitens können Verluste auftreten durch Verhältnisse, welche der magnetischen Hysteresis analog sind. Was nun die letzteren anlangt, so ist folgendes zu bemerken. Unter magnetischer Hysteresis versteht man die Tatsache, daß das Verhältnis der magnetischen Induktion zu der magnetisierenden Kraft, die Permeabilität, von der magnetischen Vorgeschichte des Versuchsstückes abhängig ist. Bringt man zwei gleiche Eisenstücke, von denen das eine unmagnetisch, das andere magnetisch ist, in das gleiche magnetische Feld, so werden die magnetischen Induktionen, welche die beiden Eisenstücke annehmen, nicht gleich groß ausfallen. Deutlicher wird die Tatsache bei Vornahme zyklischer Magnetisierung. In dem aufsteigenden Teil des Prozesses, bei zunehmender magnetisierender Kraft, hat die Permeabilität kleinere, in dem absteigenden Teil, bei abnehmender Kraft, größere Werte als die »jungfräuliche« Magnetisierungslinie angibt. (Die letztere selbst ist bei den ferromagnetischen Substanzen eine Kurve.) Außer dieser Erscheinung der »reinen« magnetischen Hysteresis, wie wir sie nennen wollen, zeigt sich noch ein andere; die Induktion erreicht ihren, dem gerade vorhandenen momentanen Wert der Permeabilität entsprechenden Betrag nicht momentan. Diese Erscheinung kann als »viskose« magnetische Hysteresis bezeichnet werden. Sie ist näher folgendermaßen zu präzisieren. Die magnetisierende Kraft setzt sich zusammen aus der äußeren Feldstärke und aus der Feld-

---

Sitzung vom 13. Dezember 1893. Düggelin, Beobachtungen über die Erzeugung von Wärme durch dielektrische Polarisation. Vierteljahrsschr. der Züricher naturforsch. Gesellsch., Bd. 40, p. 121 bis 158 (1895). H. F. Weber. La quéstion de l'hystérésis dans la polarisation périodique des diélectriques. Arch. des scienc. phys. (4), Bd. 2, p. 519 (1896). Ch. E. Guye und P. Denso, Sur la chaleur dégagée dans la paraffine soumise à l'action d'un champ électrostatique tournant de fréquence élevée. Compt. rend., 1905, I. Sem., p. 433 bis 434.

stärke des induzierten Magnetismus. Letzterer ist es, welcher hinter der äußeren Feldstärke zurückbleibt. Zusammenfassend kann man sagen: Die reine magnetische Hysteresis beruht auf der durch die magnetische Vorgeschichte bedingten Verschiedenheit der Werte der Permeabilität, die viskose magnetische Hysteresis auf dem Nachhinken des induzierten Magnetismus hinter der äußeren Feldstärke. Die Gestalt der Hysteresiskurve bei einem zyklischen Magnetisierungsprozeß ist durch diese beiden Erscheinungen bedingt. Es entsteht somit für ein Dielektrikum, vorausgesetzt, daß bei zyklischer Induzierung desselben außer dem Energieverlust durch Joule'sche Wärme noch ein anderer Energieverlust auftritt, die Frage, ob bei demselben genau analoge Verhältnisse obwalten wie bei den ferromagnetischen Substanzen. Wir haben daher die beiden Fragen zu beantworten: Ist der Wert der »Dielektrizitätskonstante« von der elektrischen Vorgeschichte des Dielektrikums abhängig (reine dielektrische Hysteresis) und tritt bei Veränderung der äußeren induzierenden Kraft ein zeitliches Zurückbleiben der induzierten Elektrisierung hinter dieser Kraft (viskose dielektrische Hysteresis) zu Tage?

Die Frage nach der »jungfräulichen« Elektrisierungslinie eines Dielektrikums ist für die Beantwortung der beiden eben formulierten Fragen nicht relevant. Ob der Wert der »Dielektrizitätskonstante« von der Größe der induzierenden Kraft abhängig ist oder nicht,[1] ob diese physikalische Größe die übliche Bezeichnung mit Recht trägt oder nicht, ist für das vorliegende Problem genau so gegenstandslos wie die Form der Magnetisierungslinie für die Erscheinung der magnetischen Hysteresis.

Die erste der beiden Fragen, ob eine reine dielektrische Hysteresis existiert, ob, mit anderen Worten, bei veränderlicher Induzierung die Dielektrizitätskonstante von der Vorgeschichte des Dielektrikums abhängt, betrachte ich durch die bisherigen Untersuchungen als dahin entschieden, daß eine solche Abhängigkeit nicht besteht. Eine hysteresisähnliche Erscheinung

[1] Siehe diesbezüglich Hoór, Neuere Beiträge zur Naturgeschichte dielektrischer Körper. Elektrotechn. Zeitschr., Bd. 22, p. 170 (1901).

bei einem Dielektrikum kann demnach nur durch das zeitliche Nachhinken der induzierten idealen elektrischen Schicht hinter der äußeren Feldstärke bedingt sein. Nehmen wir an, daß ein solches Nachhinken, daß viskose dielektrische Hysteresis besteht, so würde also, wenn ein zyklischer Induzierungsprozeß in irgend einem Moment unterbrochen wird, von welchem Momente an die äußere Feldstärke konstant gehalten wird, die dielektrische Polarisation im Momente der Unterbrechung nicht den vollen Wert haben, welchen man unter Zugrundelegung der Dielektrizitätskonstante und der mit ihr aus der äußeren Feldstärke abzuleitenden induzierenden Kraft berechnen würde, aber diesen Wert bei Fortbestand der gleichen äußeren Feldstärke nach einer kürzeren oder längeren Zeit erreichen; d. h. bei ansteigender äußerer Feldstärke wird die dielektrische Polarisation nach dem Konstantwerden des äußeren Feldes noch ansteigen, bei absteigender Feldstärke noch sinken, und zwar, wenn man den ansteigenden und absteigenden Prozeß bei derselben Feldstärke unterbricht, auf denselben Wert. Der Endwert der Polarisation wird also zum Unterschied von dem Verhalten der ferromagnetischen Substanzen von der Vorgeschichte unabhängig sein. Ein Dielektrikum zeigt, wie wir uns auch anders ausdrücken können, keine »Koerzitivkraft«, sondern nur einen Widerstand gegen die Änderung seiner dielektrischen Polarisation. Demzufolge muß auch hier die Erscheinung der »Remanenz« fehlen. Sinkt die äußere Feldkraft auf Null und behält diesen Wert bei, so muß die Polarisation des Dielektrikums nach einer gewissen Zeit vollständig verschwinden. Dies ist nun in der Tat der Fall. Das Fehlen jeglicher Remanenz allein entscheidet unsere erste Frage in dem bereits ausgesprochenen Sinne.[1] Zu dem gleichen Resultat ist auch die Mehrzahl der Physiker gekommen, welche Untersuchungen über die dielektrische Hysteresis angestellt haben. So Hess, Porter und Morris, Arnò, Pellat, Beaulard, Maccarone.[2]

[1] Vergl. Pellat, Des diélectriques et de leur polarisation réelle. Journ. de phys. (3), Bd. 9, p. 313 bis 325 (1900).

[2] Hess, La quéstion de l'hystérésis diélectrique. L'éclair. électr., Bd. 2, p. 205 bis 211 (1895); Porter und Morris, On the question of dielectric

Wenn wir dementsprechend als durch die bisherigen Versuche erwiesen ansehen, daß bei den Dielektriken keine reine Hysteresis vorhanden ist, so bleibt nur die zweite Frage zur Behandlung übrig. Die Behandlung dieser Frage betrifft zunächst die Methoden zum Nachweis der viskosen dielektrischen Hysteresis, respektive die Möglichkeit der Trennung der Wirkungen der dielektrischen Hysteresis von jenen der Leitfähigkeit. Bei dem gegenwärtigen Stande des Problems brauchen wir den Plan der Untersuchung nicht durch Aufwerfung von Fragen zu komplizieren, wie man sich die viskose Hysteresis zu stande kommend denken kann, ferner ob sie als physikalische Eigenschaft der Dielektrika aufzufassen ist oder nur durch Inhomogenitäten im Dielektrikum, wie Hess[1] meint, hervorgerufen wird. Ebensowenig braucht uns das Gesetz für die Änderungsgeschwindigkeit der Polarisation des Dielektrikums zu bekümmern. Welchem Gesetz diese Größe gehorcht, kann ja erst erschlossen werden, wenn die viskose dielektrische Hysteresis einwandfrei bestimmt werden kann.

Wenn ich im folgenden von dielektrischer Hysteresis schlechthin spreche, so soll darunter gemäß den vorstehenden Auseinandersetzungen stets die viskose dielektrische Hysteresis verstanden werden. Zur Bestimmung derselben kann man von den drei Methoden ausgehen, welche die bisherigen Experimentatoren benützt haben: von der Bestimmung der Erwärmung des Dielektrikums eines Kondensators bei zyklischer Ladung; von der Messung der Elektrizitätsmenge, welche die zweite Kondensatorplatte aufweist, wenn die erste zyklisch

hysteresis. Proceed. Roy. Soc., Bd. 57, p. 469 bis 475 (1895); Arnò, Sulla isteresa dielettrica viscosa. Rend. Linc. (5), Bd. 5, p. 262 bis 264 (1896); L'éclair. él., Bd. 7, p. 407 bis 408, 450 bis 452 (1896); Cim. (4), Bd. 5, p. 52 bis 55 (1897); Pellat, Polarisation réelle des diélectriques. Conséquences de cette polarisation. Ann. de chim. et phys. (7), Bd. 18 (1899); Supplement dazu in demselben Bande. Ferner die sub 1 zitierte Arbeit. Beaulard, Sur l'hystérésis et la viscosité des diélectriques. Compt. rend., Bd. 130, p. 1182 bis 1185 (1900); Sur l'hystérésis diélectrique. Journ. de phys. (3), Bd. 9, p. 422 bis 437 (1900); Maccarone, Conducibilità e ritardo di polarizzazione dielettrica. Cim. (5), Bd. 4, p. 313 bis 360 (1902).

[1] Hess, Sur les diélectriques hétérogènes. Journ. de phys. (3), Bd. 2, p. 145 bis 160 (1893), und die bereits zitierte Abhandlung.

geladen wird; von der Messung des Drehungsmomentes endlich, welches das in geeignete Gestalt gebrachte Dielektrikum in einem elektrostatischen Drehfeld erfährt. Bei allen drei Methoden superponieren sich die Wirkungen der Leitfähigkeit und die der Hysteresis.

Die letztgenannte Methode ist von Arnò eingeführt worden. Sie stellt eine Übertragung der analogen Versuchsanordnung aus dem Gebiete des Magnetismus vor, die Ferraris in dem »Hysteresismotor« gegeben hat. Wir beschränken uns im folgenden auf die Durchrechnung dieser Methode, und zwar für den speziellen Fall, daß der dielektrische Körper die Gestalt einer Kugel hat. Eine zweite Gestalt, für welche sich die Rechnung vollständig durchführen läßt, ist das Rotationsellipsoid. Sollte für weitere experimentelle Untersuchungen das Rotationsellipsoid als geeignetere Körperform gewählt werden, so wäre die Berechnung nach dem Schema des hier durchgeführten Falles unschwer vorzunehmen. Für die Theorie der beiden anderen Methoden sind die Gesichtspunkte, welche hier als maßgebend eingeführt werden, von gleicher prinzipieller Bedeutung wie für die Methode von Arnò.

§ 1. Das homogene elektrostatische Drehfeld.

Wir gehen zur Darstellung des Drehfeldes von einem rechtsdrehenden Koordinatensystem aus, dessen Z-Achse die Rotationsachse ist und dessen Anfangspunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Unter einer positiven Drehung verstehen wir eine solche, welche für einen Beobachter, der aus der positiven Hälfte der Z-Achse gegen den Koordinatenanfangspunkt blickt, entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers vor sich geht.

Das Drehfeld heiße homogen, wenn seine Feldstärke F einen konstanten Wert hat und seine Richtung mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit α ändert. Die Umlaufszeit τ des Drehfeldes ist dann bestimmt durch die Gleichung $\alpha\tau = 2\pi$. Ein solches sich positiv drehendes Feld resultiert aus den beiden elektrischen Schwingungen

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\alpha t, \\ F_y &= F\sin\alpha t, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

worin t die Zeit, F_x und F_y die Feldstärke in der positiven X-, respektive Y-Achse zur Zeit t bedeuten.

Die Feldstärke F des äußeren Feldes, in welches die Kugel und das sie umgebende Medium hineingebracht werden, in der Richtung des Radiusvektors $+\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ kann als von einem Potentiale $\Phi = C - \frac{a}{R}\rho$ herrührend angesehen werden. Hierin sind C und a Konstanten, R der Radius der zu betrachtenden Kugel. Es ist dann $F = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{a}{R}$. Wir wählen a positiv, die Feldintensität hat also die Richtung des Radiusvektors. Die Konstante a ist durch die Gleichung $a = RF$ bestimmt; die Konstante C können wir unbeschadet der Allgemeinheit gleich Null setzen. Es ist hiemit der Wert des Potentials des äußeren Feldes im Koordinatenanfangspunkt als Nullpunkt des Potentials gewählt. Mit dem angegebenen Wert von F gehen die Gleichungen 1) über in

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{a}{R}\cos \alpha t \\ F_y &= \frac{a}{R}\sin \alpha t \end{aligned}\right\}. \qquad 2)$$

Die Feldstärken F_x und F_y kann man als von zwei Potentialen Φ_x und Φ_y herrührend denken, welche bestimmt sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= \left(C_x - \frac{a}{R}x\right)\cos \alpha t \\ \Phi_y &= \left(C_y - \frac{a}{R}y\right)\sin \alpha t \end{aligned}\right\}. \qquad 3)$$

Auch hierin setzen wir $C_x = C_y = 0$ und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= -\frac{a}{R}x\cos \alpha t \\ \Phi_y &= -\frac{a}{R}y\sin \alpha t \end{aligned}\right\}. \qquad 4)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = \frac{a}{R}\cos \alpha t \\ F_y &= -\frac{\partial \Phi_y}{\partial y} = \frac{a}{R}\sin \alpha t \end{aligned}\right\}. \quad 5)$$

Führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \omega \sin \vartheta \\ y &= \rho \sin \omega \sin \vartheta \\ z &= \rho \cos \vartheta, \end{aligned}$$

so geben die Gleichungen 4):

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= -\frac{a}{R}\rho \cos \omega \sin \vartheta \cos \alpha t \\ \Phi_y &= -\frac{a}{R}\rho \sin \omega \sin \vartheta \sin \alpha t \end{aligned}\right\}. \quad 6)$$

§ 2. Die Grenzbedingungen für ein hysteresisfreies leitendes Dielektrikum, welches sich in einem anderen hysteresisfreien leitenden Dielektrikum befindet.

Helmholtz hat in seiner Abhandlung »Über die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper« (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 72, p. 57 bis 129; Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I, p. 544 bis 628) den Einfluß der dielektrischen Polarisation der Medien für die Bewegung der Elektrizität untersucht (§ 8 der genannten Arbeit). Wenn in einem Volumelement die Menge E positiver Elektrizität sich um $\frac{l}{2}$ in der Richtung der positiven X-Achse und die gleiche Menge negativer um $\frac{l}{2}$ in der Richtung der negativen X-Achse verschiebt, so wird dadurch in demselben das elektrische Moment

$$d\mathfrak{x} = El \quad 7)$$

hergestellt. Gleichzeitig ist dieser Vorgang, der sich in der Zeit dt abspielen mag, entsprechend einer Strömung in dem Element

$$u_0\,dt = El = d\mathfrak{x}, \quad 8)$$

worin u_0 die im elektrostatischen Maße gemessene Stromstärke parallel zur X-Achse bedeutet. Findet die Polarisation in irgend einer Richtung statt, so bildet der Akt der Polarisation eine Art elektrischer Bewegung, deren Komponenten parallel den Koordinatenachsen entsprechend der Gleichung 8) bestimmt sind durch

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \\ v_0 &= \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \\ w_0 &= \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} \end{aligned}\right\} . \qquad 9)$$

Hierin sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Komponenten des elektrischen Momentes parallel zu den Achsen. Die Differentialquotienten derselben nach der Zeit sind als partielle Differentialquotienten geschrieben, da die Momente auch Funktionen des Ortes sind. Sind X, Y, Z die Komponenten der gegebenen äußeren Kräfte, φ das Potential der durch deren Wirkung verteilten Elektrizität, so sind die den Achsen parallelen Komponenten der das elektrische Moment erzeugenden Kraft $X - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Bezeichnen wir die Elektrisierungszahl des (isotropen) Dielektrikums mit ε, so haben wir daher:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \varepsilon\left(X - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \\ \mathfrak{y} &= \varepsilon\left(Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ \mathfrak{z} &= \varepsilon\left(Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} . \qquad 10)$$

Hat das Dielektrikum eine gewisse spezifische Leitfähigkeit λ (elektrostatisch gemessen), so wird sich unter dem Einfluß der die Elektrizität parallel zu den Achsen forttreibenden Kräfte $X - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ auch eine Ohm'sche

Strömung ausbilden, deren Komponenten mit u_1, v_1, w_1 bezeichnet werden sollen. Ist $\varkappa = \frac{1}{\lambda}$ der spezifische Leitungswiderstand des Dielektrikums, so ist diese Strömung gemäß dem Ohm'schen Gesetz bestimmt durch die Gleichungen:

$$\varkappa u_1 = X - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\varkappa v_1 = Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\varkappa w_1 = Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

die wir auch mit Rücksicht auf 10) schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa u_1 &= \frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon} \\ \varkappa v_1 &= \frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon} \\ \varkappa w_1 &= \frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon} \end{aligned}\right\}. \qquad 11)$$

Wir sehen nun ab von allen Induktionswirkungen der erregten Ströme, was immer gestattet sein wird, sobald die relative Geschwindigkeit zwischen dem Felde und dem Körper nicht von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit ist. Die Komponenten der Gesamtströmung parallel zu den Achsen sind dann einfach $u_0 + u_1 = u$, $v_0 + v_1 = v$, $w_0 + w_1 = w$; man erhält für dieselben unter Berücksichtigung der Gleichungen 9) und 10):

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon \varkappa} \mathfrak{x} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{x} \\ v &= \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon \varkappa} \mathfrak{y} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{y} \\ w &= \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon \varkappa} \mathfrak{z} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{z} \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

oder auch, wenn man sie durch die wirkenden Kräfte ausdrücken will (Gleichungen 10):

$$\left.\begin{aligned} u &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(X-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\lambda\left(X-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\ v &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(Y-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\lambda\left(Y-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\\ w &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(Z-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\lambda\left(Z-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad 13)$$

Haben die äußeren Kräfte ein Potential Φ, so ist $X = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ und die Gleichungen 13) nehmen die Form an:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\lambda\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\ v &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\lambda\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\\ w &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\lambda\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad 14)$$

Es seien nun zwei Medien gegeben, die durch die Indizes i und a charakterisiert seien; das Medium a umschließe das Medium i. Auf beide wirke dieselbe äußere Kraft oder, mit anderen Worten, das äußere Potential sei für beide Medien das gleiche. Es wird dann erstens an der Trennungsfläche der beiden Dielektriken eine Flächenbelegung induziert, deren Dichte wir mit σ bezeichnen wollen. Das Potential dieser Flächenbelegung sei φ. Außerdem wird an der äußeren Begrenzungsfläche des Dielektrikums a eine Flächenbelegung induziert, die ihrerseits ein Potential liefert. Dieses Potential können wir aber zur Vereinfachung des Problems gleich zu dem äußeren Potential hinzugezählt denken, so daß wir also jetzt unter dem äußeren Potential Φ jenen Wert verstehen wollen, welcher nach Subtraktion des von der Flächenbewegung der Trennungsschicht herrührenden Potentials φ von dem Gesamtpotential resultiert.

Die eingeführte Vereinfachung gilt auch für den Fall, daß die Massen, welche die das Feld erzeugenden Ladungen tragen, in dem äußeren Dielektrikum eingebettet sind.

Den Wert des Potentials φ im äußeren Dielektrikum wollen wir mit φ_a, seinen Wert im inneren Dielektrikum mit φ_i bezeichnen. Nach den getroffenen Festsetzungen ist also der Wert des Potentials im äußeren Dielektrikum $\Phi+\varphi_a$, im inneren $\Phi+\varphi_i$. Für die Stromkomponenten in den beiden Medien gelten dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= -\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)-\lambda_i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right) \\ v_i &= -\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right)-\lambda_i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right) \\ w_i &= -\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right)-\lambda_i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

$$\left.\begin{aligned} u_a &= -\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_a}{\partial x}\right)-\lambda_a\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_a}{\partial x}\right) \\ v_a &= -\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_a}{\partial y}\right)-\lambda_a\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_a}{\partial y}\right) \\ w_a &= -\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)-\lambda_a\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad 16)$$

Wir bezeichnen die Winkel, welche die Normale n in einem Punkte der Trennungsfläche der beiden Dielektriken mit den positiven Achsenrichtungen einschließt, mit α, β, γ und denken uns die Normale von dem Medium i gegen das Medium a gerichtet. Es besteht dann in der Richtung der Normalen eine Strömung:

im Medium i: $u_i \cos\alpha+v_i \cos\beta+w_i \cos\gamma$,
im Medium a: $u_a \cos\alpha+v_a \cos\beta+w_a \cos\gamma$.

Die Differenz dieser Größen an einem Punkte der Trennungsfläche $(u_i-u_a)\cos\alpha+(v_i-v_a)\cos\beta+(w_i-w_a)\cos\gamma$ gibt dann die Zunahme der Elektrizitätsmenge pro Flächeneinheit an diesem Punkte der Trennungsfläche, d. i. also die Zunahme

der Flächendichte σ an diesem Punkte. Diese Zunahme ist $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$; wir haben also die Gleichung:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (u_i - u_a) \cos \alpha + (v_i - v_a) \cos \beta + (w_i - w_a) \cos \gamma. \qquad 17)$$

Nun ist

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}(\Phi + \varphi_a) - \frac{\partial}{\partial n}(\Phi + \varphi_i)\right]$$

oder auch

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right), \qquad 18)$$

also

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right),$$

so daß Gleichung 17) übergeht in

$$(u_i - u_a) \cos \alpha + (v_i - v_a) \cos \beta + (w_i - w_a) \cos \gamma =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right). \qquad 19)$$

Nun ist gemäß 15):

$$u_i \cos \alpha + v_i \cos \beta + w_i \cos \gamma =$$
$$-\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\cos \alpha + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right)\cos \beta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right)\cos \gamma\right]$$
$$-\lambda_i \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\cos \alpha + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right)\cos \beta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right)\cos \gamma\right]$$
$$= -\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) - \lambda_i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right)$$

und analog gemäß 16):

$$u_a \cos\alpha + v_a \cos\beta + w_a \cos\gamma =$$

$$= -\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right) - \lambda_a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right),$$

so daß die Gleichung 19) für die Trennungsfläche in der Form

$$\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right) + \lambda_a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right) - \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) -$$

$$- \lambda_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right) \qquad 20)$$

geschrieben werden kann.

Zu den beiden Gleichungen 18) und 19) für die Trennungsfläche kommen noch Gleichungen für das Innere der beiden Medien. Setzen wir $\Phi + \varphi = \psi$, so ist die Dichte der freien Elektrizität μ durch die Gleichung

$$\Delta\psi = 4\pi\mu,$$

ihre Änderungsgeschwindigkeit durch

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = 4\pi \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

bestimmt. Wir betrachten ein Volumelement $dx\,dy\,dz$ mit den Koordinaten x, y, z; durch eine Seitenfläche $dy\,dz$ mit der Koordinate x strömt in der Zeit dt die Elektrizitätsmenge $u\,dy\,dz\,dt$, durch die ihr gegenüberliegende Seitenfläche $dy\,dz$ mit der Koordinate $x + dx$ die Menge $\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy\,dz\,dt$. Die Differenz zwischen der abströmenden und einströmenden Menge verändert die Menge im Volumelement. Die Seitenflächen $dy\,dz$ liefern die Menge $\frac{\partial u}{\partial x} dx\,dy\,dz\,dt$, analog die Seitenflächen $dz\,dx$ die Menge $\frac{\partial v}{\partial y} dx\,dy\,dz\,dt$, die Seitenflächen $dx\,dy$ die Menge $\frac{\partial w}{\partial x} dx\,dy\,dz\,dt$. Die Menge der im Volumelement enthaltenen Elektrizität verändert sich daher in

der Zeit dt um $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,dt$, also pro Volumeinheit um $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dt$; letztere Größe ist aber die Änderung der Dichte der freien Elektrizität $d\mu$. Wir haben also

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

und

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad 21)$$

für das Innere der beiden Medien, also

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \psi_i}{\partial t}&=4\pi\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial \Delta \psi_a}{\partial t}&=4\pi\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}+\frac{\partial v_a}{\partial x}+\frac{\partial w_a}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Die Gleichung 21) (und dementsprechend die Gleichungen 22) kann man auch schreiben

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi=4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

oder, da $\Delta\Phi$ in dem Inneren der beiden Dielektriken Null ist.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi=4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Mit Rücksicht auf Gleichung 14) wird diese Gleichung unter Beachtung, daß $\Delta\Phi=0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi=-4\pi\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi-4\pi\lambda\Delta\varphi$$

oder

$$(1+4\pi\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi=-4\pi\lambda\Delta\varphi,$$

also

$$\Delta\varphi=(\Delta\varphi)_0\cdot e^{-\frac{4\pi\lambda}{1+4\pi\varepsilon}t}.$$

Ist also die Dichtigkeit der freien Elektrizität im Innern anfänglich nicht Null, so nähert sie sich doch diesem Werte beständig und kann, wenn sie schließlich Null geworden ist, durch die elektrostatischen Einflüsse nicht wieder zu einem endlichen Werte erhoben werden. Wir haben also für das Innere der beiden Dielektriken $\Delta\varphi = 0$, respektive die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\varphi_i = 0\\ \Delta\varphi_a = 0\end{array}\right\}. \qquad 23)$$

Außerdem muß an der Trennungsfläche der beiden Medien $\psi_a = \psi_i$ oder

$$\varphi_a = \varphi_i \qquad 24)$$

sein. Hiezu käme noch die Grenzbedingung an der Oberfläche des äußeren Dielektrikums. Diese ist aber, wie oben auseinandergesetzt wurde, bereits in dem Werte von Φ berücksichtigt, so daß die Gleichungen 19), 20), 23) und 24) das Problem vollständig bestimmen.

Wir betrachten nun vorerst einzelne spezielle Fälle. Ist zunächst die Leitfähigkeit der beiden Dielektriken Null, so reduziert sich Gleichung 20) auf

$$\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right) - \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}\right).$$

Sind die beiden Medien vollkommene Leiter, so erhält man aus Gleichung 20) die Grenzbedingung für diesen Fall, indem man $\varepsilon_a = \varepsilon_i = 0$ setzt. Sie wird dann identisch mit jener, von welcher Hertz in seiner Abhandlung »Über die Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche bewegter Leiter«[1] und v. Schweidler in der Abhandlung »Über Rotationen im homogenen elektrischen Felde«[2] ausgehen. Die Dielektrizitätskonstante D steht nun mit der Elektrisierungszahl ε in der Beziehung $D = 1 + 4\pi\varepsilon$. Man ist somit genötigt, den Metallen die Dielektrizitätskonstante 1 zuzuschreiben. Maxwell berechnet die »Verschiebung« durch Multiplikation der elektrischen

---

[1] Wiedemann's Annalen, Bd. 13, p. 266 bis 275 (1881). Gesamm. Werke, Bd. 1, p. 135 bis 144.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. 106, Abt. IIa, Juli 1897.

Kraft mit dem Faktor $\frac{D}{4\pi}$; nach seiner Auffassung müßte daher den Metallen die Dielektrizitätskonstante 0 zugeschrieben werden.[1] Daß die gewöhnliche Auffassung, den Metallen die Dielektrizitätskonstante ∞ zuzuschreiben, bloß eine Rechnungsregel ist, die für die Elektrostatik brauchbar ist, betonten bereits E. Cohn und L. Arons.[2] Diese beiden Forscher bestimmten auch die Dielektrizitätskonstante gut leitender Flüssigkeiten und fanden z. B., daß, während die Leitfähigkeit von Xylol durch sukzessive Zusätze von Anilin bis etwa auf das Zehntausendfache wuchs, die Dielektrizitätskonstante nur um zirka ein Drittel ihres Betrages (von 2·23 auf 3·09) zunahm, also durchaus nicht die Tendenz zeigte, unendlich zu werden.

Wenn also die Annahme, die Dielektrizitätskonstante der Metalle sei gleich 1, hier nur als eine Rechnungsregel für nicht konstante elektrische Kräfte eingeführt wird, so steht dies doch mit unseren Erfahrungen in keinem Widerspruch. Denn diese Annahme ist auch für die Elektrostatik zulässig, wie man einsieht, wenn man auf die Gründe für die dort übliche Annahme, die Dielektrizitätskonstante der Metalle sei unendlich groß, näher eingeht. Füllt man den Zwischenraum eines Kondensators, dessen eine Belegung zur Erde abgeleitet ist, mit einem Metall aus, so kann seine Kapazität als Null angesehen werden, der Kondensator vermag überhaupt nicht eine Ladung zu bewahren. Das Potential an der mit der Elektrizitätsquelle verbundenen Platte ergibt sich hier als das an dieser Platte infolge der Strömung herrschende Potential. Die übliche Auffassung betrachtet die Elektrizitätsmenge, welche dieser Platte zugeführt wird. Mit der Natur des Kondensators als eines Ansammlungsapparates, eines Akkumulators für Ladungen, steht jedenfalls die Auffassung, zu der wir hier geführt werden, in besserem Einklang. Dieser Auffassung gemäß verhalten sich,

[1] Vergl. Beaulard, Sur les formules de Mossotti-Clausius et de Betti relatives à la polarisation des diélectriques. Compt. rend., Bd. 129, p. 149 bis 152 (1899).

[2] Leitungsvermögen und Dielektrizitätskonstante. Wiedemann's Ann. d. Phys. und Chemie, Bd. 28, p. 454 bis 477 (1886).

wie man auch sagen kann, die Metalle in dielektrischer Beziehung wie der Äther.

Sind die elektrischen Kräfte konstant, mit der Zeit nicht variabel, so verschwinden die mit ε multiplizierten Glieder der Gleichung 20) eo ipso. Für diesen Fall erhält man daher die gewöhnliche Gleichung für die Trennungsfläche zweier Leiter bei stationärer elektrischer Strömung.

§ 3. Die hysteresisfreie dielektrische leitende Kugel in einem hysteresisfreien leitenden Dielektrikum unter der Wirkung eines homogenen elektrostatischen Drehfeldes.

Der Radius der Kugel sei R, ihre Leitfähigkeit λ_i, ihre Dielektrizitätskonstante D_i, ihre Elektrisierungszahl ε_i. Die analogen Größen für das äußere Dielektrikum seien λ_a, D_a und ε_a. Es ist zunächst

$$\left.\begin{aligned} D_i &= 1+4\pi\varepsilon_i \\ D_a &= 1+4\pi\varepsilon_a \end{aligned}\right\}. \qquad 24)$$

Die Normale auf die Kugeloberfläche fällt mit dem Radiusvektor ρ zusammen. Das Potential der auf der Kugeloberfläche induzierten Schicht sei φ, das äußere Potential, unter welchem wir den im § 2 bestimmten Wert verstehen wollen, sei Φ. Die Gleichungen des Problems lauten dann:

$$\Delta\varphi_i = 0 \text{ und } \Delta\varphi_a = 0$$

im Innern der beiden Dielektriken,

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho} - \frac{\partial\varphi_a}{\partial\rho}\right) \text{ und } \varphi_a = \varphi_i,$$

sowie

$$\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi_a}{\partial\rho}\right) + \lambda_a\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi_a}{\partial\rho}\right) - \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho}\right)$$
$$- \lambda_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho} - \frac{\partial\varphi_a}{\partial\rho}\right) \qquad 25)$$

für die Kugeloberfläche. Hierin sind also die Differentialquotienten für $\rho = R$ zu bilden. φ_i bedeutet das von der auf der Kugel-

oberfläche induzierten Ladung herrührende Potential im Innern der Kugel, φ_a jenes derselben Ladung außerhalb der Kugel.

Die Kugel ruhe. Wir berechnen die Wirkung des Drehfeldes, indem wir das Drehfeld gemäß § 1 durch zwei harmonische, zueinander senkrechte homogene Wechselfelder ersetzen und die Wirkungen dieser beiden Felder getrennt berechnen. Das eine Feld sei parallel zur X-, das andere parallel zur Y-Achse, die Z-Achse sei die Rotationsachse des Feldes, der Koordinatenanfangspunkt falle mit dem Kugelmittelpunkt zusammen. Die Größen des X-Feldes sollen durch den Index x, jene des Y-Feldes durch den Index y gekennzeichnet werden.

Wir haben dann für die X-Richtung

$$\Phi_x = -\frac{a}{R} \rho \cos \omega \sin \vartheta \cos \alpha t. \tag{26}$$

Für die Potentiale der induzierten Kugeloberflächenbelegung machen wir den Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{xi} &= \frac{a}{R} \rho \cos \omega \sin \vartheta \, (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t) \\ \varphi_{xa} &= a R^2 \frac{1}{\rho^2} \cos \omega \sin \vartheta \, (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t \end{aligned}\right\}, \tag{27}$$

worin A_x und B_x Konstanten sind, deren Wert wir den Bedingungen des Problems entsprechend zu bestimmen haben.

φ_{xi} und φ_{xa} genügen den Gleichungen $\Delta \varphi_{xi} = 0$ und $\Delta \varphi_{xa} = 0$, und für $\rho = R$ ist $\varphi_{xa} = \varphi_{xi}$, der gewählte Ansatz ist also möglich. Aus 26) und 27) erhält man die Werte der Differentialquotienten nach ρ für $\rho = R$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_x}{\partial \rho} &= -\frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta \cos \alpha t \\ \frac{\partial \varphi_{xi}}{\partial \rho} &= \frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta \, (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t) \\ \frac{\partial \varphi_{xa}}{\partial \rho} &= -\frac{2a}{R} \cos \omega \sin \vartheta \, (A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t) \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 26), 27), 28) wird daher die Gleichung 25):

$$\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\cos\alpha t - \\ -\frac{2a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\,(A_x\sin\alpha t + B_x\cos\alpha t)\Big)$$

$$+\lambda_a\Big(-\frac{a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\cos\alpha t - \\ -\frac{2a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\,(A_x\sin\alpha t + B_x\cos\alpha t)\Big)$$

$$-\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\cos\alpha t + \\ +\frac{a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\,(A_x\sin\alpha t + B\cos\alpha t)\Big)$$

$$-\lambda_i\Big(-\frac{a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\cos\alpha t + \\ +\frac{a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\,(A_x\sin\alpha t + B_x\cos\alpha t)\Big)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{3a}{R}\cos\omega\sin\vartheta\,(A_x\sin\alpha t + B_x\cos\alpha t)\Big)$$

oder

$$\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}(-\cos\alpha t - 2A_x\sin\alpha t - 2B_x\cos\alpha t) + \\ +\lambda_a(-\cos\alpha t - 2A_x\sin\alpha t - 2B_x\cos\alpha t)$$

$$-\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}(-\cos\alpha t + A_x\sin\alpha t + B_x\cos\alpha t) - \\ -\lambda_i(-\cos\alpha t + A_x\sin\alpha t + B_x\cos\alpha t)$$

$$= \frac{3}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}(A_x\sin\alpha t + B_x\cos\alpha t)$$

oder endlich:

$$\alpha\varepsilon_a(\sin\alpha t - 2A_x\cos\alpha t + 2B_x\sin\alpha t) + \\ +\lambda_a(-\cos\alpha t - 2A_x\sin\alpha t - 2B_x\cos\alpha t)$$

$$-\alpha\varepsilon_i(\sin\alpha t + A_x\cos\alpha t - B_x\sin\alpha t) - \\ -\lambda_i(-\cos\alpha t + A_x\sin\alpha t + B_x\cos\alpha t)$$

$$= \frac{3\alpha}{4\pi}(A_x\cos\alpha t - B_x\cos\alpha t).$$

Fassen wir die Glieder mit $\sin \alpha t$ und $\cos \alpha t$ zusammen, so erhält die letzte Gleichung die Form:

$$\left\{\alpha(\varepsilon_a-\varepsilon_i)+\alpha(2\,\varepsilon_a+\varepsilon_i)\,B_x-(2\,\lambda_a+\lambda_i)\,A_x+\frac{3\alpha}{4\pi}B_x\right\}\sin \alpha t$$

$$-\left\{(\lambda_a-\lambda_i)+(2\,\lambda_a+\lambda_i)\,B_x+\alpha(2\,\varepsilon_a+\varepsilon_i)\,A_x+\frac{3\alpha}{4\pi}A_x\right\}\cos \alpha t=0.$$

Diese Gleichung muß für jedes beliebige t erfüllt sein; es müssen daher die Koeffizienten von $\sin \alpha t$ und $\cos \alpha t$ einzeln gleich Null sein, so daß wir zur Bestimmung der Konstanten A_x und B_x die Gleichungen erhalten:

$$-(2\lambda_a+\lambda_i)\,A_x+\alpha\left(2\,\varepsilon_a+\varepsilon_i+\frac{3}{4\pi}\right)B_x=-\alpha(\varepsilon_a-\varepsilon_i)$$

$$\alpha\left(2\,\varepsilon_a+\varepsilon_i+\frac{3}{4\pi}\right)A_x+(2\,\lambda_a+\lambda_i)\,B_x=-(\lambda_a-\lambda_i),$$

aus welchen sich ergibt:

$$A_x=\alpha\,\frac{(\varepsilon_a-\varepsilon_i)\,(2\,\lambda_a+\lambda_i)-\left(2\,\varepsilon_a+\varepsilon_i+\frac{3}{4\pi}\right)(\lambda_a-\lambda_i)}{(2\,\lambda_a+\lambda_i)^2+\alpha^2\left(2\,\varepsilon_a+\varepsilon_i+\frac{3}{4\pi}\right)^2}$$

$$B_x=-\frac{\alpha^2\,(\varepsilon_a-\varepsilon_i)\left(2\,\varepsilon_a+\varepsilon_i+\frac{3}{4\pi}\right)+(2\,\lambda_a+\lambda_i)\,(\lambda_a-\lambda_i)}{(2\,\lambda_a+\lambda_i)^2+\alpha^2\left(2\,\varepsilon_a+\varepsilon_i+\frac{3}{4\pi}\right)^2}.$$

Setzt man hierin die aus 24) sich ergebenden Werte

$$\varepsilon_i=\frac{D_i-1}{4\pi}$$

$$\varepsilon_a=\frac{D_a-1}{4\pi}$$

ein, so erhält man endlich:

$$
\left.\begin{aligned}
A_x &= \frac{4\pi}{\alpha}\,\frac{3(D_a\lambda_i - D_i\lambda_a)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a+\lambda_i)^2+(2D_a+D_i)^2}\\
B_x &= -\frac{(D_a-D_i)(2D_a+D_i)+\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a+\lambda_i)(\lambda_a-\lambda_i)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a+\lambda_i)^2+(2D_a+D_i)^2}
\end{aligned}\right\} \qquad 29)
$$

Für das Feld in der Y-Richtung hat man analog den Ansatz:

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi_y &= -\frac{a}{R}\rho \sin\omega \sin\vartheta \sin\alpha t\\
\varphi_{yi} &= \frac{a}{R}\rho \sin\omega \sin\vartheta\,(A_y \sin\alpha t + B_y \cos\alpha t)\\
\varphi_{ya} &= aR^2\frac{1}{\rho^2}\sin\omega \sin\vartheta\,(A_y \sin\alpha t + B_y \cos\alpha t)
\end{aligned}\right\}. \qquad 30)
$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt:

$$
\left.\begin{aligned}
A_y &= B_x\\
B_y &= -A_x
\end{aligned}\right\}. \qquad 31)
$$

Für die Dichte σ der induzierten Schicht hatten wir die Gleichung:

$$
\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho} - \frac{\partial\varphi_a}{\partial\rho}\right).
$$

Gemäß dieser Gleichung ergibt das Wechselfeld in der X-Richtung die Dichte:

$$
\sigma_x = \frac{3a}{4\pi R}\cos\omega \sin\vartheta\,(A_x \sin\alpha t + B_x \cos\alpha t) =
$$

$$
= \frac{3a}{4\pi R}\cos\omega \sin\vartheta \, .\, M,
$$

und das Wechselfeld in der Y-Richtung die Dichte:

$$\sigma_y = \frac{3a}{4\pi R} \sin \omega \sin \vartheta \, (A_y \sin \alpha t + B_y \cos \alpha t) =$$

$$= \frac{3a}{4\pi R} \sin \omega \sin \vartheta \, (B_x \sin \alpha t - A_x \cos \alpha t) =$$

$$= \frac{3a}{4\pi R} \sin \omega \sin \vartheta . N,$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} M &= A_x \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t \\ N &= B_x \sin \alpha t - A_x \cos \alpha t \end{aligned}\right\} \qquad 32)$$

gesetzt ist.

Die durch das Drehfeld induzierte Dichte σ ist somit:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{3a}{4\pi R} \sin \vartheta \, (M \cos \omega + N \sin \omega). \qquad 33)$$

Nun können wir das Drehungsmoment, welches die Kugel durch das Drehfeld erfährt, wie folgt berechnen.

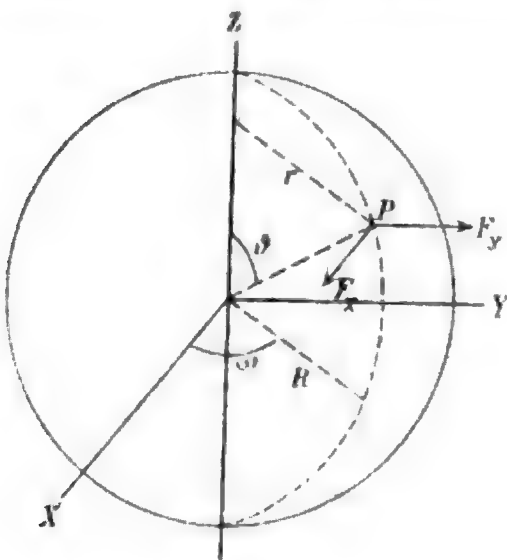


Fig. 1.

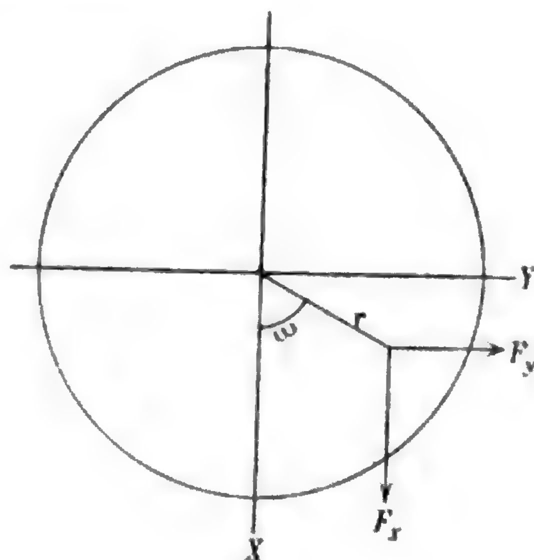


Fig. 2.

Ein Flächenelement df beim Punkte P (Fig. 1), der die Koordinaten R, ω, ϑ hat, trägt die Ladung σdf. Ist F_x die Feldstärke des Wechselfeldes in der X-Richtung, F_y jene des Wechselfeldes in der Y-Richtung, so geben diese im Punkte P auf σdf wirkenden Kräfte ein Drehungsmoment an der Kugel im Werte von

$$\sigma df(-F_x r \sin \omega + F_y r \cos \omega) = \sigma df . r(F_y \cos \omega - F_x \sin \omega),$$

wie aus Fig. 2 ersichtlich ist, welche die Kugel aus der positiven Z-Achse gegen ihren Mittelpunkt hin gesehen darstellt. Wir rechnen hiebei ein Drehungsmoment entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung als positiv, ein solches im Sinne der Uhrzeigerbewegung als negativ. Das gesamte Drehungsmoment $\mathfrak{D}$ ergibt sich durch Integration über die ganze Kugeloberfläche, also bezüglich der Variablen ϑ von 0 bis π, bezüglich der Variablen ω von 0 bis 2π. Es ist also

$$\mathfrak{D} = \int\int \sigma df r (F_y \cos\omega - F_x \sin\omega).$$

Nun ist $df = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\omega$, $r = R \sin\vartheta$, also weiter:

$$\mathfrak{D} = R^3 \int\int \sin^2\vartheta \, \sigma (F_y \cos\omega - F_x \sin\omega) d\vartheta \, d\omega.$$

Für σ fanden wir (Gleichung 33) den Ausdruck

$$\frac{3a}{4\pi R} \sin\vartheta \, (M \cos\omega + N \sin\omega).$$

Hiemit wird

$$\mathfrak{D} = \frac{3aR^2}{4\pi} \int\int \sin^3\vartheta \, (M \cos\omega + N \sin\omega)(F_y \cos\omega - F_x \sin\omega) d\vartheta \, d\omega$$

$$= \frac{3aR^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} (M \cos\omega + N \sin\omega)(F_y \cos\omega - F_x \sin\omega) d\omega \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta$$

oder weiter, da $\int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{4}{3}$ ist:

$$\mathfrak{D} = \frac{aR^2}{\pi} \int_0^{2\pi} (MF_y \cos^2\omega + (NF_y - MF_x) \sin\omega \cos\omega - NF_x \sin^2\omega) d\omega$$

$$= \frac{aR^2}{\pi} \left\{ MF_y \int_0^{2\pi} \cos^2\omega \, d\omega + (NF_y - MF_x) \int_0^{2\pi} \sin\omega \cos\omega \, d\omega - NF_x \int_0^{2\pi} \sin^2\omega \, d\omega \right\}.$$

Nun ist:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\omega \, d\omega = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\omega \cos\omega \, d\omega = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\omega \, d\omega = \pi,$$

daher

$$\mathfrak{D} = aR^2(MF_y - NF_x).$$

Es war (Gleichung 2) $F_x = \frac{a}{R}\cos\alpha t$, $F_y = \frac{a}{R}\sin\alpha t$; hiemit wird

$$\mathfrak{D} = a^2R(M\sin\alpha t - N\cos\alpha t). \qquad 34)$$

Setzen wir hier gemäß 32)

$$M = A_x \sin\alpha t + B_x \cos\alpha t$$
$$N = B_x \sin\alpha t - A_x \cos\alpha t,$$

so folgt $\mathfrak{D} = a^2RA_x$ oder mit Rücksicht auf den Wert A_x (Gleichung 29):

$$\mathfrak{D} = a^2R\frac{4\pi}{\alpha}\,\frac{3(D_a\lambda_i - D_i\lambda_a)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a+\lambda_i)^2+(2D_a+D_i)^2}. \qquad 35)$$

Das Vorzeichen dieses Drehungsmomentes hängt bloß von dem Vorzeichen des Gliedes $(D_a\lambda_i - D_i\lambda_a)$ ab. Es ist positiv, d. h. das Drehfeld sucht die Kugel mitzunehmen, wenn $D_a\lambda_i > D_i\lambda_a$; ein solches Drehungsmoment möge als ein hemmendes bezeichnet werden. Es ist negativ, das Drehfeld sucht die Kugel entgegengesetzt seinem eigenen Drehungssinn zu bewegen, das Drehungsmoment ist treibend, wenn $D_a\lambda_i < D_i\lambda_a$. Für den Fall, daß $D_a\lambda_i = D_i\lambda_a$, ist das Drehungsmoment Null.

Sind die beiden Substanzen Metalle, so ist $D_a = D_i = 1$ zu setzen und es folgt

$$\mathfrak{D} = a^2R\frac{4\pi}{\alpha}\,\frac{3(\lambda_i - \lambda_a)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a+\lambda_i)^2+9}$$

oder, da $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$:

$$\mathfrak{D} = a^2R\frac{2\tau}{3}\,\frac{\lambda_i - \lambda_a}{1+\frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a+\lambda_i)^2},$$

die von v. Schweidler (l. c.) abgeleitete Formel. Diese Formel kann also für Dielektrika nur als Näherungsformel verwendet werden.

Haben die beiden Dielektrika die Leitfähigkeiten Null, ist also $\lambda_a = \lambda_i = 0$, so ist $\mathfrak{D} = 0$. Eine nichtleitende hysteresisfreie Kugel in Luft normaler Dichte, die keine Ionisation aufweist, erfährt somit in einem Drehfelde kein Drehungsmoment.

Wir betrachten noch den Fall einer Metallkugel, welche sich in einem leitenden Dielektrikum befindet. Es ist dann $D_i = 1$ zu setzen und es ist

$$\mathfrak{D} = a^2 R \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3(D_a \lambda_i - \lambda_a)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a + \lambda_i)^2 + (2D_a + 1)^2}.$$

Kennt man D_a und λ_i, so kann man, wenn $\mathfrak{D}$ meßbar ist, λ_a berechnen. Ist $D_a = 1$, $\lambda_i = 0$, so resultiert die von L. Graetz[1] zur Messung der Leitfähigkeit aus der v. Schweidler'schen Gleichung hergeleitete Formel, welche er zur Berechnung von λ_a verwendet hat. Wie man sieht, ist dies eine Näherungsformel.

Bemerkenswert ist ferner, daß die Kugel auch ein Drehungsmoment erfährt, wenn das äußere Dielektrikum gar keine Leitfähigkeit hat. Es ergibt sich mit $\lambda_a = 0$ aus der letzten Gleichung

$$\mathfrak{D} = a^2 R \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3 D_a \lambda_i}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}\lambda_i^2 + (2D_a + 1)^2}.$$

§ 4. Die Grenzbedingungen für ein Hysteresis zeigendes, leitendes Dielektrikum, welches sich in einem anderen Hysteresis zeigenden leitenden Dielektrikum befindet.

Entsprechend den Ausführungen der Einleitung soll nur der Einfluß der viskosen dielektrischen Hysteresis, der durch das Zurückbleiben der dielektrischen Polarisation hinter der induzierenden Kraft bedingt ist, betrachtet werden. Ähnlich wie im § 2 vereinfachen wir uns das Problem, indem wir als äußeres Potential denjenigen Wert definieren, welcher nach Abzug des von der an der Trennungsfläche der beiden Dielektrika

[1] Über die Quincke'sche Rotation im elektrischen Felde. Ann. d. Phys., IV, 1, p. 530 (1900).

induzierten Schicht herrührenden Potentials vom Gesamtpotential übrigbleibt. Die Hysteresis des äußeren Dielektrikums ist dann bereits in dem so definierten äußeren Potential berücksichtigt und es ist somit bei der Bestimmung des Potentials der an der Trennungsfläche der beiden Dielektrika induzierten Ladung nur mehr die Hysteresis des inneren Dielektrikums in Betracht zu ziehen.

Das äußere Potential kann also wieder in derselben Form vorausgesetzt werden, wie wir es bisher getan haben. Doch wollen wir seine Abhängigkeit von der Zeit nun auch in der Schreibweise zum Ausdruck bringen, indem wir es mit $\Phi(t)$ bezeichnen. Die Zeit, um welche die Polarisation des inneren Dielektrikums hinter der induzierenden Kraft zurückbleibt, sei δ. Es ist dann die Polarisation zur Zeit t bestimmt durch den Wert $\Phi(t-\delta)+\varphi(t-\delta)$, welchen das induzierende Potential zur Zeit t hatte. Dieses induzierende Potential zur Zeit t setzt sich aber zusammen aus dem Wert, welchen das Potential Φ zur Zeit t hat, also dem Wert $\Phi(t)$, und dem Wert, welchen das von der induzierten Ladung herrührende Potential, das wir mit φ' bezeichnen wollen, zur Zeit t hat, d. i. dem Werte $\varphi'(t)$. Das Zusatzpotential φ' ist daher bestimmt durch die Gleichung

$$\Phi(t)+\varphi'(t) = \Phi(t-\delta)+\varphi(t-\delta)$$

oder

$$\varphi'(t) = -\Phi(t)+\Phi(t-\delta)+\varphi(t-\delta).$$

Ersetzen wir demnach in den Gleichungen 18), 20), 23) und 24) φ durch φ', so erhalten wir die Gleichungen für den vorliegenden Fall. Diese Ersetzung ergibt:

$$\sigma_i = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\varphi_i(t-\delta)}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_a(t-\delta)}{\partial n}\right] \tag{36}$$

$$\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\Phi(t-\delta)}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_a(t-\delta)}{\partial n}\right] + \lambda_a\left[\frac{\partial\Phi(t-\delta)}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_a(t-\delta)}{\partial n}\right]$$
$$-\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\Phi(t-\delta)}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_i(t-\delta)}{\partial n}\right] - \lambda_i\left[\frac{\partial\Phi(t-\delta)}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_i(t-\delta)}{\partial n}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\varphi_i(t-\delta)}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_a(t-\delta)}{\partial n}\right]. \tag{37}$$

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_a = 0. \quad 38)$$

$$\varphi_a = \varphi_i. \quad 39)$$

36) bestimmt die Dichte der induzierten Schicht, 37) und 39) gelten für die Trennungsfläche, 38) im Innern der beiden Dielektrika.

§ 5. Die Hysteresis zeigende dielektrische leitende Kugel in einem Hysteresis zeigenden leitenden Dielektrikum unter der Wirkung eines homogenen elektrostatischen Drehfeldes.

Wir benützen die gleichen Bezeichnungen wie im § 3; die Zeit, um welche die Polarisation der Kugel hinter der induzierenden Kraft zurückbleibt, sei δ. Die Normale auf die Trennungsfläche, d. i. die Oberfläche der Kugel, fällt mit dem Radiusvektor ρ zusammen. Die Gleichungen des Problems sind im vorhergehenden Paragraphen angeführt. Wir haben dort bloß n durch ρ zu ersetzen, um sie in die für den hier zu behandelnden Fall geeignete Form zu bringen. Die Gleichungen 36) und 37) haben, wenn wir $t-\delta = t'$ setzen, genau dieselbe Form wie die entsprechenden Gleichungen für hysteresisfreie Dielektrika, da $\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}$. Wir können demnach die im § 3 gefundenen Lösungen ohneweiters auf den vorliegenden Fall übertragen und erhalten so:

$$\sigma_x = \frac{3a}{4\pi R}\cos\omega\sin\vartheta\,(A_x\sin\alpha t' + B_x\cos\alpha t') = \frac{3a}{4\pi R}\cos\omega\sin\vartheta\,.\,M'.$$

$$\sigma_y = \frac{3a}{4\pi R}\sin\omega\sin\vartheta\,(B_x\sin\alpha t' - A_x\cos\alpha t') = \frac{3a}{4\pi R}\sin\omega\sin\vartheta\,.\,N'.$$

worin A_x und B_x die in den Gleichungen 29) festgelegten Werte haben. Ferner ist entsprechend der Gleichung 34) das Drehungsmoment, das die Kugel erfährt,

$$\mathfrak{D} = a^2 R\,(M'\sin\alpha t - N'\cos\alpha t).$$

Wir haben

$$M' \sin \alpha t = A_x \sin \alpha t' \sin \alpha t + B_x \cos \alpha t' \sin \alpha t$$
$$N' \cos \alpha t = B_x \sin \alpha t' \cos \alpha t - A_x \cos \alpha t' \cos \alpha t,$$

also

$$M' \sin \alpha t - N' \cos \alpha t = A_x (\cos \alpha t' \cos \alpha t + \sin \alpha t' \sin \alpha t) - B_x (\sin \alpha t' \cos \alpha t - \cos \alpha t' \sin \alpha t)$$
$$= A_x \cos \alpha (t' - t) - B_x \sin \alpha (t' - t),$$

oder, da $t' - t = \delta$:

$$M' \sin \alpha t - N' \cos \alpha t = A_x \cos \alpha\delta - B_x \sin \alpha\delta,$$

und

$$\mathfrak{D} = a^2 R (A_x \cos \alpha\delta - B_x \sin \alpha\delta).$$

Setzen wir hierin die Werte von A_x und B_x ein, so folgt endlich

$$\mathfrak{D} = \frac{a^2 R}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a + \lambda_i)^2 + (2D_a + D_i)^2} \left\{ \frac{4\pi}{\alpha} 3 (D_a \lambda_i - D_i \lambda_a) \cos \alpha\delta + \left[(D_a - D_i)(2D_a + D_i) + \frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a + \lambda_i)(\lambda_a - \lambda_i) \right] \sin \alpha\delta \right\}. \quad 40)$$

Wir betrachten nun einige Spezialisierungen. Seien zunächst die beiden Stoffe Metalle, so haben wir $D_a = D_i = 1$ und, da nun auch die Hysteresis verschwindet, $\delta = 0$ zu setzen. Dann gibt aber Gleichung 40) das Drehungsmoment, welches von v. Schweidler berechnet wurde:

$$\mathfrak{D} = a^2 R \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3(\lambda_i - \lambda_a)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a + \lambda_i)^2 + 9}.$$

Sind die beiden Dielektrika ideale Isolatoren, d. h. ist $\lambda_a = \lambda_i = 0$, so wird

$$\mathfrak{D} = a^2 R \frac{(D_a - D_i) \sin \alpha\delta}{2D_a + D_i}.$$

Während also eine hysteresisfreie dielektrische Kugel in einem hysteresisfreien Dielektrikum kein Drehungsmoment erfährt, tritt ein solches auf, wenn sie Hysteresis zeigt. Dieser

Fall ($\lambda_a = \lambda_i = 0$) ist von Schaufelberger[1] seiner Methode der Bestimmung der dielektrischen Hysteresis zu Grunde gelegt worden, desgleichen hat Arnò seine Schlüsse auf diesen Fall basiert. Wir sehen aber, daß dieser Fall ein idealer Grenzfall ist und die auf ihn basierten Folgerungen nur zutreffen, wenn nachgewiesen ist, daß die Leitfähigkeiten der beiden Dielektrika verschwindend klein sind.

Das Drehungsmoment $\mathfrak{D}$ hat ferner endliche Werte in den folgenden Fällen:

1. $D_a > 1, \quad D_i = 1$
   $\lambda_a = 0, \quad \lambda_i > 0;$
2. $D_a = 1, \quad D_i > 1$
   $\lambda_a > 0, \quad \lambda_i = 0;$

auch wenn drittens $D_a \lambda_i = D_i \lambda_a$ ist, in welchem Falle bei hysteresisfreien Dielektriken das Drehungsmoment Null ist, erhalten wir hier ein Drehungsmoment von endlichem Wert. Doch wollen wir die diesen drei Fällen entsprechenden Spezialisierungen von $\mathfrak{D}$ hier nicht besonders anführen.

§ 6. Anwendung der entwickelten Formeln auf die Beobachtungen v. Lang's.

Gleichung 35) zeigt, daß ein hysteresisfreies leitendes Dielektrikum in einem elektrostatischen Drehfeld ein Drehungsmoment erfährt. Das Vorzeichen dieses Drehungsmomentes hängt von dem Vorzeichen des Ausdruckes $D_a \lambda_i - D_i \lambda_a$ ab. Das Drehungsmoment ist hemmend, wenn $D_a \lambda_i > D_i \lambda_a$ oder $\frac{D_a}{D_i} > \frac{\lambda_a}{\lambda_i}$; es ist treibend, wenn $D_a \lambda_i < D_i \lambda$ oder $\frac{D_a}{D_i} < \frac{\lambda_a}{\lambda_i}$.

v. Lang hat in seiner Abhandlung »Versuche im elektrostatischen Drehfelde«[2] den Rotationssinn mitgeteilt, welchen Glas, Quarz, Hartgummi, Paraffin, Schwefel und Bernstein in verschiedenen Flüssigkeiten zeigten. Er fand »verkehrte« Drehung, d. i. ein treibendes Drehungsmoment, wenn sich diese Körper in Äther, Chloroform und Xylol befanden. Die Leitfähigkeit dieser drei von v. Lang verwendeten Flüssigkeiten

---

[1] Über Polarisation und Hysteresis in dielektrischen Medien. Züricher Inauguraldissertation. Baden, Buchdruckerei O. Wanner, 1898.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. 115, Abt. IIa, März 1906.

hat v. Schweidler gemessen und beziehungsweise gleich 2.10^{-11}, 1.10^{-9}, $2.10^{-11}\,\Omega^{-1} cm^{-1}$ gefunden. Ihre Dielektrizitätskonstanten wurden nicht gemessen. Nimmt man die Resultate anderer Beobachter zu Hilfe (siehe Landolt-Börnstein, Chemisch-physikalische Tabellen, 3. Aufl.), so sind sie 4·37, 5·2, 2·5. In den genannten Tabellen findet man ferner folgende Zahlen (wobei wir Glas als zu unsicher weglassen) bei Zimmertemperatur:

Quarz	$\lambda_i = 8.10^{-15}$	$D_i = 4\cdot7$
Hartgummi	5.10^{-16}	2·8
Paraffin	$3\cdot4.10^{-19}$	2

Für diese Substanzen und die genannten drei Flüssigkeiten ist nun in der Tat $\frac{D_a}{D_i} < \frac{\lambda_a}{\lambda_i}$. Das Experiment bestätigt somit das von der Theorie geforderte treibende Drehungsmoment.

»Normale« Drehung (hemmendes Drehungsmoment) zeigten die genannten festen Isolatoren in Benzol, Toluol, Benzin, Schwefelkohlenstoff, Petroleum, Olivenöl, Terpentinöl, Rizinusöl. Die Leitfähigkeiten einiger dieser Flüssigkeiten ergeben sich aus den Messungen von Koller.[1] In der folgenden Tabelle sind die Werte für diejenigen Substanzen, deren Dielektrizitätskonstanten in den Landolt-Börnstein'schen Tabellen angeführt sind, zusammengestellt:

Benzol	$\lambda_a = 5.10^{-18}$	$D_a = 2\cdot3$
Toluol	5.10^{-16}	2·4
Olivenöl	10^{-17}	3
Rizinusöl	5.10^{-16}	4·8

Mit diesen Zahlen findet man für Quarz in diesen vier Flüssigkeiten ein hemmendes Drehungsmoment; das gleiche gilt für Ebonit, wenn man die nahe Gleichheit von $\frac{D_a}{D_i}$ und $\frac{\lambda_a}{\lambda_i}$ in den Kombinationen Hartgummi-Toluol und Hartgummi-Rizinusöl zu Gunsten der Übereinstimmung mit der Theorie

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 98, Abt. IIa, Februar 1889.

deutet. Bei Paraffin findet man aber in allen vier Flüssigkeiten $\frac{D_a}{D_i} < \frac{\lambda_a}{\lambda_i}$, d. h. ein treibendes Drehungsmoment, was darauf hinweist, daß die Leitfähigkeit des benutzten Paraffins größer war als der oben angegebene Wert $3 \cdot 4 . 10^{-19}$. Im ganzen und großen darf man sagen, daß auch die von v. Lang beobachteten hemmenden Drehungsmomente mit unserer Theorie in Übereinstimmung stehen. Es ist ja überdies zu beachten, daß v. Lang seine Isolatoren nicht in Kugelform verwendete, unsere Theorie daher nur eine Art Orientierung über seine Versuche gewähren kann.

Ob die verwendeten Isolatoren Hysteresis besitzen oder nicht, läßt sich auch nicht annähernd beurteilen, da v. Lang die Größe der Drehungsmomente nicht gemessen hat. Man sieht, daß die vorsichtige Fassung, welche v. Lang seiner Anschauung über die hemmenden Drehungsmomente, »daß bei ihnen die Erscheinungen der dielektrischen Polarisation überwiegen müssen«, mit unserer Theorie in Einklang ist.

Die Formel 40) bietet die Grundlage für eine Methode der Bestimmung der dielektrischen Hysteresis. Messungen, auf welche sie anwendbar wäre, liegen nicht vor. Indem ich mir die Ausführung derartiger Messungen vorbehalte, will ich nur noch eine Bemerkung über die Wirkung der Hysteresis machen. Es ist von einigen Autoren hervorgehoben worden, daß die Hysteresis als Energie verzehrend immer nur hemmend wirken kann. Dies ist zutreffend. Formel 40) zeigt uns aber, daß das Drehungsmoment trotz der Hysteresis treibend ausfallen kann; das Auftreten eines treibenden Drehungsmomentes spricht also an sich noch ebensowenig gegen das Vorhandensein von Hysteresis, als das Auftreten eines hemmenden Drehungsmomentes an sich das Vorhandensein von Hysteresis sicherstellt.

Das Problem der sechs Strahlen oder der sieben Punkte in der Photogrammetrie

von

Eduard Doležal,

o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Dezember 1906.)

Aus einer photographischen Aufnahme lassen sich die Lage des Standpunktes, der Orientierungswinkel der Bilddistanz, respektive der Bildebene und die Bildweite selbst ableiten, falls bei vertikaler Lage der Bildebene im Raume und bei Kenntnis der Horizontrichtung der Photographie die Bilder von fünf der Lage nach gegebenen Punkten verwertet werden. Diese Aufgabe ist unter dem Namen: »Das Problem der fünf Strahlen oder sechs Punkte« bekannt und fand mehrseitig durch Steiner, Mandl, Doležal u. s. w. graphische und rechnerische Lösungen.

Kann die Richtung des Horizontes nicht mehr als bekannt angenommen werden, so tritt zu den vier vorhandenen Unbekannten eine fünfte hinzu, es genügen nicht mehr fünf der Lage nach gegebene Punkte, sondern man hat noch einen sechsten notwendig; wir haben »Das Problem der sechs Strahlen oder der sieben Punkte.«

Nachfolgend wird eine trigonometrisch-analytische Lösung des Problems gegeben und gezeigt, wie aus einer überschüssigen Anzahl von Bestimmungsstücken sich die wahrscheinlichsten Werte der gesuchten Größen ermitteln lassen; auch werden Fehleruntersuchungen in den Bereich der Betrachtung einbezogen.

I.

Sechs Punkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 sind der Lage nach im Raume durch ihre rechtwinkeligen Koordinaten gegeben, wobei die Koordinaten z mit den absoluten Höhen der Punkte identisch sind.

Bei vertikaler Lage der Bildebene wurde eine photographische Aufnahme der gegebenen sechs Punkte ausgeführt und auf dem photographischen Bilde wurden die Abstände der Bildpunkte p_1, p_2, p_3, p_4 und p_5 von p_0, nämlich

$$\overline{p_0 p_1} = s_1, \quad \overline{p_0 p_2} = s_2, \quad \overline{p_0 p_3} = s_3, \quad \overline{p_0 p_4} = s_4, \quad \overline{p_0 p_5} = s_5$$

und die Strecken

$$\overline{p_1 p_2} = s_{12}, \quad \overline{p_1 p_3} = s_{13}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overline{p_1 p_n} = s_{1n}$$

direkt gemessen. Man soll

1. die Lage des Standpunktes,
2. die perspektivischen Konstanten der Kamera und
3. den Orientierungswinkel der Bilddistanz oder die Orientierung der Bildebene bestimmen.

In Fig. 1 und 2 bedeuten: TT die horizontale Trasse der vertikalstehenden Bildebene, C das perspektivische Zentrum, welches mit dem ersten Hauptpunkte des photographischen Objektives zusammenfällt und in der Vertikalen des Standpunktes sich befindet; $p_0, p_1, p_2, \ldots$ und p_n sind die Bildpunkte von P_0, P_1, P_2, ... und P_n; hh, die Parallele zur Horizontlinie HH, bilde mit der Verbindungsgeraden $p_0 p_1$ einen Winkel ψ; $s_1, s_2, \ldots$ und s_n sind die Abstände der Bildpunkte $p_1, p_2, \ldots.$ und p_5 von p_0, und β_n stellt einen Winkel mit dem Scheitel in p_0 zwischen zwei von p_0 ausgehenden Geraden $\overline{p_0 p_1}$ und $\overline{p_0 p_n}$ dar.

Die Lage des Standpunktes C ist bestimmt durch seine Polarkoordinaten R_0 und ρ_0, bezogen auf P_0 als Pol und die zur Abszissenachse parallele Polarachse, aus welchen sich dann die rechtwinkeligen Koordinaten der Station durch eine einfache Koordinatentransformation ermitteln lassen.

Der Winkel γ stellt den Orientierungswinkel dar; f ist die Bildweite der Kamera, HH der Horizont der Photographie, dessen Richtung durch den Winkel ψ und dessen Lage durch

den Abstand $\overline{p_0 p_0'} = \overline{p_0''\Omega} = \eta$ bestimmt wird; die Lage des Hauptpunktes Ω wird durch den Abstand $\overline{p_0 p_0''} = \overline{p_0'\Omega} = \xi$ fixiert.

Es sind somit im ganzen fünf Unbekannte:

$$R_0, \ \rho_0, \ \gamma, \ f \text{ und } \psi,$$

welche zu bestimmen sind.

Fig. 1.

Für die Tangente des Horizontalwinkels α_n zwischen den Strahlen $\overline{CP_0}$ und $\overline{CP_n}$ wird nach Fig. 1 erhalten:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{\overline{p_n' i}}{\overline{Ci}} = \frac{\overline{P_n J}}{\overline{CJ}} \,. \qquad (1)$$

Da sich die linearen Größen im vorstehenden Ausdrucke auch durch:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{p'_n i} &= \overline{p'_0 p'_n} \sin(90^\circ - \gamma) = s_n \cos(\psi - \beta_n) \cos\gamma, \\
\overline{Ci} &= \overline{Cp'_0} - \overline{p'_0 i} = \frac{f}{\cos\gamma} - s_n \cos(\psi - \beta_n) \sin\gamma, \\
\overline{P_n J} &= r_n \sin(\rho_0 - \rho_{0n}), \\
\overline{CJ} &= \overline{CP_0} - \overline{P_0 J} = R_0 - r_n \cos(\rho_0 - \rho_{0n})
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ausdrücken lassen, so erhält man nach Einführung der Werte aus (2) in die Gleichung (1):

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{s_n \cos(\psi - \beta_n) \cos\gamma}{\dfrac{f}{\cos\gamma} - s_n \cos(\psi - \beta_n) \sin\gamma} = \frac{r_n \sin(\rho_0 - \rho_{0n})}{R_0 - r_n \cos(\rho_0 - \rho_{0n})}. \quad (3)$$

In dieser Gleichung wird s_n auf dem Photogramme gemessen (Fig. 2), die Größen r_n und ρ_{0n} lassen sich aus den

Fig. 2.

gegebenen Koordinaten der Raumpunkte auf Grund der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \rho_{0n} &= \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}, \\ r_n &= \frac{x_n - x_0}{\cos \rho_{0n}} = \frac{y_n - y_0}{\sin \rho_{0n}} = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

berechnen und kontrollieren und ist der Winkel β_n aus dem Photogrammdreiecke $p_0 p_1 p_n$ mittels der drei gemessenen Seiten s_1, s_n und s_{1n} aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta_n = \sqrt{\frac{(s - s_1)(s - s_n)}{s(s - s_{1n})}} \quad (5)$$

berechenbar, wobei

$$s = \frac{s_1 + s_2 + s_{1n}}{2}$$

bedeutet.

Wird die Gleichung (3) entwickelt und gehörig reduziert, so wird erhalten:

$$\left.\begin{aligned} -s_n \sin \beta_n \operatorname{tg} \psi + r_n s_n \sin \rho_{0n} \cos \beta_n \frac{\sin(\rho_0 + \gamma)}{R_0 \cos \gamma} (\operatorname{tg} \beta_n \operatorname{tg} \psi + 1) \\ + r_n s_n \cos \rho_{0n} \cos \beta_n \frac{\cos(\rho_0 + \gamma)}{R_0 \cos \gamma} (\operatorname{tg} \beta_n \operatorname{tg} \psi + 1) \\ + r_n \cos \rho_{0n} \frac{f \sin \rho_0}{R_0 \cos^2 \gamma \cos \psi} - r_n \sin \rho_{0n} \frac{f \cos \rho_0}{R_0 \cos^2 \gamma \cos \psi} \end{aligned}\right\} = s_n \cos \beta_n. \quad (6)$$

Indem man zwecks übersichtlicher Darstellung:

$$\left.\begin{aligned} -s_n \sin \beta_n &= a_n, \\ +s_n \cos \beta_n &= b_n, \\ -r_n \sin \rho_{0n} &= c_n, \\ +r_n \cos \rho_{0n} &= d_n, \\ -\left(\frac{a}{b}\right)_n m + 1 &= \sigma_n \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

und

$$\left.\begin{aligned} -r_n s_n \sin\rho_{0n} \cos\beta_n &= (bc)_n, \\ +r_n s_n \cos\rho_{0n} \cos\beta_n &= (bd)_n), \\ +r_n s_n \sin\rho_{0n} \sin\beta_n &= (ac)_n, \\ -r_n s_n \cos\rho_{0n} \sin\beta_n &= (ad)_n \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

setzt und als neue Variable:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi &= m, \\ \frac{\cos(\rho_0+\gamma)}{R_0\cos\gamma} &= q, \\ \frac{\sin(\rho_0+\gamma)}{R_0\cos\gamma} &= p, \\ \frac{f\sin\rho_0}{R_0\cos^2\gamma\cos\psi} &= s, \\ \frac{f\cos\rho_0}{R_0\cos^2\gamma\cos\psi} &= t \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

einführt, nimmt die Gleichung (6) die einfache Form an:

$$a_n m-(bc)_n\sigma_n p+(bd)_n\sigma_n q+d_n s+c_n t = b_n. \quad (9)$$

Für einen Augenblick betrachten wir σ als von der neuen Variabeln unabhängig; es ist dann die vorstehende Gleichung in Bezug auf m, p, q, s und t als linear aufzufassen.

Zur Bestimmung dieser fünf Unbekannten genügen die folgenden fünf Bestimmungsgleichungen, die sich nach sukzessiver Kombination des Punktes P_0 mit P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 ergeben, mit:

$$\left.\begin{aligned} P_0P_1\ldots\quad a_1 m-(bc)_1\sigma_1 p+(bd)_1\sigma_1 q+d_1 s+c_1 t &= b_1, \\ P_0P_2\ldots\quad a_2 m-(bc)_2\sigma_2 p+(bd)_2\sigma_2 q+d_2 s+c_2 t &= b_2, \\ P_0P_3\ldots\quad a_3 m-(bc)_3\sigma_3 p+(bd)_3\sigma_3 q+d_3 s+c_3 t &= b_3, \\ P_0P_4\ldots\quad a_4 m-(bc)_4\sigma_4 p+(bd)_4\sigma_4 q+d_4 s+c_4 t &= b_4, \\ P_0P_5\ldots\quad a_5 m-(bc)_5\sigma_5 p+(bd)_5\sigma_5 q+d_5 s+c_5 t &= b_5. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Aus diesen Gleichungen könnte man, wenn alle Koeffizienten bekannt wären, die neuen Variabeln wie folgt darstellen:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\Delta_m}{\Delta}, \\ p &= \frac{\Delta_p}{\Delta}, \\ q &= \frac{\Delta_q}{\Delta}, \\ s &= \frac{\Delta_s}{\Delta}, \\ t &= \frac{\Delta_t}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Da aber die Koeffizienten von p und q in den Gleichungen (10) die Größe σ enthalten, die nach Gleichung (7) eine Funktion der Unbekannten m ist, so wird es notwendig, zuerst m zu bestimmen, und zwar auf Grund folgender Untersuchung.

Wir betrachten und entwickeln die Determinante in dem Ausdrucke für m, also:

$$m = \frac{\Delta_m}{\Delta},$$

worin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & -(bc)_1\sigma_1, & (bd)_1\sigma_1, & d_1, & c_1, \\ a_2, & -(bc)_2\sigma_2, & (bd)_2\sigma_2, & d_2, & c_2, \\ a_3, & -(bc)_3\sigma_3, & (bd)_3\sigma_3, & d_3, & c_3, \\ a_4, & -(bc)_4\sigma_4, & (bd)_4\sigma_4, & d_4, & c_4, \\ a_5, & -(bc)_5\sigma_5, & (bd)_5\sigma_5, & d_5, & c_5 \end{vmatrix} \tag{12}$$

ist und nach Einführung von σ die Form annimmt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & -(bc)_1\left[-\left(\frac{a}{b}\right)_1 m+1\right], & (bd)_1\left[-\left(\frac{a}{b}\right)m+1\right], & d_1, & c_1 \\ a_2, & -(bc)_2\left[-\left(\frac{a}{b}\right)_2 m+1\right], & (bd)_2\left[-\left(\frac{a}{b}\right)m+1\right], & d_2, & c_2 \\ a_3, & -(bc)_3\left[-\left(\frac{a}{b}\right)_3 m+1\right], & (bd)_3\left[-\left(\frac{a}{b}\right)m+1\right], & d_3, & c_3 \\ a_4, & -(bc)_4\left[-\left(\frac{a}{b}\right)_4 m+1\right], & (bd)_4\left[-\left(\frac{a}{b}\right)m+1\right], & d_4, & c_4 \\ a_5, & -(bc)_5\left[-\left(\frac{a}{b}\right)_5 m+1\right], & (bd)_5\left[-\left(\frac{a}{b}\right)m+1\right], & d_5, & c_5 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Es ist wohl unschwer einzusehen, daß sich diese Determinante durch eine Summe von vier Determinanten ausdrücken läßt; nach geeigneter Zerlegung wird erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 &= \begin{vmatrix} a_1, & -(bc)_1, & (bd)_1, & d_1, & c_1 \\ a_2, & -(bc)_2, & (bd)_2, & d_2, & c_2 \\ \vdots \\ a_5, & -(bc)_5, & (bd)_5, & d_5, & c_5 \end{vmatrix} \\ m\,\partial_2 &= \begin{vmatrix} a_1, & (ac)_1 m, & (bd)_1, & d_1, & c_1 \\ a_2, & (ac)_2 m, & (bd)_2, & d_2, & c_2 \\ \vdots \\ a_5, & (ac)_5 m, & (bd)_5, & d_5, & c_5 \end{vmatrix} \\ m\,\partial_3 &= \begin{vmatrix} a_1, & -(bc)_1, & (ad)_1 m, & d_1, & c_1 \\ a_2, & -(bc)_2, & (ad)_2 m, & d_2, & c_2 \\ \vdots \\ a_5, & -(bc)_5, & (ad)_5 m, & d_5, & c_5 \end{vmatrix} \\ m^2\partial_4 &= \begin{vmatrix} a_1, & (ac)_1 m, & -(ad)_1 m, & d_1, & c_1 \\ a_2, & (ac)_2 m, & -(ad_2) m, & d_2, & c_2 \\ \vdots \\ a_5, & (ac)_5 m, & -(ad)_5 m, & d_5, & c_5 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} . \quad (14)$$

worin ∂_2, ∂_3 und ∂_4 die Werte haben:

$$\left.\begin{aligned}
\partial_2 &= \begin{vmatrix} a_1, & (ac)_1, & (bd)_1, & d_1, & c_1 \\ a_2, & (ac)_2, & (bd)_2, & d_2, & c_2 \\ \vdots \\ a_5, & (ac)_5, & (bd)_5, & d_5, & c_5 \end{vmatrix} \\
\partial_3 &= \begin{vmatrix} a_1, & -(bc)_1, & (ad)_1, & d_1, & c_1 \\ a_2, & -(bc)_2, & (ad)_2, & d_2, & c_2 \\ \vdots \\ a_5, & -(bc)_5, & (ad)_5, & d_5, & c_5 \end{vmatrix} \\
\partial_4 &= \begin{vmatrix} a_1, & (ac)_1, & -(ad)_1, & d_1, & c_1 \\ a_2, & (ac)_2, & -(ad)_2, & d_2, & c_2 \\ \vdots \\ a_5, & (ac)_5, & -(ad)_5, & d_5, & c_5 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Die Determinante Δ kann somit geschrieben werden:

$$\Delta = \partial_1 + m(\partial_2 + \partial_3) + m^2 \partial_4. \tag{16}$$

Die Determinante Δ_m, nämlich:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} b_1, & -(bc)_1 \left[-\left(\frac{a}{b}\right)_1 m+1\right], & (bd)_1 \left[-\left(\frac{a}{b}\right) m+1\right], & d_1, & c_1 \\ b_2, & -(bc)_2 \left[-\left(\frac{a}{b}\right)_2 m+1\right], & (bd)_2 \left[-\left(\frac{a}{b}\right) m+1\right], & d_2, & c_2 \\ \vdots \\ b_5, & -(bc)_5 \left[-\left(\frac{a}{b}\right)_5 m+1\right], & (bd)_5 \left[-\left(\frac{a}{b}\right) m+1\right], & d_5, & c_5 \end{vmatrix}$$

kann in analoger Weise wie Δ zerlegt werden und es resultiert für sie schließlich:

$$\Delta_m = D_1 + m(D_2 + D_3) + m^2 D_4. \tag{17}$$

Die Werte für D_1, D_2, D_3 und D_4 werden aus den Gleichungen (14) und (15) unmittelbar erhalten, wenn man die Vertikalkolumne a durch b ersetzt.

Man erhält für m den Ausdruck:

$$m = \frac{D_1 + m(D_2 + D_3) + m^2 D_4}{\partial_1 + m(\partial_2 + \partial_3) + m^2 \partial_4} \tag{18}$$

und nach m geordnet:

$$\partial_4 m^3 + (\partial_2 + \partial_3 - D_4) m^2 + (\partial_1 - D_2 - D_3) m - D_1 = 0$$

oder

$$m^3 + \frac{\partial_2 + \partial_3 - D_4}{\partial_4} m^2 + \frac{\partial_1 - (D_2 + D_3)}{\partial_4} m - \frac{D_1}{\partial_4} = 0. \tag{19}$$

Durch Auflösung dieser Gleichung dritten Grades erhält man m und es können auf Grund der Beziehung

$$\sigma_n = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)_n m$$

die einzelnen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_5$ berechnet und in das Gleichungssystem (10) eingeführt werden, so daß nunmehr die Koeffizienten von p und q bekannt sind.

Die Berechnung der neuen Variabeln kann nun auf zweierlei Art erfolgen, und zwar:

1. Da nunmehr die Koeffizienten der Unbekannten p und q in den Bestimmungsgleichungen (10) bekannt sind, so lassen sich auch die Determinanten dieses Gleichungssystems (11) berechnen, wodurch die neuen Variabeln bestimmt erscheinen.

2. Da die eine neue Variable m aus der Gleichung (19) bestimmt wird, so rechnet man die weiteren vier neuen Variabeln p, q, s und t aus den folgenden Gleichungen, die sich aus dem System (10) unmittelbar ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
-(bc\sigma)_1 p + (bd\sigma)_1 q + d_1 s + c_1 t &= b_1 - a_1 m, \\
-(bc\sigma)_2 p + (bd\sigma)_2 q + d_2 s + c_2 t &= b_2 - a_2 m, \\
-(bc\sigma)_3 p + (bd\sigma)_3 q + d_3 s + c_3 t &= b_3 - a_3 m, \\
-(bc\sigma)_4 p + (bd\sigma)_4 q + d_4 s + c_4 t &= b_4 - a_4 m. \\
-(bc\sigma)_5 p + (bd\sigma)_5 q + d_5 s + c_5 t &= b_5 - a_5 m.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Es sind fünf Gleichungen mit vier Unbekannten, daher ist eine Gleichung überschüssig und es können nun die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten p, q, s und t aus den folgenden vier Normalgleichungen berechnet werden, die lauten:

$$\left.\begin{aligned}
&[(bc\sigma)(bc\sigma)]p+[-(bc\sigma)(bd\sigma)]q+[-(bc\sigma)d]s+\\
&\qquad\qquad+[-(bc\sigma)c]t=[-(bc\sigma)(b-am)],\\
&[-(bd\sigma)(bc\sigma)]p+[(bd\sigma)(bd\sigma)]q+[(bd\sigma)d]s+\\
&\qquad\qquad+[(bd\sigma)c]t=[(bd\sigma)(b-am)],\\
&[-(bc\sigma)d]p+[(bd\sigma)d]q+[dd]s+[dc]t=[d(b-am)],\\
&[-(bc\sigma)c]p+[(bd\sigma)c]q+[cd]s+[cc]t=[c(b-am)]
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned}
&[bbcc\sigma\sigma]p+[-bbcd\sigma\sigma]q+[-bcd\sigma]s+[-bcc\sigma]t=\\
&\qquad\qquad=[-bbc\sigma+abc\sigma m],\\
&[-bbcd\sigma]p+[bbdd\sigma\sigma]q+[bdd\sigma]s+[bcd\sigma]t=\\
&\qquad\qquad=[bbd\sigma-abd\sigma m],\\
&[-bcd\sigma]p+[bdd\sigma]q+[dd]s+[cd]t=[bd-adm],\\
&[-bcc\sigma]p+[bcd\sigma]q+[cd]s+[dd]t=[bc-acm].
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

Die neuen Variabeln sind dann:

$$\left.\begin{aligned}
p&=\frac{\Delta'_p}{\Delta'},\\
q&=\frac{\Delta'_q}{\Delta'},\\
s&=\frac{\Delta'_s}{\Delta'},\\
t&=\frac{\Delta'_t}{\Delta'}.
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

Wenn die neuen Variabeln berechnet sind, so werden die gesuchten fünf Unbekannten auf Grund der Beziehungen (8) bestimmt mit:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \operatorname{arc\,tg} m, \\ \operatorname{tg} p_0 &= \frac{s}{t}, \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{pt-qs}{ps+qt}, \\ R_0 &= \pm \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{ps+qt} \\ f &= \pm m \frac{ps+qt}{p^2+q^2} \sqrt[4]{\frac{t^2}{s^2+t^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

II.

Bestimmung der Horizont- und der Vertikallinie, sowie des Hauptpunktes.

Unter den perspektivischen Konstanten kommt dem Hauptpunkte der Perspektive Ω eine große Bedeutung zu, beziehen sich doch die Bildkoordinaten auf denselben als Anfangspunkt.

Seine Lage wird bestimmt durch den Schnitt zweier Geraden, von welchen man die Richtungen kennt; der Horizont HH ist parallel zu der unter dem Winkel ψ zu $p_0 p_1$ gezogenen Geraden hh, sein Abstand von derselben, η, ist unbekannt, während die Vertikallinie VV in dem gleichfalls noch unbekannten Abstande ξ normal zum Horizonte zu denken ist.

Es handelt sich somit um die Koordinaten des Hauptpunktes ξ und η, bezogen auf p_0 als Koordinatenanfangspunkt und hh als Abszissenachse.

Die Abszisse ξ ergibt sich in Fig. 3 aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $Cp'_0\Omega$ mit:

$$\xi = f \operatorname{tg} \gamma. \qquad (25)$$

Werden von den Bildpunkten $p_0, p_1, \ldots p_n$ Senkrechte auf hh gefällt und die Abstände der Fußpunkte dieser Senkrechten von p'_0, d. i. $l_1, l_2, \ldots l_n$ ermittelt, so können für ξ noch

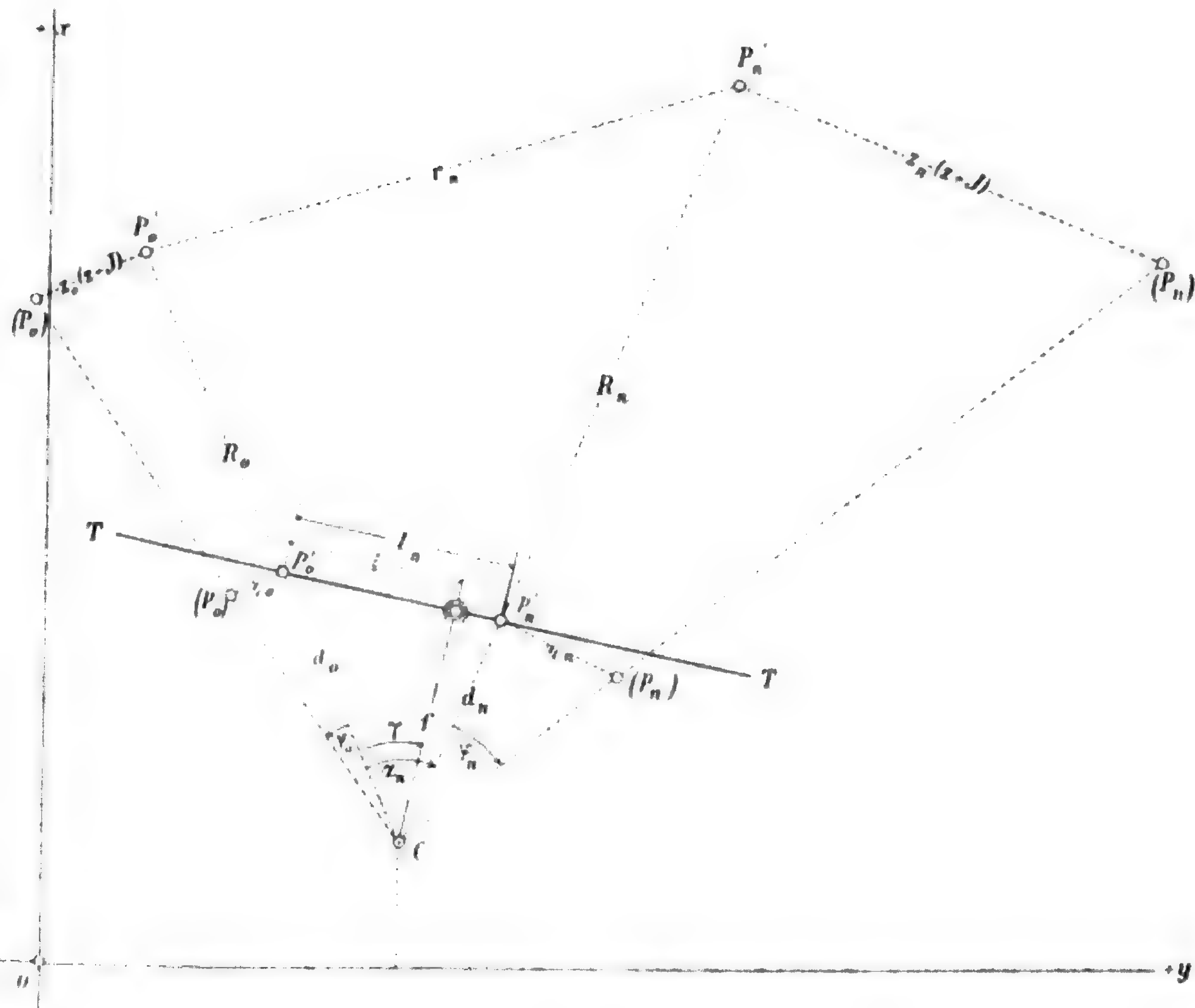


Fig. 3.

eine Reihe von Ausdrücken abgeleitet werden; es ist nämlich aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $Cp'_n\Omega$:

$$l_n - \xi = f \operatorname{tg}(\alpha_n - \gamma), \tag{26}$$

so daß soviel Werte für ξ erhalten werden, als Bildpunkte vorliegen; die erhaltenen Werte für ξ werden differieren.

Es ergeben sich die Werte:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Punkt } p_0 \ldots & \xi^0 = f \operatorname{tg} \gamma, \\ \text{»} \quad p_1 \ldots & \xi' = l_1 - f \operatorname{tg}(\alpha_1 - \gamma), \\ \text{»} \quad p_2 \ldots & \xi'' = l_2 - f \operatorname{tg}(\alpha_2 - \gamma), \\ \vdots & \vdots \\ \text{Punkt } p_5 \ldots & \xi''''' = l_5 - f \operatorname{tg}(\alpha_5 - \gamma), \end{array}\right\} \qquad (27)$$

worin die Horizontalwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ nach der in Gleichung (3) aufgestellten Formel:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{r_n \sin(\rho_0 - \rho_{0n})}{R_0 - r_n \cos(\rho_0 - \rho_{0n})} \qquad (28)$$

berechnet werden.

Die im Gleichungssysteme (27) dargestellten Werte für ξ werden voneinander abweichen, der wahrscheinlichste Wert der Abszisse des Hauptpunktes wird sein:

$$\xi = \frac{\Big[l_n - f \operatorname{tg}(\alpha_n - \gamma)\Big]_{n=0}^{n=5}}{n} = \frac{[l_n - f \operatorname{tg}(\alpha_n - \gamma)]_0^5}{6} \qquad (29)$$

mit dem mittleren Fehler:

$$\Delta \xi = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{[vv]}{30}} = 0 \cdot 182 \sqrt{[vv]}, \qquad (30)$$

wobei für das Minimum der Bildpunkte $n = 6$ genommen werden muß. Die Verbesserungen v rechnen sich aus:

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = \xi - \xi^0, \\ v_1 = \xi - \xi', \\ v_2 = \xi - \xi'', \\ \vdots \\ v_5 = \xi - \xi'''''. \end{array}\right\} \qquad (31)$$

Für den mittleren Fehler der Einzelwerte von ξ im System (27) gilt die Gleichung:

$$\Delta \xi^0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[vv]}{5}} = 0 \cdot 447 \sqrt{[vv]}. \qquad (32)$$

Kennt man ξ, so wird diese lineare Größe von p_0 auf hh aufgetragen, wodurch p_0'' erhalten wird; eine Normale durch diesen Punkt zu hh gibt die Vertikallinie VV, in welcher der Hauptpunkt Ω sich befindet und durch welchen die Horizontlinie HH hindurchgeht.

Bezüglich der Lage des Horizonts und des Hauptpunktes in der Vertikallinie hat man die folgende Untersuchung durchzuführen.

Denkt man sich (Fig. 3) die rechtwinkeligen Dreiecke, welche die Projektionsstrahlen CP_0 und CP_n mit ihren Projektionen auf die Ebene des Horizonts CP_0' und CP_n' und den Vertikalen P_0P_0' und P_nP_n', sowie den Bildordinaten η_0 und η_n bilden, in die Zeichnungsebene umgelegt, so resultieren auf Grund der zwei ähnlichen Dreieckspaare die Proportionen:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 : d_0 &= [z_0-(z+J)] : R_0, \\ \eta_n : d_n &= [z_n-(z+J)] : R_n, \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

worin die Instrumenthöhe J direkt gemessen wird, R_0 nach den Entwicklungen in I. bekannt ist und die Größen R_n, d_0 und d_n respektive α_n aus den folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\left.\begin{aligned} R_n &= r_n \frac{\sin(\rho_0-\rho_{0n})}{\sin\alpha_n}, \\ d_0 &= \frac{f}{\cos\gamma}, \\ d_n &= \frac{f}{\cos(\alpha_n-\gamma)}, \\ \operatorname{tg}\alpha_n &= \frac{r_n\sin(\rho_0-\rho_{0n})}{R_0-r_n\cos(\rho_0-\rho_{0n})}; \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

z, die absolute Höhe der Station, ist unbekannt und zu bestimmen.

Für die Ordinaten η_n und η_0 der Bildpunkte p_n und p_0 folgt aus den Gleichungen (33):

$$\left.\begin{aligned}\eta_0 &= \frac{d_0}{R_0}\,[z_0-(z+J)],\\ \eta_n &= \frac{d_n}{R_n}\,[z_n-(z+J)]\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

und für ihre Differenz aus dem Dreiecke $p_0 p_n q$ in Fig. 2:

$$\eta_n - \eta_0 = s_n \sin(\phi-\beta_n). \quad (36)$$

Werden die Gleichungen (35) und (36) miteinander verbunden, so erhält man:

$$\left(\frac{d_n z_n}{R_n}-\frac{d_0 z_0}{R_0}\right)-\left(\frac{d_n}{R_n}-\frac{d_0}{R_0}\right)J-\left(\frac{d_n}{R_n}-\frac{d_0}{R_0}\right)z = s_n \sin(\phi-\beta_n),$$

woraus die unbekannte Höhe der Station sich rechnet mit:

$$z = \frac{\left(\frac{d_n z_n}{R_n}-\frac{d_0 z_0}{R_0}\right)-\left(\frac{d_n}{R_n}-\frac{d_0}{R_0}\right)J-s_n \sin(\phi-\beta_n)}{\frac{d_n}{R_n}-\frac{d_0}{R_0}}$$

oder

$$z = \frac{(d_n z_n R_0-d_0 z_0 R_n)-(d_n R_0-d_0 R_n)J-s_n R_0 R_n \sin(\phi-\beta_n)}{d_n R_0-d_0 R_n}. \quad (37)$$

Die z-Koordinate des Standpunktes ergibt sich fünfmal, und zwar:

$$\left.\begin{aligned}z' &= \frac{(d_1 z_1 R_0-d_0 z_0 R_1)-(d_1 R_0-d_0 R_1)J-s_1 R_0 R_1 \sin(\phi-\beta_1)}{d_1 R_0-d_0 R_1}\\ z'' &= \frac{(d_2 z_2 R_0-d_0 z_0 R_2)-(d_2 R_0-d_0 R_2)J-s_2 R_0 R_2 \sin(\phi-\beta_2)}{d_2 R_0-d_0 R_2}\\ &\vdots\\ z''''' &= \frac{(d_5 z_5 R_0-d_0 z_0 R_5)-(d_5 R_0-d_0 R_5)J-s_5 R_0 R_5 \sin(\phi-\beta_5)}{d_5 R_0-d_0 R_5}.\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Die Ordinate η für den Abstand der Horizontlinie von der Horizontalen *hh* wird nach Gleichung (35), worin $\eta_0 = \eta$ zu setzen ist, erhalten mit:

$$\eta = \frac{d_0}{R_0}\{(z_0 - J) - z\}$$

und wenn hier die Werte für z aus dem System (38) eingeführt werden, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= \frac{d_0}{R_0}\left\{(z_0-J) - \frac{(d_1 z_1 R_0 - d_0 z_0 R_1) - (d_1 R_0 - d_0 R_1) J - s_1 R_0 R_1 \sin(\psi - \beta_1)}{d_1 R_0 - d_0 R_1}\right\} \\ \eta'' &= \frac{d_0}{R_0}\left\{(z_0-J) - \frac{(d_2 z_2 R_0 - d_0 z_0 R_2) - (d_2 R_0 - d_0 R_2) J - s_2 R_0 R_2 \sin(\psi - \beta_2)}{d_2 R_0 - d_0 R_2}\right\} \\ &\vdots \\ \eta''''' &= \frac{d_0}{R_0}\left\{(z_0-J) - \frac{(d_5 z_5 R_0 - d_0 z_0 R_5) - (d_5 R_0 - d_0 R_5) J - s_5 R_0 R_5 \sin(\psi - \beta_5)}{d_5 R_0 - d_0 R_5}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Die wahrscheinlichsten Werte für z und η werden nach Mittelbildung der Werte in den Gleichungen (38) und (40) berechnet, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{z' + z'' + z''' + z'''' + z'''''}{5}, \\ \eta &= \frac{\eta' + \eta'' + \eta''' + \eta'''' + \eta'''''}{5}. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Die mittleren Fehler dieser Mittelwerte sind:

$$\left.\begin{aligned}\Delta z &= \sqrt{\frac{[v'v']}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{[v'v']}{5.4}} = 0\cdot 224\sqrt{[v'v']},\\ \Delta \eta &= \sqrt{\frac{[v''v'']}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{[v''v'']}{5.4}} = 0\cdot 224\sqrt{[v''v'']},\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

worin die Verbesserungen sich rechnen aus:

$$\left.\begin{aligned} v'_1 &= z - z', & v''_1 &= \eta - \eta',\\ v'_2 &= z - z'', & v''_2 &= \eta - \eta'',\\ &\vdots & &\vdots\\ v'_5 &= z - z''''', & v''_5 &= \eta - \eta'''''.\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Interessiert der mittlere Fehler eines beliebigen, nach den Gleichungen (38) und (40) berechneten Wertes von z oder η, so wird er bestimmt nach:

$$\left.\begin{aligned}\Delta z^0 &= \sqrt{\frac{[v'v']}{n-1}} = \sqrt{\frac{[v'v']}{4}} = 0\cdot 5\sqrt{[v'v']},\\ \Delta \eta^0 &= \sqrt{\frac{[v''v'']}{n-1}} = \sqrt{\frac{[v''v'']}{4}} = 0\cdot 5\sqrt{[v''v'']}.\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Kennt man die Ordinate η, so wird sie von p''_0 auf der Vertikallinie VV in entsprechendem Sinne aufgetragen und der Hauptpunkt Ω des Photogrammes erhalten; eine Normale zur Vertikallinie durch diesen Punkt stellt die Horizontallinie HH dar.

III.

Bestimmung der Raumkoordinaten des Standpunktes.

Zwischen den ebenen Koordinaten des Punktes P und P_n bestehen die bekannten Relationen:

$$R_n = \frac{x - x_n}{\cos \rho_n} = \frac{y - y_n}{\sin \rho_n}, \quad (45)$$

woraus die rechtwinkeligen Koordinaten des Punktes P folgen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_n + R_n \cos \rho_n, \\ y &= y_n + R_n \sin \rho_n. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Hierin kann nach der Fig. 1 für den Richtungswinkel ρ_n gesetzt werden:

$$\rho_n = \rho_0 + \alpha_n \tag{47}$$

und die Länge R_n ergibt sich aus dem Dreiecke PP_0P_n mit:

$$R_n^2 = R_0^2 + r_n^2 - 2 r_n R_0 \cos(\rho_0 - \rho_{0n})$$

oder

$$R_n = r_n \frac{\sin(\rho_0 - \rho_{0n})}{\sin \alpha_n} = R_0 \frac{\sin(\rho_0 - \rho_{0n})}{\sin(\alpha_n + \rho_0 - \rho_{0n})}. \tag{48}$$

Die ebenen Koordinaten des Standpunktes mit Verwertung jener der sechs gegebenen Punkte lauten:

$$\left.\begin{aligned} &P_0 \ldots \; x^0 = x_0 + R_0 \cos \rho_0, \; y^0 = y_0 + R_0 \sin \rho_0, \\ &P_1 \ldots \; x' = x_1 + R_1 \cos \rho_1, \; y' = y_1 + R_1 \sin \rho_1, \\ &P_2 \ldots \; x'' = x_2 + R_2 \cos \rho_2, \; y'' = y_2 + R_2 \sin \rho_2, \\ &\vdots \\ &P_5 \ldots \; x''''' = x_5 + R_5 \cos \rho_5, \; y''''' = y_5 + R_5 \sin \rho_5, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

wobei R und ρ nach den Gleichungen (47) und (48) berechnet werden.

Die wahrscheinlichsten Werte der vorstehenden Koordinaten sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x^0 + x' + x'' + \ldots + x'''''}{6}, \\ y &= \frac{y^0 + y' + y'' + \ldots + y'''''}{6}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Die z-Koordinaten ergaben sich aus rechtwinkeligen Dreiecken, gebildet vom Visierstrahle des betreffenden Punktes, seiner Projektion auf den Horizont und der Vertikalen dieses Punktes (Fig. 3), mit:

$$\left.\begin{aligned} z_0 - z &= R_0 \operatorname{tg} \varphi_0, \\ z_1 - z &= R_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \\ z_2 - z &= R_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \\ &\vdots \\ z_5 - z &= R_5 \operatorname{tg} \varphi_5, \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

wobei die Vertikalwinkel $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_5$ bestimmt erscheinen durch:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{\eta_0}{d_0}, \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\eta_1}{d_1}, \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\eta_2}{d_2}, \\ &\vdots \\ \operatorname{tg} \varphi_5 &= \frac{\eta_5}{d_5}, \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

worin die Bildordinaten η und die Abstände d nach den Gleichungen (34) und (35) bestimmbar sind.

Der wahrscheinlichste Wert der Koordinate z berechnet sich aus:

$$\left.\begin{aligned} z^0 &= z_0 - R_0 \operatorname{tg} \varphi_0, \\ z' &= z_1 - R_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \\ z'' &= z_2 - R_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \\ &\vdots \\ z''''' &= z_5 - R_5 \operatorname{tg} \varphi_5 \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

mit:

$$z = \frac{z^0 + z' + z'' + \ldots + z'''''}{6}. \quad (54)$$

Die Fehler der Mittelwerte der Koordinaten ergeben sich auf Grund der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\frac{[v_x v_x]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{[v_x v_x]}{6.5}} = 0\cdot 182\sqrt{[v_x v\ ]},\\
\Delta y &= \sqrt{\frac{[v_y v_y]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{[v_y v_y]}{6.5}} = 0\cdot 182\sqrt{[v_y v_y]},\\
\Delta z &= \sqrt{\frac{[v_z v_z]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{[v_z v_z]}{6.5}} = 0\cdot 182\sqrt{[v_z v_z]},
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

worin die bezüglichen Verbesserungen v_x, v_y, v_z in bekannter Weise abgeleitet werden können.

IV.

Mehrfache Bestimmung der Unbekannten.

Stehen zur Lösung des Problems nicht sechs Punkte mit ihren rechtwinkeligen Koordinaten, sondern deren n (> 6) zur Verfügung, so sind $n-6$ Punkte überschüssig; man kann daher die Sätze der Methode der kleinsten Quadrate bei Bestimmung der Unbekannten in Anwendung bringen.

Es lassen sich dann zur Bestimmung der fünf neuen Variabeln m, p, q, s und t nach Gleichung (9) $n-1$ Bestimmungsgleichungen aufstellen, die lauten:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\ m-(bc)_1\ \sigma_1\ p+(bd)_1\ \sigma_1\ q+d_1\ s+c_1\ t = b_1,\\
&a_2\ m-(bc)_2\ \sigma_2\ p+(bd)_2\ \sigma_2\ q+d_2\ s+c_2\ t = b_2,\\
&\vdots\\
&a_{n-1}m-(bc)_{n-1}\sigma_{n-1}p+(bd)_{n-1}\sigma_{n-1}q+d_{n-1}s+c_{n-1}t = b_{n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Aus diesem Gleichungssysteme lassen sich nach bekanntem Bildungsgesetze die folgenden fünf Normalgleichungen aufstellen:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]m-[a(bc)\sigma]p+[a(bd)\sigma]q+[ad]s+[ac]t = [ab],\\
&[(bc)\sigma a]m-[(bc)^2\sigma^2]p+[(bc)(bd)\sigma^2]q+[(bc)\sigma d]s+\\
&\qquad +[(bc)\sigma c]t = [(bc)\sigma b],\\
&[(bd)\sigma a]m-[(bd)(bc)\sigma^2]p+[(bd)^2\sigma^2]q+[(bd)\sigma d]s+\\
&\qquad +[(bd)\sigma c]t = [(bd)\sigma b],\\
&[da]m-[d(bc)\sigma]p+[d(bd)\sigma]q+[dd]s+[dc]t = [db],\\
&[ca]m-[c(bc)\sigma]p+[c(bd)\sigma]q+[cd]s+[cc]t = [cb],
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

aus welchen die wahrscheinlichsten Werte der eingeführten Unbekannten resultieren:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\nabla_m}{\nabla}, \\ p &= \frac{\nabla_p}{\nabla}, \\ q &= \frac{\nabla_q}{\nabla}, \\ s &= \frac{\nabla_s}{\nabla}, \\ t &= \frac{\nabla_t}{\nabla}. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Hier wird es geboten, wie früher bei der einfachen Bestimmung, zuerst m zu berechnen, und zwar, indem man die Determinante in dem Ausdrucke für m Gleichung (58) entwickelt; man kommt auf eine Gleichung dritten Grades für m, die aufgelöst werden muß. Ist m bekannt, so werden die Werte für die Symbole $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}$ berechnet, so zwar, daß nunmehr die Determinanten der Ausdrücke in Gleichung (58) bestimmbar sind und die Unbekannten ermittelt werden können.

Sobald die wahrscheinlichsten Werte der neuen Variabeln bekannt sind, so werden ebensolche Werte für die gesuchten Unbekannten aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} m, \\ \operatorname{tg} \rho_0 &= \frac{s}{t}, \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{pt-qs}{ps+qt}, \\ R_0 &= \pm \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{ps+qt}, \\ f &= \pm m \frac{ps+pt}{p^2+q^2} \sqrt[4]{\frac{t^2}{s^2+t^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

berechnet.

Ist m bekannt, so bietet sich zur Bestimmung der restlichen vier neuen Variabeln auch der folgende Weg.

Man rechnet $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}$ für die Koeffizienten der Normalgleichungen (57) und vereinigt das nunmehr bekannte erste Glied, worin die Unbekannte m erscheint, mit dem Absolutgliede und erhält nun aus den fünf Normalgleichungen fünf Bestimmungsgleichungen für die vier Unbekannten p, q, s und t, so daß man zu deren Bestimmung vier neue Normalgleichungen aufstellen kann; sie lauten, nach Gleichung (22) gebildet:

$$\left.\begin{aligned}
&[b^2c^2\sigma^2]p+[-b^2cd\sigma^2]q+[-bcd\sigma]s+[-bc^2\sigma]t = \\
&\qquad = [-b^2c\sigma+abc\sigma m],\\
&[-b^2cd\sigma]p+[b^2d^2\sigma^2]q+[bd^2\sigma]s+[bcd\sigma]t = \\
&\qquad = [b^2d\sigma-abd\sigma m],\\
&[-bcd\sigma]p+[bd^2\sigma]q+[d^2]s+[cd]t = [bd-adm],\\
&[-bc^2\sigma]p+[bcd\sigma]q+[cd]s+[d^2]t = [bc-acm],
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{\nabla'_p}{\nabla'},\\
q &= \frac{\nabla'_q}{\nabla'},\\
s &= \frac{\nabla'_s}{\nabla'},\\
t &= \frac{\nabla'_t}{\nabla'}
\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

als wahrscheinlichste Werte für die Unbekannten folgen.

V.

Genauigkeitsuntersuchungen.

Hat man mittels einer überschüssigen Anzahl von Bestimmungsgleichungen m, p, q, s und t, beziehungsweise R_0, ρ_0, f, γ und ψ ermittelt, so handelt es sich darum, die mittleren

Fehler dieser Größen zu bestimmen, um eine Vorstellung von der Genauigkeit der Resultate zu gewinnen.

Die mittleren Fehler der neuen Variabeln werden sich bestimmen lassen, wenn vorerst der mittlere Fehler der Gewichtseinheit bekannt ist; man hat für diesen mittleren Fehler:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-6}},$$

wobei $[vv]$ die Summe der Fehlerquadrate der Bestimmungsgleichungen (56) der neuen Variabeln und n ihre Anzahl bedeuten.

Die mittleren Fehler der neuen Variabeln sind dann:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta m &= m_0\sqrt{Q_{11}} = \sqrt{\frac{[vv]\,Q_{11}}{n-6}},\\
\Delta p &= m_0\sqrt{Q_{22}} = \sqrt{\frac{[vv]\,Q_{22}}{n-6}},\\
\Delta q &= m_0\sqrt{Q_{33}} = \sqrt{\frac{[vv]\,Q_{33}}{n-6}},\\
\Delta s &= m_0\sqrt{Q_{44}} = \sqrt{\frac{[vv]\,Q_{44}}{n-6}},\\
\Delta t &= m_0\sqrt{Q_{55}} = \sqrt{\frac{[vv]\,Q_{55}}{n-6}}.
\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Die Gewichtskoeffizienten $Q_{11}, Q_{22}, \dots Q_{55}$ werden aus den Gewichtsgleichungen ermittelt, die unmittelbar aus den Normalgleichungen (57) aufgestellt werden können; für Q_{11} gilt das folgende System:

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]Q_{11} + [a(bc)\sigma]Q_{12} + [a(bd)\sigma]Q_{13} + [ad]Q_{14} + \\
&\qquad + [ac]Q_{15} = 1,\\
&[(bc)a\sigma]Q_{11} + [(bc)^2\sigma^2]Q_{12} + [(bc)(bd)\sigma^2]Q_{13} + \\
&\qquad + [(bc)d\sigma]Q_{14} + [(bc)c\sigma]Q_{15} = 0,\\
&[(bd)a\sigma]Q_{11} + [(bd)(bc)\sigma^2]Q_{12} + [(bd)^2\sigma^2]Q_{13} + \\
&\qquad + [(bd)d\sigma]Q_{14} + [(bd)c\sigma]Q_{15} = 0,
\end{aligned}\right| \quad (64)$$

$$\left.\begin{aligned}&[da]Q_{11}+[d(bc)\sigma]Q_{12}+[d(bd)\sigma]Q_{13}+[dd]Q_{14}+\\&\qquad\qquad+[dc]Q_{15}=0,\\&[ca]Q_{11}+[c(bc)\sigma]Q_{12}+[c(bd)\sigma]Q_{13}+[cd]Q_{14}+\\&\qquad\qquad+[cc]Q_{15}=0.\end{aligned}\right\}$$

Für die Gewichtskoeffizienten Q_{22}, Q_{33}, Q_{44} und Q_{55} können analoge Gleichungen, Gewichtsgleichungen, aus den Normalgleichungen unmittelbar gebildet werden; aus diesen Gleichungen werden berechnet:

$$\left.\begin{aligned}Q_{11}&=\frac{\Delta_{11}}{\Delta_1},\\Q_{22}&=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_2},\\Q_{33}&=\frac{\Delta_{33}}{\Delta_3},\\Q_{44}&=\frac{\Delta_{44}}{\Delta_4},\\Q_{55}&=\frac{\Delta_{55}}{\Delta_5},\end{aligned}\right\}\qquad(65)$$

worin $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_5$ und $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots \Delta_{55}$ die Determinanten der zugehörigen Gleichungssysteme der einzelnen Gewichtskoeffizienten bedeuten.

Die gesuchten Unbekannten $R_0, \rho_0, \ldots f, \gamma$ und ψ erscheinen allgemein in der Form:

$$u=f(m, p, q, s, t),\qquad(66)$$

wobei die Argumente der Funktion voneinander abhängig sind, was zur Folge hat, daß die mittleren Fehler der Funktion nicht auf Grund der einfachen Beziehung:

$$\Delta u^2=\left(\frac{\partial f}{\partial m}\Delta m\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial p}\Delta p\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\Delta q\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial s}\Delta s\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right)^2\qquad(67)$$

berechnet werden können, wie es in dem Falle, wenn die gesuchten Unbekannten als Funktionen unabhängiger Argumente auftreten würden, geschehen müßte.

Führen wir für die partiellen Differentialquotienten die Symbole ein:

$$\frac{\partial f}{\partial m}=f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial p}=f_2, \quad \frac{\partial f}{\partial q}=f_3, \quad \frac{\partial f}{\partial s}=f_4, \quad \frac{\partial f}{\partial t}=f_5,$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned}
&f_1 f_1 = f_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)^2, \quad f_1 f_2 = f_{12} = \frac{\partial f}{\partial m}\frac{\partial f}{\partial p}, \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots f_1 f_5 = f_{15} = \frac{\partial f}{\partial m}\frac{\partial f}{\partial t}, \\
&f_2 f_2 = f_{22} = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2, \quad f_2 f_1 = f_{21} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial m}, \ldots \\
&\vdots \qquad\qquad \ldots f_2 f_5 = f_{25} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial t}, \\
&f_5 f_5 = f_{55} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2, \quad f_5 f_1 = f_{51} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial m}, \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots f_5 f_4 = f_{54} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s},
\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

so wird der mittlere Fehler der Funktion in allgemeiner Form lauten:

$$\Delta u^2 = [ffQ],$$

wobei in der eckigen Klammer sämtliche Variationen zweiter Klasse der fünf Elemente

$$f_1, f_2, f_3, f_4 \text{ und } f_5$$

auftreten und die Gewichtskoeffizienten Q mit einem Doppelindex, bestehend aus den Indices der zugehörigen Elemente f, verbunden erscheinen.

Die entwickelte Form von Δu^2 für fünf Argumente ist:

$$\Delta u^2 = \left\{\begin{matrix} f_{11}Q_{11}+f_{12}Q_{12}+f_{13}Q_{13}+f_{14}Q_{14}+f_{15}Q_{15} \\ f_{21}Q_{21}+f_{22}Q_{22}+f_{23}Q_{23}+f_{24}Q_{24}+f_{25}Q_{25} \\ f_{31}Q_{31}+f_{32}Q_{32}+f_{33}Q_{33}+f_{34}Q_{34}+f_{35}Q_{35} \\ f_{41}Q_{41}+f_{42}Q_{42}+f_{43}Q_{43}+f_{44}Q_{44}+f_{45}Q_{45} \\ f_{51}Q_{51}+f_{52}Q_{52}+f_{53}Q_{53}+f_{54}Q_{54}+f_{55}Q_{55} \end{matrix}\right\}, \quad (69)$$

wobei die Gewichtskoeffizienten der obersten Horizontalreihe dieses Ausdruckes aus den Gewichtsgleichungen sich ergeben mit:

$$\left.\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1}, \\ Q_{12} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_1}, \\ Q_{13} &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta_1}, \\ Q_{14} &= \frac{\Delta_{14}}{\Delta_1}, \\ Q_{15} &= \frac{\Delta_{15}}{\Delta_1}; \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

die Gewichtskoeffizienten der folgenden Horizontalreihen werden aus den zugehörigen Gewichtsgleichungen in analoger Weise wie die vorstehenden Werte bestimmt.

Nachfolgend soll der mittlere Fehler von γ bestimmt werden.

Es ist:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{pt-qs}{ps-qt} = f(m, p, q, s, t), \quad (71)$$

somit die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial \operatorname{tg} \gamma}{\partial \gamma} = \frac{1}{\cos^2 \gamma}$$

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\partial f}{\partial m} = 0, \\
f_2 &= \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{q(s^2+t^2)}{(ps+qt)^2}, \\
f_3 &= \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{-p(s^2+t^2)}{(ps+qt)^2}, \\
f_4 &= \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{-t(p^2+q^2)}{(ps+qt)^2}, \\
f_5 &= \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{s(p^2+q^2)}{(ps+qt)^2},
\end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

aus welchen durch Multiplikation die Faktoren $f_{11}, f_{12}, \cdots f_{66}$ vor den Gewichtskoeffizienten in Gleichung (69) sich ergeben.

Der mittlere Fehler im Winkel γ wird:

$$\Delta\gamma^2 = \cos^4\gamma [ffQ] m_0^2, \qquad (73)$$

worin:

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\gamma &= \frac{(ps+qt)^2}{(p^2+q^2)(s^2+t^2)}, \\
m_0^2 &= \frac{[vv]}{n-6}
\end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

bedeuten.

Nach Einführung der Werte aus den Gleichungen (72) und (74) in den Ausdruck (73) wird für den mittleren Fehler im Winkel γ erhalten:

$$\Delta\gamma^2 = \frac{m_0^2}{(p^2+q^2)(s^2+t^2)} \left\{ \begin{array}{l} (s^2+t^2)^2(q^2 Q_{22} - 2pq Q_{23} + p^2 Q_{33}) \\ (p^2+q^2)^2(t^2 Q_{44} - 2ts Q_{45} + s^2 Q_{55}) \\ 2(p^2+q^2)(s^2+t^2)\{q(-t Q_{24} + s Q_{25}) - p(-t Q_{34} + s Q_{35})\} \end{array} \right\} \tag{75}$$

oder auch:

$$\Delta\gamma^2 = \frac{[vv]}{(n-6)(p^2+q^2)(s^2+t^2)} \left\{ \begin{array}{l} (s^2+t^2)^2(q^2 Q_{22} - 2pq Q_{23} + p^2 Q_{33}) \\ (p^2+q^2)^2(t^2 Q_{44} - 2ts Q_{45} + s^2 Q_{55}) \\ 2(p^2+q^2)(s^2+t^2)\{q(-t Q_{24} + s Q_{25}) - p(-t Q_{34} + s Q_{35})\} \end{array} \right\}. \tag{76}$$

In analoger Weise kann man spezielle Werte für die mittleren Fehler der vier anderen Unbekannten ableiten.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

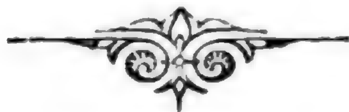
CXV. BAND. X. HEFT.

JAHRGANG 1906. — DEZEMBER.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 4 TAFELN UND 16 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1906.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,
K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 10. Heftes, Dezember 1906, des CXV. Bandes, Abteilung IIa, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Seite

Rožič J., Beitrag zur Theorie der Linde'schen Luftverflüssigungsmaschine. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 50 h — 50 pf] 1559

Grau A. und **Russ F.**, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (Mit 4 Tafeln und 8 Textfiguren.) [Preis: 2 K 80 h — 2 M 80 pf] 1571

Lampa A., Über Rotationen im elektrostatischen Drehfelde. Ein Beitrag zur Frage der dielektrischen Hysteresis. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 95 h — 95 pf] 1659

Doležal E., Das Problem der sechs Strahlen oder der sieben Punkte in der Photogrammetrie. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K — 1 M] 1691

Preis des ganzen Heftes: 4 K 60 h — 4 M 60 pf.

Mertens F., Über die Gestalt der Wurzeln einer Klasse auflösbarer Gleichungen, deren Grad eine ungerade Primzahl ist.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 3—11.

Wurzeln einer Klasse auflösbarer Gleichungen, deren Grad eine ungerade Primzahl ist; Gestalt derselben.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 3—11.

Gleichungen, auflösbare. Über die Gestalt der Wurzeln einer Klasse derselben, deren Grad eine ungerade Primzahl ist.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 3—11.

Stibitz K., Ein zum Normalenproblem der Ellipse gehöriger Satz und dessen konstruktive Verwendung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 13—20.

Normalenproblem der Ellipse, konstruktive Lösung desselben.
Stibitz K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 13—20.

Konstruktion der Normalen einer Ellipse aus einem beliebigen Punkte.
Stibitz K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 13—20.

Bunzl L., Über die Occlusion der Radiumemanation durch feste Körper.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 21—31.

Radiumemanation, Über die Occlusion der — durch feste Körper.
Bunzl L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 21—31.

Occlusion, Über die — der Radiumemanation durch feste Körper.
Bunzl L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 21—31.

Przibram K., Über die Kondensation von Dämpfen in ionisierter Luft.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt. Bd. 115 (1906), p. 33—38.

Kondensation von Dämpfen in ionisierter Luft.
Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 33—38.

Ionen, Kondensation von Dämpfen auf denselben.
Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 33—38.

Steindler O., Die Farbenempfindlichkeit des normalen und farbenblinden Auges.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 39—62.

Auge, farbenblindes und normales; die Farbenempfindlichkeit desselben.
Steindler O., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 39—62.

Dichromaten und **Trichromaten,** Farbenempfindlichkeit derselben.
Steindler O., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 39—62.

Meyer St. und **Schweidler E., v.,** Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (VI. Mitteilung.) Über Radium *F* (Polonium).
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt. Bd. 115 (1906), p. 63—88.

Schweidler E., v. und **Meyer St.,** Untersuchungen über radioaktive Substanzen, (VI. Mitteilung.) Über Radium *F* (Polonium).
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt. Bd. 115 (1906), p. 63—88.

Radioaktive Substanzen, Untersuchungen über —. (VI. Mitteilung.)
Meyer St. und Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 63—88.

Radium *F*.

Meyer St. und Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 63—88.

Polonium.

Meyer St. und Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 63—88.

Ehrenfest T. und P., Bemerkung zur Theorie der Entropiezunahme in der »Statistischen Mechanik« von W. Gibbs.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 89—98.

Entropiezunahme, Theorie der — in der »statistischen Mechanik« von Gibbs.

Ehrenfest T. und P., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 89—98.

Statistische Mechanik. Theorie der Entropiezunahme.

Ehrenfest T. und P., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 89—98.

Klingatsch A., Über photographische Azimutbestimmung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 101—124.

Azimut, photographische Bestimmung desselben.
Klingatsch A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 101—124.

Photographie zur Bestimmung des Azimutes.
Klingatsch A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 101—124.

Meitner L., Wärmeleitung in inhomogenen Körpern.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p 125—137.

Wärmeleitung in inhomogenen Körpern.
Meitner L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 125—137.

Inhomogene Körper, Wärmeleitung derselben.
Meitner L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 125—137.

Pick G., Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 139—159.

Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen.
Pick G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 139—159.

Transformationsgruppen, ebene. Natürliche Geometrie derselben.
Pick G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 139—159.

Knoll H., Über langsame Ionen in atmosphärischer Luft.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 161—172

Ionen, langsame, in der atmosphärischen Luft.
Knoll H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906). p. 161—172.

Lecher E., Zur Theorie der Thermoelektrizität.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 173—196.

Thermoelektrizität, Zur Theorie der —.
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 173—196.

Lerch F., v., Trennungen des Radiums *C* von Radium *B*.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 197—208.

Trennungen des Radiums *C* vom Radium *B*.
Lerch F., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 197—208.

Radium *C*, Trennung des — vom Radium *B*.
Lerch F., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 197—208.

Lang V., v., Versuche im elektrostatischen Drehfelde.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 211—222.

Drehfeld, elektrostatisches.
Lang V., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 211—222.

Rotation im elektrostatischen Drehfelde.
Lang V., v., Sitz. Ber der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 211—222.

Waßmuth A., Über die Bestimmung der thermischen Änderungen des Elastizitätsmoduls von Metallen aus den Temperaturänderungen bei de. gleichförmigen Biegung von Stäben.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 223—305.

Elastizitätsmodul von Metallen; die thermischen Änderungen desselben, ermittelt aus den Temperaturänderungen bei der gleichförmigen Biegung von Stäben.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 223—305.

Thermische Änderungen des Elastizitätsmoduls von Metallen, ermittelt aus den Temperaturänderungen bei der gleichförmigen Biegung von Stäben.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 223—305.

Gleichförmige Biegung von Metallstäben; die dabei auftretenden Temperaturänderungen dienen zur Ermittlung der thermischen Änderungen des Elastizitätsmoduls.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 223—305.

Leon A., Über das elastische Gleichgewicht einer Hohlkugel, beziehungsweise eines Hohlzylinders, wenn auf die äußere und innere Oberfläche ein gleichmäßiger Druck p_a, beziehungsweise p_i wirksam ist, unter Berücksichtigung von Gliedern in den Spannungen, die bezüglich der Deformationselemente von zweiter Ordnung sind.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 309—336.

Elastisches Gleichgewicht einer Hohlkugel, beziehungsweise eines Hohlzylinders, wenn auf die äußere und innere Oberfläche ein gleichmäßiger Druck p_a, beziehungsweise p_i, wirksam ist, unter Berücksichtigung von Gliedern in den Spannungen, die bezüglich der Deformationselemente von zweiter Ordnung sind.
Leon A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 309—336

Hohlkugel und Hohlzylinder, elastisches Gleichgewicht wenn auf die äußere und innere Oberfläche ein gleichmäßiger Druck p_a, beziehungsweise p_i wirksam ist, unter Berücksichtigung von Gliedern in den Spannungen, die bezüglich der Deformationselemente von zweiter Ordnung sind.
Leon A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 309—336.

Jaumann G., Elektromagnetische Vorgänge in bewegten Medien (II. Mitteilung).
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 337—390.

Elektromagnetische Vorgänge in bewegten Medien (II. Mitteilung).
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 337—390.

Deformationstheorie der elektromagnetischen Vorgänge (II. Mitteilung).
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 337—390.

Faraday'sches Induktionsgesetz, Willkürlichkeit der Form desselben.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 337—390

Benndorf H., Über die Störung des homogenen elektrischen Feldes durch ein leitendes dreiachsiges Ellipsoid.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 391—424.

Ellipsoid, geladenes, leitendes, dreiachsiges, im homogenen elektrischen Felde.
Benndorf H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 391—424.

Feldstörung eines ursprünglich homogenen elektrischen Feldes durch ein dreiachsiges leitendes Ellipsoid.
Benndorf H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 391—424.

Benndorf H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIII. Über gewisse Störungen des Erdfeldes mit Rücksicht auf die Praxis luftelektrischer Messungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 425—456.

Luftelektrizität, Beiträge zur Meßtechnik der —.
Benndorf H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 425—456.

Hess V. F., Über eine Modifikation der Pulfrich'schen Formel, betreffend das Brechungsvermögen von Mischungen zweier Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der beim Mischen eintretenden Volumänderung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 459—478.

Brechungsvermögen von Flüssigkeitsgemischen, Über eine Modifikation der Pulfrich'schen Formel, betreffend das —.
Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 459—478.

Mischungen zweier Flüssigkeiten. Über eine Modifikation der Pulfrich'schen Formel, betreffend das Brechungsvermögen derselben.
Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 459—478.

Volumänderung von Flüssigkeitsgemischen, Berücksichtigung des Einflusses derselben auf das Brechungsvermögen (eine Modifikation der Pulfrich'schen Formel).
Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 459—478.

Pfaundler L., Über eine neue Konstruktion einer Leydenerbatterie mit Umschaltungsvorrichtung von Parallelanordnung auf Kaskadenanordnung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 479—480.

Leydenerbatterie mit Umschaltungsvorrichtung von Parallelanordnung auf Kaskadenanordnung. Über eine neue Konstruktion einer —.
Pfaundler L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 479—480.

Mertens F., Über komplexe Einheiten.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 481—484.

Komplexe Einheiten, über dieselben.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 481—484.

Einheiten, komplexe, über dieselben.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 481—484.

Schell A., Die stereophotogrammetrische Ballonaufnahme für topographische Zwecke.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 485—522

Ballonaufnahme, stereophotogrammetrische, für topographische Zwecke.
Schell A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 485—522.

Exner F. und **Haschek E.,** Über Linienverschiebungen in den Spektren von Ca, Sn und Zn.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 523—545.

Haschek E. und **Exner F.,** Über Linienverschiebungen in den Spektren von Ca, Sn und Zn.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 523—545.

Linienverschiebungen in den Spektren von Ca, Sn und Zn.
Exner F. und Haschek E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 523—545.

Daublebsky v. Sterneck R., Über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes und die scheinbare Größe der Gestirne.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 547—588.

Himmelsgewölbe, Über die scheinbare Form desselben und die scheinbare Größe der Gestirne.
Daublebsky v. Sterneck R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 547—588.

Gestirne, Über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes und die scheinbare Größe der —.
Daublebsky v. Sterneck R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 547—588.

Größe, scheinbare, der Gestirne; über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes und die —.
Daublebsky v. Sterneck R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 547—588.

Landau E., Über den Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 589—632.

Zahlentheorie, analytische, Über den Zusammenhang einiger neuerer Sätze derselben.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 589—632.

Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 589—632.

Mach E., Über den Einfluß räumlich und zeitlich variierender Lichtreize auf die Gesichtswahrnehmung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 633—648.

Lichtreize, räumlich und zeitlich variierende, Einfluß derselben.
Mach E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 633—648.

Prey A., Konvergenzuntersuchungen zum Gesetze der Amplitudenabnahme bei Pendelbeobachtungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 649—672.

Konvergenzuntersuchungen zum Gesetze der Amplitudenabnahme bei Pendelbeobachtungen.
Prey A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 649—672.

Amplitudenabnahme, Konvergenzuntersuchungen zum Gesetze derselben bei Pendelbeobachtungen.

Prey A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 649—672.

Pendelbeobachtungen, Konvergenzuntersuchungen zum Gesetze der Amplitudenabnahme.

Prey A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 649—672.

Kohlrausch K. W. F., Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 673—682.

Schwankungen der radioaktiven Umwandlung.

Kohlrausch K. W. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 673—682.

Radioaktive Umwandlung und ihre Schwankungen.

Kohlrausch K. W. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 673—682.

Holetschek J., Über die mutmaßliche Zeit der Wiederauffindung des Halley-schen Kometen bei seiner nächsten Erscheinung.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906). p. 683—696.

Kometen, Über die mutmaßliche Zeit der Wiederauffindung des Halley'schen Kometen bei seiner nächsten Erscheinung.

Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 683—696.

Halley'scher Komet, Über die mutmaßliche Zeit der Wiederauffindung desselben bei seiner nächsten Erscheinung.

Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 683—696

Meyer St. und **Schweidler E., v.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (VII. Mitteilung.) Über die aktiven Bestandteile des Radiobleis.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 697—711.

Schweidler E., v. und **Meyer St.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (VII. Mitteilung.) Über die aktiven Bestandteile des Radiobleis.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 697—711.

Radioblei, Über die aktiven Bestandteile.
Meyer St. und Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 697—711.

Ra E, Trennung in Ra E_1 und Ra E_2.
Meyer St. und Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 697—711.

Radioaktive Substanzen, Untersuchungen über —. (VII. Mitteilung.) Über die aktiven Bestandteile des Radiobleis.
Meyer St. und Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 697—711.

Meyer St. und **Schweidler E., v.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (IX. Mitteilung.) Einige Versuche über die Absorption der α-Strahlung in Aluminium.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 713—738.

Schweidler E., v. und **Meyer St.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (IX. Mitteilung.) Einige Versuche über die Absorption der α-Strahlung in Aluminium.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt. Bd. 115 (1906), p. 713—738.

α-Strahlung, Absorption durch Metalle.
Meyer St. und Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 713—738.

Radioaktive Substanzen, Untersuchungen über die Absorption der α-Strahlung. (IX. Mitteilung.)
Meyer St. und Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 713—738.

Schrutka v. Rechtenstamm L., Über die Auflösung linearer Quaternionengleichungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 739—775.

Quaternionengleichungen, lineare, Über die Auflösung derselben.
Schrutka v. Rechtenstamm L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 739—775.

Hauser F., Nr. VIII der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Ein Apparat zur Kopierung phonographischer Schrift von Edison-Walzen auf die Platten des Archivphonographen.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 779—784.

Kopierung phonographischer Schrift von Edison-Walzen auf die Platten des Archivphonographen. Apparat.

Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 779—784.

Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. VIII. Bericht. Ein Apparat zur Kopierung phonographischer Schrift von Edison-Walzen auf die Platten des Archivphonographen.

Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 779—784.

Hepperger J., v., Bestimmung der Masse des Biela'schen Kometen.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Bestimmung der Masse des Biela'schen Kometen.

Hepperger J., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Masse des Biela'schen Kometen, Bestimmung derselben.

Hepperger J., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Biela'scher Komet, Bestimmung der Masse.

Hepperger J., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Komet Biela, Bestimmung seiner Masse.

Hepperger J., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906). p. 785—840.

Hauser F., Nr. VIII der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Ein Apparat zur Kopierung phonographischer Schrift von Edison-Walzen auf die Platten des Archivphonographen.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 779—784.

Kopierung phonographischer Schrift von Edison-Walzen auf die Platten des Archivphonographen. Apparat.

Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 779—784.

Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. VIII. Bericht. Ein Apparat zur Kopierung phonographischer Schrift von Edison-Walzen auf die Platten des Archivphonographen.

Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 779—784.

Hepperger J., v., Bestimmung der Masse des Biela'schen Kometen.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Bestimmung der Masse des Biela'schen Kometen.

Hepperger J., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Masse des Biela'schen Kometen, Bestimmung derselben.

Hepperger J., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Biela'scher Komet, Bestimmung der Masse.

Hepperger J., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Komet Biela, Bestimmung seiner Masse.

Hepperger J., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 785—840.

Abt. IIa, Juni.

Tietze H., Zur Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 841—846.

Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten.
Tietze H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 841—846.

Meißner F., Über eine Fehlerquelle bei thermoelektrischen Messungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 847—857.

Fehlerquelle, Über eine — bei thermoelektrischen Messungen.
Meißner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 847—857.

Thermoelektrische Messungen, Über eine Fehlerquelle bei —.
Meißner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 847—857.

Temperaturmessung, Über eine Fehlerquelle bei thermoelektrischen Messungen.
Meißner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 847—857.

Meitner L., Über einige Folgerungen, die sich aus den Fresnel'schen Reflexionsformeln ergeben.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 859—869.

Fresnel'sche Reflexionsformeln, Über einige Folgerungen, die sich aus denselben ergeben.
Meitner L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 859—869.

Lampa A., Über einen Reibungsversuch.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 871—880.

Reibungsversuch (Platte auf drei beweglichen Unterstützungspunkten).
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 871—880.

Tietze H., Zur Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 841—846.

Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten.
Tietze H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 841—846.

Meißner F., Über eine Fehlerquelle bei thermoelektrischen Messungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 847—857.

Fehlerquelle, Über eine — bei thermoelektrischen Messungen.
Meißner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 847—857.

Thermoelektrische Messungen, Über eine Fehlerquelle bei —.
Meißner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 847—857.

Temperaturmessung, Über eine Fehlerquelle bei thermoelektrischen Messungen.
Meißner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 847—857.

Meitner L., Über einige Folgerungen, die sich aus den Fresnel'schen Reflexionsformeln ergeben.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 859—869.

Fresnel'sche Reflexionsformeln, Über einige Folgerungen, die sich aus denselben ergeben.
Meitner L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 859—869.

Lampa A., Über einen Reibungsversuch.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 871—880.

Reibungsversuch (Platte auf drei beweglichen Unterstützungspunkten).
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 871—880.

Börnstein R., Die halbtägigen Schwankungen der Temperatur und des Luftdruckes.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Täglicher Gang von Temperatur und Luftdruck.
Börnstein R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Temperaturschwankungen, Halbtägige.
Börnstein R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Luftdruckschwankung, Halbtägige.
Börnstein R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Halbtägige Schwankung von Temperatur und Luftdruck.
Börnstein R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Schmid Th., Über kubische Aufgaben und die konstruktive Behandlung des Achsenkomplexes.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 905—922.

Kubische Aufgaben und die konstruktive Behandlung des Achsenkomplexes.
Schmid Th., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p 905—922.

Achsenkomplex, Konstruktive Behandlung desselben und kubische Aufgaben.
Schmid Th., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p 905—922

Jäger G., Über die Gestalt eines schwerelosen flüssigen Leiters der Elektrizität im homogenen elektrostatischen Felde.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 923—940.

Börnstein R., Die halbtägigen Schwankungen der Temperatur und des Luftdruckes.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Täglicher Gang von Temperatur und Luftdruck.
Börnstein R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Temperaturschwankungen, Halbtägige.
Börnstein R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Luftdruckschwankung, Halbtägige.
Börnstein R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Halbtägige Schwankung von Temperatur und Luftdruck.
Börnstein R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 881—904.

Schmid Th., Über kubische Aufgaben und die konstruktive Behandlung des Achsenkomplexes.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 905—922.

Kubische Aufgaben und die konstruktive Behandlung des Achsenkomplexes.
Schmid Th., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 905—922.

Achsenkomplex, Konstruktive Behandlung desselben und kubische Aufgaben.
Schmid Th., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 905—922.

Jäger G., Über die Gestalt eines schwerelosen flüssigen Leiters der Elektrizität im homogenen elektrostatischen Felde.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 923—940.

Deformation eines flüssigen Leiters im elektrischen Feld.
Jäger G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 923—940.

Benndorf H., Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinneren (II. Mitteilung).
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 941—982.

Erdbebenwellen, Über die Art der Fortpflanzung derselben im Erdinneren (II. Mitteilung).
Benndorf H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 941—982.

Waßmuth A., Über die Leitfähigkeit gewisser wässeriger Lösungen von Kochsalz und Natriumcarbonat.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 985—1004.

Leitfähigkeit gewisser wässeriger Lösungen von Kochsalz und Natriumcarbonat.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 985—1004.

Wässerige Lösungen von Kochsalz und Natriumcarbonat in Bezug auf ihre Leitfähigkeit.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 985—1004.

Hasenöhrl F., Zur Ableitung des mathematischen Ausdruckes des zweiten Hauptsatzes.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1005—1008.

Zweiter Hauptsatz, zur Ableitung des mathematischen Ausdruckes desselben.
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1005—1008.

Klingatsch A., Die Fehlerkurven der photographischen Punktbestimmung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1009—1030.

Fehlerkurven der photographischen Punktbestimmung.
Klingatsch A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1009—1030.

Punktbestimmung, photographische, Fehlerkurven derselben.
Klingatsch A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1009—1030.

Photogrammetrie, Fehlerkurven.
Klingatsch A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1009—1030.

Geitler J., R. v., Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertz'sche Wellen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Absorption und Strahlungsvermögen der Metalle für Hertz'sche Wellen.
Geitler J., R. v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Strahlungsvermögen und Absorption der Metalle für Hertz'sche Wellen.
Geitler J., R. v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Metalle, Absorption und Strahlungsvermögen der — für Hertz'sche Wellen.
Geitler J., R. v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Hertz'sche Wellen, Absorption und Strahlungsvermögen der Metalle für dieselben.
Geitler J., R. v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Conrad V., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIV. Messungen des Ionengehaltes der Luft auf dem Säntis im Sommer 1905.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1055—1079.

Atmosphärische Elektrizität, Beiträge zur Kenntnis derselben. XXIV. Messungen des Ionengehaltes der Luft auf dem Säntis im Sommer 1905.
Conrad V., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1055—1079.

Ionengehalt der Luft, Messungen desselben auf dem Säntis im Sommer 1905. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIV.
Conrad V., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1055—1079.

Geitler J., R. v., Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertz'sche Wellen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Absorption und Strahlungsvermögen der Metalle für Hertz'sche Wellen.
Geitler J., R. v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Strahlungsvermögen und Absorption der Metalle für Hertz'sche Wellen.
Geitler J., R. v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Metalle, Absorption und Strahlungsvermögen der — für Hertz'sche Wellen.
Geitler J., R. v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Hertz'sche Wellen, Absorption und Strahlungsvermögen der Metalle für dieselben.
Geitler J., R. v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1031—1054.

Conrad V., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIV. Messungen des Ionengehaltes der Luft auf dem Säntis im Sommer 1905.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1055—1079.

Atmosphärische Elektrizität, Beiträge zur Kenntnis derselben. XXIV. Messungen des Ionengehaltes der Luft auf dem Säntis im Sommer 1905.
Conrad V., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1055—1079.

Ionengehalt der Luft, Messungen desselben auf dem Säntis im Sommer 1905. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIV.
Conrad V., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1055—1079.

Schrott P., v., Das elektrische Verhalten der allotropen Selenmodifikationen unter dem Einflusse von Wärme und Licht.
Sitz Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1081—1170.

Elektrisches Verhalten des Selens.
Schrott P., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1081—1170.

Selenmodifikationen, Das elektrische Verhalten derselben.
Schrott P., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1081—1170.

Licht, Einfluß desselben auf das elektrische Verhalten des Selens.
Schrott P., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1081—1170.

Wärme, Einfluß derselben auf das elektrische Verhalten des Selens.
Schrott P., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1081—1170.

Photoelektrisches Verhalten des Selens.
Schrott P., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1081—1170.

Exner F. M., Grundzüge einer Theorie der synoptischen Luftdruckveränderungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1171—1246.

Synoptische Luftdruckveränderungen, Grundzüge einer Theorie derselben.
Exner F. M., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1171—1246.

Wächter F., Über das Verhalten der radioaktiven Uran- und Thoriumverbindungen im elektrischen Lichtbogen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1247—1260.

Radioaktive Uran- und Thoriumverbindungen. Verhalten derselben im elektrischen Lichtbogen.

Wächter F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1247--1260.

Uran-*X* und **Thorium-*X*,** Verhalten desselben im elektrischen Lichtbogen.

Wächter F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1247—1260.

Schweidler E. v., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXV. Luftelektrische Beobachtungen am Ossiachersee im Sommer 1906.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1263—1284.

Atmosphärische Elektrizität, Beiträge zur Kenntnis derselben. XXV. Luftelektrische Beobachtungen am Ossiachersee im Sommer 1906.
Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1263—1284.

Luftelektrische Beobachtungen am Ossiachersee im Sommer 1906. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXV.
Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1263—1284.

Weiss E., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVI. Beobachtungen über Niederschlagselektrizität.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1285—1320.

Atmosphärische Elektrizität. Beiträge zur Kenntnis derselben. XXVI. Beobachtungen über Niederschlagselektrizität.
Weiss E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1285—1320.

Elektrizität der Niederschläge. Beobachtungen über dieselbe. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVI.
Weiss E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1285—1320.

Niederschlagselektrizität. Beobachtungen über dieselbe. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVI.
Weiss E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1285—1320.

Kohlrausch K. W. F., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVII. Über Radiuminduktion in der atmosphärischen Luft und eine Methode zur absoluten Messung derselben.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1321—1326.

Schweidler E. v., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXV. Luftelektrische Beobachtungen am Ossiachersee im Sommer 1906.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1263—1284.

Atmosphärische Elektrizität. Beiträge zur Kenntnis derselben. XXV. Luftelektrische Beobachtungen am Ossiachersee im Sommer 1906.
Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1263—1284.

Luftelektrische Beobachtungen am Ossiachersee im Sommer 1906. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXV.
Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1263—1284.

Weiss E., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVI. Beobachtungen über Niederschlagselektrizität.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1285—1320.

Atmosphärische Elektrizität. Beiträge zur Kenntnis derselben. XXVI. Beobachtungen über Niederschlagselektrizität.
Weiss E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1285—1320.

Elektrizität der Niederschläge. Beobachtungen über dieselbe. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVI.
Weiss E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1285—1320.

Niederschlagselektrizität. Beobachtungen über dieselbe. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVI.
Weiss E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1285—1320.

Kohlrausch K. W. F., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVII. Über Radiuminduktion in der atmosphärischen Luft und eine Methode zur absoluten Messung derselben.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 13[illegible]

[illegible] IIa, Oktober

Radiuminduktion in der atmosphärischen Luft und eine Methode zur absoluten Messung derselben.

Kohlrausch K. W. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1321—1326.

Absolute Messung der Radiuminduktion in der atmosphärischen Luft.

Kohlrausch K. W. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1321—1326.

Atmosphärische Radiuminduktion in absoluten Zahlen gemessen.

Kohlrausch K. W. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1321—1326.

Lecher E., Elementare Darstellung zweier elektrischer Fundamentalsätze vom Standpunkte der Elektronentheorie.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1327—1334.

Elektronen. Elementare Darstellung zweier elektrischer Fundamentalsätze vom Standpunkte der Elektronentheorie.

Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1327—1334.

Induktion, elektrodynamische, vom Standpunkte der Elektronentheorie.

Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1327—1334.

Kielhauser E., Notiz über das Leuchten von Aluminiumelektroden in verschiedenen Elektrolyten.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1335—1337.

Aluminiumelektroden, Lichterscheinungen an denselben in sauerstoffreichen Elektrolyten.

Kielhauser E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1335—1337.

Wehnelteffekt, herabgesetzter, an Aluminiumelektroden.
Kielhauser E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1335—1337.

Mertens F., Über die Darstellung der Legendre'schen Symbole der biquadratischen, kubischen und bikubischen Reste durch Thetareihen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1339—1360.

Legendre'sche Symbole, Über die Darstellung der — — der biquadratischen, kubischen und bikubischen Reste durch Thetareihen.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1339—1360.

de Ball L., Die Radau'sche Theorie der Refraktion.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1363—1422.

Refraktion, Die Radau'sche Theorie derselben.
de Ball L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1363—1422.

Leon A., Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1423—1434.

Drehungskörper, Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.
Leon A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1423—1434.

Elastisches Gleichgewicht, Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.
Leon A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1423—1434.

Mache H., Ein einfacher Beweis für das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1435—1439.

Maxwell's Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung, ein einfacher Beweis dafür.
Mache H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1435—1439.

Geschwindigkeitsverteilungsgesetz von Maxwell, ein einfacher Beweis dafür.
Mache H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1435—1439.

de Ball L., Die Radau'sche Theorie der Refraktion.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1363—1422.

Refraktion. Die Radau'sche Theorie derselben.

de Ball L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1363—1422.

Leon A., Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1423—1434.

Drehungskörper. Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.

Leon A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1423—1434.

Elastisches Gleichgewicht. Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.

Leon A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1423—1434.

Mache H., Ein einfacher Beweis für das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1435—1439.

Maxwell's Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung, ein einfacher Beweis dafür.

Mache H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1435—1439.

Geschwindigkeitsverteilungsgesetz von Maxwell, ein einfacher Beweis dafür.

Mache H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1435—1439.

Leon A., Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1441 – 1450.

Drehungskörper, Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.
Leon A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1441—1450.

Elastisches Gleichgewicht, Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind.
Leon A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1441—1450.

Holetschek J., Über die scheinbare Verlängerung eines Kometenschweifes beim Durchgange der Erde durch die Ebene der Kometenbahn.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1451—1474.

Kometenschweife, Über die scheinbare Verlängerung eines Kometenschweifes beim Durchgange der Erde durch die Ebene der Kometenbahn.
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1451—1474.

Pick G., Über nirgends singuläre lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1475—1483.

Differentialgleichungen, nirgends singuläre lineare, zweiter Ordnung.
Pick G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1475—1483.

Aigner F., Einfluß des Lichtes auf elektrostatisch geladene Konduktoren.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1485—1504.

Konduktoren, geladene und Lichteinfluß.

Aigner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd 115 (1906), p. 1485—1504.

Licht, sein Einfluß auf geladene Konduktoren.

Aigner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1485—1504.

Kontaktpotential und Licht.

Aigner F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1485—1504.

Lecher E., Bestimmung des Peltiereffektes Konstantan-Eisen bei 20° C.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1505—1520.

Konstantan-Eisen, Bestimmung des Peltiereffektes — bei 20° C.

Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1505—1520.

Peltiereffekt, Bestimmung desselben bei Konstantan-Eisen bei 20° C.

Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1505—1520

Kalorimeter, thermoelektrisches, Bestimmung des Peltiereffektes Konstantan-Eisen bei 20° C.

Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1505—1520.

Thermoelektrisches Kalorimeter, Bestimmung des Peltiereffektes Konstantan-Eisen bei 20° C.

Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1505—1520

Hasslinger v., **R.**, Über das Wesen metallischer und elektrolytischer Leitung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1521—1555.

Elektrizitätsleitung, Über das Wesen metallischer und elektrolytischer — und deren Übergänge.
Hasslinger R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1521—1555.

Leitung, Über das Wesen metallischer und elektrolytischer — und deren Übergänge.
Hasslinger R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1521—1555.

Hasslinger v., R., Über das Wesen metallischer und elektrolytischer Leitung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1521—1555.

Elektrizitätsleitung, Über das Wesen metallischer und elektrolytischer — und deren Übergänge.
Hasslinger R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1521—1555.

Leitung, Über das Wesen metallischer und elektrolytischer — und deren Übergänge.
Hasslinger R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1521—1555.

Rožič J., Beitrag zur Theorie der Linde'schen Luftverflüssigungsmaschine.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1559—1570.

Linde'sche Luftverflüssigungsmaschine, Beitrag zur Theorie.
Rožič J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1559—1570.

Luftverflüssigungsmaschine, Linde'sche, Beitrag zur Theorie.
Rožič J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1559—1570.

Grau A. und Russ F., Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1571—1657.

Russ F. und Grau A., Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1571—1657.

Luftverbrennung, Experimentaluntersuchungen über die — im elektrischen Flammenbogen.
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1571—1657.

Flammenbogen, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen —.
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1571—1657.

Lampa A., Über Rotationen im elektrostatischen Drehfelde. Ein Beitrag zur Frage der dielektrischen Hysteresis.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1659—1690.

Rotationen im elektrostatischen Drehfelde. Ein Beitrag zur Frage der dielektrischen Hysteresis.
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1659—1690.

Drehfeld, Rotationen im elektrostatischen Drehfelde. Ein Beitrag zur Frage der dielektrischen Hysteresis.
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1659—1690.

Dielektrika, Hysteresis in Dielektricis.
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1659—1690.

Hysteresis, dielektrische.
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1659—1690.

Doležal E., Das Problem der sechs Strahlen oder der sieben Punkte in der Photogrammetrie.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1691—1719.

Das Problem der sechs Strahlen oder der sieben Punkte in der Photogrammetrie.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1691—1719.

Das Problem der sieben Punkte oder der sechs Strahlen in der Photogrammetrie.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1691—1719.

Photogrammetrie, Das Problem der sechs Strahlen oder der sieben Punkte in derselben.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 115 (1906), p. 1691—1719.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abteilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 07368 2315

